Topologia Geral
Eixo 12: Tópicos especiais de Matemática

Gleberson Gregorio da Silva Antunes

Resumo

Seja X um conjunto. Uma topologia τ_X em X é uma coleção de subconjuntos de X que contém o todo, o vazio e é fechada para união arbitrárias e interseções finitas. Nosso objetivo neste trabalho é fazer uma breve introdução sobre Topologia Geral, apresentando conceitos básicos e resultados mais gerais sobre espaços topológicos e funções contínuas.

Palavras-chaves: Topologia; Topologia Geral; Espaços topológicos.

Introdução

A Topologia enquanto área da Matemática e objeto de estudo, surgiu por volta da século XIX e desde então, têm demonstrado extrema relevância uma vez que possui aplicações em diversas áreas, como por exemplo, no estudo dos Sistemas Dinâmicos e da Geometria Diferencial. Uma topologia em um conjunto X consiste em uma coleção de subconjuntos de X, isto é, uma coleção $\tau_X \subset P(X)$, o conjunto das partes de X, que contém o todo, o vazio e é fechada para união arbitrárias e interseções finitas.

Na seção 1 serão introduzidos conceitos básicos Topologia Geral como topologia, espaço topológico, conjuntos abertos e fechados e demonstraremos alguns teoremas. Na seção 2 apresentaremos a definição de base de uma topologia e introduziremos um dos objetos mais importantes no estudo de grupos topológicos, os filtros. Na seção 3 falaremos sobre a continuidade de funções em espaços topológicos tentando generalizar a ideia de continuidade de funções de uma variável real e apresentando algumas demonstrações. Na seção 4 estudaremos a topologia quociente e na seção 5 estudaremos a conexidade.

1 Topologia Geral: Definição e exemplos

Nesta seção, apresentaremos noções básicas de Topologia Geral como topologia, espaço topológico, conjuntos abertos e fechados, fecho, interior, pontos de acumulação, derivado e topologia do subespaço.

Definição 1.1. Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

(2) Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família arbitrária de elementos de τ_X, então U = $\bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$.

(3) Se U_1, ..., U_n são elementos de τ_X, então U = $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau_X$.

O par (X, τ_X), onde X é um conjunto e τ_X é uma topologia em X é chamado de *espaço topológico*. Os elementos U $\in \tau_X$ são chamados de *abertos da topologia* ou simplesmente *abertos*. Daremos agora alguns exemplos de topologias.

Exemplo 1.1. Seja X um conjunto e $P(X)$ o conjunto das partes de X. Então, $P(X)$ é uma topologia em X, chamada de *topologia discreta*.

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto e $I = \{\emptyset, X\}$. Então, I é um topologia em X, chamada de *topologia caótica*.

Exemplo 1.3. Seja X = {a, b, c} e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Então, τ é uma topologia em X.

Exemplo 1.4. Seja X = $\mathbb{R}$. Então, $\tau_{\mathbb{R}} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists\ (a,b)$, a < b, $x \in (a,b) \subset U\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}$.

Figura 1 - Conjunto aberto em $\mathbb{R}$ munido com a topologia usual.

Fonte: Acervo do autor.

Exemplo 1.5. Seja X = $\mathbb{R}^n$. Então, $\tau_{\mathbb{R}^n}$ = {U $\subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists$ B$_\varepsilon(x)$, $x \in$ B$_\varepsilon(x) \subset$ U} é uma topologia em $\mathbb{R}^n$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$.

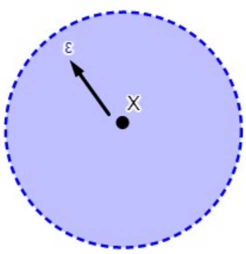

Figura 2 - B$_\varepsilon$(x): A bola aberta de centro x e raio ε é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ munido da topologia usual.

Fonte: Acervo do autor.

Agora definiremos os conjuntos fechados. Os conjuntos fechados são importantes na Topologia pois são o complementar de um conjunto aberto. Isso nos permite definir novos conjuntos e provar resultados sobre conjuntos abertos sem necessariamente trabalhar com estes.

