1. Составное число n называется *псевдопростым по основанию* a, где $a \in \mathbb{Z}$, $(a,n)=1$, если $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Найдите все основания a, для которых 15 — псевдопростое число (тривиальные основания $a = \pm 1$ сразу исключаем).

2. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что

$$7^p - 5^p - 2 \,\vdots\, 6p.$$

3. Составное число n называется *числом Кармайкла*, если для любого $a \in \mathbb{Z}$, такого что $(a,n)=1$, справедливо $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Докажите, что число $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ является числом Кармайкла.

4. Докажите, что при любом простом p

$$\underbrace{1\ldots1}_{p}\underbrace{2\ldots2}_{p}\underbrace{3\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{9\ldots9}_{p} - 123\ldots9 \,\vdots\, p.$$

5. Пусть p — простое число и $p > 5$. Докажите, что если разрешимо сравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

то $p \equiv 1 \pmod{5}$. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $5n+1$.