Task 1 : сведение матричной антагонистической игры к двум задачам линейного программирования

Пусть антагонистическая игра задана матрицей A размером $(m \times n)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить цену игры и оптимальные стратегии 1 и 2 игроков. Обозначим:

$$V - \text{цена игры}$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m) - \text{оптимальная стратегия первого игрока}$$

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n) - \text{оптимальная стратегия второго игрока}$$

При этом, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.

Найдём p.

Предположим,что цена игры положительна. Для этого достаточно,чтобы все элементы матрицы A были положительными. В противном случае, прибавим ко всем элементам матрицы A достаточно большое положительное число M, при этом цена игры увеличится на M.

Предположим, что первый игрок применяет свою оптимальную стратегию p, а второй игрок свою чистую j-ю стратегию, тогда средний выигрыш первого игрока будет равен:

$$a_j = a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m$$

Отсюда, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + \dots + a_{m1}p_m \geqslant V \\ a_{12}p_1 + \dots + a_{m2}p_m \geqslant V \\ \\ a_{1n}p_1 + \dots + a_{mn}p_m \geqslant V. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на $V > 0$ и произведём замену:

$$x_j = \frac{p_j}{V}, \quad j = \overline{1, m}$$

В итоге, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{m1}x_m \geqslant 1 \\ a_{12}x_1 + \ldots + a_{m2}x_m \geqslant 1 \\ \\ a_{1n}x_1 + \ldots + a_{mn}x_m \geqslant 1. \end{cases}, \quad \text{или} \quad A^T x = Bx \geqslant I \tag{1}$$

При этом переменные $x_1, \ldots, x_m$ удовлетворяют условию:

$$F = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V}.$$

А так же ограничениям:

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_m \geqslant 0. \tag{2}$$

Так как первый игрок максимизирует свой выигрыш, $\quad F \to \min \quad (3)$.

Таким образом, задача решения антагонистической игры для первого игрока свелась к задаче линейного программирования (1), (2), (3) .

Для использования функции **scipy.optimize.linprog** приведём задачу к виду:

$$(x, c) \to \min$$
$$Ax \leqslant b.$$

Для этого достаточно домножить все неравенства в (1) на (-1).

Рассуждения для второго игрока проводятся аналогичным образом.

Итого, мы свели антагонистическую матричную игру к двум ЗЛП необходимого нам вида:

Первый игрок:	Второй игрок:
$\underbrace{-A^T}_{(n\times m)}(x_1, \ldots, x_m)^T \leqslant \underbrace{(-1, \ldots, -1)^T}_{(n\times 1)}$ $\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{m} \cdot (x_1, \ldots, x_m)^T \to min$ $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_m \geqslant 0$	$\underbrace{A}_{(m\times n)}(y_1, \ldots, y_n)^T \leqslant \underbrace{(1, \ldots, 1)^T}_{(m\times 1)}$ $\underbrace{(-1, \ldots, -1)}_{n} \cdot (y_1, \ldots, y_n)^T \to min$ $y_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ y_n \geqslant 0$

Применение метода обосновано.

■