Семинар 21 (21.02.2023)

Краткое содержание

В начале обсудили индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$ и закон инерции.

Дальше разобрали понятия положительной, отрицательной, неотрицательной, неположительной определённости и неопределённости квадратичной формы над $\mathbb{R}$. Определили нормальный вид квадратичной формы из номера П1212 при каждом значении параметра. Затем в той же квадратичной форме заменили $5x_1^2$ на $4x_1^2$ и обсудили для новой формы тот же вопрос. Важный момент: как правило, метод Якоби даёт нормальный вид сразу для всех значений параметра кроме конечного числа «критических» значений. Для критических значений можно снова попытаться применить метод Якоби, изменив нумерацию переменных, или же воспользоваться симметричным Гауссом.

Сформулировали критерий Сильвестра положительной определённости и критерий отрицательной определённости квадратичной формы в терминах угловых миноров её матрицы. Посмотрели, как работает критерий Сильвестра для обеих уже разобранных выше квадратичных форм. Важный момент: критерий Сильвестра работает всегда, в то время как для метода Якоби требуется, чтобы все угловые миноры (ну, кроме последнего) были отличны от нуля. Исследовали на отрицательную определённость квадратичную форму из номера К38.14(а), а также обсудили, как искать её нормальный вид в зависимости от значений параметра.

Следующий сюжет — понятие эквивалентности квадратичных форм. Обсудили, что две квадратичные формы над $\mathbb{R}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда у них один и тот же нормальный вид, то есть совпадают положительный и отрицательный индексы инерции. Вывели отсюда явную формулу для количества классов эквивалентности квадратичных форм на n-мерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$: этих классов ровно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Новая тема — евклидовы пространства. Обсудили следующие примеры конечномерных евклидовых пространств:

$\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(x,y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n$;

$\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ (где $[a,b]$ — некоторый отрезок);

$\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ со скалярным произведением $(f,g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + \cdots + f(n)g(n)$.

Ввели понятие длины вектора в евклидовом пространстве, обсудили неравенство Коши–Буняковского и затем определили угол между двумя векторами.

♡

Домашнее задание к семинару 22. Дедлайн 28.02.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

В обоих задачниках координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ всегда записываются в строчку через запятую, однако нужно помнить, что мы всегда записываем эти координаты в столбец.

1. К38.11(б,в)
2. Определите нормальный вид квадратичной формы из номера К38.11(г) для каждого значения параметра.
3. К38.14(б) + определить нормальный вид этой квадратичной формы в зависимости от значений параметра
4. Определите все значения параметров a и b, при которых билинейная форма

$$\beta(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + ax_2y_2 + bx_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$$

задаёт скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

5. П1385

В следующем номере для простоты давайте считать, что n-мерный куб с ребром a в $\mathbb{R}^n$ состоит из всех точек, у которых каждая координата принадлежит отрезку $[0,a]$. Вершины куба —

это точки, у которых каждая координата равна 0 или a, рёбра — отрезки, соединяющие две соседние вершины (отличающиеся одной координатой), диагонали — отрезки, соединяющие противоположные вершины (то есть различающиеся в каждой координате).

6. П1394, П1395

7. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

   Найдите в этом пространстве угол между векторами x^3 и $x^2 + x + 1$.

♡