

# Álgebra Linear

## Gleberson Antunes

15 de Setembro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Álgebra Linear, das [Provas de Admissão ao Mestrado em Matemática na UFBA](#). As resoluções são despretensiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para [gleber-sonset@gmail.com](mailto:gleber-sonset@gmail.com). Outras soluções podem ser encontradas em minha página [Gleberson Antunes](#).

## Sumário

Sumário . . . . .	1
1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2015.2 . . . . .	2
2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.1 . . . . .	7
3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.2 . . . . .	12
4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2017.2 . . . . .	16
5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.1 . . . . .	22
6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.2 . . . . .	29
7 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2023.2 . . . . .	35

# 1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2015.2

25 de Agosto de 2023

**Exercício 1.** Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

*Demonstração.* Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Suponhamos então que  $\dim V < \dim W$ . Se fosse verdade que  $V$  e  $W$  são isomorfos, então existiria uma aplicação  $T : V \longrightarrow W$  bijetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= 0 + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= \dim W,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois  $\dim V < \dim W$ . Logo  $V$  e  $W$  não podem ser isomorfos.

□

**Exercício 2.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais,  $L : E \longrightarrow F$  transformação linear e  $N(L)$  seu núcleo. Mostre que

$$L \text{ é injetora} \Leftrightarrow N(L) = \{\vec{0}\},$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo de  $E$ .

*Demonstração.*

$\Rightarrow$  Suponhamos  $L$  injetiva. Seja  $v \in E$  tal que  $L(v) = 0$ . Então

$$L(v) = L(0)$$

$$\Rightarrow v = 0,$$

como queríamos.

$\Leftarrow$  (Por contraposição) Suponhamos que  $L$  não é injetiva. Então existem  $v, w \in E$  distintos, tais que  $L(v) = L(w)$ . Segue da linearidade de  $L$  que

$$L(v) = L(w)$$

$$\Rightarrow L(v) - L(w) = L(v - w) = 0$$

$$\Rightarrow v - w \in N(L).$$

Como  $v$  e  $w$  são distintos, temos que  $v - w \neq 0$ . Logo,  $N(L) \neq \{\vec{0}\}$ .

□

**Exercício 3.** Ache a transformação linear  $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$N(L) = [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \text{ e } I(L) = [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)],$$

onde  $N(L)$  é o núcleo de  $L$  e  $I(L)$  é a imagem de  $L$ .

*Demonstração.* Consideremos a base

$$\alpha = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\},$$

de  $\mathbb{R}^4$ . Pondo

$$L(1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(0, 1, 0, 0) = (1, -1, 0, 2)$$

$$L(0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0)$$

e escrevendo um vetor arbitrário  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  como

$$(x, y, z, w) = (x + t)(1, 0, 1, 0) + (t)(-1, 0, 0, 1) + (y)(0, 1, 0, 0) + (z - x - t)(0, 0, 1, 0),$$

obtemos a transformação linear

$$L(x, y, z, t) = (0, y, z - x - t, 0),$$

que satisfaz o enunciado.

□

**Exercício 4.** Seja  $T$  a aplicação linear com domínio  $P_2$  (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $T(p) = \int_0^1 p(t)dt$ . Determine a matriz de  $T$  com respeito às bases  $\{x^2, x, 1\}$  de  $P_2$  e  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\alpha = \{x^2, x, 1\}$  e  $\beta = \{1\}$

$$T(x^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$T(x) = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$T(1) = \int_0^1 x^2 dx = \left. x \right|_0^1 = 1.$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

□

**Exercício 5.** Seja  $R$  a rotação de  $\mathbb{R}^3$  ao redor do eixo  $z$ , no sentido anti-horário, com centro na origem e ângulo  $\pi/2$ . Ou seja,  $R$  associa a cada ponto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  um ponto  $Q = (-y, x, z)$ . Encontre o polinômio característico de  $R$  em relação a uma base de  $\mathbb{R}^3$  e, a partir dele, determine os autovalores e autovetores de  $R$  (caso eles não existam, justifique sua conclusão com base nos cálculos feitos). Interprete geometricamente o resultado que você obteve.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Então

$$[R]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue daí que

$$p_R(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + 1-\lambda = (\lambda^2 + 1)(1-\lambda).$$

Ou seja, os autovalores de  $R$  são:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ .

