Grupos Topológicos

Gleberson Gregorio da Silva Antunes
Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

XVI Semana de Matemática da UESC

18 de Outubro de 2023

Estrutura da apresentação

Grupos topológicos

Definição 1.1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G.

Grupos topológicos

Definição 1.1

Sejam $(G,\cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G,\cdot,\tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon G\times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y, \end{aligned}$$

Grupos topológicos

Definição 1.1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \cdot\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação de** G, respectivamente, são contínuas.

Grupos topológicos

Definição 1.1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i\colon G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação de** G, respectivamente, são contínuas.

Daremos agora alguns exemplos de grupos topológicos.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.2

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.2

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$. A topologia

$$\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, ab\}, \{a, b\}, \mathbb{K}_4\},$$

é tal que $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.2

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$. A topologia

$$\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, ab\}, \{a, b\}, \mathbb{K}_4\},$$

é tal que $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1.3

Considere o grupo $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ e $N = \{1, \bar{1}\}$.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.2

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$. A topologia

$$\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, ab\}, \{a, b\}, \mathbb{K}_4\},$$

é tal que $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1.3

Considere o grupo $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ e $\mathrm{N} = \{1, \bar{1}\}$. A topologia τ gerada pela base

$$B = \{\{1, \bar{1}\}, \{i, \bar{i}\}, \{j, \bar{j}\}, \{k, \bar{k}\}\}$$

torna $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ um grupo topológico.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.4

Seja $(\mathbb{Z}, +)$ o grupo aditivo dos números inteiros.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.4

Seja $(\mathbb{Z}, +)$ o grupo aditivo dos números inteiros. Dado um número primo p arbitrário considere a família

$$V_p := \{U \subset \mathbb{Z} \ ; \ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n\mathbb{Z} \subset U\}.$$

Grupos Topológicos

Exemplo 1.4

Seja $(\mathbb{Z}, +)$ o grupo aditivo dos números inteiros. Dado um número primo p arbitrário considere a família

$$V_p := \{U \subset \mathbb{Z}\ ;\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n\mathbb{Z} \subset U\}.$$

A coleção

$$\tau = \{V \subset \mathbb{Z} \mid \text{para todo } v \in V, \text{existe } U \in V_p \text{ tal que } v + U \subset V\},$$

torna $\mathbb{Z}$ um grupo topológico.

Grupos topológicos

Teorema 1.5

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. Então (G, τ_G) é discreto se, e somente se, $\{1_G\}$ é aberto.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.6

Sejam $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$ o grupo topológico do **Exemplo 1.3** e $N = \{1, \bar{1}\}$.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.6

Sejam $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$ o grupo topológico do **Exemplo 1.3** e N $= \{1, \overline{1}\}$. Considere o grupo quociente

$$\mathbb{Q}_8/\{1, \overline{1}\} = \{\{1, \overline{1}\},\ i\{1, \overline{1}\},\ j\{1, \overline{1}\},\ k\{1, \overline{1}\}\},$$

munido da topologia quociente.

Grupos Topológicos

Exemplo 1.6

Sejam $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$ o grupo topológico do **Exemplo 1.3** e N $= \{1, \bar{1}\}$. Considere o grupo quociente

$$\mathbb{Q}_8/\{1, \bar{1}\} = \{\{1, \bar{1}\},\ i\{1, \bar{1}\},\ j\{1, \bar{1}\},\ k\{1, \bar{1}\}\},$$

munido da topologia quociente. Note que

$$q^{-1}\left(\left\{\{1, \bar{1}\}\right\}\right) = \{1, \bar{1}\} \in \tau_{\mathbb{Q}_8}.$$

Grupos Topológicos

Exemplo 1.6

Sejam $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$ o grupo topológico do **Exemplo 1.3** e $\mathrm{N} = \{1, \overline{1}\}$. Considere o grupo quociente

$$\mathbb{Q}_8/\{1, \overline{1}\} = \{\{1, \overline{1}\},\ i\{1, \overline{1}\},\ j\{1, \overline{1}\},\ k\{1, \overline{1}\}\},$$

munido da topologia quociente. Note que

$$q^{-1}\left(\left\{\{1, \overline{1}\}\right\}\right) = \{1, \overline{1}\} \in \tau_{\mathbb{Q}_8}.$$

Ou seja, $\left\{\{1, \overline{1}\}\right\} \in \tau_{Q_8/\{1,\overline{1}\}}$. Portanto, $(\mathbb{Q}_8/\{1, \overline{1}\}, \tau_{\mathbb{Q}_8/\{1,\overline{1}\}})$ é discreto, pelo **Teorema 1.4**.

