

Análise Matemática

Gleberon Antunes

26 de Outubro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Álgebra Linear, das [Provas de Admissão ao Mestrado em Matemática na UFSM](#). As resoluções são despretensiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para gleber-sonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página [Gleberon Antunes](#).

Sumário

Sumário	1
1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2009.1	2
2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2010.1	8

1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2009.1

26 de Outubro de 2023

Exercício 1. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e T uma transformação linear de V em W .

- (a) Mostre que o núcleo de T e a imagem de T são subespaços de V e W , respectivamente.
- (b) Dado o vetor unitário $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$, projeção ortogonal de v sobre o eixo u . Mostre que $T^2(v) = T(v)$, determine o núcleo de T , a matriz de T e a matriz $H = I - 2T$ na base canônica.

Demonstração.

(a) Trivial.

(b) Seja $v \in \mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{aligned} T^2(v) &= T(T(v)) \\ &= T\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right) \\ &= \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} T(u) \\ &= \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \left(\frac{\langle u, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right) \\ &= \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
T(v) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow v \in \langle u \rangle^\perp \\
&\Rightarrow \text{Ker } T = \langle u \rangle^\perp.
\end{aligned}$$

Consideremos então o produto interno usual. Então

$$\begin{aligned}
T(1, 0, 0) &= \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} u. \\
T(0, 1, 0) &= \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} u. \\
T(0, 0, 1) &= \frac{a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} u.
\end{aligned}$$

Seja α a base canônica do \mathbb{R}^3 . Então

$$[T]_\alpha = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}.$$

Além disso

$$[H]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \frac{2a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \frac{2a_3 a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & 1 - \frac{2a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \frac{2a_3 a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \frac{2a_1 a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \frac{2a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & 1 - \frac{2a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{bmatrix}.$$

□

Exercício 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F .

(a) Mostre que os autovalores de um operador nilpotente são todos nulos.

- (b) Seja T um operador linear sobre V , tal que $\text{posto}(T) = 1$. Usando o item a), mostre que se T não é nilpotente, então T é diagonalizável.

Demonstração.

- (a) Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador nilpotente. Suponhamos que T admite algum autovalor $\alpha \in F$ não nulo. Então existe $v \in V$ não nulo tal que

$$T(v) = \alpha v.$$

Como T é nilpotente, existe m natural tal que $T^m = 0$. Seja n o menor natural (que existe pelo **Princípio da Boa Ordenação**) tal que $T^n = 0$. Então

$$\begin{aligned} T^n(v) &= \alpha^n v = 0 \\ \Rightarrow \alpha &= 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo por hipótese. Logo os autovalores de T devem ser todos iguais a zero.

- (b) Seja $n = \dim V$. Suponhamos que T não é um operador linear nilpotente. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } T &= n - 1 \\ &= \dim E_0, \end{aligned}$$

o autoespaço associado ao autovalor 0. Como o $\text{posto}(T) = 1$, então a imagem de T é uma reta. Seja $v \in V - \text{Ker } T$ não nulo tal que $\langle v \rangle = \text{Im}(T)$. Então $T(v) = \alpha v$ para algum $\alpha \in F$ não nulo. **Segue daí que o operador T é diagonalizável, uma vez que as multiplicidades algébricas e geométricas dos autoespaços A_0 e A_λ coincidem.**

□

Exercício 3. Nos itens abaixo, considere A, B, K e I matrizes $n \times n$, onde I é matriz identidade.

- (a) Seja K uma matriz anti-simétrica, isto é, $K^T = -K$. Suponha que $I - K$ é não-singular. Mostre que $I + K$ é não singular. Se $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, mostre que $B^T B = BB^T = I$.
- (b) Se M é uma matriz anti-simétrica então $I + M$ e $I - M$ são não-singulares. Demonstre esta afirmação nos casos em que M é uma matriz de ordem 2×2 e 3×3 .
- (c) Mostre que se A, B e $A + B$ possuem inversas, então o mesmo acontece com $(A^{-1} + B^{-1})$ e $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$.

