1б) $\alpha = \sqrt{19}$

$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{\alpha_1}$ $\quad a_0 = 4$

$\frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{19} - 4$

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3}$

$\frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad a_1 = 2$

$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{19}-2}{3},$

$\alpha_2 = \frac{3\sqrt{19}+6}{15} = 1 + \frac{1}{\alpha_3}, \quad a_2 = 1,$

$\frac{1}{\alpha_3} = \frac{3\sqrt{19}-9}{15};$

$\alpha_3 = \frac{15}{3\sqrt{19}-9} = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{5\sqrt{19}+15}{10} = 3 + \frac{1}{\alpha_4}, \quad a_3 = 3,$

$\frac{1}{\alpha_4} = \frac{5\sqrt{19}-15}{10}$

$\alpha_4 = \frac{10}{5\sqrt{19}-15} = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{2\sqrt{19}+6}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{1}{\alpha_4}, \quad a_4 = 1$

$\frac{1}{\alpha_4} = \frac{\sqrt{19}-2}{5}$

$\alpha_4 = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{5\sqrt{19}+10}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_5}, \quad a_5 = 2.$

$\frac{1}{\alpha_5} = \frac{\sqrt{19}-4}{3}, \quad \alpha_5 = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{3\sqrt{19}+12}{3} = \sqrt{19}+4 = 8 + \frac{1}{\alpha_6}, \quad a_6 = 8.$

$$\frac{1}{\alpha_6} = \sqrt{19} - 4,$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \alpha_1$$

$$\alpha = \sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$$

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	4	2	1	3	1	2	8
P_n	4	9	13	48	61	170	1421
Q_n	1	2	3	11	14	39	326

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$$

$$\left| \alpha - \frac{P_5}{Q_5} \right| \leq \frac{1}{Q_6 Q_5}$$

$$\frac{1}{Q_6 Q_5} = \frac{1}{39 \cdot 326} = \frac{1}{12714} < \frac{1}{10000}.$$

$\frac{P_5}{Q_5}$ - подходящая

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{170}{39}.$$

Ответ: $\frac{170}{39}$.

1.2)

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	3	1	6	1	6	1	6
P_n	3	4	27	31	213	244	1677
Q_n	1	1	7	8	55	63	433

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \le \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

$$\left|\alpha - \frac{P_5}{Q_5}\right| \le \frac{1}{Q_5 Q_6}$$

$$\frac{1}{Q_5 Q_6} = \frac{1}{63 \cdot 433} = \frac{1}{27279} < \frac{1}{10000}$$

Следовательно $\frac{P_5}{Q_5}$ - подходящая.

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{244}{63}.$$

Ответ: $\frac{244}{63}$.

2. $\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1) Для начала рассмотрим:

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 a_1 + 1 & a_0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

Далее:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 a_2 + p_0 & p_1 \\ q_1 a_2 + q_0 & q_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}.$$ Получим, что: $\begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть это и будет базой для нашей индукции.

2) Индукционное предположение:

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Шаг индукции:

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$ ибо:

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} p_k + p_{k-1} & p_k \\ a_{k+1} q_k + q_{k-1} & q_k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{по индукционному предположению}} \cdot \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, индукция доказана. Утверждение задачи:

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_0]$

Докажем:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{p_{k-1}a_k + p_{k-2}}{p_{k-1}} = a_k + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}.$$

Так как $p_{k-2} < p_{k-1}$, то $a_k = \left[\frac{p_k}{p_{k-1}}\right]$, значит

$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}$, $\boxed{a_0' = a_k}$

$$\alpha_1 = \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} = \frac{p_{k-2}a_{k-1} + p_{k-3}}{p_{k-2}} = a_{k-1} + \frac{p_{k-3}}{p_{k-2}}$$

$a_{k-1} = \left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}\right]$, $\boxed{a_1' = a_{k-1}}$

$\frac{p_{k-3}}{p_{k-2}} = \frac{1}{\alpha_2}$,

$\alpha_2 = \frac{p_{k-2}}{p_{k-3}}$ ... и так далее .... $\boxed{a_k' = a_0}$, ибо:

$$\frac{p_0}{p_{-1}} = \frac{p_{-1}a_0 + p_{-2}}{p_{-1}} = a_0 + \frac{p_{-2}}{p_{-1}} = a_0 + \frac{0}{1} = a_0 = a_k'$$

⇒ Следовательно:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a'_0; a'_1, \ldots, a'_k] = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_0]$$