

Análise Matemática

Gleberson Antunes

15 de Setembro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Análise Real, das [Provas de Admissão ao Mestrado em Matemática na UFBA](#). As resoluções são despretensiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para gleber-sonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página [Gleberson Antunes](#).

Sumário

Sumário	1
1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2015.2	2
2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.1	6
3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.2	10
4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2017.2	13
5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.1	18
6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.2	27
7 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2019.1	33
8 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2023.2	37

1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2015.2

10 de Agosto de 2023

Exercício 1. Mostre que toda sequência convergente em \mathbb{R} é de Cauchy em \mathbb{R} .

Demonstração. Sejam $L \in \mathbb{R}$ e (x_n) uma sequência convergente de números reais, tal que $x_n \rightarrow L$. Como (x_n) converge, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que é tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todos $m, n > n_0$, temos que

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} .

□

Exercício 2. Use a definição formal de limite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Então

$$0 < |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2 = |x^2 - 0| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

□

Exercício 3. Determine se a função real

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $x_0 = 0$.

Demonstração. Para f ser derivável em $x_0 = 0$ é necessário e suficiente que exista $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se existir $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = L$, então para toda sequência de pontos $x_n \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que $x_n \rightarrow 0$, $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \rightarrow L$. Considere então as sequências $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ e $\left(\frac{2}{4n\pi + \pi}\right)$, que claramente convergem para 0. Note agora que

$$\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) \rightarrow 0.$$

e

$$\sin\left(\frac{2}{4n\pi + \pi}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1.$$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e, portanto, f não é derivável em $x_0 = 0$.

□

Exercício 4.

(a) Derive a função $f(x) = \sqrt[3]{(e^{x^2} \cdot x^3 + 1)^2}$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$.

Demonstração.

(a) Seja $u(x) = e^{x^2} \cdot x^3 + 1$. Então

$$u'(x) = e^{x^2} 3x^2 + x^3 e^{x^2} 2x.$$

Segue daí que

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e^{x^2} \cdot x^3 + 1}} \cdot e^{x^2} 3x^2 + x^3 e^{x^2} 2x.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x)\ln(x)}.$$

Como a função $f(x) = e^x$ é contínua, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x)\ln(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x)\ln(x)\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\sin(x)^{-1}}\right).$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x)^{-1} = \infty$, a **Regra de L'Hopital** nos garante que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\sin(x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x \cos(x) \cotg(x)} = 0$$

.

Logo, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x)\ln(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\sin(x)^{-1}}\right) = e^0 = 1.$$

□

Exercício 5. Considere o conjunto $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Mostre que X é um conjunto aberto de \mathbb{R} . O conjunto X é um compacto de \mathbb{R} ?

Demonstração. Note que

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (z, z+1),$$

que é aberto, pois é uma união de abertos da reta. Se fosse verdade que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é compacto, então ele seria fechado e limitado. Sendo fechado, \mathbb{Z} seria aberto. Seguiria então que

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z},$$

é a união de dois abertos disjuntos. Logo, \mathbb{R} seria desconexo, o que é um absurdo.

□

2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.1

10 de Agosto de 2023

Exercício 1. Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência que é convergente, então ela própria é convergente.

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy, (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) e $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $x_{n_k} \longrightarrow a$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_2 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para todo

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Exercício 2. Demonstre o Teorema da Conservação do Sinal: Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) > 0$ então existe um intervalo aberto J que contém x_0 e que é tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in J$.

Demonstração. Tomemos $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Então existe $\delta > 0$ que é tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \left(\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2} \right).$$

Ou seja, $f(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

Exercício 3. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine $g'(x)$ para todo $x \neq 0$.

(b) Verifique se g é diferenciável em $x_0 = 0$ e escreva a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0.

Demonstração.

(a) Seja $x \neq 0$. Então

$$g'(x) = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

pela **Regra de L'Hopital**. A reta tangente ao gráfico de g o ponto de abscissa 0 é

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

□

Exercício 4. Seja f uma função real que é duas vezes diferenciável e tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas em todo ponto $x \in \mathbb{R}$; seja ainda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^x f(t^2) dt.$$

Justifique que g é três vezes diferenciável, calcule $g'(x)$ e $g''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ e aproveite o resultado para estudar, quanto à concavidade e inflexões, o gráfico de g .

Demonstração. Definamos $t = \sqrt{u}$, então $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. Quando $t = 0$ temos $u = 0$ e quando $t = x$, temos $u = x^2$. Logo

$$g(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{f(u)}{\sqrt{u}} du.$$

Segue do **Teorema Fundamental do Cálculo** que

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x^2)}{\sqrt{x^2}} \cdot 2x = f(x^2).$$

Consequentemente

$$g''(x) = f'(x^2) \cdot 2x \quad \text{e} \quad g'''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2).$$

Notemos que $g''(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. Logo g tem concavidade para cima nessa região. De forma semelhante, temos que $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$. Logo g tem concavidade para baixo nessa região. Como $g''(0) = 0$ e $g'''(x) \neq 0$, g possui um ponto de inflexão em 0.

