МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НИТУ МИСиС»

Кафедра Инженерной Кибернетики

# Фрактальная геометрия
# Задание на пересдачу
## Вариант 3

Студент группы БПМ-16-2 ______________________ Кирсанов Г.В.

Москва 2020

# Содержание

## Задача 1

Запишите число $\frac{3}{10}$ в троичной системе счисления с точностью до пятого знака после запятой. Определите, лежит ли выбранное число в Канторовом множестве.

Чтобы перевести дробь $r = \frac{m}{n}$ в систему счисления с основанием $b$, необходимо:

1. умножить $r$ на $b$;
2. записать целая часть от делениея $b \cdot m$ на $n$ как очередную цифру в системе счисления $b$;
3. (a) если дробная часть, то есть $b \cdot m \mod n$, равна 0, то перевод закончен;

   (b) если дробная часть не равна 0, то алгоритм можно вернуться к шагу 1, положив $r = \frac{b \cdot m \mod n}{n}$ до тех пор, пока точность перевода не будет удовлетворять условиям задачи либо не появится периодичность при записи целые частей.

Решение:

$$\frac{3}{10} \cdot 3 = \frac{9}{10} = \color{red}{0}\frac{9}{10} \qquad 0.\color{red}{0}$$

$$\frac{9}{10} \cdot 3 = \frac{27}{10} = \color{red}{2}\frac{7}{10} \qquad 0.0\color{red}{2}$$

$$\frac{7}{10} \cdot 3 = \frac{21}{10} = \color{red}{2}\frac{1}{10} \qquad 0.02\color{red}{2}$$

$$\frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{3}{10} = \color{red}{0}\frac{3}{10} \qquad 0.022\color{red}{0}$$

На 4 шаге $r$ стала равна $\frac{3}{10}$ — дроби, с которой начался алгоритм. Значит, на 5 шаге цифра троичной системы совпадёт с цифрой на первом. Тогда дробь $\frac{3}{10}$ в троичной системе счисления имеет вид $0.(0220)_3$. Если её записать до пятого знака после запятой, то имеем $0.02200_3$.

Цифры $0, 1, 2$ уточняют адрес дроби в Канторовом множестве. 0 на $i$-ой позиции означает, что число попало в первую часть на $i$-ом шаге, 1 — во вторую часть, которая не принадлежит множеству Кантора, и 2 — в третью часть. Так как в троичной записи числа отсутствуют единицы, то оно принадлежит множеству Кантора.

**Ответ**: $0.02200_3$, принадлежит множеству Кантора.

## Задача 2

Даны две метрики на плоскости. Докажите или опровергните их эквивалентность.

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) = 5|x_1 - y_1| + 5|x_2 - y_2| = 5\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|$$

$$\rho^*(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Метрики $\rho$ и $\rho^*$ являются эквивалентными, если

$$\exists(\alpha > 0, \beta > 0) : \forall \vec{x}, \vec{y} \in X \hookrightarrow \alpha\rho(\vec{x},\vec{y}) \leq \rho^*(\vec{x},\vec{y}) \leq \beta\rho(\vec{x},\vec{y})$$

$$\alpha \cdot 5\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \beta \cdot 5\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|$$

Возведём все части неравенства в квадрат.

$$\alpha^2 \cdot 25\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|\right)^2 \leq \left|\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|^2\right| \leq \beta^2 \cdot 25\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|\right)^2$$

Снимем модуль с центральной части, так как под знаком суммирования стоят квадраты чисел, которые в $\mathbb{R}^2$ не отрицательны.

