

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук  
Прикладная математика и информатика  
Бакалавриат

01.03.02. Прикладная математика и информатика

**О Т Ч Е Т**  
**по профессиональной практике**

**Производственная практика**

Выполнил студент гр. 19 ПМИ  
Нещеткин Глеб Максимович  
(ФИО)

---

(подпись)

**Проверил:**

*стажёр-исследователь,*  
*Кузьмин Никита Александрович*  
(должность, ФИО руководителя практики)

---

(подпись)

---

(дата)

1. Содержание

2. Общее описание проекта:

- Инициатор, заказчик, руководитель проекта.
- Тип проекта (*исследовательский, прикладной, сервисный*)
- Место работы по проекту (название организации, структурного подразделения/ иное)

3. Содержательная часть:

3.1 Описание хода выполнения проектного задания

3.2 Описание результатов проекта (продукта);

3.3 Описание использованных в проекте способов и технологий

4. Заключение (оценка индивидуальных результатов выполнения проекта, сформированных / развитых компетенций).

5. Результат проекта.

## 2. Общее описание проекта.

2.1. Руководитель проекта - Кузьмин Никита Александрович.

2.2. Тип проекта – Исследовательский.

2.3. Место работы по проекту - Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур.

## 3. Содержательная часть.

3.1. Тема проекта – Поиск  $n$ -вершинных деревьев с 5 листьями, имеющих наибольший индекс Хосойи.

3.2. Результат проделанной работы: Мы определили все возможные стяжки деревьев с 5 листьями [Раздел 5.1.] и провели вычислительный эксперимент (вычисление индекса Хосойи) для этих деревьев и разного числа вершин  $n$  [Раздел 5.2.]. В результате эксперимента мы определили 4 структуры деревьев с 5 листьями [Раздел 5.3.], для которых индекс Хосойи оказывался всегда больше, чем для других деревьев при равном числе вершин. С применением некоторых свойств индекса Хосойи [Раздел 5.4.], по индукции мы доказали, что именно эти 4 типа деревьев с 5 листьями имеют наибольший индекс Хосойи [Раздел 5.5.].

Дополнительно мы определили все возможные стяжки деревьев с 6 [Раздел 5.6.], для деревьев с 6 листьями провели аналогичный вычислительный эксперимент [Раздел 5.7.].

3.3. Описание использованных в проекте способов и технологий: Вычислительные эксперименты проводились на языке Python.

## 4. Заключение (оценка индивидуальных результатов выполнения проекта, сформированных компетенций).

Научился вычислять новую числовую характеристику графов – число паросочетаний (индекс Хосойи), а также изучил некоторые её свойства: разложение индекса Хосойи по ребру, разложение индекса Хосойи по подмножествам отделяющих множеств и разложение индекса Хосойи по пути.

## 5. Результаты проекта.

5.1. Все стяжки деревьев с 5 листьями.

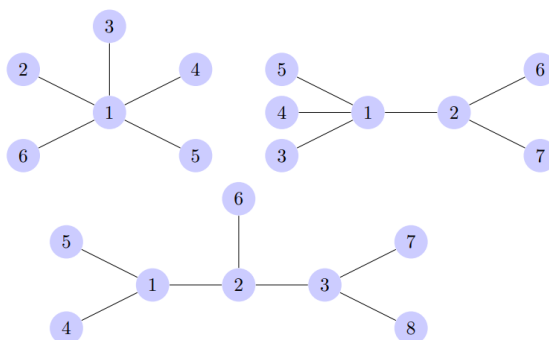


Рис.1

5.2. GitHub репозиторий с кодом вычислительного эксперимента.

<https://github.com/GlebNeshchetkin/HosoyaIndex>

5.3. Деревья, для которых индекс Хосойи максимальный, согласно результатам вычислительного эксперимента.