Para  $\lambda_1 = 1$  temos que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Logo devemos ter  $x = y = 0$  e, por exemplo,  $z = 1$ . Então, o autoespaço associado a  $\lambda_1 = 1$  é gerado por  $[(0, 0, 1)]$ .

Para  $\lambda_2 = i$  temos que

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \\ (1-i)z = 0 \end{cases}$$

Logo devemos ter  $x = i, y = 1$  e  $z = 0$ . Então, o autoespaço associado a  $\lambda_2 = i$  é gerado por  $[(i, 1, 0)]$ .

Para  $\lambda_3 = -i$  temos que

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \\ (1+i)z = 0 \end{cases}$$

Logo devemos ter  $x = 1, y = i, z = 0$ . Então, o autoespaço associado a  $\lambda_3 = -i$  é gerado por  $[(1, i, 0)]$ .

□

## 2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.1

26 de Agosto de 2023

**Exercício 1.** Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

*Demonstração.* Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Suponhamos então que  $\dim V < \dim W$ . Se fosse verdade que  $V$  e  $W$  são isomorfos, então existiria uma aplicação  $T : V \longrightarrow W$  bijetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= 0 + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= \dim W,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois  $\dim V < \dim W$ . Logo  $V$  e  $W$  não podem ser isomorfos.

□

**Exercício 2.** Sejam  $V$  e  $U$  espaços vetoriais e  $T : V \longrightarrow U$  uma transformação linear, de núcleo  $W$ , e sejam  $v \in V$ ,  $u \in U$  tais que  $T(v) = u$ . Seja  $v + W$  a classe lateral  $v + W = \{v + w : w \in W\}$ . Mostre que  $v + W = \{x \in V : T(x) = u\}$ .

*Demonstração.* Seja  $v' \in v + W$ . Então existe  $w' \in W$  tal que  $v' = v + w'$ . Segue daí que

$$T(v') = T(v + w') = T(v) + T(w') = u + 0 = u.$$

Seja  $x \in V$  tal que  $T(x) = u$ . Então  $x = v + (x - v) \in v + W$ , uma vez que

$$T(x - v) = T(x) - T(v) = u - u = 0.$$

□

**Exercício 3.** Ache a transformação linear  $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$N(L) = [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \text{ e } I(L) = [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)],$$

onde  $N(L)$  é o núcleo de  $L$  e  $I(L)$  é a imagem de  $L$ .

*Demonstração.* Consideremos a base

$$\alpha = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\},$$

de  $\mathbb{R}^4$ . Pondo

$$L(1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(0, 1, 0, 0) = (1, -1, 0, 2)$$

$$L(0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0)$$

e escrevendo um vetor arbitrário  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  como

$$(x, y, z, w) = (x + t)(1, 0, 1, 0) + (t)(-1, 0, 0, 1) + (y)(0, 1, 0, 0) + (z - x - t)(0, 0, 1, 0),$$

obtemos a transformação linear

$$L(x, y, z, t) = (0, y, z - x - t, 0),$$

que satisfaz o enunciado.

□



**Exercício 4.** Seja  $T$  a aplicação linear com domínio  $P_2$  (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $T(p) = \int_0^1 p(t)dt$ . Determine a matriz de  $T$  com respeito às bases  $\{x^2, x, 1\}$  de  $P_2$  e  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\alpha = \{x^2, x, 1\}$  e  $\beta = \{1\}$

$$\begin{aligned} T(x^2) &= \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}. \\ T(x) &= \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}. \\ T(1) &= \int_0^1 1 dx = \left. x \right|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

□

**Lema 1.** Sejam  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e  $T : V \longrightarrow V$  um operador linear unitário. Então os autovalores de  $T$  possuem módulo igual a 1.