Grupos topológicos

Teorema 1.7

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \circ, \tau_H)$ grupos topológicos e $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ um homomorfismo de grupos.

Grupos topológicos

Teorema 1.7

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \circ, \tau_H)$ grupos topológicos e f : G $\rightarrow$ H um homomorfismo de grupos. Então f é contínua se, e somente se, f é contínua em $1_G \in$ G.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Definição 1.8

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ uma topologia em G.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Definição 1.8

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ uma topologia em G. Dado $g \in G$, chamamos de **filtro de todas as vizinhanças de** g o conjunto

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Definição 1.8

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ uma topologia em G. Dado $g \in G$, chamamos de **filtro de todas as vizinhanças de** g o conjunto

$$\mathcal{V}(g) := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{G} \mid \mathrm{g} \in N_g \subset U, \text{ para algum } N_g \in \tau_G\},$$

formado por todas as vizinhanças de g $\in$ G.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Apresentamos agora a definição de filtro viável. Ela será essencial mais à frente, quando formos determinar algumas condições para que um grupo munido de uma topologia se torne um grupo topológico.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Apresentamos agora a definição de filtro viável. Ela será essencial mais à frente, quando formos determinar algumas condições para que um grupo munido de uma topologia se torne um grupo topológico.

Definição 1.9

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Apresentamos agora a definição de filtro viável. Ela será essencial mais à frente, quando formos determinar algumas condições para que um grupo munido de uma topologia se torne um grupo topológico.

Definição 1.9

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathcal{F}$ é **viável** quando

i. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$.
ii. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V}^{-1} \subset \mathrm{U}$.
iii. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}^{-1} \subset \mathrm{U}$.
iv. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$ e $\mathrm{a} \in G$, tem-se que $aUa^{-1} \in \mathcal{F}$.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Teorema 1.10

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{V}$ um filtro viável de G.

Filtro de vizinhanças do elemento neutro

Teorema 1.10

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{V}$ um filtro viável de G. Então, existe uma única topologia τ em G que torna $(G, \cdot, \tau)$ um grupo topológico e que faz $\mathcal{V}$ coincidir com $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia.

Subgrupos topológicos

Um subgrupo topológico é um subgrupo de um grupo topológico que relativo à topologia de subespaço é também um grupo topológico.

Subgrupos topológicos

Um subgrupo topológico é um subgrupo de um grupo topológico que relativo à topologia de subespaço é também um grupo topológico. Nosso objetivo nesta seção é apresentar alguns resultados sobre esses objetos.

Subgrupos topológicos

Definição 2.1

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G.

Subgrupos topológicos

Definição 2.1

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Chamamos de **subgrupo topológico** o trio $(H, \cdot, \tau_H)$, onde τ_H é a topologia subespaço.

Subgrupos topológicos

Definição 2.1

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Chamamos de **subgrupo topológico** o trio $(H, \cdot, \tau_H)$, onde τ_H é a topologia subespaço.

Daremos agora alguns exemplos de subgrupos topológicos.

Subgrupos topológicos

Definição 2.2

Seja $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$, o grupo topológico do **Exemplo 1.2**.

Subgrupos topológicos

Definição 2.2

Seja $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$, o grupo topológico do **Exemplo 1.2**. O conjunto $\{1, ab\}$ é um subgrupo de $\mathbb{K}_4$. Então o trio $(\{1, ab\}, \cdot, \tau_{\{1,ab\}})$, onde $\tau_{\{1,ab\}}$ é a topologia de subespaço em $\{1, ab\}$, é um subgrupo topológico.

Subgrupos topológicos

Reunimos uma série de proposições sobre subgrupos topológicos que serão apresentadas sob um único teorema.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.3

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.3

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

Subgrupos topológicos

Teorema 2.3

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.3

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.
ii. Se H é aberto, então H é fechado.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.3

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.
ii. Se H é aberto, então H é fechado.
iii. Se H é fechado e $|\ G : H\ | < \infty$ então H é aberto.