□

Exercício 5. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Mostre f não é integrável à Riemann em $[0, 1]$, ou seja, mostre que não existe $\int_0^1 f(x)dx$ no sentido de Riemann.

Demonstração. Sabemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável **se, e somente se, o conjunto de suas descontinuidades possui medida nula**. Provaremos agora que o conjunto D das descontinuidades de f coincide com o intervalo $[a, b]$, que evidentemente não possui medida nula. A inclusão $D \subset [a, b]$ é óbvia.

Seja $x_0 \in [a, b]$ qualquer. Se fosse verdade que f é contínua em x_0 , então para toda sequência de pontos $x_n \in [a, b]$, tal que $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Como \mathbb{R} e \mathbb{Q} são densos em \mathbb{R} , podemos montar uma sequência (r_n) de racionais e uma sequência (i_n) de irracionais em $[a, b]$ que convergem para x_0 . Note então que

$$f(r_n) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(i_n) = 1 \rightarrow 1.$$

Como $x_0 \in [a, b]$ é racional ou irracional, uma das sequências $f(r_n)$ ou $f(i_n)$ não convergirá para $f(x_0)$. Logo, f é descontínua em x_0 . Desse modo, $[a, b] \subset D$ e, portanto, $D = [a, b]$. Segue daí que f não é Riemann integrável.

□

3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.2

12 de Agosto de 2023

Exercício 1. Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência que é convergente, então ela própria é convergente.

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy, (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) e $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $x_{n_k} \rightarrow a$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_2 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para todo

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Exercício 2. Demonstre o Teorema da Conservação do Sinal: Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) > 0$ então existe um intervalo aberto J que contém x_0 e que é tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in J$.

Demonstração. Tomemos $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Então existe $\delta > 0$ que é tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \left(\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2} \right).$$

Ou seja, $f(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

Exercício 3. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine $g'(x)$ para todo $x \neq 0$.

(b) Verifique que g é diferenciável em $x_0 = 0$ e escreva a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0.

Demonstração.

(a)

$$g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0,$$

pela **Regra de L'Hopital**. Segue daí que a reta tangente ao gráfico de g no ponto $x = 0$ é $y = 1$. □

Exercício 4. Seja f uma função real que é duas vezes diferenciável e tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ são negativas em todo ponto $x \in \mathbb{R}$; seja ainda $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^x f(t)^2 dt.$$

Justifique que g é três vezes diferenciável, calcule $g'(x)$ e $g''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ e aproveite o resultado para estudar, quanto à concavidade e inflexões, o gráfico de g .

Demonstração. Como f é derivável, então f^2 é também derivável. **Logo f^2 admite uma primitiva, isto é, uma função derivável $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.** Segue do **Teorema Fundamental do Cálculo** que

$$g'(x) = f(x)^2, \quad g''(x) = 2f(x)f'(x) \quad \text{e} \quad 2f(x)f'(x) + 2f''(x)^2.$$

Note que a primeira derivada é sempre positiva. **Logo g é uma função crescente.** Como a segunda derivada é positiva, temos que g' é crescente. **Logo g possui concavidade para cima.** Como a terceira derivada é positiva e g'' é também positiva, temos que g **não admite pontos de inflexão.**

□

Exercício 5. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Determine para quais valores de t a pré-imagem $f^{-1}(\{t\})$ é um aberto de \mathbb{R} .

Demonstração. Se $t = 0$, então $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \cap [0, 1]$, que como sabemos, não é um aberto de \mathbb{R} . De forma análoga, se $t = 1$, então $f^{-1}(\{0\}) = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, que não é aberto de \mathbb{R} . Note que, para todo $t \in (\mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$, $f^{-1}(\{t\}) = \emptyset$, que é um aberto de \mathbb{R} .

□

4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2017.2

13 de Agosto de 2023

Exercício 1. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que a função $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ é contínua no ponto $a \in X$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existem δ_1 e δ_2 maiores que zero, que são tais que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(a)| < \varepsilon.$$

□

Exercício 2. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

f é integrável? Justifique. Se sim, qual o valor de $\int_0^1 f(x)dx$.

Demonstração. Sabemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável **se, e somente se, o conjunto de suas descontinuidades possui medida nula**. Provaremos agora que o conjunto D das descontinuidades de f coincide com o intervalo $[0, 1]$, que evidentemente não possui medida nula. A inclusão $D \subset [0, 1]$ é óbvia.