*Demonstração.* Sendo  $T$  um operador unitário, então  $T^* = T^{-1}$  e, além disso,  $T$  preserva produto interno. Ou seja, para todo  $v \in V$  temos que

$$\langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^* T(v) \rangle = \langle v, v \rangle.$$

Seja  $\lambda \in \mathbb{K}$  um autovalor de  $T$  e  $u \in V$  um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ . Então

$$|\lambda|^2 \langle v, v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle.$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1.$$

□

**Exercício 5.** Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação linear que é uma isometria, i.e,  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Mostre que, se  $n$  for ímpar, então existe um subespaço vetorial não-trivial que é tal que: ou todos os pontos desse subespaço são fixados por  $T$ ; ou todos os pontos desse subespaço são levados por  $T$  em seus opostos.
- (b) O mesmo vale para dimensões pares? Justifique cuidadosamente a sua resposta, provando-a, se for positiva ou apresentando contra-exemplo, se for negativa.

*Demonstração.* Sabemos que um operador  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se, e somente se, é um operador unitário.

- (a) Seja  $p_T(\lambda)$  o polinômio característico do operador  $T$ . Sendo  $\text{gr}(p_T(\lambda)) = n$  ímpar, então  $p_T(\lambda)$  admite pelo menos uma raiz real, uma vez que seus coeficientes são reais e as raízes complexas nesse caso ocorrem aos pares (**se  $a + bi \in \mathbb{C}$  é raiz de  $p_T(\lambda)$  então  $a - bi$  também será**).

O **Lema 1** nos garante que o módulo dessas raízes, que são exatamente os autovalores de  $T$ , é igual a 1. Seja  $\lambda_\alpha$  uma raiz real de  $p_T(\lambda)$ . Então ou  $\lambda_\alpha = 1$  ou  $\lambda_\alpha = -1$ . Assim, o autoespaço associado a  $\lambda_\alpha$  é tal que todos os seus pontos são fixados por  $T$  ou são levados nos seus opostos.

- (b) Falso. Considere o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $T(x, y) = (y, -x)$ . Com respeito a base canônica  $\alpha$  temos que

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que esse operador é unitário pois o módulo de cada um dos vetores coluna é igual a 1. Porém

$$p_T(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

não possui solução real.

□

### 3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.2

26 de Agosto de 2023

**Exercício 1.** Escreva a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  cujo núcleo seja a reta  $y = x$  e a imagem seja a reta  $y = 2x$ .

*Demonstração.* Considere a base  $\alpha = \{(1, 1), (1, 0)\}$ . Então, dado qualquer vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos que

$$(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0).$$

Pondo  $T(1, 1) = (0, 0)$  e  $T(1, 0) = (2, 1)$ , a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - 2y, x - y), \end{aligned}$$

satisfaz o enunciado. □

**Exercício 2.** Seja  $\mathbb{V}$  o espaço vetorial das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  e considere  $\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = f(-x)\}$  e  $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = -f(-x)\}$ .

(a) Mostre que  $\mathbb{W}_1$  e  $\mathbb{W}_2$  são subespaços vetoriais de  $\mathbb{V}$ .

(b) Mostre que  $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ .

*Demonstração.*

(a) Óbvio.

(b) Seja  $f \in \mathbb{V}$ . Então

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{h(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{g(x)}.$$

Note que

$$h(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = h(x),$$

ou seja,  $h(x)$  é uma função par. De forma semelhante, temos que

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right) = -g(x),$$

ou seja,  $g(x)$  é uma função ímpar. Logo  $f$  é soma de uma função par com uma função ímpar.

