Семинар 23 (7.03.2023)

Краткое содержание

Начали с напоминаний про понятие ортогонального дополнения подмножества в евклидовом пространстве. Очень важное свойство: если $\mathbb{E}$ — (конечномерное) евклидово пространство, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство и $S^{\perp} := \{x \in \mathbb{E} \mid (x,y) = 0 \text{ для всех } y \in S\}$ — его ортогональное дополнение, то имеет место разложение в прямую сумму $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$. Значит, всякий вектор $v \in \mathbb{E}$ единственным образом представляется в виде $v = x + y$, где $x \in S$ и $y \in S^{\perp}$. В этой ситуации вектор x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S, а вектор y — *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S. Обозначения: $x = \mathrm{pr}_S v$, $y = \mathrm{ort}_S v$.

Замечание: в ситуации выше $x = \mathrm{ort}_{S^{\perp}} v$, $y = \mathrm{pr}_{S^{\perp}} v$.

Первая формула для вычисления ортогональной проекции: если $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональный базис в S, то $\mathrm{pr}_S v = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)} e_i$.

Вторая формула для вычисления ортогональной проекции: пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, $a_1, \ldots, a_k$ — какой-то базис в S (не обязательно ортогональный!), запишем этот базис в столбцы матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$; тогда $\mathrm{pr}_S v = A(A^T A)^{-1} A^T v$.

Разобрали пример: $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ (со стандартным скалярным произведением), $S = \langle e_1, e_2 \rangle$, где $e_1 = (1,1,1)$ и $e_2 = (0,1,2)$; нашли ортогональную проекцию вектора $v = (1,0,0)$ а S обоими способами.

Дальше разобрали описание всех ортонормированных базисов n-мерного евклидова пространства в терминах одного базиса и матриц перехода и ввели понятие ортогональной матрицы. Описали все целочисленные ортогональные матрицы порядка n и нашли их количество.

Обсудили QR-разложение матриц и его связь с ортогонализацией Грама-Шмидта. QR-разложение для матрицы $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ с линейно независимыми столбцами – это такое разложение QR, где $Q \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ имеет ортонормированные столбцы, а $R \in M_n(\mathbb{R})$ верхнетреугольная.

Выяснили, что Q получается из матрицы A путем ортогонализации ее столбцов и деления каждого из них на свою длину. Показали нехитрым вычислением, что матрица R выражается как $Q^T A$. Это означает, что R_{ij} – результат скалярного произведения i-ого столбца матрицы Q и j-ого столбца матрицы A.

Далее показали (немного хитрым вычислением), что вышеупомянутые скалярные произведения (q_i, a_j) неявно вычисляются в ходе ортогонализации. Получили следующий алгоритм QR-разложения:

$f_1 := a_1$
$q_1 := {}^{f_1}/_{|f_1|}$
for $i := 2$ `to` n **do**
  $f_i := a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, q_j) q_j$
  `remember` (a_i, q_j)
  $q_i := {}^{f_i}/_{|f_i|}$
end for
$Q := (q_1 \mid \cdots \mid q_n)$
$R_{ij} := (q_i, a_j)\ \forall i \leqslant j, R_{ij} := 0\ \forall i > j$

♡

Домашнее задание к семинару 24. Дедлайн 14.03.2023

Номера с пометкой П даны по задачнику Проскурякова, с пометкой К – Кострикина.

В обоих задачниках координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ всегда записываются в строчку через запятую, однако нужно помнить, что мы всегда записываем эти координаты в столбец.

1. П1370
2. П1372

3. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.
   Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x^4 относительно подпространства $\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$.

4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ (со стандартным скалярным произведением) подпространство U есть множество решений уравнения $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, а подпространство W — линейная оболочка векторов $(2,-1,1,-2)$ и $(-1,3,1,3)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\mathrm{pr}_U\, v = (2,5,7,4)$ и $\mathrm{pr}_W\, v = (5,5,7,1)$.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ (со стандартным скалярным произведением) даны два подпространства $U = \langle u_1,u_2\rangle$ и $W = \langle w_1,w_2\rangle$, где $v_1 = (2,-1,2,-1)$, $v_2 = (3,-3,1,1)$, $w_1 = (1,2,-1,2)$, $w_2 = (1,-3,3,-1)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\mathrm{pr}_U v = (9,-12,-1,8)$ и $\mathrm{ort}_W v = (1,-8,-7,4)$.

6. Найдите QR-разложение для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

7. Тот же вопрос для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

♡