Seja $x_0 \in [0, 1]$ qualquer. Se fosse verdade que f é contínua em x_0 , então para toda sequência de pontos $x_n \in [0, 1]$, tal que $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Como \mathbb{R} e \mathbb{Q} são densos em \mathbb{R} , podemos montar uma sequência (r_n) de racionais e uma sequência (i_n) de irracionais em $[0, 1]$ que convergem para x_0 . Note então que

$$f(r_n) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(i_n) = 1 \rightarrow 1.$$

Como $x_0 \in [0, 1]$ ou é racional ou é irracional, uma das sequências $f(r_n)$ ou $f(i_n)$ não convergirá para $f(x_0)$. Logo, f é descontínua em x_0 . Desse modo, $[0, 1] \subset D$ e, portanto, $D = [0, 1]$. Segue daí que f não é Riemann integrável.

□

Exercício 3. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada. Prove que $\{x_n\}$ converge se, e somente se, possui um único valor de aderência. Mostre que o resultado não vale se tirarmos a hipótese de $\{x_n\}$ ser limitada.

Demonstração. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um **valor de aderência** da sequência (x_n) se existe uma subsequência $(x_{n(k)})$ de (x_n) que converge para a . Se (x_n) é uma sequência limitada, então ela possui exatamente dois valores de aderência, que chamaremos de α e β , e que são tais que, nenhum número menor que α e nenhum número maior que β podem ser valores de aderência de (x_n) . Esses valores são construídos da seguinte maneira:

(a) Como (x_n) é limitada, existe $K > 0$ tal que $|x_n| < K$. Considere então os conjuntos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$. É possível montar uma sequência decrescente de conjuntos

$$[-K, K] \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$$

Definindo $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$ obtemos $\alpha = \lim a_n$ e $\beta = \lim b_n$. Eles existirão uma vez que a sequência (a_n) é monótona não-decrescente limitada e a sequência (b_n) é monótona não-crescente limitada.

\Rightarrow Se $x_n \rightarrow a$, então toda subsequência $x_{n(k)} \rightarrow a$. Logo a é o único valor de aderência de (x_n) .

\Leftarrow Suponhamos que (x_n) possui um único valor de aderência a . Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que é tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |b_n - a| < \varepsilon.$$

Ou seja, para todo $n > n_0$ temos

$$a - \varepsilon < a_n \leq a \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Como $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, temos

$$a - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ou seja, $x_n \rightarrow a$.

Considere a sequência

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

Essa sequência não é limitada e, apesar de possuir um único valor de aderência, que é o 0, ela não é convergente.

Exercício 4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$ e $bc > 0$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico de $f(x) = a(x - b)(x - c)$ tais que a reta tangente passa pela origem.

Demonstração. Sendo $f(x) = ax^2 - a(b + c)x + bc$, teremos $f'(x) = 2ax - a(b + c)$. Seja (x_0, y_0) um ponto arbitrário do gráfico de f . Então $y_0 = f(x_0) = ax_0^2 - a(b + c)x_0 + bc$ e $f'(x_0) = 2ax_0 - a(b + c)$. Então a reta tangente ao gráfico de f e que toca no ponto (x_0, y_0) é dada por

$$y = f'(x_0)x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{\text{Passa pela origem se igual a 0}}.$$

Temos então que

$$f(x_0) - f'(x_0)x_0 = ax_0^2 - a(b + c)x_0 + bc - 2ax_0^2 + a(b + c)x_0.$$

$$= -ax_0^2 + bc.$$

Logo

$$-ax_0^2 + bc = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}$$

□

Exercício 5. Determine, sem usar nenhum método de integração, $f(x)$ sabendo que

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2} \text{ e } f(0) = \frac{1}{3}.$$

Demonstração. Seja $u = \arctan x$. Então $du = \frac{dx}{1 + x^2}$. Segue daí que

$$\int f'(x)dx = \int \frac{u}{1+x^2} \cdot (1+x^2)du = \int f(u)du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\arctan^2 x}{2} + c.$$

Então, aplicando f em 0 obtemos

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{2} + c.$$

Daí

$$f(x) = \frac{\arctan^2 x}{2} + \frac{1}{3}.$$

□

5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.1

13 de Agosto de 2023

Exercício 1. Considere A um subconjunto infinito arbitrário de \mathbb{R} , fixado. Mostre que as seguintes afirmações sobre A são equivalentes:

- (a) Todo subconjunto infinito de A possui um ponto de acumulação.
- (b) Toda sequência de pontos de A possui uma subsequência convergente.

Em seguida, exiba um subconjunto não-enumerável da reta que satisfaça (a qualquer uma, logo ambas) essas propriedades, justificando cuidadosamente toda e qualquer afirmação feita.

Demonstração.

