Семинар 17 (24.01.2023)

Краткое содержание

Из ДЗ разобрали номер 3.

Начали семинар с типовой задачей про прямую сумму: для подпространства $U \subseteq V$ найти дополнительное к нему (т.е. такое $W \subseteq V$, что $V = U \oplus W$). Для его нахождения достаточно выбрать базис $(e_1, \ldots, e_k)$ в U, дополнить его до базиса $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ всего V, и тогда в качестве W можно взять $W = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Следует обратить внимание, что это самое W можно выбрать многими способами.

Обсудили описание всех способов, которыми можно линейно независимую систему векторов дополнить до базиса всего пространства.

Новая тема — линейные отображения векторных пространств. Поговорили про изоморфизмы, отождествление любого векторного пространства V (над полем F) размерности n с пространством F^n посредством выбора базиса: если $(e_1, \ldots, e_n)$ — выбранный базис, то соответствие выглядит как

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Проговорили, что всякое линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ однозначно определяется образами векторов фиксированного базиса в V. В соответствии с этим линейному отображению φ при фиксированных базисах $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W сопоставляется матрица $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ отображения φ в паре базисов $(\mathbb{e}, \mathbb{f})$. Она определяется соотношением

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A,$$

то есть в её j-м столбце стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

В качестве примера показали, что если $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α и $\mathbb{e} = \mathbb{f} = (e_1, e_2)$ — стандартный ортонормированный базис, то матрица $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ равна $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Дальше упомянули, что если $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m$, то координаты вектора v и его образа $\varphi(v)$ связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$. Таким образом, всякое линейное отображение в координатах предсталяет собой просто умножение на матрицу.

Следующий сюжет: пусть $\mathbb{e}'$ — другой базис в V и $\mathbb{f}'$ — другой базис в W, причём $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$ и $\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D$, где C и D — соответствующие матрицы перехода; пусть $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ и $A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$, тогда справедливо соотношение $A' = D^{-1}AC$. На эту тему разобрали следующую задачу:

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Линейное отображение $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^2$ в базисе $(x - x^2, x^2, 1 + 2x^2)$ пространства V и базисе $((1,2),(1,3))$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $\varphi(1 + 2x + 3x^2)$.

Обсудили, что решать задачу можно двумя способами.

Первый – разложить многочлен $1 + 2x + 3x^2$ по базису из условия, решив СЛУ и тем самым найти координаты в этом базисе; умножить матрицу л.о. на этот вектор координат, тем самым получив вектор координат в базисе $\mathbb{R}^2$ из условия; после этого посчитать вектор.

Второй способ решения – обозначить базисы из условия как новые $\mathbb{e}, \mathbb{f}$, а за старые взять удобные стандартные базисы в обоих пространствах; найти матрицы перехода от старых к новым; найти старую матрицу через формулу выше ($A' = D^{-1}AC \implies A = DA'C^{-1}$); умножить полученную старую матрицу л.о. на вектор координат в старом базисе (так как он стандартный, то вектор будет $(1, 2, 3)$), тем самым получив вектор координат в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$, и так как он стандартный, по сути он и будет являться ответом.

Для всякого линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ определяются его ядро $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ и образ $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(V)$. Из лекций знаем, что $\operatorname{Ker}\varphi$ является подпространством в V, а $\operatorname{Im}\varphi$ — подпространством в W. Обсудили, как находить базис ядра и базис образа, если известна матрица линейного отображения (в какой-либо паре базисов). Так как в координатах φ записывается как $x \mapsto Ax$ (где A — матрица этого отображения в данной паре базисов), то элементы ядра — это все решения ОСЛУ $Ax = 0$. Таким образом, базис ядра — это просто ФСР для этой ОСЛУ (в координатах!). Чтобы найти базис образа линейного отображения, можно действовать двумя путями.

1. Если $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис ядра и векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ дополняют его до базиса всего пространства, то тогда векторы $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ образуют базис в образе (этот факт будет доказан на следующей лекции, если вам интересно сейчас, можете пролистать эту пдфку вниз и почитать); важно отметить, что построенная по стандартному алгоритму ФСР очень легко дополняется до базиса всего пространства. А именно, пусть $i_1, \ldots, i_r$ — номера главных неизвестных ОСЛУ $Ax = 0$, тогда в качестве дополнения нужно взять векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ с теми же номерами $i_1, \ldots, i_r$. В итоге получается, что базис образа (в координатах!) состоит из столбцов матрицы A с номерами $i_1, \ldots, i_r$.

2. Если в задаче ядро находить не требуется, то можно найти базис образа по-другому: в столбцах матрицы A стоят образы векторов базиса пространства V, они всегда порождают образ; поэтому базис образа (в координатах!) есть просто базис линейной оболочки столбцов матрицы A. Для нахождения последнего мы знаем два алгоритма, один из которых даёт в точности тот же результат, что и в случае 1.