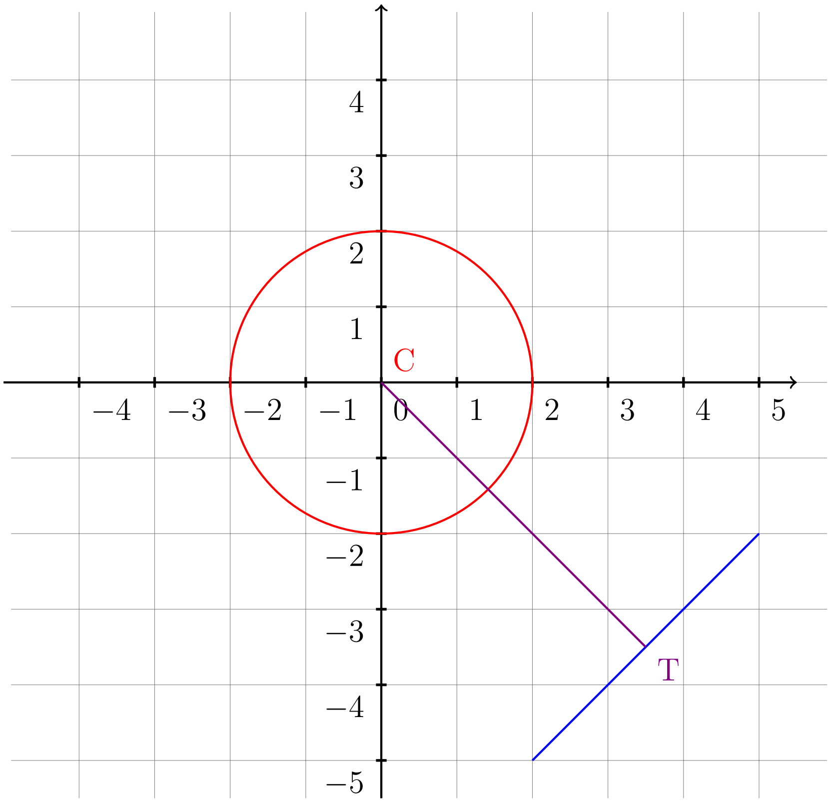
$$25\alpha^2\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|^2 \leq 25\beta^2\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|\right)^2$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|\right)^2$ на $2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)$. Выходит, что неравенство не выполнимо, так как $\alpha$ не может быть не положительным и не может нивелировать слагаемое.

**Ответ**: метрики не эквивалентны.

## Задача 3

Найдите расстояния между точками A и B в пространстве $K(\mathbb{R}^2)$.
A — отрезок $[(2,-5),(5,-2)]$, B — окружность $\{\vec{x}|x_1^2+x_2^2=4\}$.




Расстоянием между A и B будет являться длина отрезка, начало которого находится в точке $T=(3.5,-3.5)$, а конец в точке пересечения перпендикуляра(фиолетовая линия) из центра окружности(C) к отрезку A с окружностью B.

Получим расстояние двумя способами:

### Первый способ

Найдём длину перпендикуляра:

$$||TC|| = \sqrt{(3.5-0)^2+(-3.5-0)^2} = \sqrt{3.5^2+3.5^2} = 3.5\sqrt{2}$$

Вычтем из него радиус окружности и получим расстояние до отрезка A $3.5\sqrt{2}-2 \approx 2.94975$.

### Второй способ

Найдём точку касательной, параллельной отрезку A, к нижней половине окружности. То есть коэффициент наклона касательной совпадает с коэффициентом наклона отрезка A, равным единице.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(4)$$
$$2x_1 + 2x_2 x_2' = 0$$
$$x_2' = \frac{-2x_1}{2x_2}$$
$$x_2' = \frac{-x_1}{x_2}$$
$$x_2' = \frac{-x_1}{-\sqrt{4 - x_1^2}}$$
$$1 = \frac{x_1}{\sqrt{4 - x_1^2}}$$
$$\sqrt{4 - x_1^2} = x_1$$

$$4 - x_1^2 = x_1^2 \Rightarrow 4 = 2x_1^2 \Rightarrow 2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{2}$$

Так как пересечение происходит справа относительно оси ординат, то нас интересует $x_1 = \sqrt{2}$. Найдём вторую координату искомой точки $x_2 = -\sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = -\sqrt{2}$. Итак, точка имеем координаты $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

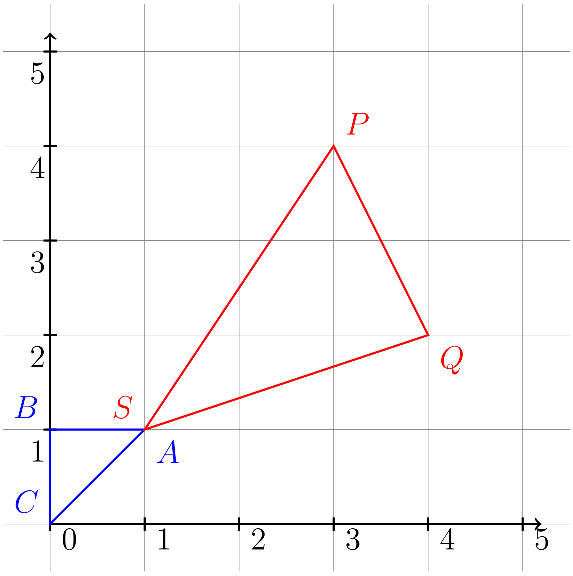
Соединим найденную точку с серединой А и найдём длину полученного отрезка.