(a) Seja (x_n) uma sequência de pontos de A . Se $x(\mathbb{N})$ for finito, então facilmente conseguimos montar uma subsequência de (x_n) que converge. Suponhamos agora que $x(\mathbb{N})$ é infinito. Por hipótese, $x(\mathbb{N})' \neq \emptyset$. Seja $a \in x(\mathbb{N})'$.

Se tomarmos $\varepsilon = 1$, existirá $x_{n_1} \in [(a - 1, a + 1) - \{a\}] \cap x(\mathbb{N})$. Seja $\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |x_{n_1} - a|\right\}$. Então existe $x_{n_2} \in [(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) - \{a\}] \cap x(\mathbb{N})$. Seja $\varepsilon_3 = \min\left\{\frac{1}{3}, |x_{n_2} - a|\right\}$. Então existe $x_{n_3} \in [(a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3) - \{a\}] \cap x(\mathbb{N})$. Prosseguindo dessa maneira, obteremos uma subsequência de pontos $x_{n_k} \in x(\mathbb{N})$ que é tal que

$$|x_{n_{k+1}} - a| < |x_{n_k} - a| \quad \text{e} \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{n}.$$

Pelo **Teorema do Confronto**, como $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $x_{n_k} - a \longrightarrow 0$. Ou seja, $x_{n_k} \longrightarrow a$.

(b) Seja $B \subset A$ infinito. Então existe um conjunto $C \subset B$ que é enumerável. Existe também uma sequência de termos dois a dois distintos (qualquer contagem de C) de $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n : \mathbb{N} \longrightarrow C.$$

Por hipótese, existe uma subsequência $(\phi_{n'})$ de (ϕ_n) convergente. Seja $a = \lim \phi_{n'}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, $\phi^{-1}(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ é infinito. Como ϕ é injetiva, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de C . Logo, é um ponto de acumulação de C .

□

Exercício 2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais e contínuas e suponha que $x_0 \in \mathbb{R}$ satisfaça $f(x_0) < g(x_0)$. Mostre que existe $\delta > 0$ que é tal que $f(x) < g(x)$ sempre que $|x - x_0| < \delta$.

Demonstração. Tome $\varepsilon = \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$. Então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ que são tais que

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \left(\frac{-g(x_0) + 3f(x_0)}{2}, \frac{g(x_0) + f(x_0)}{2} \right).$$

e

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow g(x) \in \left(\frac{g(x_0) + f(x_0)}{2}, \frac{3g(x_0) - f(x_0)}{2} \right).$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x).$$

□

Exercício 3. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em \mathbb{R} , porém **não diferenciável** em $x = 0$, e seja f definida pela igualdade

$$f(x) = 1 + xg(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que f é diferenciável no ponto $x = 0$.
- (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da f no ponto de interseção desse gráfico com o eixo y . Mostre ainda que se g for uma função estritamente crescente em \mathbb{R} então o ponto de tangência será o único ponto de interseção entre a reta tangente exibida e o gráfico da f .

Demonstração.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + xg(x) - 1 + 0g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0).$$

(b) Como f é diferenciável em $x = 0$, o coeficiente angular da reta tangente ao ponto $(0, f(0))$ é $g(0)$. Sendo assim

$$y - 1 = g(0)(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = g(0)x + 1.$$

Suponhamos agora que g é estritamente crescente, i.e, se $a < b$ então $g(a) < g(b)$.

Suponhamos agora que existe um ponto $z \neq 0$ que é tal que $y(z) = f(z)$. Então

$$g(0)z + 1 = 1 + zg(z)$$

$$\Rightarrow g(0) = g(z),$$

o que é um absurdo, uma vez que sendo $z \neq 0$, ou $z < 0$ ou $0 < z$. Como g é estritamente crescente, $g(0) \neq g(z)$. Logo, o ponto de tangência será o único ponto de interseção entre a reta tangente exibida e o gráfico da f .

□

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em \mathbb{R} e suponha que f satisfaça

$$\int_0^x f(t)dt = xf(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $f(3) = 5$, determine $f(-3)$. Justifique todas as suas afirmações.

Demonstração. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. O **Teorema Fundamental do Cálculo** juntamente com a **Regra da Cadeia** nos garantem que

$$g'(x) = f(x) = xf'(x) + f(x).$$

Ou seja

$$x \cdot f'(x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$, temos que f é constante nos intervalos abertos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Dado $\alpha > 0$, o **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (0, \alpha)$ que é tal que

$$f'(c) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}.$$

Daí

$$0 = \frac{5 - f(0)}{\alpha} \Rightarrow f(0) = 5.$$

Aplicando novamente o **Teorema do Valor Médio** em um intervalo $[\beta, 0]$, onde $\beta < 0$, vai existir algum ponto $d \in (\beta, 0)$ que é tal que

$$f'(d) = \frac{f(0) - f(\beta)}{-\beta}.$$

Daí

$$0 = \frac{5 - f(\beta)}{\beta} \Rightarrow f(\beta) = 5.$$

Como β é arbitrário, concluímos que $f(x) = 5$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f(-3) = 5$.