□

**Exercício 3.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais de mesma dimensão finita  $n$ . Mostre que uma transformação linear  $T : E \longrightarrow F$  é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação continua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

*Demonstração.*

(a)

$\Rightarrow$  Suponhamos  $T$  injetiva. Sabemos então que  $N(T) = \{0\}$ . Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim N(T) + \dim Im(T) \\ &= 0 + \dim Im(T) \\ &= \dim F, \end{aligned}$$

ou seja,  $T$  é sobrejetiva.

$\Leftarrow$  Suponhamos  $T$  sobrejetiva. Então  $\text{Im}(T) = F$ . Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim N(T) + \dim \text{Im}(T) \\ \dim E &= \dim N(T) + \dim F \\ \Rightarrow \dim E - \dim F &= \dim N(T) = 0,\end{aligned}$$

ou seja,  $T$  é injetiva.

(b) Provamos no **item b do Exercício 5** que  $\mathbb{R}$  é um  $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial de dimensão infinita. Evidentemente,  $\mathbb{R}^2$  é também um  $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial de dimensão infinita. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned}T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x.\end{aligned}$$

Essa transformação linear é sobrejetiva mas não é injetiva.

□

**Exercício 4.** Mostre que se  $v_1, \dots, v_n$  são autovetores distintos de uma transformação linear associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , então  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independentes.

*Demonstração.* Encontra-se em: <<https://math.stackexchange.com/questions/29371/how-to-prove-that-eigenvectors-from-different-eigenvalues-are-linearly-independe>> (**Não consegui resolver essa.**)

□

**Exercício 5.**

(a) Mostre que dois espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) são isomorfos.

Conclua que todo  $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial de dimensão  $n$  é isomorfo a  $\mathbb{Q}^n$ .

(b) Mostre que  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  é infinita.

*Demonstração.*

(a) Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de mesma dimensão  $n$  finita,  $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$  e  $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$  uma base de  $W$ . Pondo  $T(v_i) = w_i$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ , obteremos uma transformação linear injetiva. Pelo **Exercício 3** essa transformação é sobrejetiva e, portanto, é um isomorfismo. Logo  $V$  e  $W$  são isomorfos.

Seja  $V$  um  $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial de dimensão  $n$ . **Como  $\mathbb{Q}^n$  é um  $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial de dimensão  $n$ , basta tomarmos uma base  $\alpha$  de  $V$  e uma base  $\beta$  de  $\mathbb{Q}^n$  e definir uma transformação linear injetiva, como definimos anteriormente.**

(b) Basta notar que o conjunto

$$\alpha = \{e^n : n \in \mathbb{N}\},$$

formado por todas as potências de  $e$  é LI e é infinito. Tal fato pode ser verificado notando que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = e^x$  é monótona crescente.

□

## 4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2017.2

24 de Outubro de 2023

**Exercício 1.** Seja  $V$  um espaço vetorial (plano) de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos vetores  $v = (x, y, z)$  tais que  $x - 2y + 4z = 0$ . Obtenha uma base  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Pondo  $x = 2y - 4z$  temos que

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in V &\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 4z, y, z) \quad (\text{é da forma}) \\&\Rightarrow (2y - 4z, y, z) = (2y, y, 0) + (-4z, 0, z) \\&= y(2, 1, 0) + z(-4, 0, 1) \\&\Rightarrow [(2, 1, 0), (-4, 0, 1)] \\&= V.\end{aligned}$$

Considere agora o vetor  $(0, 0, 1)$ . Então

$$\{(2, 1, 0), (-4, 0, 1), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de  $\mathbb{R}^3$  que satisfaz o enunciado.

□

**Exercício 2.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais de mesma dimensão finita  $n$ . Mostre que uma transformação linear  $T : E \longrightarrow F$  é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação continua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

*Demonstração.*



$\Rightarrow$  Suponhamos  $T$  injetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$n = 0 + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = n.$$

Logo  $T$  é sobrejetiva.