$$\sqrt{(3.5 - \sqrt{2})^2 + (3.5 - \sqrt{2})^2} = (3.5 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 3.5\sqrt{2} - 2$$

**Ответ**: $3.5\sqrt{2} - 2 \approx 2.94975$

## Задача 4

Найдите параметры аффинного преобразования плоскости, переводящего треугольник $ABC$ в треугольник $PQS$. Вершины переходят соответственно порядку в записи.
A(1, 1), B(0, 1), C(0, 0)
P(3, 4), Q(4, 2), S(1, 1)




Общий вид преобразования таков:

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix}$$

Положим:

$$F(A) = S \qquad F(B) = Q \qquad F(C) = P$$

Откуда получаем шесть уравнений:

$$\begin{cases} aA_1 + bA_2 + t = S_1 \\ aB_1 + bB_2 + t = Q_1 \\ aC_1 + bC_2 + t = P_1 \\ cA_1 + dA_2 + k = S_2 \\ cB_1 + dB_2 + k = Q_2 \\ dC_1 + dC_2 + k = P_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot a + 1 \cdot b + t = 1 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + t = 4 \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + t = 3 \\ 1 \cdot c + 1 \cdot d + k = 1 \\ 0 \cdot c + 1 \cdot d + k = 2 \\ 0 \cdot d + 0 \cdot d + k = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + t = 1 \\ b + t = 4 \\ t = 3 \\ c + d + k = 1 \\ d + k = 2 \\ k = 4 \end{cases}$$

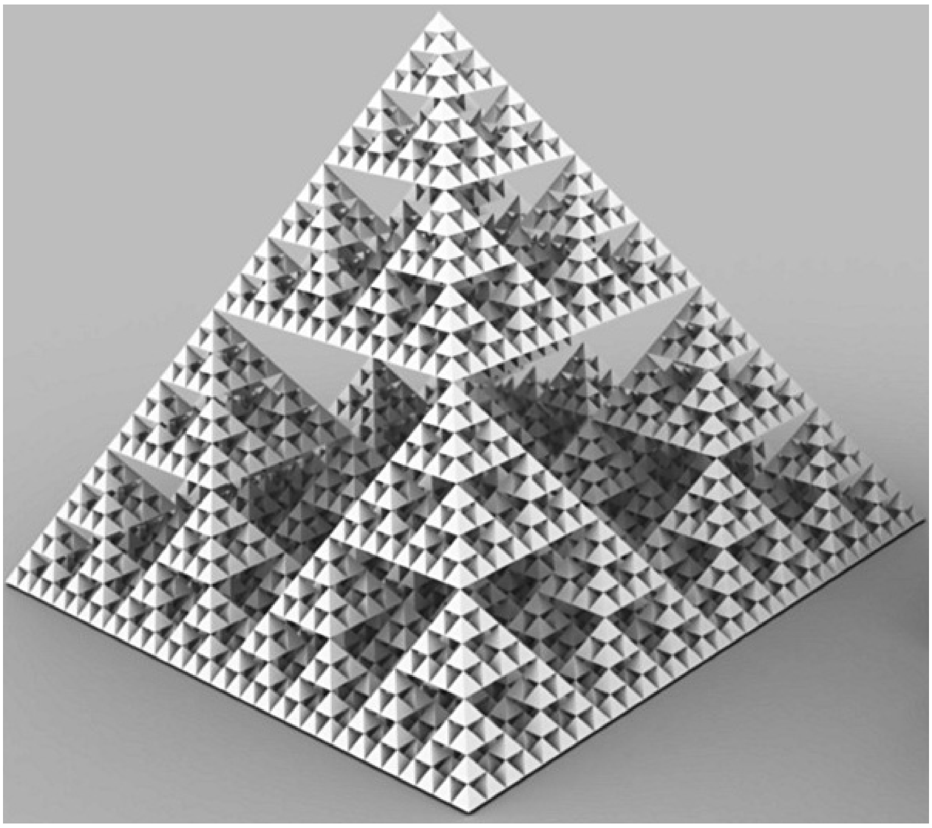
Итоговые значения параметров аффинного преобразования $t = 3, k = 4,$ $b = 1, d = -2, a = -3, c = -1.$