□

Lema 1. Sejam X e Y subconjuntos limitados de \mathbb{R} , tais que $x \leq y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Então $\sup X \leq \inf Y$. A igualdade vale se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ arbitrário. Para todo $y \in Y$ temos que $x_0 \leq y$. Então $x_0 \leq \inf Y$. Como x_0 é arbitrário, $x \leq \inf Y$ para todo $x \in X$. Consequentemente, $\sup X \leq \inf Y$.

⇐ Sabemos que $\sup X \leq \inf Y$. Se for $\sup X < \inf Y$, tome $\varepsilon = \inf Y - \sup X$. Então, para todo $x \in X$ e $y \in Y$ temos $y - x \geq \varepsilon$. De fato

$$y - x - (\inf Y - \sup X) = y - \inf Y + \sup X - x \geq 0$$

\Rightarrow Suponhamos agora que $\sup X = \inf Y$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que

$$y < \sup X + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x.$$

Daí

$$y - x < \varepsilon.$$

□

Exercício 5. Dadas partições

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\} \quad \text{e} \quad Q = \{a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b\},$$

de $[a, b]$, dizemos que Q **refina** P se $P \subseteq Q$.

(a) Considere $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada qualquer, fixada. Mostre que:

Quando se refina uma partição, a soma inferior de f não diminui e a soma superior de f não aumenta, i.e, se Q refina P então

$$s(f; P) \leq s(f; Q) < S(f; P) \leq S(f; Q).$$

(b) Prove o **Crítério de Riemann** para integrabilidade: Uma função limitada

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ (que pode depender de ε) que é tal que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$.

Demonstração. Seja P uma partição de $[a, b]$. Para cada $1 \leq i \leq n$, sejam $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$ e $M_i = \sup f([t_{i-1}, t_i])$. Definimos então a **soma inferior de f relativa à partição P** e a **soma superior de f relativa à partição P** , respectivamente, como sendo

$$s(f; P) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{e} \quad S(f; P) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Por indução, seja Q uma partição de $[a, b]$ que refina P em um único ponto, isto é, $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ e $Q = \{t_0, t_j, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ são tais que $Q = P \cup \{t_j\}$. Sejam $\alpha = \inf f([t_0, t_j])$, $\alpha' = \sup f([t_0, t_j])$, $\beta = \inf f([t_j, t_1])$ e $\beta' = \sup f([t_j, t_1])$. Como $f([t_0, t_j]), f([t_j, t_1]) \subset f([t_0, t_1])$, temos que $m_1 \leq \alpha, \beta$ e $\alpha', \beta' \leq M_1$. Segue daí que $s(f; P) \leq s(f; Q)$, uma vez que

$$\begin{aligned} s(f; Q) &= \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = m_1(t_j - t_0) + m_1(t_1 - t_j) + \sum_{i=2}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \alpha(t_j - t_0) + \beta(t_1 - t_j) + \sum_{i=2}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = s(f; Q), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \alpha'(t_j - t_0) + \beta'(t_1 - t_j) + \sum_{i=2}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq M_1(t_j - t_0) + M_1(t_1 - t_j) + \sum_{i=2}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = S(f; P). \end{aligned}$$

Suponhamos agora que a afirmação é válida para um certo $n > 1$, isto é, se Q uma partição de $[a, b]$ que refina P em n pontos, então $s(f; P) \leq s(f; Q) < S(f; P) \leq S(f; P)$. Tomando agora uma partição T de $[a, b]$ que refina Q em um único ponto, temos que $s(f; Q) \leq s(f; T) \leq S(f; T) \leq S(f; Q)$, pelo que provamos anteriormente. Consequentemente, $s(f; P) \leq s(f; T) \leq S(f; T) \leq S(f; P)$. Logo a afirmação está provada para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sejam \mathcal{N} o conjunto de todas as partições de $[a, b]$, $s\mathcal{N} = \{s(f; P) \mid P \in \mathcal{N}\}$ o conjunto das somas inferiores de todas as partições de \mathcal{N} e $S\mathcal{N} = \{S(f; P) \mid P \in \mathcal{N}\}$ o conjunto das somas superiores de todas as partições de \mathcal{N} .