Definição 1.2. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $F \subset X$. Então, F é dito *fechado* em X ou simplesmente *fechado* se $F^c = X - F \in \tau_X$.

Exemplo 1.6. $\emptyset, X$ são fechados em X pois $\emptyset^c = X$ e $X^c = \emptyset$ são abertos.

Exemplo 1.7. Considere $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$ onde $\tau_\mathbb{R}$ é a topologia usual de $\mathbb{R}$. Então, todo intervalo fechado [a,b] é fechado em $\mathbb{R}$ pois $[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \tau_\mathbb{R}$.

Exemplo 1.8. Seja (X, τ_X) o espaço topológico descrito no Exemplo 1.3. Então, os subconjuntos fechados em X são: $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}$.

Teorema 1.1. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Então:

(1) A interseção arbitrária de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado.

(2) A união finita de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado.

Demonstração: Imediata pelas Leis de DeMorgan.

É possível notar que os conjuntos fechados possuem propriedades semelhantes aos abertos da topologia. Isso é verdade pois qualquer afirmação sobre conjuntos abertos é também uma afirmação sobre os conjuntos fechados e mais ainda, pode-se também definir topologia em um conjunto por meio dos conjuntos fechados utilizando este teorema.

Definição 1.3. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $U \subset X$. O *interior* de U, representado por int(U) ou U°, é a união de todos os abertos que estão contidos em U.

Definição 1.4. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $U \subset X$. O *fecho* de U, representado por $\bar{U}$ é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contém U.

Alguns autores, quando falam de vizinhanças de um ponto, estão se referindo a um conjunto aberto que contém esse ponto. Utilizaremos uma definição um pouco diferente, que também é correta, e será necessária na seção 5.

Definição 1.5. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Uma *vizinhança* de um ponto $x \in$ X é um conjunto U que contém um subconjunto aberto N_x tal que $x \in N_x \subset U$. O conjunto N_x é chamado de *vizinhança aberta* de x.

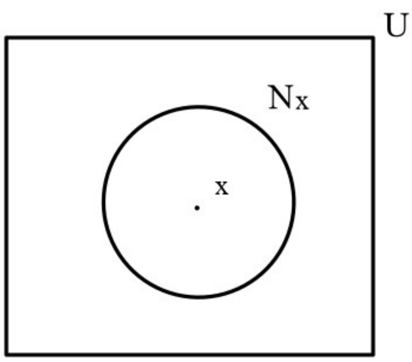

Figura 3 - Vizinhança de um ponto

Fonte: Acervo do autor.

O próximo Teorema é importante pois ele estabelece uma condição para que um subconjunto de um espaço topológico seja aberto relacionando-o com vizinhanças abertas.

Teorema 1.2 Seja (X, τ_X) um espaço topológico e U $\subset$ X. Então, U $\in \tau_X$ se,e somente se, U contém uma vizinhança aberta para cada um dos seus pontos.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se U é aberto então ele é uma vizinhança aberta para cada um dos seus pontos.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se U contém uma vizinhança aberta N_x para cada um dos seus pontos então

$$\mathrm{U} = \bigcup_{x \in U} \mathrm{N}_x$$

é aberto, pois é a união arbitrária de abertos.

Decorre deste Teorema que um conjunto é aberto se, e somente se, é igual ao seu interior.

Definição 1.6. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. Um ponto x $\in$ X é dito um ponto de acumulação de A se toda vizinhança aberta N_x de x é tal que (N_x - $\{x\}$) $\cap$ A $\neq \emptyset$.

Definição 1.7. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. O *derivado* de A, representado por A$'$, é o conjunto de todos os pontos de acumulação de A.

Teorema 1.3. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. A é fechado em X se, e somente se, A$'$ $\subset$ A.

Teorema 1.4. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X não-vazio. Então $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança aberta N_x de x intersecta A não trivialmente.

Definição 1.8. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. A *fronteira* de A, representado por ∂A, é formado por todos os pontos x de X que são tais que toda vizinhaça aberta Nx de x intersecta A e A^c não trivialmente.