**Ответ**:

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Задача 5

Выпишите систему итерированных функций, для которой аттрактором будет заданная картинка.



$$\{\mathbb{R}^3,$$

$$f_1(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \qquad f_4(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_5(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

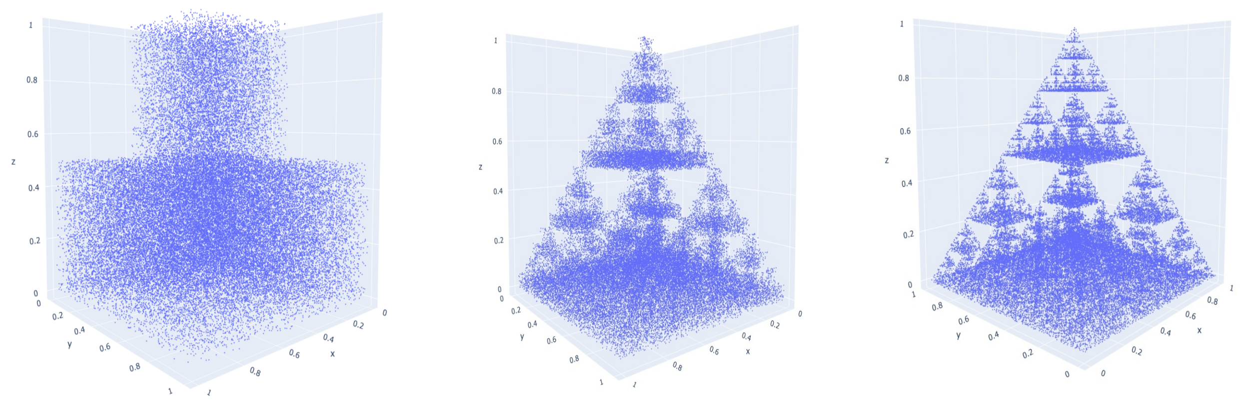
где $A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

```python
import numpy as np
from random import randint
from plotly import graph_objects as go

f1 = lambda x: 0.5 * x
f2 = lambda x: 0.5 * x + np.array([[0.5], [0], [0]])
f3 = lambda x: 0.5 * x + np.array([[0], [0.5], [0]])
f4 = lambda x: 0.5 * x + np.array([[0.25], [0.25], [0.5]])
f5 = lambda x: 0.5 * x + np.array([[0.5], [0.5], [0]])

first_range = 50000  # Количество точек для отрисовки
second_range = 10  # Сколько раз применяется преобразование точки
points = np.zeros((first_range, 3))  # Массив для 3d точек
fs = [f1, f2, f3, f4, f5]  # Массив функций для применения к точкам
for i in range(first_range):
    # Создаём вектор-столбец с 3-мя координатами из нормального распределения [0, 1)
    point = np.random.rand(3, 1)
    for j in range(second_range):
        # Применяем случайную функцию к точке
        point = fs[randint(0, len(fs) - 1)](point)
    points[i] = point[:, 0]

# Отрисовка 3d диаграммы рассеяния
fig = go.Figure(data=[go.Scatter3d(x=points[:, 0],
                                   y=points[:, 1],
                                   z=points[:, 2],
                                   mode='markers',
                                   marker={'size': 1})])
fig.show()
```



(а) Функции применялись 1 раз к каждой точке

(б) Функции применялись 4 раза к каждой точке

(в) Функции применялись 10 раз к каждой точке

Рис. 1: Различное количество применений функций к точкам

# Задача 6

Найдите на Канторовом множестве координаты точки с адресом: 2(212)
(В скобках указаны периодические части последовательности.)