1. Notemos inicialmente que, dadas partições $P, Q \in \mathcal{N}$, $s(f; P) \leq S(f; Q)$. De fato, como $P \cup Q$ refina P , temos que

$$s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q).$$

Sejam

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup s\mathcal{N} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) \, dx = \inf S\mathcal{N}.$$

Pelo **Lema 1**, temos que $\sup s\mathcal{N} \leq \inf S\mathcal{N}$. Uma função f é dita Riemann-Integrável quando

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

\Rightarrow Suponhamos que f é Riemann-integrável. Pelo **Lema 1**, dado $\varepsilon > 0$, existem partições $T, Q \in \mathcal{N}$ tais que

$$S(f; Q) - s(f; T) < \varepsilon.$$

Tomemos $P = Q \cup T$. Pelo item (a) temos que $s(f; T) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; Q)$. Segue daí que

$$S(f; P) - s(f; P) \leq S(f; Q) - s(f; T) < \varepsilon.$$

\Leftarrow

Imediato do **Lema 1**.

□

6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.2

19 de Agosto de 2023

Exercício 1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que f é uniformemente contínua.

Demonstração. Seja $x_0 \in [a, b]$ qualquer. Como f é contínua em x_0 , dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta_{x_0} > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta_{x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A coleção

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(x_0 - \frac{\delta_{x_0}}{2}, x_0 + \frac{\delta_{x_0}}{2} \right); |x - x_0| < \frac{\delta_{x_0}}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

é uma cobertura aberta de $[a, b]$. Logo admite uma subcobertura finita

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \left(x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2} \right); 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Tome

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2}; 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Então

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

De fato, como $x \in [a, b]$, existe $1 \leq k \leq n$ tal que $x \in \left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2} \right)$. Sabemos que $|x - y| \leq |x - x_k| + |x_k - y|$. Como $|x_k - y| \leq |x_k - x| + |x - y| < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \delta < \delta_{x_k}$, ou seja $|x_k - y| < \delta_{x_k} \Rightarrow |f(x_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

□

Exercício 2. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

f é integrável? Justifique. Se sim, qual o valor de $\int_0^1 f(x)dx$.

Demonstração. Sabemos que uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável **se, e somente se, o conjunto de suas descontinuidades possui medida nula**. Provaremos agora que o conjunto D das descontinuidades de f coincide com o intervalo $[0, 1]$, que evidentemente não possui medida nula. A inclusão $D \subset [0, 1]$ é óbvia.

Seja $x_0 \in [0, 1]$ qualquer. Se fosse verdade que f é contínua em x_0 , então para toda sequência de pontos $x_n \in [0, 1]$, tal que $x_n \longrightarrow x_0$, $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Como \mathbb{R} e \mathbb{Q} são densos em \mathbb{R} , podemos montar uma sequência (r_n) de racionais e uma sequência (i_n) de irracionais em $[0, 1]$ que convergem para x_0 . Note então que

$$f(r_n) = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(i_n) = 1 \longrightarrow 1.$$

Como $x_0 \in [0, 1]$ ou é racional ou é irracional, uma das sequências $f(r_n)$ ou $f(i_n)$ não convergirá para $f(x_0)$. Logo, f é descontínua em x_0 . Desse modo, $[0, 1] \subset D$ e, portanto, $D = [0, 1]$. Segue daí que f não é Riemann integrável.

□

Exercício 3. Seja $\{x_n\}$ uma sequência tal que $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $\{x_n\}$ converge? Justifique.

Demonstração. Considere a sequência

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

Temos então $(x_n) = \left(1, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}, \dots\right)$. Notemos que

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \right| = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{n},$$

porém (x_n) diverge. Para ver isto, basta considerar a sequência

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k},$$

que corresponde a $\frac{1}{2}$ vezes a sequência das reduzidas da **série harmônica**.

Como $2n-1 < 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o fato da série harmônica divergir nos garante que (y_n) diverge, temos que (x_n) também deve divergir.

□

Exercício 4. Considere a função

$$f(x) = \int_{-x^3+1}^{e^{5x}+3x+1} \sqrt{1+t^2} \ln(1+t^2) dt.$$

Calcule $f'(0)$.

Demonstração. O **Teorema Fundamental do Cálculo** juntamente com a **Regra da Cadeia** nos garantem que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1 + (e^{5x} + 3x + 1)^2} \ln(1 + (e^{5x} + 3x + 1)^2) (5e^{5x} + 3) \\ &\quad - \sqrt{1 + (-x^3 + 1)^2} \ln(1 + (-x^3 + 1)^2) (-3x^2). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$f'(0) = 4\sqrt{5} \ln(5).$$

□

Lema 1. Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se p é contínua em um ponto $c \in [a, b]$ e $p(c) > 0$ então $\int_a^b p(x)dx > 0$.

Demonstração. Sendo p contínua em c e $p(c) > 0$, existe uma vizinhança de c de raio $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow p(x) > \frac{p(c)}{2},$$

pelo **Teorema da Conservação de Sinal**. Seja $[\beta_1, \beta_2] \subset (c - \delta, c + \delta) \subset [a, b]$.