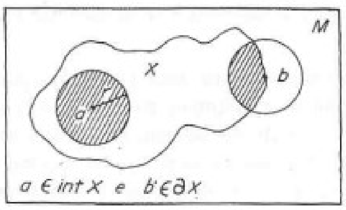

Figura 4 - Interior e fronteira de um subconjunto

Fonte: LIMA, 2020, p. 62.

Teorema 1.5. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. Então, A é fechado se, e somente se, contém sua fronteira.

Definição 1.9. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. A *topologia subespaço* em A é definida da seguinte maneira:

$$\tau_A := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{A} \mid \mathrm{U} = \mathrm{V} \cap \mathrm{A},\ \mathrm{V} \in \tau_X\}$$

Teorema 1.6. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. Então τ_A é uma topologia em A.

2 Bases de uma topologia e topologia produto

Nesta seção prepararemos o terreno para iniciar o estudo de grupos topológicos. Definiremos base de uma topologia, a topologia produto e por fim definiremos filtro e base de um filtro.

Definição 2.1. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Uma coleção β de subconjuntos de X, cujos elementos são chamados de *abertos básicos*, é dita uma *base* para uma topologia em X se:

(1) $\bigcup\limits_{B \in \beta} B =$ X.

(2) Se $x \in$ B$_1 \cap$ B$_2$, com B$_1$, B$_2 \in \beta$, então existe B$_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

A condição 1 é equivalente a dizer que β cobre X, isto é, para cada $x \in$ X, existe B $\in \beta$ tal que $x \in$ B. A *topologia gerada* por β é a coleção:

$$\tau_\beta := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{X} \mid \forall x \in \mathrm{U},\ \exists\ \mathrm{B} \in \beta,\ x \in B \subset \mathrm{U}\}.$$

Exemplo 2.1. A coleção $\mathscr{C} = \{\mathrm{U} \subset \mathbb{R} \mid \forall\ x \in \mathrm{U},\ \exists\ [\mathrm{a,b}),\ \mathrm{a} < \mathrm{b},\ x \in [\mathrm{a,b}) \subset \mathrm{U}\}$ gera uma topologia $\tau_{L\mathbb{R}}$ em $\mathbb{R}$, chamada de *topologia da mão esquerda.*

Exemplo 2.2. A coleção $\mathscr{D} = \{\mathrm{V} \subset \mathbb{R} \mid \forall\ x \in \mathrm{V},\ \exists\ (\mathrm{a,b}],\ \mathrm{a} < \mathrm{b},\ x \in (\mathrm{a,b}] \subset \mathrm{V}\}$ gera uma topologia $\tau_{R\mathbb{R}}$ em $\mathbb{R}$ chamada de *topologia da mão direita.*

Exemplo 2.3 Seja ρ a coleção de todos os circulos e ψ a coleção formada pelo interior de todos os retângulos, no plano. Então, ρ e ψ são bases de uma topologia no plano.

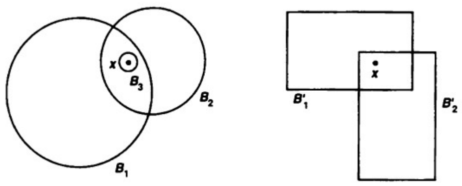

Figura 5 - ρ e ψ satisfazem a condição ii) do exemplo 2.1

Fonte: MUNKRES, 2000, p. 78.

Definição 2.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos quaisquer. A *topologia produto* em X $\times$ Y, representada por $\tau_{X \times Y}$, é a topologia gerada pela base:

$$\beta := \{\mathrm{U} \times \mathrm{V} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \mid \mathrm{U} \in \tau_X,\ \mathrm{V} \in \tau_Y\}.$$

Um *filtro* é um objeto matemático que é utilizado para estudar convergência em espaços topológicos. Aqui, porém, não estamos diretamente interessados em convergência.

Definição 2.4. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X é chamada de filtro se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

(2) Se A, B $\in \mathscr{F}$ então A $\cap$ B $\in \mathscr{F}$.

(3) Se A $\in \mathscr{F}$ e A $\subset$ B, então B $\in \mathscr{F}$.

Exemplo 2.4. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Dado $x \in X$, chamamos de *filtro de vizinhanças* de x conjunto $\mathscr{V} = \{\text{U} \subset \text{X} \mid \exists N_x \in \tau_X, \text{x} \in N_x \subset \text{U}\}$ formado por todas as vizinhanças U de x.