Demonstração.

- (a) **Sabemos que se P uma matriz inversível, então $\det P = \det P^T$.** Suponhamos que $I - K$ é uma matriz não-singular, i.e, inversível. Então

$$\begin{aligned} \det I - K &= \det (I - K)^T \\ &= \det I - (-K) \\ &= \det I + K \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $I + K$ é não-singular.

Notemos que

$$\begin{aligned} B^T &= ((I - K)^{-1})^T (I - K) \\ &= ((I - K)^T)^{-1} (I - K) \\ &= (I + K)^{-1} (I - K). \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
(I + K)(I - K) &= (I - K)(I + K) \\
&= I - K^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
B^T B &= (I + K)^{-1}(I - K)(I + K)(I - K)^{-1} \\
&= (I + K)^{-1}(I + K)(I - K)(I - K)^{-1} \\
&= I^2 \\
&= I.
\end{aligned}$$

Como $B^T B = I$ e estamos falando de matrizes quadradas, vale $BB^T = I$, uma vez que **a inversa quando existe é única**.

(b) Seja

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

uma matriz anti-simétrica arbitrária. Então

$$\begin{aligned}
\det 1 + M &= \det \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 + a^2 \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$\begin{aligned}
\det 1 + M &= \det \begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 + a^2 \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Logo $I + M$ e $I - M$ são inversíveis quando possuem ordem 2. Seja agora

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

uma matriz anti-simétrica arbitrária. Então

$$\begin{aligned} \det 1 + M &= \det \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$\begin{aligned} \det 1 - M &= \det \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $I + M$ e $I - M$ são inversíveis quando possuem ordem 2.

(c) Se $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$, então $(A^{-1} + B^{-1}) = B^{-1}(A + B)A^{-1}$. Segue daí que

$$\begin{aligned} \det (A^{-1} + B^{-1}) &= \det B^{-1}(A + B)A^{-1} \\ &= \det B^{-1} \cdot \det (A + B) \cdot \det A^{-1} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $(A^{-1} + B^{-1})$ é inversível.

□

2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2010.1

27 de Outubro de 2023

Exercício 1. Considere o operador linear P que projeta o vetor $(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5$, no plano

$$\pi : \begin{cases} z &= ax + by, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R} \\ t &= 0 \\ w &= 0, \end{cases}$$

isto é, $P(x, y, z, t, w) = (x, y, ax + by, 0, 0)$.

- (a) Calcule a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem de P e exiba uma base para cada um deles.
- (b) Encontre o polinômio característico de P .
- (c) Mostre que P é diagonalizável.

Demonstração.

(a)

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ P(x, y, z, t, w) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \\ ax + by &= 0 \end{aligned}$$

Logo

$$\text{Ker } P = \langle (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Seja então α a base canônica do \mathbb{R}^5 . Então

$$[P]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo

$$\text{Im}(P) = \langle (1, 0, a, 0, 0), (0, 1, b, 0, 0) \rangle.$$

(b) Notemos inicialmente que

$$P(1, 0, a, 0, 0) = (1, 0, a, 0, 0)$$

$$P(0, 1, b, 0, 0) = (0, 1, b, 0, 0)$$

Logo $(1, 0, a, 0, 0)$ e $(0, 1, b, 0, 0)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$. Como o outro autovalor é 0, temos que

$$p_P(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)^2.$$

(c) Claramente P é diagonalizável. Basta notar que as multiplicidades algébricas e geométricas do autoespaço associado ao autovalor 0 e do autoespaço associado ao autovalor 1 coincidem.

□

Exercício 2. Seja V o espaço vetorial real dado pelas funções contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$.