1)

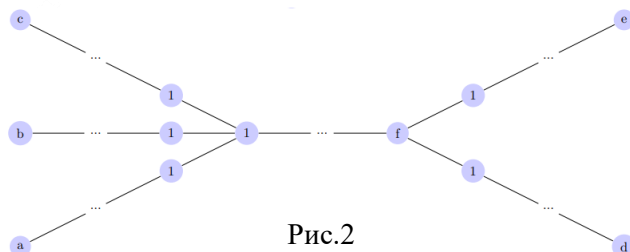


Рис.2

Такое дерево  $H(a,b,c,d,e,f)$  имеет максимальный индекс Хосойи, если  $a=b=c=e=f=2$ ;  $d=n-10$ . Изоморфные деревья также имеют максимальный индекс Хосойи.

2)

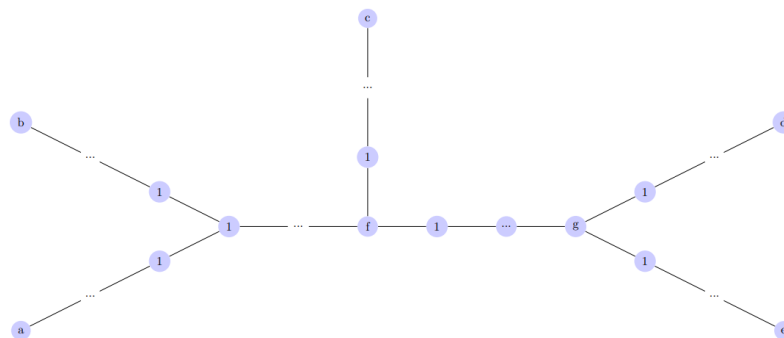


Рис.3

Такое дерево  $H(a,b,c,d,e,f,g)$  имеет максимальный индекс Хосойи в трех случаях:

- 1)  $a=b=c=d=e=f=2$ ;  $g=n-12$ .
- 2)  $a=b=c=d=e=2$ ;  $g=1$ ;  $f=n-11$ .
- 3)  $a=n-11$ ;  $b=c=d=e=f=2$ ;  $g=1$ .

5.4. Некоторые свойства индекса Хосойи.

Пусть  $Z(H(a,b,c,d,e,f))$  – значение индекса Хосойи для дерева  $H(a,b,c,d,e,f)$  [Рис.2]. Тогда справедливы равенства:

$$Z(H(a,b,c,d,e,f))=Z(H(a-1,b,c,d,e,f))+Z(H(a-2,b,c,d,e,f));$$

$$Z(H(a,b,c,d,e,f))=Z(H(a,b-1,c,d,e,f))+Z(H(a,b-2,c,d,e,f));$$

$$Z(H(a,b,c,d,e,f))=Z(H(a,b,c-1,d,e,f))+Z(H(a,b,c-2,d,e,f));$$

$$Z(H(a,b,c,d,e,f))=Z(H(a,b,c,d-1,e,f))+Z(H(a,b,c,d-2,e,f));$$

$$Z(H(a,b,c,d,e,f))=Z(H(a,b,c,d,e-1,f))+Z(H(a,b,c,d,e-2,f));$$

$$Z(H(a,b,c,d,e,f))=Z(H(a,b,c,d,e,f-1))+Z(H(a,b,c,d,e,f-2));$$

Аналогичные равенства справедливы и для дерева  $H(a,b,c,d,e,f,g)$  [Рис.3].

#### 5.5. Доказательство.

1. Дерево  $H(a,b,c,d,e,f)$  [Рис.2] имеет максимальный индекс Хосойи при параметрах  $a=b=c=e=f=2$ ;  $d=n-10$ .

Для  $n=11, 12$  – доказано с помощью вычислительного эксперимента. Пусть верно для  $n=k-1$ ,  $n=k-2$ . Тогда для  $n \geq 13$ :

Для  $n=k$ :  $Z(H(a,b,c,d,e,f)) = Z(H(a,b,c,d-1,e,f)) + Z(H(a,b,c,d-2,e,f))$ .  $H(a,b,c,d-1,e,f)$  имеет максимальный индекс, если  $H(a,b,c,d-1,e,f) = H(2,2,2,n-11,2,2)$ ,  $H(a,b,c,d-2,e,f)$  имеет максимальный индекс, если  $H(a,b,c,d-2,e,f) = H(2,2,2,n-12,2,2)$  [согласно предположению]. Следовательно,  $H(a,b,c,d,e,f)$  имеет максимальный индекс, если  $a=b=c=e=f=2$ ;  $d=n-10$ .