Assim como uma base de uma topologia gera uma topologia, uma base de um filtro gera um filtro de maneira semelhante.

Definição 2.5. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X é chamada de *base de um filtro* se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\emptyset \notin \mathscr{B}$.

(2) Se B_1, $\text{B}_2 \in \mathscr{B}$ então existe $\text{B}_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

O filtro $\mathscr{F}$ gerado por $\mathscr{B}$ é o conjunto:

$$\mathscr{F} = \{\text{U} \subset \text{X} \mid \exists \text{ B} \in \mathscr{B}, \text{B} \subset \text{U}\}.$$

3 Funções contínuas e homeomorfismos

Nesta seção, falaremos sobre a continuidade de funções entre espaços topológicos, definiremos o que são homeomorfismos e apresentaremos algumas proposições que serão úteis na seção 4 e 5. Nosso objetivo é generalizar a ideia de continuidade de funções de uma variável real.

Definição 3.1 Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita contínua se, dado U $\in \tau_Y$ qualquer, $f^{-1}(\text{U}) \in \tau_X$.

É fácil ver que essa definição de continuidade que foi apresentada agora, é equivalente a definição de continuidade utilizando $\epsilon - \delta$, no caso em que $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é o nosso espaço topológico e estamos falando de funções de uma variável real. Na verdade, trata-se de uma generalização para espaços topológicos mais ou menos abstratos.

Teorema 3.1. Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \to Z$ funções contínuas. Então, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é uma função contínua.

Teorema 3.2. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e A $\subset$ X. Então, $f|_A : A \longrightarrow Y$ é uma função contínua.

Teorema 3.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então, são equivalentes:

(1) $f : X \to Y$ é uma função contínua.

(2) Se β é uma base da topologia τ_Y em Y, então $f^{-1}(\text{B}) \in \tau_X$, $\forall$ B $\in \beta$.

(3) $\forall x \in$ X, $\forall$ $\text{N}_{f(x)}$ de $f(x)$, $\exists N_x$ de x tal que $N_x \subset f^{-1}(\text{N}_{f(x)})$.

(4) $\forall x \in$ X, $\forall$ $\text{N}_{f(x)}$ de $f(x)$, $\exists N_x$ de x tal que $f(N_x) \subset N_f(x)$.

(5) Seja U $\subset$ Y fechado. Então $f^{-1}(\text{U})$ é fechado em X.

Definição 3.2. Uma função f : X $\longrightarrow$ Y é dita contínua em um ponto x se satisfaz a condição 4 do Teorema 3.3 para um certo x pertencente a X.

Obviamente, se f satisfaz essa condição para todo x pertencente a X então f é na verdade contínua em todo seu domínio.

Teorema 3.4. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e f : X $\longrightarrow$ Y uma função. Se f é contínua então f : X $\longrightarrow$ f(X) $\subseteq$ Y é também contínua.

Teorema 3.5. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Então, as funções:

$$\begin{aligned} p_x : \quad X \times Y &\longrightarrow X \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} p_y : \quad X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x,y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

chamadas *projeções*, são contínuas quando X x Y está munido com topologia produto.

Demonstração: Seja U $\in \tau_X$, então p_x^{-1}(U) = U x Y $\in \tau_{X \times Y}$, logo p$_x$ é contínua. A continuidade de p_y se dá de forma análoga.

Teorema 3.6. Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) espaços topológicos e $f : Z \longrightarrow$ X $\times$ Y. Então, f é contínua se, e somente se, $p_x \circ f$ e $p_y \circ f$ são funções contínuas.

Teorema 3.7. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Então, as funções:

$$\begin{aligned} i_x : \quad X &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (x,y) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i_y : \quad Y &\longrightarrow X \times Y \\ y &\longmapsto (x,y) \end{aligned}$$

chamadas *aplicações de inclusão*, são contínuas quando X $\times$ Y está munido da topologia produto.

Demonstração: Segue do Teorema 3.5.