- (a) Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ é um produto interno em V .
- (b) Exiba dois vetores não nulos ortogonais em relação ao produto interno dado em (a).
- (c) Considere $[f, g] = \int_0^{2\pi} f(x)g(2\pi - x)dx$. Então $[f, g]$ define um produto interno em V ?

Demonstração.

- (a) Sejam $f, g, h \in V$. Então

$$\begin{aligned}\langle f + h, g \rangle &= \int_0^{2\pi} (f(x) + h(x))g(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) + h(x)g(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} h(x)g(x)dx \\ &= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, g + h \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)(g(x) + h(x))dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) + f(x)h(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x)h(x)dx \\ &= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx \\ &= \langle g, f \rangle.\end{aligned}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f, g \rangle &= \int_0^{2\pi} \alpha f(x) g(x) dx \\
&= \alpha \cdot \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx \\
&= \alpha \cdot \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, \alpha g \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x) \alpha g(x) dx \\
&= \alpha \cdot \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx \\
&= \alpha \cdot \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

Seja $f \in V$. Então $f(x)^2 \geq 0$, para todo $x \in [0, 2\pi]$. Então

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \\
0 &\leq \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx.
\end{aligned}$$

(b) Consideremos as funções $x^2 - \frac{4\pi^2}{3}, 1 \in V$. Então

$$\begin{aligned}
\left\langle x^2 - \frac{4\pi^2}{3}, 1 \right\rangle &= \int_0^{2\pi} \left(x^2 - \frac{4\pi^2}{3}\right) \cdot 1 \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} x^2 - \frac{4\pi^2}{3} \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} x^2 \, dx - \int_0^{2\pi} \frac{4\pi^2}{3} \, dx \\
&= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{2\pi} - \left. \frac{4\pi^2}{3} x \right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{8\pi^3}{3} - 0 - \frac{8\pi^3}{3} + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $x^2 - \frac{4\pi^2}{3}$ e 1 são ortogonais em relação ao produto interno dado.

(c) Consideremos as funções $x, x^2 \in V$. Então

$$\begin{aligned}
[x, x^2] &= \int_0^{2\pi} x(2\pi - x)^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} 4\pi^2 x - 4\pi x^2 + x^3 dx \\
&= 12\pi^4 - \frac{32\pi^4}{3}.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
[x^2, x] &= \int_0^{2\pi} x^2(2\pi - x) dx \\
&= \int_0^{2\pi} 2\pi x^2 - x^3 dx \\
&= \frac{16\pi^4}{3} - 4\pi^4.
\end{aligned}$$

Logo

$$[x, x^2] \neq [x^2, x].$$

Portanto $[f, g]$ não é um produto interno em V .

□

Exercício 3. Prove que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico. Use isso para provar que se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} e T é um operador linear definido sobre V , então $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ produzem os mesmo autovalores para α e β bases quaisquer.

Demonstração.

1. Sejam A e B matrizes semelhantes. Então existe uma matriz quadrada P inversível tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

Sejam $p_A(\lambda)$ e $p_B(\lambda)$ os polinômios característicos de A e B , respectivamente. Note que

$$\begin{aligned}
 p_A(\lambda) &= \det (A - \lambda I) \\
 &= \det (P^{-1}BP - \lambda I) \\
 &= \det (P^{-1}BP - \lambda P^{-1}PI) \\
 &= \det P^{-1}(B - \lambda I)P \\
 &= \det P^{-1} \cdot \det (B - \lambda I) \cdot \det P \\
 &= \det (B - \lambda I) \\
 &= p_B(\lambda).
 \end{aligned}$$

Logo os polinômios característicos de matrizes semelhantes coincidem.

2. Sejam então $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e α e β bases de V . Então

$$\begin{aligned}
 [T]_{\alpha}^{\alpha} &= [I]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha} \\
 &= ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1} [T]_{\beta}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Como a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é inversível, temos que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}$ são semelhantes. **Segue do item 1 que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}$ possuem o mesmo polinômio característico e, portanto, possuem os mesmos autovalores.**

□