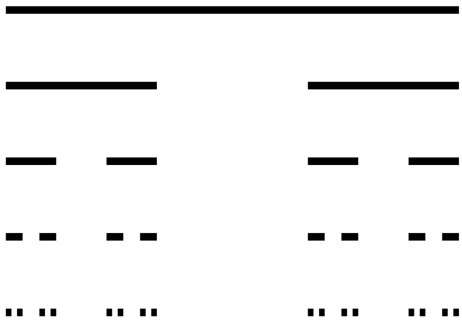


Рис. 2: Множество Кантора

$$\left\{\mathbb{R},\ \ f_1(x) = \frac{1}{3}x,\ \ f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right\}$$

Найдём координаты точки, как предел последовательности:

$$x = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma_1}(f_{\sigma_2}(f_{\sigma_3}(\dots,(f_{\sigma_n}(y)\dots)))),$$

где $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\} = 2(212)$, то есть: $f_{\sigma_1} = f_2$ и $f_{\sigma_2} = f_2$ и т.д., — а $f_1$ и $f_2$ представлены выше.

Благодаря периодичности, видно, что $\sigma_i = \sigma_{i+3}$, при $i \geq 2$.

Найдём неподвижную точку подпоследовательности $\{(f_2(f_1(f_2)))^n\}_{n=1}^{\infty}$, решив уравнение

$$f_2(f_1(f_2(z))) = z.$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right)\right) + \frac{2}{3} = z$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{z}{9} + \frac{2}{9}\right) + \frac{2}{3} = z$$

$$\frac{z}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{3} = z \ \ \mid \cdot 27$$

$$z + 2 + 18 = 27z$$

$$26z = 20$$

$$z = \frac{\cancelto{10}{20}}{\cancelto{13}{26}}$$

Теперь применим к получившемуся значению функцию для $\sigma_1$ — $f_2$.

$$f_2\left(\frac{10}{13}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{13} + \frac{2}{3} = \frac{10}{39} + \frac{2}{3} = \frac{10 + 2\cdot 13}{39} = \frac{\cancelto{12}{36}}{\cancelto{13}{39}} = \frac{12}{13}$$ — что является ответом.

## Задача 7

Найдите адрес точки $\frac{12}{13}$ Канторова множества с точностью до 5 знаков.
Поступим согласно алгоритму в первом задании.
Решение:

$$\frac{12}{13} \cdot 3 = \frac{36}{13} = 2\frac{10}{13} \qquad 0.2$$

$$\frac{10}{13} \cdot 3 = \frac{30}{13} = 2\frac{4}{13} \qquad 0.22$$

$$\frac{4}{13} \cdot 3 = \frac{12}{13} = 0\frac{12}{13} \qquad 0.220$$

На 3-ем шаге дробь совпала с дробью на 1-ом шаге. Значит, цифра троичной системы, полученная на 4-ом шаге, будет идентична цифре на 1-ом шаге. Таким образом дробь $\frac{12}{13} = 0.(220)_3$.

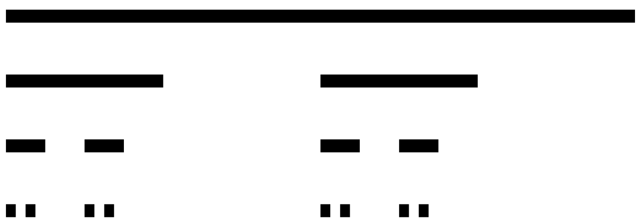
Адрес точки в Канторовм множестве с точностью до пятого знака — 22122.

# Задача 8

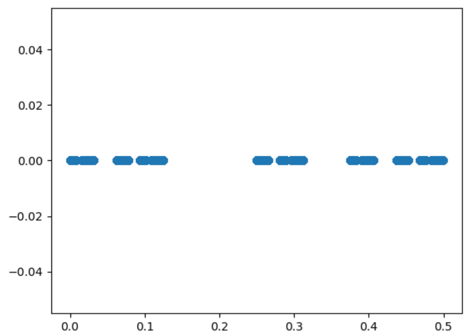
Определите тип СИФ.

$$\{\mathbb{R}^1, \;\; f_1(x) = 0.25x, \;\; f_2(x) = 0.5x + 0.25\}$$

Значит можно воспользоваться теоремой о том, что **система является вполне несвязной**, т.к. образы аттрактора (отрезок $[0, \; 0.5]$) при преобразованиях $f_1$ и $f_2$ не пересекаются — $f_1([0, 0.5]) \cup f_2([0, 0.5]) = [0, 0.125] \times [0.25, 0.5]$.