Definição 3.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita um mapa aberto se f(U) $\in \tau_Y$, $\forall$ U $\in \tau_X$. De forma análoga, $f : X \longrightarrow Y$ é dita um mapa fechado se f(U) $\subset$ Y é fechado, $\forall$ U $\subset$ X fechado.

Definição 3.4. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ contínua cuja inversa é contínua.

Definição 3.5. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Dizemos que (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são homeomorfos (denotamos por $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$) se existir um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Exemplo 3.1. Os espaços topológicos $(\mathbb{R}, \tau_{L\mathbb{R}})$ e $(\mathbb{R}, \tau_{R\mathbb{R}})$ dos Exemplos 2.1 e 2.2 são homeomorfos.

Do ponto de vista da topologia, dois espaços topológicos homeomorfos são equivalentes. Por isso, existe uma piada na comunidade matemática sobre como um topólogo não consegue diferenciar dois objetos simples, como por exemplo, uma caneca de café de uma rosquinha de donuts ou um quadrado de uma circunferência pois esses objetos são homeomorfos.

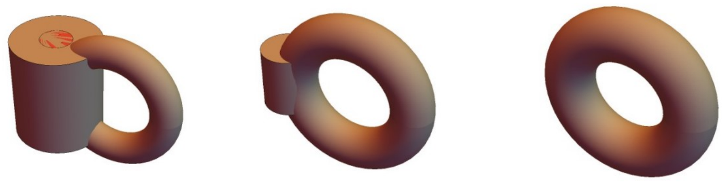

Figura 6 - Coffee Mug to Donut

Fonte: S. M. Blinder, 2007.

Exemplo 3.2. Considere $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{S}^2})$ a esfera unitária e $([-1,1]^3 - (-1,1)^3, \tau_{[-1,1]^3-(-1,1)^3})$ o cubo unitário, ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, munidos com a topologia do teorema 1.5. Então, existe um homeomorfismo entre esses dois espaços topológicos.

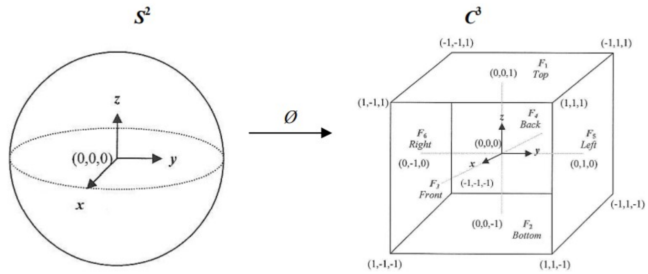

Figura 7 - Mapa de $\mathbb{S}^2$ para $([-1,1]^3 - (-1,1)^3)$

Fonte: IDRIS, AHMAD e MAAN, 2014.

Teorema 3.8. Uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ contínua é um homeomorfismo se, e somente se, leva abertos em abertos.

4 Topologia quociente

Nesta seção, falaremos sobre a topologia quociente. Nosso objetivo é, dado um espaço topológico (X, τ_X) e uma relação de equivalência $\sim$ em X, tornar o conjunto quociente de X por $\sim$ um espaço topológico.

Definição 4.1. Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Chamamos de *classe de equivalência de x* o conjunto:

$$[\mathrm{x}] := \{\mathrm{y} \in \mathrm{X} \mid \mathrm{y} \sim \mathrm{x}\}.$$

Definição 4.2. Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Definimos o *conjunto quociente* de X por $\sim$ como o conjunto:

$$\mathrm{X}/\!\sim\ := \{[\mathrm{x}] \mid \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}.$$

Seja então (X, τ_X) um espaço topológico, $\sim$ uma relação de equivalância em X e X/$\sim$ o conjunto quociente de X por $\sim$. Existe uma aplicação natural sobrejetiva, conhecida como *projeção canônica*, dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} : X &\longrightarrow \mathrm{X}/\!\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Teorema 4.1. A coleção:

$$\tau_{X/\sim} := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{X}/\!\sim \mid \mathrm{q}^{-1}(\mathrm{U}) \in \tau_X\}$$

é uma topologia, chamada de *topologia quociente*, em X/∼.