$\Leftarrow$  Suponhamos  $T$  sobrejetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$n = \dim \operatorname{Ker} T + n$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0.$$

Logo  $T$  é injetiva.

Não é válida em espaços vetoriais de dimensão infinita. Considere os  $\mathbb{Q}$ -espaços vetoriais  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^\infty$ . Considere também a transformação linear

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$$

$$x \longmapsto (x, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

Note que  $T$  é injetiva mas não é sobrejetiva.

□

**Exercício 3.** Uma matriz quadrada  $a = [a_{ij}]$  chama-se simétrica (respectivamente antissimétrica) quando  $a_{ij} = a_{ji}$  (respectivamente  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i$  e para todo  $j$ ). Prove que o conjunto  $S$  das matrizes simétricas e o conjunto  $A$  das matrizes antissimétricas  $n \times n$  são subespaços vetoriais de  $M_n(\mathbb{K})$  e tem-se  $M_n(\mathbb{K}) = S \oplus A$ .

*Demonstração.* Facilmente verificamos que  $S$  e  $A$  são subespaço vetoriais de  $M_n(\mathbb{K})$  com  $S \cap A = \{0\}$ . Seja  $X \in M_n(\mathbb{K})$ . Note que

$$X = \frac{1}{2}(X + X^t) + \frac{1}{2}(X - X^t).$$

Note que

$$(X + X^t)^t = X^t + X \in S.$$

De forma semelhante temos que

$$(X - X^t)^t = X^t - X = -(X - X^t) \in A.$$

Logo  $M_n(\mathbb{K}) = S \oplus A$ .

□

**Exercício 4.** Se os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_m$  de um espaço vetorial  $V$  geram um subespaço de dimensão  $r$ , prove que o conjunto dos vetores  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  tais que  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^m$  de dimensão  $m - r$ .

*Demonstração.* Seja  $S'$  o conjunto dos vetores  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  tais que  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ .

1.  $0 \in S'$ .

De fato, temos que

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = 0.$$

2. Se  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m), (\alpha_{1'}, \dots, \alpha_{m'}) \in S'$  então  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) + (\alpha_{1'}, \dots, \alpha_{m'}) \in S'$ .

De fato, note que

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \alpha_1'v_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha_m')v_m) &= \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m + \alpha_1'v_1 + \dots + \alpha_m'v_m \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Se  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S'$ , então  $\alpha \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S'$ .

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \alpha_1v_1 + \dots + \alpha \cdot \alpha_mv_m &= \alpha(\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m) \\
&= \alpha \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^m$  como queríamos mostrar.

Sejam então  $S$  o subespaço gerado pelos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_m$  e  $S'$  o subespaço vetorial gerado pelos vetores  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  tais que  $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m = 0$ . Seja

$$\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_r\},$$

uma base de  $S$ . Se  $r = m$  então

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m &= 0 \\
\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m &= 0.
\end{aligned}$$

Logo  $S' = \{0\}$  é o subespaço trivial. Portanto  $\dim S' = m - r = 0$ . Suponhamos então que  $r < m$ . Então os vetores

$$\{v_{r+1}, \dots, v_m\}$$

podem ser escritos como combinação linear da base  $\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_r\}$ . Como cada combinação linear **é única**, existem  $m - r$  vetores em  $S'$  tais que

$$\alpha_{1(r+1)} \cdot v_1 + \dots + \alpha_{r(r+1)} \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+2} + \dots + 0 \cdot v_m = v_{r+1}.$$

$\vdots$

$$\alpha_{1m} \cdot v_1 + \dots + \alpha_{rm} \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+1} + \dots + 0 \cdot v_{m-1} = v_m.$$

Logo

$$\{(\alpha_{1(r+1)}, \dots, \alpha_{m(r+1)}, -1, \dots, 0), \dots, (\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{rm}, 0, \dots, -1)\},$$

é uma base de  $S'$ . Portanto  $\dim S' = m - r$ .