2. Дерево  $H(a,b,c,d,e,f,g)$  [Рис.3] имеет максимальный индекс Хосойи при параметрах  $a=b=c=d=e=f=2$ ;  $g=n-12$  или  $a=b=c=d=e=2$ ;  $g=1$ ;  $f=n-11$  или  $a=n-11$ ;  $b=c=d=e=f=2$ ;  $g=1$ .

Для  $n=13$ ,  $n=14$  – доказано с помощью вычислительного эксперимента. Пусть верно для  $n=k-1$ ,  $n=k-2$ . Тогда для  $n \geq 15$ :

2.1.  $\max(a,b,c,d,e) \geq 3$ . Пусть  $a \geq 3$ . Тогда для  $n=k$ :

$Z(H(a,b,c,d,e,f,g)) = Z(H(a-1,b,c,d,e,f,g)) + Z(H(a-2,b,c,d,e,f,g))$ . Согласно предположению:  $H(a-1,b,c,d,e,f,g)$  имеет максимальный индекс Хосойи, если  $H(a-1,b,c,d,e,f,g) = H(n-12,b,c,d,e,f,g)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-12,1)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-13)$ .  $H(a-2,b,c,d,e,f,g)$  имеет максимальный индекс для  $H(n-13,b,c,d,e,f,g)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-13,1)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-14)$ . Следовательно,  $Z(H(a,b,c,d,e,f,g))$  – максимальный, если  $a=n-11$ ,  $b=c=d=e=f=2$ ,  $d=1$ .

2.2.  $\max(a,b,c,d,e) \leq 2$ . Тогда  $a+b+c+d+e \leq 10$ ,  $f+g \geq 5$  (так как  $n \geq 15$ ).

1)  $f \geq 3$ . Тогда  $g \geq 2$ . Для  $n=k$ :

$Z(H(a,b,c,d,e,f,g)) = Z(H(a,b,c,d,e,f-1,g)) + Z(H(a,b,c,d,e,f-2,g))$ .

$Z(H(a,b,c,d,e,f-1,g))$  – максимальный, если  $H(a,b,c,d,e,f-1,g) = H(2,2,2,2,2,n-12,1)$  или  $H(n-12,2,2,2,2,1)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-13)$ .  $Z(H(a,b,c,d,e,f-2,g))$  – макс., если  $H(a,b,c,d,e,f-2,g) = H(n-13,2,2,2,2,1)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-13,1)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-14)$ . Следовательно,  $H(a,b,c,d,e,f,g)$  имеет максимальный индекс Хосойи, если  $a=b=c=d=e=2$ ,  $f=n-11$ ,  $g=1$ .

2)  $f \leq 2$ . Тогда  $g \geq 3$ . Для  $n=k$ :

$Z(H(a,b,c,d,e,f,g)) = Z(H(a,b,c,d,e,f,g-1)) + Z(H(a,b,c,d,e,f,g-2))$ .  $H(a,b,c,d,e,f,g-1)$  имеет макс. индекс Хосойи, если  $H(a,b,c,d,e,f,g-1) = H(2,2,2,2,2,n-13)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-12,1)$  или  $H(n-12,2,2,2,2,1)$ .  $H(a,b,c,d,e,f,g-2)$  имеет максимальный индекс Хосойи, если  $H(a,b,c,d,e,f,g-2) = H(2,2,2,2,2,n-14)$  или  $H(2,2,2,2,2,n-13,1)$  или  $H(n-13,2,2,2,2,1)$ . Следовательно,  $Z(H(a,b,c,d,e,f,g))$  – максимальный, если  $a=b=c=d=e=f=2$ ,  $g=n-12$ .

