

Task 1 : сведение матричной антагонистической игры к двум задачам линейного программирования

Пусть антагонистическая игра задана матрицей A размером $(m \times n)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить цену игры и оптимальные стратегии 1 и 2 игроков. Обозначим:

V — цена игры

$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ — оптимальная стратегия первого игрока

$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — оптимальная стратегия второго игрока

При этом, $\sum_{i=1}^m p_i = 1, \sum_{i=1}^n q_i = 1$.

Найдём p .

Предположим, что цена игры положительна. Для этого достаточно, чтобы все элементы матрицы A были положительными. В противном случае, прибавим ко всем элементам матрицы A достаточно большое положительное число M , при этом цена игры увеличится на M .

Предположим, что первый игрок применяет свою оптимальную стратегию p , а второй игрок свою чистую j -ю стратегию, тогда средний выигрыш первого игрока будет равен:

$$a_j = a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m$$

Отсюда, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + \dots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + \dots + a_{m2}p_m \geq V \\ \vdots \\ a_{1n}p_1 + \dots + a_{mn}p_m \geq V. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на $V > 0$ и произведём замену:

$$x_j = \frac{p_j}{V}, \quad j = \overline{1, m}$$

В итоге, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases}, \quad \text{или} \quad A^T x = Bx \geq I \quad (1)$$

При этом переменные x_1, \dots, x_m удовлетворяют условию:

$$F = x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{V}.$$

А так же ограничениям:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0. \quad (2)$$

Так как первый игрок максимизирует свой выигрыш, $F \rightarrow \min$ (3).

Таким образом, задача решения антагонистической игры для первого игрока свелась к задаче линейного программирования (1), (2), (3).

Для использования функции **scipy.optimize.linprog** приведём задачу к виду:

$$\begin{aligned} (x, c) &\rightarrow \min \\ Ax &\leq b. \end{aligned}$$

Для этого достаточно домножить все неравенства в (1) на (-1) .

Рассуждения для второго игрока проводятся аналогичным образом.

Итого, мы свели антагонистическую матричную игру к двум ЗЛП необходимого нам вида:

Первый игрок:	Второй игрок:
$\underbrace{A^T}_{(n \times m)} (x_1, \dots, x_m)^T \leq \underbrace{(-1, \dots, -1)^T}_{(n \times 1)}$ $\underbrace{(1, \dots, 1)}_m \cdot (x_1, \dots, x_m)^T \rightarrow \min$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$	$\underbrace{A}_{(m \times n)} (y_1, \dots, y_n)^T \leq \underbrace{(1, \dots, 1)^T}_{(m \times 1)}$ $\underbrace{(-1, \dots, -1)}_n \cdot (y_1, \dots, y_n)^T \rightarrow \min$ $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_n \geq 0$

Применение метода обосновано.

■