□

**Teorema 1.** Seja  $A$  uma matriz e  $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m}$  o seu polinômio característico. Então  $A$  será diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal é da forma  $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)$ .

*Demonstração.* Encontra-se em <<https://encurtador.com.br/uyzCN>>, Teorema 1.

□

**Exercício 5.** A transformação linear  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  definida por  $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$  é tal que  $T^2 = T$ . Prove que se  $S$  é uma transformação linear tal que  $S^2 = S$  então  $S = 0, S = I$  em que  $I$  é a identidade ou existe uma base ordenada  $\mathcal{B}$  tal que  $[S(x_1, x_2)]_{\mathcal{B}} = [(x_1, 0)]_{\mathcal{B}}$ .

*Demonstração.* Se  $S = 0$  ou  $S = I$  então  $S^2 = S$ . Suponhamos então que  $S \neq 0$  e  $S \neq I$  e consideremos o polinômio

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1).$$

Como  $S \neq 0$ , então  $S$  não se anula em  $q(\lambda) = \lambda$ . Como  $S \neq I$ , então  $S$  não se anula em  $r(\lambda) = \lambda - 1$ . Como

$$\begin{aligned}
p(S) &= S(S - I) \\
&= S^2 - S \\
&= 0,
\end{aligned}$$

teremos que  $p$  é o **polinômio minimal** de  $S$ . Segue daí que  $S$  é diagonalizável, pelo **Teorema 1**. Desse modo, existe uma base  $\mathcal{B}$  formada por autovetores de  $S$ , tal que que

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente  $[S(x_1, x_2)]_{\mathcal{B}} = [(x_1, 0)]_{\mathcal{B}}$ .

□

## 5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.1

20 de Outubro de 2023

**Exercício 1.** Seja  $V$  o espaço das funções polinomiais de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Considere o operador linear  $D : V \rightarrow V$  dado por  $D(p) = p'$ , onde  $p'$  denota a derivada da função  $p$ , para toda  $p \in V$ .

(a) Encontre o núcleo e a imagem de  $D$ .

(b)  $D$  tem inversa à direita?

*Demonstração.*

(a) Seja  $p \in V$ . Então

$$\begin{aligned} D(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &\in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \text{Ker}(D) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Provaremos agora que  $D$  é sobrejetiva.

Seja  $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in V$  arbitrário. Tome  $q = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i} \in V$ . Então

$$D\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} D\left(\frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = p.$$

Logo  $D$  é uma aplicação sobrejetiva. Portanto  $\text{Im}(D) = V$ .

(b) Sabemos que uma função admite inversa à direita se, e somente se, é **sobrejetiva**. Como  $D$  é uma aplicação sobrejetiva, temos que  $D$  admite inversa à direita.

□

**Exercício 2.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre um corpo  $F$ . Dada uma base ordenada  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  de  $V$ , considere o único operador linear sobre  $V$  tal que

$$T(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } T(\alpha_n) = 0.$$

(a) Qual é a matriz de  $T$  com relação a  $\mathcal{B}$ ?

(b) Prove que  $T^n = 0$ , mas  $T^{n-1} \neq 0$ .

*Demonstração.*

(a) Note que

$$T(\alpha_1) = 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_n.$$

$$T(\alpha_2) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_n.$$

...

...

...

$$T(\alpha_{n-1}) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_{n-1} + 1 \cdot \alpha_n.$$

$$T(\alpha_n) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_{n-1} + 0 \cdot \alpha_n.$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Notemos que

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n. \end{aligned}$$

Segue do **Teorema de Cayley-Hamilton** que

$$\begin{aligned} p_T(T) &= (T)^n \\ &= T^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Por definição, temos que

$$T^{n-1} = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n-1 \text{ vezes}}.$$

Sendo assim



$$\begin{aligned}
T^{n-1}(\alpha) &= (T \circ T \circ \dots \circ T)(\alpha_1) \\
&= T(T^{n-2}(\alpha_1)) \\
&= T(\alpha_{n-1}) \\
&= \alpha_n.
\end{aligned}$$

Logo  $T^{n-1} \neq 0$ .

