Семинар 19 (7.02.2023)

Краткое содержание

Из ДЗ разобрали три последних номера.

Новая тема — билинейные формы. Разобрали понятие матрицы билинейной формы по отношению к заданному базису и формулу для вычисления значений билинейной формы в координатах. Обсудили, как по виду билинейной формы в координатах восстановить её матрицу по отношению к рассматриваемому базису. Посчитали матрицу билинейной формы $\beta(f,g) = f(2) \cdot g'(2)$ на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ в базисе $(1, x, x^2)$.

Формула изменения матрицы билинейной формы при замене базиса: пусть $\mathbb{e}, \mathbb{e}'$ — два базиса пространства V, C — матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$ (то есть $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$) и B (соответственно B') — матрица билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ (соответственно $\mathbb{e}'$); тогда $B' = C^T B C$.

Дальше обсудили следующий вопрос: существует ли для билинейной формы $x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2 + 3x_2y_3 - 3x_3y_2$ базис, в котором её матрица диагональна? Ответ отрицательный: так как данная форма не симметрична, то в любом базисе её матрица должна быть несимметрична (свойство симметричности матрицы билинейной формы сохраняется при замене базиса, что можно легко увидеть из явной формулы).

Следующий сюжет — симметричный алгоритм Гаусса диагонализации симметричной билинейной формы, который базируется на следующем соображении. Пусть к некоторой матрице $X \in M_n$ применили одно элементарное преобразование строк и получили матрицу Y. Тогда $Y = UX$ для некоторой элементарной матрицы V. Транспонировав последнее равенство, получаем $Y^T = X^T U^T$. Но Y^T получается из X^T ровно таким же элементарным преобразованием столбцов. Следовательно, это элементарное преобразование столбцов реализуется при помощи умножения справа на матрицу U^T. Теперь предположим, что X — матрица некоторой симметричной билинейной формы в каком-то базисе. Тогда UXU^T — это матрица той же формы в другом базисе, и она получается из U «симметричным» элементарным преобразованием матрицы X (то есть мы делаем какое-то элементарное преобразование строк и затем такое же элементарное преобразование столбцов). Заметим, что при таком преобразовании матрицей перехода от старого базиса к новому будет U^T. Ввиду симметричности матрицы X, выполняя цепочку симметричных элементарных преобразований матрицы формы, её можно привести к диагональному виду; обсудили общий алгоритм для этого («симметричный алгоритм Гаусса»).

Данный алгоритм можно модифицировать таким образом, чтобы наряду с диагональным видом матрицы он выдавал ещё и матрицу перехода к новому базису. Для этого нужно к матрице X приписать справа E и во время работы алгоритма все элементарные преобразования строк применять ко всей большой матрице $(X \mid E)$, а элементарные преобразования столбцов — только к X. Алгоритм заканчивается, когда пара $(X \mid E)$ преобразована к виду $(D \mid P)$, где матрица D диагональна. Из конструкции получается, что $D = PXP^T$; значит, матрицей перехода к новому базису будет P^T.

Применили симметричный метод Гаусса к матрице $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$, нашли диагональный вид и новый базис, в котором матрица диагональна.

♡

Домашнее задание к семинару 20. Дедлайн 14.02.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

В обоих задачниках координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ всегда записываются в строчку через запятую, однако нужно помнить, что мы всегда записываем эти координаты в столбец.

В первых двух задачах предполагается, что все матрицы квадратны порядка n. Линейность функции $\beta(x,y)$ по первому аргументу эквивалентна условию

$$\beta(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \beta(x_1, y) + \alpha_2 \beta(x_2, y)$$

(где α_1, α_2 — скаляры, а x_1, x_2, y — векторы), часто бывает удобнее проверять именно его. Аналогично с линейностью по второму аргументу.

1. К37.1(б,в,е,ж) («функция» = «форма»)
2. К37.1(г,д,з) («функция» = «форма»)
3. Докажите, что функция $\beta(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g'(t)\,dt$ является билинейной формой на пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$. Найдите матрицу этой билинейной формы в базисе $(1,x,x^2,x^3)$.
4. Для каждой из билинейных форм $\beta_1(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$ и $\beta_2(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ на пространстве $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ найдите её матрицу в базисе из матричных единиц.
5. К37.6(а), К37.8(а)
6. Билинейная форма β на трехмерном векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите базис пространства V, в котором форма β имеет диагональную матрицу, и выпишите эту матрицу.
7. Тот же вопрос для матрицы $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
8. Тот же вопрос для матрицы $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
9. Модифицируйте симметричный алгоритм Гаусса так, чтобы он мог приводить данную целочисленную матрицу к диагональному виду, не выходя из области целых чисел.
10. (бонус) Пусть f_1, f_2 – две линейные функции на пространстве V. Тогда легко видеть, что функция $g(x,y) := f_1(x) \cdot f_2(y)$ является билинейной формой на V. Докажите, что билинейная форма β (не обязательно симметричная) на V представляется в виде $\beta(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (где $f_1, f2$ – ненулевые функции) тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\,\beta = 1$. (Напомним, что рангом билинейной формы называется ранг ее матрицы в каком-то базисе).

♡