Então

$$0 < \frac{p(c)(\beta_2 - \beta_1)}{2} \leq \int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x)dx.$$

Daí

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^{\beta_1} p(x)dx + \int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x)dx + \int_{\beta_2}^b p(x)dx > 0,$$

uma vez que

$$\int_a^{\beta_1} p(x)dx, \int_{\beta_2}^b p(x)dx \geq 0$$

.

□

Exercício 5. Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)dx = 0$ então o conjunto $Y = \{x \in [a, b] ; p(x) = 0\}$ é denso em $[a, b]$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que Y não é denso em $[a, b]$. Então existe um ponto $\alpha \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap Y = \emptyset.$$

Seja $[\beta_1, \beta_2] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset [a, b]$. Então

$$[\beta_1, \beta_2] \cap Y = \emptyset.$$

Sabemos que: **Toda função Riemann-integrável é limitada e uma função limitada é Riemann-integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.**

Sendo p Riemann-integrável, então p deve ser contínua em algum ponto $x \in [a, b]$. De fato, se p fosse descontínua em todos os pontos de $[a, b]$, então ela não poderia ser Riemann-integrável, já que a medida desse intervalo não é nula.

Suponhamos então que p é descontínua em todos de $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap [a, b]$. Então p é descontínua em $[\beta_1, \beta_2]$. Mas isso é um absurdo, uma vez que p não seria integrável em $[\beta_1, \beta_2]$, já que a medida desse intervalo é não-nula. Ou seja, existe um ponto $c \in [\beta_1, \beta_2]$ em que p é contínua e $p(c) > 0$.

Pelo **Lema 1**, temos que

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x)dx > 0.$$

Consequentemente

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^{\beta_1} p(x)dx + \int_{\beta_1}^{\beta_2} p(x)dx + \int_{\beta_2}^b p(x)dx > 0,$$

uma vez que

$$\int_a^{\beta_1} p(x)dx, \int_{\beta_2}^b p(x)dx \geq 0,$$

o que é absurdo, por hipótese. Logo o conjunto Y deve ser denso em $[a, b]$.

□

7 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2019.1

16 de Agosto de 2023

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Mostre que $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Sabemos que **uma sequência é convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy**. Provaremos agora que se $a_n \longrightarrow a$, então $f(a_n) \longrightarrow f(a)$.

Sendo f contínua em a , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Como (a_n) converge para a , dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta.$$

Então

$$n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Logo, $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ e, portanto, $(f(a_n))$ é uma sequência de Cauchy.

□

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que $f'(x)$ existe para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) f' é contínua no ponto $x = 0$?

Demonstração.

(a) Se $x \neq 0$ então

$$f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se $x = 0$, então

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

uma vez que $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

(b) Sabemos que se uma função f é derivável num ponto x , então f é contínua em x .

Note que

$$f''(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} - 2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} + 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

que claramente não é uma função contínua em 0. Logo f' não é contínua em 0.

□

Exercício 3. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathbb{R} com a seguinte propriedade: cada subsequência $(a_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem pelo menos uma $(a_{n_{k_l}})_{n_{k_l} \in \mathbb{N}}$ que converge para e os limites de todas estas subsubsequências coincidem. Mostre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ o limite de cada uma dessas subsubsequências. Suponha-
mos, por absurdo, que $a_n \not\rightarrow a$. Existe então $\varepsilon > 0$, tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe
um $n_k > k$ que é tal que

$$n_k > k \Rightarrow |x_{n_k} - a| \geq \varepsilon.$$

A subsequência (x_{n_k}) não admite nenhuma subsequência que converge para a , o que
é absurdo. Logo $a_n \rightarrow a$. □

Exercício 4. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, i.e., f é duas vezes diferenciável e f'' é uma função
contínua. Suponha também que $f''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é um
polinômio.

Demonstração. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado arbitrário. Como $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, f' é
contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe
para cada $x \in (a, b)$, um ponto $c \in (a, x)$ tal que

$$0 = f''(c) = \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(a).$$

Logo, f' é constante em $[a, b]$. Como esse intervalo é arbitrário, f' é constante em \mathbb{R} .
Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = a$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Definamos a função $g(x) = ax$. Então

$$f(x) - ax = k,$$

Uma vez que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue que

$$f(x) = ax + k,$$

Logo é um polinômio de grau no máximo 1.

□

Exercício 5. Seja $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

f é uma função limitada? Caso seja, justifique. Caso não seja, dê um contra-exemplo.

Demonstração. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$\int_0^\infty |f(x)|dx = \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x)dx = 0.$$

Mas, f é ilimitada.

□

8 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2023.2

04 de Setembro de 2023

Parte I

Nas questões a seguir, assinale a(s) alternativa(s) corretamente com verdadeiro (V) ou falso (F). Cada questão vale 1 ponto.