(а) Визуализация применения функций к отрезку $[0, \; 1]$




(б) Результат применения двух данных функций в случайной последовательности к 50 тысячам чисел из полуинтервала $[0, \; 1000)$

Представленный ниже у код даёт результат, как на рисунке 3б:

```
from random import random, randint
from matplotlib import pyplot as plt

f1 = lambda x: 0.25 * x
f2 = lambda x: 0.5 * x + 0.25

first_range = 50000  # Количество точек
second_range = 100  # Количество применений функции к точке
points = [0] * first_range
fs = [f1, f2]
for i in range(first_range):
    # Точка -- случайное число из полуинтервала [0, 1000)
    point = random() * 1000
    for j in range(second_range):
        # Применяем случайную функцию
        point = fs[randint(0, len(fs) - 1)](point)
    points[i] = point

plt.scatter(points, [0]*len(points), s=1)
plt.show()
```

## Задача 9

Найдите все орбиты динамической системы сдвига поднятой СИФ начальная точка которых проецируется в заданную точку аттрактора исходной СИФ.

Начальная точка $x_0 = \dfrac{3}{16}$.

Исходная СИФ

$$\left\{\mathbb{R},\ \ f_1(x) = \frac{1}{2}x,\ \ f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right\}$$

Аттрактор данной СИФ — отрезок $[0,1]$. А адреса точек состоят лишь из единиц и двоек, которые можно записать троичным разложением после запятой точки отрезка [0, 1] без цифры 0. Попадание точки в образ первой или второй функции добавляет в адрес 1 или 2, что отражается на троичном разложении делением на 3 и добавлением $\dfrac{1}{3}$ в случае единицы, $\dfrac{2}{3}$ — двойки.

Получаем поднятую СИФ:

$$\begin{aligned}
&\{\,[0,1]\times[0,1];\\
&\ f_1^*(x,\sigma) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{3}\sigma + \frac{1}{3}\right),\\
&\ f_2^*(x,\sigma) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\sigma + \frac{2}{3}\right)\ \Bigg\}
\end{aligned}$$

Начальная точка лежит в образе первого преобразования — $\frac{3}{16} \in f_1([0,1])$. Значит, следующая точка орбиты будет $x_1 = f_1^{-1}\left(\dfrac{3}{16}\right) = 2\cdot\dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{8}$, которая тоже лежит в образе первого преобразования. Далее:

$$x_2 = f_1^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

$$x_3 = f_2^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 2\cdot\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

Третья точка орбиты $x_3 \in f_1([0,1]) \cap f_2([0,1])$. Появляется неоднозначность:

$$x_4 = f_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \to x_5 = f_2^{-1}(1) = 1$$

$$x_4 = f_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \to x_5 = f_1^{-1}(0) = 0$$

Имеем две орбиты случайного сдвига:

$$\left\{\frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1, \dots\right\}$$
$$\left\{\frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right\}$$

и два адреса начальной точки — 1121222... и 1122111...

Если записвыать в виде пары поднятой СИФ, получатся такие два элемента:

$$y = \left(\frac{3}{16}, 1121222\dots\right) \qquad z = \left(\frac{3}{16}, 1122111\dots\right)$$

Откуда орбиты динамической системы:

$$\left\{y_0 = y = \left(\frac{3}{16}, 1121222\dots\right), \ y_1 = \left(\frac{3}{8}, 121222\dots\right), \quad y_2 = \left(\frac{3}{4}, 21222\dots\right),\right.$$
$$\left. y_3 = \left(\frac{1}{2}, 1222\dots\right), \quad y_4 = (1, 222\dots) = y_5 = \dots\right\}$$
$$\left\{z_0 = z = \left(\frac{3}{16}, 1122111\dots\right), \ z_1 = \left(\frac{3}{8}, 122111\dots\right), \quad z_2 = \left(\frac{3}{4}, 22111\dots\right),\right.$$
$$\left. z_3 = \left(\frac{1}{2}, 2111\dots\right), \quad z_4 = (0, 111\dots) = z_5 = \dots\right\}$$

# Задача 10

Найдите фрактальную размерность множества.

