Task 1 : использование симплекс-метода для решения ЗЛП

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования канонического вида:

$$\langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0 \quad ,\text{где}$$
$$c \in \mathbb{R}^n - \text{вектор коэффициентов целевой функции,}$$
$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} - \text{матрица ограничений,}$$
$$b \in \mathbb{R}^m - \text{вектор правых частей ограничений}$$

Отметим, что любую задачу линейного программирования возможно привести к каноническому виду. Задача на минимум приводится к задаче на максимум путём умножения целевой функции на (-1), а ограничения вида $Ax \leqslant b$ приодятся к виду $Ax = b$ с помощью введения вспомогательных переменных (slack variables). Поэтому вид задачи, рассматриваемой нами, не ограничивает общности.

Решение симплекс-методом получается путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве. В процессе решения генерируются вершины и базисы: $\begin{matrix} x^0 & x^1 & \dots & x^t \\ B_0 & B_1 & \dots & B_t \end{matrix}$.

На очередном шаге выполняется один из трёх вариантов:

1. x^t является решением ЗЛП
2. решения нет
3. существует конструктивно указываемая вершина x^{t+1} с базисом B_{t+1}:
   (a) $x^{t+1} \neq x^t, \left\langle c, x^{t+1}\right\rangle > \langle c, x^t\rangle$
   (b) $x^{t+1} = x^t, B_{t+1} \neq B_t$

Введём следующие обозначения:

$$J_t(x) = J_t = \left\{ j \in [1,n] \mid x_j^t \geqslant 0 \right\}$$
$$B_t = \left\{ a^j \mid j \in J_t \right\}$$
$$x_t = x, B_t = B, J_t = J$$
$$a^k = \sum_{j \in J_t} a^j \lambda_{jk},\ k = \overline{1,n}, \quad \lambda_{jk} - \text{коэффициенты замещения}$$
$$\Delta_k = \sum_{j \in J_t} c_j \lambda_{jk} - c_k,\ k = \overline{1,n} - \text{оценки замещения}$$

Тогда при решении можем пользоваться следующими правилами:

Правило оптимальности: если все $\Delta_k \geqslant 0$, то x - решение ЗЛП

Правило отсутствия решения: если $\exists s \notin J : \Delta_s < 0, \lambda_j s \leqslant 0\ \forall j \in J$, то ЗЛП не имеет решений

Правило перехода к новой вершине: если $\exists s \notin J\ : \Delta_s < 0, \exists j \in J :\ \lambda_{js} > 0$, то $x'\ : x'_j = \begin{cases} x_j - \alpha\lambda_{js}, & j \in J; \\ \alpha, & j = s; \\ 0, & j \notin J,\ j \neq s \end{cases}$, $\alpha = \min\limits_{j \in J : \lambda_{js} > 0} \dfrac{x_j}{\lambda_{js}} = \{r \in J\} = \dfrac{x_r}{\lambda_{js}}$, является вершиной, а $B' = \left\{ a^j \mid j \in J' \right\}$, где $J' = \ (J \setminus \{r\})\ \cup\ \{s\}$, её базисом.

При этом:

1. если $\alpha > 0$, то $x' \neq x, \langle c, x' \rangle > \langle c, x \rangle$
2. если $\alpha = 0$, то $x' = x, B' \neq B$

А по теореме Блэнда, если при выполнении правила перехода к вершине всегда выбирать $s = min \left\{ k \notin J \mid \Delta_k < 0 \right\}$, $r = \min \left\{ j \in J \mid \lambda_{js} > 0, \dfrac{x_j}{\lambda_j s} = \alpha \right\}$, то зацикливание симплекс-метода невозможно.

Следовательно, через определённое число итераций мы приходим либо к решению, либо к факту его отсутствия.