1. В каждую комнату можно поместить от 1 до 26 больных.
Всего способов: 8^{26}.

2. ~~Для каждого разряда 5-значного числа~~

Всего 5-значных чисел:

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4$

5-значных чисел без единиц:

$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^4$.

5-значных чисел с единицами:

$9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 9(10^4 - 8 \cdot 9^3) = 9(10000 - 5832) =$

$= 37512$.

3. Всего пятеричных слов длины 3 может быть:

$5^3 = 125$. Без заданного по условию $\{(0,0,0),(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5)\}$
таких слов 120 (125 − 5).

Функция сюръективна, значит каждому пятеричному слову длины 3 соответствует хотя бы одно двоичное слово.

120 пятеричным словам соответствует минимум 120 двоичных.

5 заданным в условии соответствует 400 двоичных.

Однако всего двоичных слов: $2^9 = 512$, $512 < 520$, где

520 − минимальное возможное кол-во двоичных слов, удовл-

творяющее задаче.

Ответ: нет, нельзя

4. Доказательство:

1. База индукции:

Т.к. $F_{3-2} = F_1 = 1$, то база доказана.

2. Предположение:

Пусть верно для n:

способы переместить робота из 0 в $n = F_{n-2} =$

$= F_{n-3} + F_{n-4}$.

3. Шаг:

способов переместить робота из 0 в $(n+1)$ будет ровно на F_{n-1} больше, ибо в точку $n+1$ (в отличие от n) можно добраться ещё и из $n-1$ точки, то есть способов:

$F_{n-2} + F_{n-1}$.

Индукция доказана.

5. Решение:

Решение проведём перебором всех возможных вариантов:

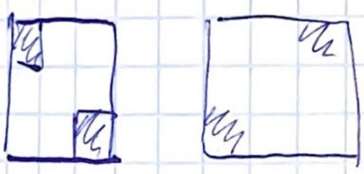
1.) Закрашены все клетки: 1 способ раскраски.

2.) Закрашено 8 клеток: 9, т.к. эта клетка может быть любой из 9.

3.) Закрашено 7 клеток:

$C_9^7 = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9\cdot 8}{2}$ — способы выбрать 7 закрашенных из 9 возможных.

$\frac{9\cdot 8}{2} - 2 = 34$ — число способов выбрать 7 раскрашенных клеток, удовлетворяющих условию.

 — 2 невозможных случая, где

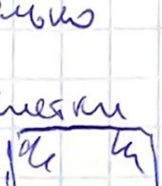
 - не закрашены.

4.) Закрашено 6 клеток:

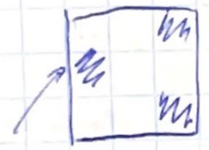
$C_9^6 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = 84$ способа выбрать 6 закрашенных из 9.

Посчитаем, сколько мы учли не подходящих клеток:

1. 4 угловые клетки не закрашены — 4 способа

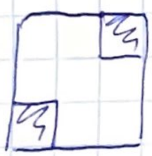


2. Если 2 незакрашенные клетки угловые и лежат на одной линии:



, тогда 3-я незакрашенная определяется однозначно (угловые позиции уже учтены) 4 способа

Если 2 незакрашенные клетки угловые и не лежат на одной линии:



, то получаем, что ещё одну незакрашенную можно поставить куда угодно, кроме учтённых „угловых" случаев:

Итого: $5 \cdot 2$ способов.

3. 1 угловая

определяются однозначно:
4 способа (4 угловых)

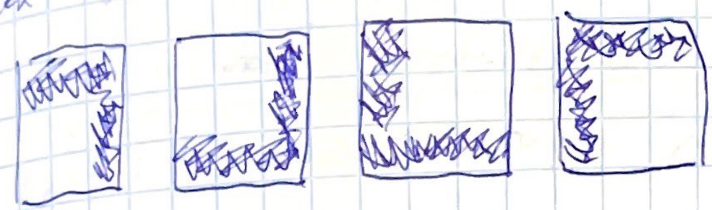
4. нет угловых

← 1 способ. Итого $84-4-10-4-4 = 62$ способа.

5) Закрашено 5 клеток:

Имеем, что для каждой крайней линии

. . . , Для каждой заметьте вакрашенных крайней линии есть $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ способов выбрать 2 оставшиеся. Однако имеем, что 4 случая из всех $4\cdot 15=60$ пересекаются, а именно



Итого имеем

$60-4=56$ способов.

е) Закрашено 4 клетки: $6\cdot 4=24$ способа, ибо для каждой крайней линии имеем 6 способов.

ж) закрашено 3 клетки: 4 способа

з) закрашено меньше 3 — 0.

Итого

$1+9+34+62+56+24+4=190$ способов.

6. $f(n)$ – кол-во слов, не содержащих подслов 1110.

Заметим, что

$f(1) = 2 \quad f(0) = 1$

$f(2) = 4$

$f(3) = 8.$

При $n \geq 4$: если последняя цифра в слове → 1, то перед ним стоит $f(n-1)$ слов, не подходящих

если последняя цифра → 0, то предыдущих неподходящих слов $f(n-1) - f(n-4)$ (кроме случая 1110).

Из этих соображений получаем:

$f(n) = 2F(n-1) - f(n-4).$

$f(4) = 2 \cdot 8 - 1 = 16 - 1 = 15$

$f(5) = 30 - 2 = 28$

$f(6) = 56 - 4 = 52$

$f(7) = 104 - 8 = 96.$

$f(8) = 192 - 15 = 177$

$f(9) = 354 - 28 = 326$

$f(10) = 652 - 52 = 600.$

Всего слов длины 10: $2^{10} = 1024$.

Слов, не удовлетворяющих условию — 600

$1024 - 600 =$ <u>424</u> — удовлетворяют условию.

Ответ: 424.

7. Заметим, что если матрица содержит более 6 столбцов, содержащих только единицы, то для каждых трёх строк существует больше 6-ти столбцов с „1".
Следовательно, больше 6 столбцов быть не может.
Так как для первых 3-х строчек 6 столбцов с „1", то как минимум в трех из них в 4-ой строчке окажется 3 столбца без „1", и значит меньше 4-х столбцов не может быть, так как для 1-ой, 2-ой и 4-ой строчки должно быть ещё как минимум 3 столбца с „1", а это значит, что для 1-ой и 2-ой строчки 9 столбцов с „1" — противоречие.
Значит, столбцов может быть:

$4 \vee 5 \vee 6$.

Пример для 4:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1   1 1 1 1
   1 1 1 1 1 1 1 1   1 1   1 1
1 1 1 1 1 1   1 1   1 1   1 1

Пример для 5:

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1          1 1 1 1
    1 1 1 1 1 1 1 1      1 1   1 1
1   1 1 1 1 1   1   1    1 1   1 1
```

Пример для 6:

```
/ / / / / / / / / / / /
/ / / / / / / /         / / / /
  / / / / / / / /       / /   / /
  / / / / / /   / /     / / / /
```