Exemplo 4.1. Considere o espaço topológico $([0,1], \tau_{[0,1]})$ com a topologia herdada por $(\mathbb{R},\ \tau_{\mathbb{R}})$ do exemplo 1.4. Defina $0 \sim 1$ e $\mathrm{x} \sim \mathrm{x}\ \forall \mathrm{x} \in X \neq 0$. Então, $([0,1]_{/\sim}, \tau_{[0,1]_{/\sim}})$ é homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$, o círculo unitário.

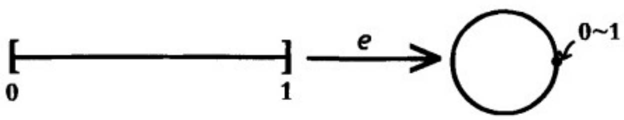

Figura 8 - Representação do homeomorfismo entre $([0,1]_{/\sim}, \tau_{[0,1]_{/\sim}})$ e $(\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$

Fonte: SHICK, 2007, p. 103.

Exemplo 4.2. Considere $([0,1]^2, \tau_{[0,1]^2})$ o quadrado de lado 1 com a topologia herdada de $(\mathbb{R}^2,\ \tau_{\mathbb{R}^2})$ do exemplo 1.5. Defina $(\mathrm{x},0) \sim (\mathrm{x},1)$ e $(\mathrm{y},0) \sim (\mathrm{y},1)$, $\forall \mathrm{x,y} \in [0,1]$. Então, $([0,1]^2_{/\sim}, \tau_{[0,1]^2_{/\sim}}) = \mathbb{T}^2$, o toro.

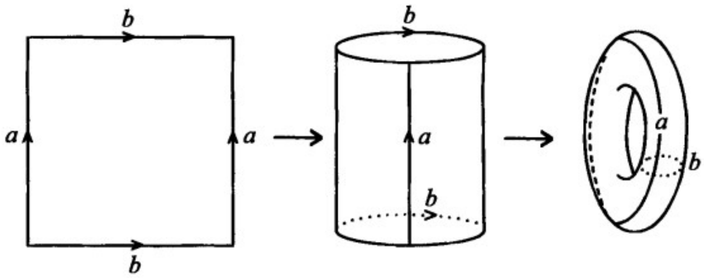

Figura 9 - Construção do Toro

Fonte: SHICK, 2007, p. 104.

5 Conexidade

Um invariante topológico é uma propiedadade de espaços topológicos que é preservada por homeomorfismos, portanto, é muito útil para verificar se dois espaços topológicos são ou não homeomorfos. Nesta seção, apresentaremos um invariante topológico conhecido como conexidade.

Definição 5.1. Um espaço topológico (X, τ_X) é dito *desconexo* se for a união de dois subconjuntos de X abertos, não-vazios e disjuntos. Ele será dito *conexo* se não for desconexo.

Daremos agora alguns exemplos de conjuntos conexos e desconexos.

Exemplo 5.1. Seja X um conjunto com cardinalidade maior ou igual a dois e $P(X)$ a topologia do Exemplo 1.1. Então, $(X, P(X))$ é um espaço topológico desconexo.

Exemplo 5.2. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia $\tau_{L\mathbb{R}}$ do Exemplo 2.1. Então, $(\mathbb{R}, \tau_{L\mathbb{R}})$ é desconexo.

Exemplo 5.3. Seja X um conjunto não-vazio. Então, (X, I), onde é I é a topologia do Exemplo 1.2, é sempre desconexo.

Exemplo 5.4. $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, onde $\tau_{\mathbb{R}}$ é a topologia usal, é conexo.

Provaremos agora uma equivalência que melhor caracteriza os espaços topológicos conexos.

Teorema 5.1. São equivalentes:

(1) (X, τ_X) é conexo.

(2) X, $\emptyset$ são os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados, em X.