Пример решения задачи на эту тему:
Пусть $\dim V = 4$, $\dim W = 3$ и линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ в базисе $\mathbb{e} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ пространства V и базисе $\mathbb{f} = (f_1,f_2,f_3)$ пространства W имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти базис ядра и базис образа этого линейного отображения.

(Обратите внимание, что пространства V и W могут не иметь никакого отношения к F^4 и F^3, а $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ — к стандартным базисам!!)

Решение. На всякий случай расшифруем, что по условию нам дано следующее:
$\varphi(e_1) = f_1 + 2f_2 + f_3$, $\varphi(e_2) = 2f_1 + f_2 + f_3$, $\varphi(e_3) = 3f_2 + f_3$, $\varphi(e_4) = f_1 - f_2$.

Далее, вектор $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in V$ лежит в ядре отображения φ тогда и только тогда, когда набор координат (x_1,x_2,x_3,x_4) является решением ОСЛУ $Ax = 0$. Улучшенный ступенчатый вид матрицы A равен $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, откуда получаем следующую ФСР для ОСЛУ: $(-2,1,1,0), (1,-1,0,1)$. Таким образом, базис ядра есть $(-2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_4)$.

Чтобы найти базис образа φ, мы дополняем базис ядра до базиса всего V векторами с координатами (1,0,0,0), (0,1,0,0) (в базисе $\mathbb{e}$), то есть это просто e_1 и e_2 (соответствуют «главным неизвестным» матрицы A). В качестве базиса в образе φ можно взять образы этих векторов при отображении φ, то есть векторы с координатами (1,2,1), (2,1,1) (в базисе $\mathbb{f}$), то есть это $f_1 + 2f_2 + f_3$ и $2f_1 + f_2 + f_3$.

♡

Домашнее задание к семинару 18. Дедлайн 31.01.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

1. Пусть U — подпространство в $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы $(1,1,1,-1), (2,1,1,-2), (0,1,1,0)$.

   (а) Укажите (предъявив базис) какое-нибудь дополнительное к U подпространство $W \subseteq \mathbb{R}^4$ (то есть такое, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$).

   (б) Укажите (предъявив базис) какое-нибудь другое дополнительное к U подпространство $W' \subseteq \mathbb{R}^4$ (обратите внимание, что предъявление разных базисов ещё не означает, что подпространства разные!).

2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ даны вектор $v = (1,1,1,1)$ и подпространство U, являющееся множеством решений системы
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$
   Найдите какое-нибудь подпространство $W \subseteq \mathbb{R}^4$, такое что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ и проекция вектора v на U вдоль W равна $(1,-1,-1,0)$.

3. К36.4

4. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathrm{M}_2(F) \to \mathrm{M}_2(F)$, $X \mapsto X^T$. Докажите, что это отображение линейно, и найдите его матрицу в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, где $\mathbb{e} = \mathbb{f}$ — это базис из матричных единиц.

5. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^2$, действующее по правилу $f \mapsto (f(-1), f'(1))$. Докажите, что это отображение линейно, и найдите его матрицу в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, где $\mathbb{e} = (1,x,x^2,x^3)$, а $\mathbb{f}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$.

6. Пусть векторное пространство V представлено в виде $V = U \oplus W$ для двух подпространств $U,W \subseteq V$. Докажите , что отображение $\varphi\colon V \to U$, сопоставляющее каждому вектору v его проекцию на U вдоль W, является линейным. Найдите матрицу этого линейного отображения в паре базисов $(\mathbb{e} \cup \mathbb{f}, \mathbb{e})$, где $\mathbb{e}$ — какой-то базис подпространства U, а $\mathbb{f}$ — какой-то базис подпространства W.

7. К36.3

8. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Линейное отображение $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^2$ в базисе $(2x + x^2,\ x,\ 1 - x)$ пространства V и базисе $((3,2),(1,1))$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$
   Найдите $\varphi(3 + 2x + x^2)$.

9. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найдите базис ядра и базис образа этого линейного отображения.

10. Найдите базис ядра и базис образа линейного отображения $\varphi\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(X) = AX$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

♡

Предложение. Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi$ и векторы $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ дополняют его до базиса всего пространства V. Тогда, $(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ (так как $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$). Осталось показать, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$. Тогда по линейности $\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker\varphi$. Значит вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ разлагается по базису ядра:

$$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$$

где $\beta_j \in F$.
Если перенести все в одну сторону, то получится линейная комбинация векторов из базиса V. Она равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, то есть, $\alpha_i = \beta_j = 0\ \forall i, j$. $\square$