Семинар 18 (31.01.2023)

Краткое содержание

Обсудили, как задавать линейное отображение:

1) Зафиксировать базис в исходном пространстве V: $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Выбрать произвольно n векторов из результирующего пространства W: $w_1, \dots, w_n$. Положить, что $\varphi(e_1) = w_1, \ \dots, \ \varphi(e_n) = w_n$. Получили валидное линейное отображение

2) Зафиксировать базисы в обоих пространствах $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V, $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W. Выбрать произвольную матрицу A размера $m \times n$. Получили валидное линейное отображение, где A – матрица л.о.

Упомянули основные теоремы про ядро и образ линейного отображения $\varphi \colon V \to W$:

1) $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$;

2) если A — матрица линейного отображения φ в некоторой паре базисов, то $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ (это число называется рангом линейного отображения, обозначается как $\operatorname{rk} \varphi$).

Затем обратились к свойству, что если базис ядра дополнить до базиса всего пространства, то образы дополняющих векторов будут образовывать базис в образе. Используя это свойство, показали, как выбрать базисы в пространствах V и W таким образом, чтобы матрица отображения φ в этих базисах имела диагональный вид с единицами и нулями на диагонали. А именно:

1. Найти базис ядра $(e_1, \dots, e_k)$ и дополнить его до базиса всего V векторами $(e_{k+1}, \dots, e_n)$
2. Положить $f_1 = \varphi(e_{k+1}), \dots, f_{n-k} = \varphi(e_n)$ и дополнитьсистему $f_1, \dots, f_{n-k}$ до базиса $(f_1, \dots, f_m)$ всего W
3. Формируя базис V, уложим базисные векторы ядра в конец. Тогда искомые базисы – это $\mathbb{e} = (e_{k+1}, \dots, e_n, e_1 \dots e_k)$ и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$.

Матрица линейного отображения φ в таких базисах будет иметь блочный вид $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка $n - k$.

Применили данный алгоритм в примере с прошлого семинара, где линейное отображение в некоторой паре базисов имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Новая тема — линейные функции. Линейная функция на векторном пространстве V над полем F— это просто линейное отображение $V \to F$, где F рассматривается как одномерное векторное пространство над F. Множество всех линейных функций на векторном пространстве V обозначается через V^* и называется *двойственным* (или *сопряжённым*) к V векторным пространством. Затем обсудили, что образом линейной функции $V \to F$ может быть либо $\{0\}$ (размерности 0, так получается в случае нулевой функции), либо всё F (размерности 1). Отсюда ядро линейной функции может либо совпасть с V (в случае нулевой функции), либо является подпространством размерности $\dim V - 1$. Объяснили, почему всякое подпространство $U \subseteq V$ размерности $\dim V - 1$ является ядром некоторой линейной функции на V: если $e_1, \dots, e_{n-1}$ — базис в U и вектор e_n дополняет его до базиса всего V, то, задавая линейную функцию $\alpha \in V^*$ на базисных векторах по формулам $\alpha(e_1) = \dots = \alpha(e_{n-1}) = 0$ и $\alpha(e_n) = 1$, получаем $\operatorname{Ker} \alpha = U$.

Дальше ввели понятие двойственного базиса. Для каждого базиса $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V определён двойственный к нему базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, задаваемый формулами $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кро́некера, то есть $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Это можно представлять себе как соотношение $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1 \dots e_n) = E$.

Также выяснили, что если два базиса пространства V связаны матрицей перехода C как $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \ C$, то их двойственные базисы тоже связаны той же самой матрицей C

через соотношение $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\varepsilon'_1\\ \vdots\\ \varepsilon'_n\end{pmatrix}$.

С помощью этих знаний решили следующую задачу (успели только пункт (а)):

Пусть (e_1,e_2,e_3) — базис трёхмерного векторного пространства V, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ — двойственный ему базис пространства V^*.

(а) Линейные функции $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\varepsilon'_3 \in V^*$ таковы, что $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varepsilon'_3 = \varepsilon_3$. Найти базис пространства V, для которого $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ является двойственным.

(б) Найти базис пространства V^*, двойственный к базису $(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ пространства V.

♡

Домашнее задание к семинару 19. Дедлайн 7.02.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. Докажите, что всякое подпространство конечномерного векторного пространства является ядром некоторого линейного отображения и образом некоторого (возможно, другого) линейного отображения.

2. Может ли одно и то же подпространство n-мерного векторного пространства V $(n \geqslant 0)$ быть одновременно и ядром, и образом одного и того же линейного отображения V в себя? Если да, приведите пример.

3. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу $\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&2&4&4\\3&3&6&6\end{pmatrix}$.

   Найдите пару базисов, в которых отображение φ имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали (как на семинаре), и выпишите эту матрицу.

4. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу $\begin{pmatrix}1&1&0&2\\3&-3&2&0\\2&-1&1&1\end{pmatrix}$.

   Найдите пару базисов, в которых отображение φ имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали (как на семинаре), и выпишите эту матрицу.

5. Пусть ненулевые линейные функции $\alpha, \beta \in V^*$ таковы, что $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Докажите, что тогда α и β пропорциональны, то есть $\beta = \lambda\alpha$ для некоторого ненулевого скаляра $\lambda \in F$.

6. К36.11

7. Пусть (e_1,e_2,e_3) — некоторый базис трёхмерного векторного пространства V, а $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — двойственный ему базис пространства V^*.

   (а) Найдите базис пространства V^* (то есть выразите через $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$), двойственный к базису $(3e_1 + e_2 - 2e_3, 2e_1 + e_3, e_1)$ пространства V.

   (б) Найдите базис пространства V (то есть выразите через e_1,e_2,e_3), для которого двойственным является базис $(\varepsilon_3, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3, 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$ пространства V^*.

8. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$, рассмотрим линейные функции $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in V^*$, где $\varepsilon_i(f) = f^{(i)}(0)$ (верхний индекс (i) обозначает i-ю производную). Докажите, что эти функции образуют базис в V^*, и найдите базис в V, для которого данный базис является двойственным.

9. К36.9(а)

10. К36.10(б)

♡