(3) Se $A \subset X$ tem fronteira vazia então A = X ou A = $\emptyset$.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Se existisse um subconjunto A de X não-vazio que fosse simultaneamente aberto e fechado então A^c também seria aberto e fechado. Logo, X poderia ser expresso como a união disjunta de dois subconjuntos abertos, e portanto, seria desconexo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja A um subconjunto de X que tenha a fronteira vazia. Então, não existe x em X tal que

$$\mathrm{x} \cap \mathrm{A} \neq \emptyset \text{ e } \mathrm{x} \cap \mathrm{A}^c \neq \emptyset$$

Desse modo, dado qualquer x em X, ou ele vai estar em A ou vai estar em A^c. Portanto, A = X ou A = $\emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que (X, τ_X) é desconexo. Então, existem dois subconjuntos C e D abertos e disjuntos de X tais que

$$\mathrm{X} = \mathrm{C} \cup \mathrm{D}$$

Como C é também fechado, segue do Teorema 1.5 que C contém a sua fronteira. Ora, sabemos que toda vizinhança de um ponto x pertencente a ∂ C intersecta C e C^c = D não trivialmente. Mas, dado qualquer x pertencente a ∂ C, C é uma vizinhança aberta de x tal que

$$\mathrm{C} \cap \mathrm{D} = \emptyset$$

Logo, C = X ou C = $\emptyset$ e, portanto, (X, τ_X) é conexo.

Agora, mostraremos que a conexidade é preservada por homeomorfismos, isto é, se dois espaços topológicos são homeomorfos e um deles é conexo então o outro também será conexo.

Teorema 5.2. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ um homeomorfismo. Então, (X, τ_X) é conexo se, e somente se, (Y, τ_Y) é conexo.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos (X, τ_X) conexo. Então, existem dois subconjuntos C e D abertos e disjuntos de X tais que

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{C} \cup \mathrm{D} \\ \emptyset &= \mathrm{C} \cap \mathrm{D} \end{aligned}$$

Segue do Teorema 3.8 que

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= f(\mathrm{X}) \cup f(\mathrm{Y}) \\ \emptyset &= f(\mathrm{X}) \cap f(\mathrm{Y}) \end{aligned}$$

onde $f(\mathrm{X})$ e $f(\mathrm{Y})$ são abertos da topologia em Y. Portanto (Y, τ_Y) é conexo.

($\Leftarrow$) Análogo, basta considerar $f^{-1} : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ e usar o fato de que essa aplicação também leva abertos em abertos.

Esse resultado é importante pois nos permite verificar se dois espaços são homeomorfos verificando se são conexos. Se um deles não for então não pode existir um homeomorfismo entre esses dois espaços. É óbvio que o fato de dois espaços serem conexos não implica necessariamente que eles são homeomorfos.

Exemplo 5.5. $(\mathbb{R}, \tau_{L\mathbb{R}}) \ncong (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ pois um é desconexo e o outro não.

O próximo teorema relaciona a imagem de um espaço topológico conexo com funções contínuas.

Teorema 5.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ uma função contínua. Se (X, τ_X) é conexo então $(Im(f), \tau_{Im(f)})$ munido da topologia do subespaço é um espaço topológico conexo.

Teorema 5.4. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $\{\mathrm{A}_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma família de subespaços conexos de X que possui pelo menos um ponto em comum. Então, $\mathrm{A} = \bigcup A_\lambda$ é um subespaço conexo de X.

Teorema 5.5. O produto cartesiano finito de espaços topológicos conexos, munido da topologia produto, é conexo.

6 Considerações finais

Os estudos desenvolvidos para a realização deste trabalho se deram em parte pela Orientação à Pesquisa III, componente curricular obrigatório do curso Licenciatura em Matemática da UEFS, onde estudei Topologia Geral por um semestre e Orientação à Pesquisa IV, onde continuei os estudos de Topologia Geral e iniciei o estudo de grupos topológicos.

7 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, pelas orientações em Topologia Geral, que foram a base para realização deste trabalho.

8 Referências

IDRIS, Amidora; AHMAD, Tahir; MAAN, Normah. **Homeomorphism between sphere and cube**. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, v. 4, n. 2, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. 3ª. ed. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2014. 297 p.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 6ª. ed. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2020. 308 p.

MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 574 p. Disponível em: https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0. Acesso em: 10 set. 2022.

MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

SHICK, Paul L. **Topology: point-set and geometric**. John Wiley Sons, 2011.

S. M. Blinder. **Coffee mug to donut**, 2007. Disponível em: https://demonstrations.wolfram.com/CoffeeMugToDonut/. Acesso em: 12 set, 2022.