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. A reta horizontal $y = L$ é chamada de assíntota horizontal à direita da curva $y = f(x)$ se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

- (a) Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, então f possui assíntota horizontal à direita.
- (b) Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é extremo de f .
- (c) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in A \subset \mathbb{R}$, então a restrição de f a A é crescente.
- (d) Se $f'(x)$ é nula em infinitos pontos, então f não pode ser estritamente crescente.
- (e) Se x_0 é um ponto de inflexão de f , então x_0 é extremo de f' .

Demonstração.

- (a) Falso. Consideremos a função $f(x) = \ln(x)$. Sabemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Note porém que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

mas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty.$$

(b) Falso. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Note que $f'(0) = 0$, mas 0 não é um extremo de f .

(c) Falso. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sin x$ e $A = \{0.1, 5.2\}$. Note que $f'(0.1) = 0.995$ e $f'(5.2) = 0.4865$, mas $\sin(5.2) < \sin(0.1)$.

(d) Verdade.

(e) Falso.

□

Exercício 2. Considere as seguintes séries e analise as afirmações a seguir.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, se $a_n \rightarrow 0$.

(b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2}{3}$.

(d) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ é convergente.

(e) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ é divergente.

Demonstração.

(a) Falso. Note que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

(b) Falso. A afirmação é equivalente a provar que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Note porém que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2,$$

mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

diverge.

(c) Falso. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ é uma série geométrica. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}.$$

(d) Falso. Tome $\sqrt{x} = u$. Então $x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$. Pelo **Teste da Integral** temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} &= 2 \int_1^{\infty} \frac{u^2}{u^2+1} du = \lim_{A \rightarrow \infty} 2 \int_1^A \frac{u^2}{u^2+1} du = \lim_{A \rightarrow \infty} 2 \int_1^A \left(\frac{-1}{u^2+1} + 1 \right) du \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} 2(-\arctan(u) + u) \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} 2(-\arctan(\sqrt{x}) + \sqrt{x}) \Big|_1^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} -2 \arctan(\sqrt{A}) + \sqrt{A} + \frac{\pi}{2} - 2 \\ &= -1 + \infty + \frac{\pi}{2} - 2 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverge.

(e) Falso.

□

Exercício 3. Considere as seguintes sequências de números reais e analise as afirmações a seguir.

(a) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(b) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

(c) Toda sequência de Cauchy em \mathbb{R} é convergente.

(d) Se $|a_n| \rightarrow a$, com $a \in [0, +\infty)$, então $a_n \rightarrow a$ ou $a_n \rightarrow -a$.

(e) Se $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, então $\ln a_n \rightarrow 0$.

Demonstração.

(a) Falso.

(b) Verdade.

(c) Verdade.

(d) Falso. Considere a sequência

$$s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto (-1)^n.$$

Note que $|(-1)^n| \rightarrow 1$, mas $(-1)^n$ diverge.

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 1,$$

uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n} = 0.$$

Segue daí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n\right] = \ln(1) = 0.$$

□

Parte II

Resolver as seguintes questões, justificando por extenso cada resposta.

Cada questão vale 1 ponto.

Exercício 4. Seja $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ contínua. Prove que f possui pelo menos um ponto fixo, i.e. existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Consideremos a função contínua

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - f(x). \end{aligned}$$

Como $a \leq f(a)$ e $f(b) \leq b$, devemos ter

$$a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b).$$

Se for $a - f(a) = 0$ ou $b - f(b) = 0$, então f possui um ponto fixo. Do contrário, sendo $a - f(a) < 0 < b - f(b)$, o **Teorema do Valor Intermediário** nos garante que existe um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} x_0 - f(x_0) &= 0 \\ \Rightarrow f(x_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Logo f possui um ponto fixo.

□

Exercício 5. Prove que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f é constante.

Demonstração.

\Rightarrow Sabemos que $|x - y|^2 = (x - y)^2$. Fixado $y_0 \in \mathbb{R}$, note que

$$|f(x) - f(y_0)| \leq |x - y_0|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y_0)}{x - y_0} \right| \leq |x - y_0|.$$

$$\Leftrightarrow -|x - y_0| \leq \frac{f(x) - f(y_0)}{x - y_0} \leq |x - y_0|.$$

Como $\lim_{x \rightarrow y_0} -|x - y_0| = \lim_{x \rightarrow y_0} |x - y_0| = 0$, o **Teorema do Confronto** nos garante que

$$\lim_{x \rightarrow y_0} \frac{f(x) - f(y_0)}{x - y_0} = 0.$$

Ou seja, a derivada de f no ponto y_0 é igual a 0. Como y_0 é arbitrário, f deve ser constante, pelo **Corolário 1 do Teorema 7, do capítulo de Derivadas** de Curso de Análise vol 1.

\Leftarrow Óbvio.

□