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.4

$(\mathbb{R}, +, \tau_{\mathbb{R}})$ não admite nenhum subgrupo aberto,

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.4

$(\mathbb{R}, +, \tau_{\mathbb{R}})$ não admite nenhum subgrupo aberto, pois do contrário, como vimos no item ii do **Teorema 2.3**, poderíamos decompor $\mathbb{R}$ como a união de dois abertos disjuntos, o que é absurdo.

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.5

Dado um número primo p arbitrário, considere o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau_{\mathbb{Z}})$ do **Exemplo 1.3**.

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.5

Dado um número primo p arbitrário, considere o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau_{\mathbb{Z}})$ do **Exemplo 1.3**. Notemos que

$$p^n\mathbb{Z} \subset V_p,$$

por definição e, além disso, para todo $z \in \mathbb{Z}$, temos que

$$p^n z + p^n\mathbb{Z} \subset p^n\mathbb{Z}.$$

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.5

Dado um número primo p arbitrário, considere o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau_{\mathbb{Z}})$ do **Exemplo 1.3**. Notemos que

$$p^n\mathbb{Z} \subset V_p,$$

por definição e, além disso, para todo $z \in \mathbb{Z}$, temos que

$$p^n z + p^n\mathbb{Z} \subset p^n\mathbb{Z}.$$

Ou seja, $p^n\mathbb{Z}$ é aberto. Como $p^n\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$, o item ii do **Teorema 2.3** nos garante que esse conjunto é também fechado.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

Subgrupos topológicos

Teorema 2.6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap_{U, V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV)$.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap\limits_{U, V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV).$

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

Subgrupos topológicos

Teorema 2.6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap\limits_{U,V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV)$.

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

iii. $N = \overline{\{1\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.7

Seja $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$, o grupo topológico do **Exemplo 1.3**.

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.7

Seja $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$, o grupo topológico do **Exemplo 1.3**. O conjunto $\{1\}$ é um subgrupo de $\mathbb{Q}_8$.

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.7

Seja $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$, o grupo topológico do **Exemplo 1.3**. O conjunto $\{1\}$ é um subgrupo de $\mathbb{Q}_8$. Como $\mathbb{Q}_8$ é finito, podemos utilizar o **Teorema de Lagrange** para determinar todos os seus subgrupos, que são

$$\{1\},\ \{1, \overline{1}\},\ \{1, \overline{1}, i, \overline{i}\},\ \{1, \overline{1}, j, \overline{j}\},\ \{1, \overline{1}, k, \overline{k}\} \text{ e } \mathbb{Q}_8.$$

Subgrupos topológicos

Exemplo 2.7

Seja $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$, o grupo topológico do **Exemplo 1.3**. O conjunto $\{1\}$ é um subgrupo de $\mathbb{Q}_8$. Como $\mathbb{Q}_8$ é finito, podemos utilizar o **Teorema de Lagrange** para determinar todos os seus subgrupos, que são

$$\{1\},\ \{1,\overline{1}\},\ \{1,\overline{1},i,\overline{i}\},\ \{1,\overline{1},j,\overline{j}\},\ \{1,\overline{1},k,\overline{k}\} \text{ e } \mathbb{Q}_8.$$

Notemos então que $\{1,\overline{1}\}$ é o menor fechado que contém $\{1\}$. Segue daí que $\overline{\{1\}} = \{1,\overline{1}\}$, que é um subgrupo de $\mathbb{Q}_8$.

Subgrupos topológicos

Dado um número primo p arbitrário, consideremos o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ do **Exemplo 1.4**.

Subgrupos topológicos

Dado um número primo p arbitrário, consideremos o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ do **Exemplo 1.4**. O **Teorema 2.6** nos garante que $\overline{\{0\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Subgrupos topológicos

Dado um número primo p arbitrário, consideremos o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ do **Exemplo 1.4**. O **Teorema 2.6** nos garante que $\overline{\{0\}}$ é um subgrupo fechado e normal. Provaremos agora que $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Subgrupos topológicos

Dado um número primo p arbitrário, consideremos o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ do **Exemplo 1.4**. O **Teorema 2.6** nos garante que $\overline{\{0\}}$ é um subgrupo fechado e normal. Provaremos agora que $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Exemplo 2.8

Dado $z \in \mathbb{Z}$ não nulo, temos duas possibilidades:

Subgrupos topológicos

Dado um número primo p arbitrário, consideremos o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ do **Exemplo 1.4**. O **Teorema 2.6** nos garante que $\overline{\{0\}}$ é um subgrupo fechado e normal. Provaremos agora que $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Exemplo 2.8