$$\left\{\mathbb{R}^2,\ \ f_1(\tilde{x}) = \frac{1}{9}\tilde{x},\ \ f_2(\tilde{x}) = \frac{1}{3}\tilde{x} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ 0 \end{pmatrix},\ \ f_3(\tilde{x}) = \frac{1}{9}\tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}\right\}$$

Данная СИФ является вполне несвязной системой, а коэффициенты преобразования являются коэффциентами подобия, значит фрактальную размерность можно вычислить по следующему уравнению:

$$\sum_{i=1}^{N} |k_i|^D = 1,$$

где $k_i$ — коэффициент $i$-го преобразования, $N$ — количество преобразований и $D$ — фрактальная размерность.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^D + \left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{9}\right)^D = 1$$

Положим $\left(\frac{1}{3}\right)^D = x$.

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

Интересует только положительное решение, то есть $x = -1 + \sqrt{2}$.

Получается:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^D = \sqrt{2} - 1 \quad \text{прологарифмируем левую и правую части}$$
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \ln(\sqrt{2} - 1)$$
$$D \ln\frac{1}{3} = \ln(\sqrt{2} - 1)$$
$$-D\ln 3 = \ln(\sqrt{2} - 1)$$
$$D = -\frac{\ln(\sqrt{2} - 1)}{\ln 3}$$

**Ответ**: фрактальная размерность множества — $-\dfrac{\ln(\sqrt{2} - 1)}{\ln 3}$.

## Задача 11

Сколько неподвижных точек у динамической системы? Найдите их.

$$\left\{[0,1],\ \ 1-\frac{x^2}{3}\right\}$$

Прообраз неподвижной точки равен её же образу, поэтому для поиска точного значения точки, решим уравнение $f(x_\varphi) = x_\varphi$:

$$1-\frac{x_\varphi^2}{3} = x_\varphi$$
$$x_\varphi^2 + 3x_\varphi - 3 = 0$$
$$D = 9 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 21$$
$$x_\varphi = \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$$

Корень с минусом нас не интересует, так как он за пределами [0, 1]

$x_\varphi = -1.5 + \sqrt{\frac{21}{4}} = -1.5 + \sqrt{5.25} \approx 0.79129$ — искомая неподвижная точка.

Точка является притягивающей неподвижной точкой: возьмём $B(x_\varphi, x_\varphi\cdot 0.01) \supseteq [x_\varphi\cdot 0.99, x_\varphi\cdot 1.01]$ и применим к границам отрезка преобразование $f$.

$$x_\varphi\cdot 0.99 \approx 0.78337 \Rightarrow f(x_\varphi\cdot 0.99) \approx 0.79544 \to x_\varphi\cdot 0.99 > f(x_\varphi\cdot 0.99)$$
$$x_\varphi\cdot 1.01 \approx 0.79920 \Rightarrow f(x_\varphi\cdot 1.01) \approx 0.78709 \to x_\varphi\cdot 1.01 > f(x_\varphi\cdot 1.01)$$

**Ответ:** у система одна неподвижная точка притягивания — $-1.5+\sqrt{5.25}\approx 0.79129$.

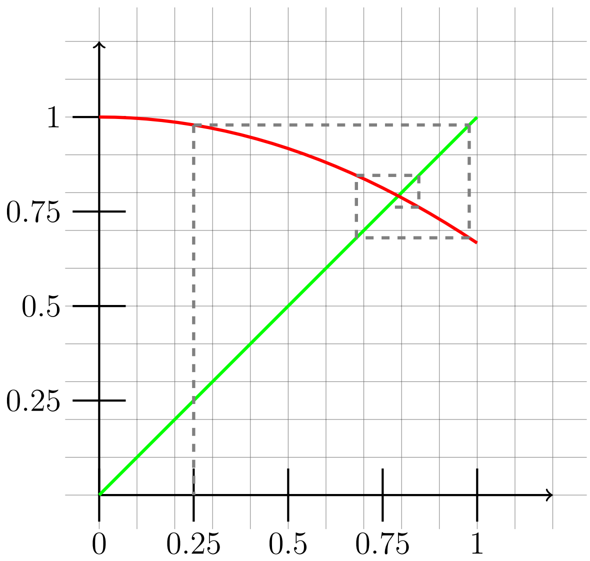



Рис. 4: Паутинная диаграмма для поиска неподвижной точки