### 5.6. Все стяжки деревьев с 6 листьями.

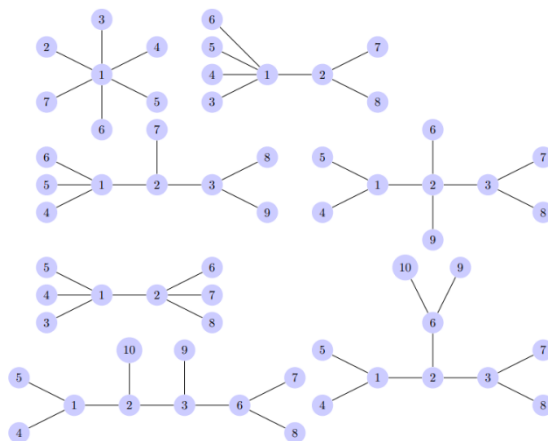


Рис.4

5.7. n-вершинные деревья с 6 листьями, с наибольшим индексом Хосойи (согласно результатам вычислительного эксперимента).

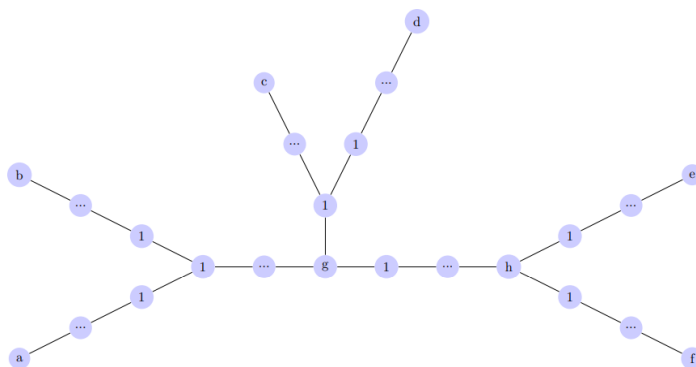


Рис.5

Дерево  $H(a,b,c,d,e,f,g,h)$  [Рис.5] имеет максимальный индекс Хосойи, если:

- 1)  $a=b=2, c=3, d=e=f=2, g=n-14, h=1$ . 3)  $a=b=2, c=n-13, d=e=f=g=2, h=1$ .  
2)  $a=b=2, c=3, d=e=f=g=2, h=n-15$ . 4)  $a=n-14, b=2, c=3, d=e=f=g=2, h=1$ .

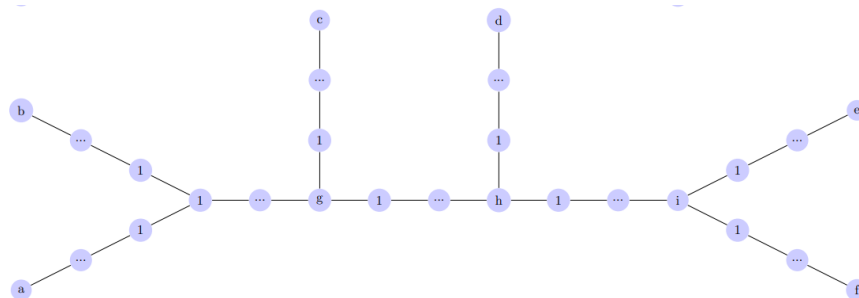


Рис.6

Дерево  $H(a,b,c,d,e,f,g,h,i)$  [Рис.6] имеет максимальный индекс Хосойи, если:

- 1)  $a=b=c=d=e=f=g=2$ ,  $h=n-15$ ,  $i=1$ .      3)  $a=b=c=d=e=f=2$ ,  $g=n-14$ ,  $h=1$ ,  $i=1$ .  
 2)  $a=b=c=d=e=f=g=2$ ,  $h=1$ ,  $i=n-15$ .      4)  $a=n-14$ ,  $b=c=d=e=f=g=2$ ,  $h=i=1$ .

Список литературы:

1. Stephan G. Wagner, Extremal trees with respect to Hosoya Index and Merrifield-Simmons Index, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 57 221-233, 2007
2. K.T. Atanassov, R. Knott, K. Ozeki, A.G. Shannon, and L. Szalay. Inequalities among related pairs of Fibonacci numbers. Fibonacci Quart., 41(1):20–22, 2003