Dado $z \in \mathbb{Z}$ não nulo, temos duas possibilidades:

1. $z \in p^n\mathbb{Z}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Subgrupos topológicos

Dado um número primo p arbitrário, consideremos o grupo topológico $(\mathbb{Z}, +, \tau)$ do **Exemplo 1.4**. O **Teorema 2.6** nos garante que $\overline{\{0\}}$ é um subgrupo fechado e normal. Provaremos agora que $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Exemplo 2.8

Dado $z \in \mathbb{Z}$ não nulo, temos duas possibilidades:

1. $z \in p^n\mathbb{Z}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
2. $z \notin p^n\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Subgrupos topológicos

No primeiro caso, $z = p^n q$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}$ não nulo. É claro que $z \notin p^{n+2}\mathbb{Z}$.

Subgrupos topológicos

No primeiro caso, $z = p^n q$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}$ não nulo. É claro que $z \notin p^{n+2}\mathbb{Z}$. Sabemos que

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda,$$

onde F_λ é fechado e contém 0.

Subgrupos topológicos

No primeiro caso, $z = p^n q$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}$ não nulo. É claro que $z \notin p^{n+2}\mathbb{Z}$. Sabemos que

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda,$$

onde F_λ é fechado e contém 0. Vimos no **Exemplo 2.5** que cada $p^n\mathbb{Z}$ é fechado.

Subgrupos topológicos

No primeiro caso, $z = p^n q$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}$ não nulo. É claro que $z \notin p^{n+2}\mathbb{Z}$. Sabemos que

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda,$$

onde F_λ é fechado e contém 0. Vimos no **Exemplo 2.5** que cada $p^n\mathbb{Z}$ é fechado. Como $z \notin p^{n+2}\mathbb{Z}$, temos que

$$z \notin \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda.$$

Subgrupos topológicos

No segundo caso, como $z \notin p^n\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$z \notin \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda,$$

Subgrupos topológicos

No segundo caso, como $z \notin p^n\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$z \notin \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda,$$

pois cada $p^n\mathbb{Z}$ é fechado.

Subgrupos topológicos

No segundo caso, como $z \notin p^n\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$z \notin \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda,$$

pois cada $p^n\mathbb{Z}$ é fechado. Logo $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Grupos quocientes topológicos

Um grupo quociente topológico é um grupo quociente que, munido da topologia quociente, é um grupo topológico.

Grupos quocientes topológicos

Definição 3.1

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Chamamos de *grupo quociente topológico* o trio $\left(G/_{H}, \sigma, \tau_{G/H}\right)$, onde $\tau_{G/H}$ é a topologia quociente.

Grupos quocientes topológicos

Definição 3.1

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Chamamos de *grupo quociente topológico* o trio $\left(G/_{H}, \sigma, \tau_{G/H} \right)$, onde $\tau_{G/H}$ é a topologia quociente.

Apresentaremos agora alguns exemplos de grupos quocientes topológicos.

Grupos quocientes topológicos

Exemplo 3.2

Sejam $(\mathbb{R}, +, \tau_{\mathbb{R}})$ o grupo aditivo dos números reais munido da topologia usual e $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros. Então podemos visualizar $\mathbb{S}^1$ como um grupo quociente topológico uma vez que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

Grupos quocientes topológicos

Exemplo 3.3

Sejam $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau_{\mathbb{Q}_8})$ o grupo topológico do **Exemplo 1.3** e N $= \{1, \overline{1}\}$. Então o grupo $\mathbb{K}_4$ pode ser visualizado como um grupo quociente topológico uma vez que $\mathbb{Q}_8/\{1, \overline{1}\} \cong \mathbb{K}_4$.

Grupos quocientes topológicos

Teorema 3.4

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então o quociente ${G}\big/{H}$ é discreto se, e somente se, H é aberto.

Referências

- DIKRANJAN, Dikran. **Introduction to topological groups**. preparation, http://users.dimi.uniud.it/~dikran.dikranjan/ITG.pdf, 2013.
- KUMAR, A. Muneesh; GNANACHANDRA, P. **Exploratory results on finite topological groups**. JP Journal of Geometry and Topology, v. 24, n. 1-2, p. 1-15, 2020.
- MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 574 p. Disponível em: https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0. Acesso em: 10 set. 2022.
- SAN MARTIN, Luiz AB. **Grupos de lie**. Editora Unicamp, 2016.

Thank You