1. Теорема Лейбница. Докажите, что p — простое тогда и только тогда, когда

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod p.$$

2. Докажите равенство

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)\,\frac{(m,n)}{\varphi((m,n))}\,.$$

3. Докажите, что для любого простого p и целого q в пределах $1 \leqslant q \leqslant p$

$$(q-1)!(p-q)! \equiv (-1)^q \pmod p.$$

4. Пусть $(m,n) = 1$, а числа x и y пробегают *полные* системы вычетов по модулям m и n соответственно. Докажите, что число $xn+ym$ пробегает при этом *полную* систему вычетов по модулю mn.

5. Пусть $(m,n) = 1$, а числа x и y пробегают *приведённые* системы вычетов по модулям m и n соответственно. Докажите, что число $xn+ym$ пробегает при этом *приведённую* систему вычетов по модулю mn. Выведите отсюда мультипликативность функции Эйлера.