□

**Exercício 3.** Seja  $V$  o espaço vetorial das funções polinomiais de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , de grau menor ou igual a 2. Sejam  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  números reais distintos. Considere a função  $L_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $L_i(p) = p(a_i)$ , para todo  $p \in V$ , onde  $i = 1, 2, 3$ .

- (a) Prove que  $L_1, L_2$  e  $L_3$  são funcionais lineares linearmente independentes.
- (b) Encontre a base de  $V$  cuja base dual é  $\{L_1, L_2, L_3\}$ .

*Demonstração.* Solução adaptada de <<https://encurtador.com.br/pqFL1>> e <<https://encurtador.com.br/nouwz>>.

- (a) Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i = 0.$$

Então, para todo  $p \in V$ , temos que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p) = 0.$$

Considere os pontos  $\{(a_1, 0), (a_2, 1), (a_3, 1)\}$ . Conseguimos determinar um polinômio  $p_1$  de grau 2, via **Polinômios de Lagrange**, que passa por esses três pontos.

Prosseguindo dessa forma obtemos polinômios  $p_2$  e  $p_3$  de grau dois que passam pelos pontos  $\{(a_1, 1), (a_2, 0), (a_3, 1)\}$  e  $\{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0)\}$ , respectivamente.

Note que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p_1) = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p_2) = \alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p_3) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

o que implica que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

(b) **Não consegui essa.**

□

.

**Exercício 4.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear. Prove que

$$T^2 - \text{tr}(T)T + \det(T)I = 0,$$

onde  $I$  é a transformação identidade.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  uma base de  $\mathbb{R}^2$  e

$$[T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

a matriz de  $T$  com respeito a base  $\alpha$ . Note que

$$\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{tr}(T)} \lambda + \underbrace{ad - bc}_{\det(T)}.
\end{aligned}$$

Segue do **Teorema de Cayley - Hamilton** que

$$\begin{aligned}
P_T(T) &= (T)^2 - (a + d)T + (ad - bc)I. \\
&= T^2 - \text{tr}(T)T + \det(T)I \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

□

**Exercício 5.** Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  como espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, com as operações usuais. Sejam  $\mathbb{P}$  o conjunto dos números primos e

$$S = \{\log(p) ; p \in \mathbb{P} \text{ e } p > 1\},$$

onde  $\log$  é a função logaritmo natural. Prove que  $S$  é linearmente independente.

Conclua que  $\mathbb{R}$  possui dimensão infinita sobre  $\mathbb{Q}$ , justificando cuidadosamente.

*Demonstração.* Sejam  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$  tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \log(p_i) = 0.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que os  $\alpha_i$  são todos inteiros (**uma vez que se tomarmos  $\alpha$  como sendo o mdc dos denominadores de  $\alpha_i$ , teríamos**

$$\alpha \cdot \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \log(p_i) = 0).$$

Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \log(p_i) &= \sum_{i=1}^n \log(p_i^{\alpha_i}) = 0 \\ \Rightarrow \log\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \prod p_i^{\alpha_i} &= 1 \\ \Rightarrow \alpha_i &= 0,\end{aligned}$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ , por conta da unicidade na decomposição de fatores primos. Desse modo  $S$  é um conjunto L.I e infinito. Sendo assim,  $\mathbb{R}$  possui dimensão infinita sobre  $\mathbb{Q}$ .

□

## 6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.2

21 de Outubro de 2023

**Exercício 1.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensões quaisquer (finitas ou infinitas) sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . Demonstre que existe uma transformação linear injetora  $T : V \longrightarrow W$  se, e somente se,  $\dim V \leq \dim W$ .

*Demonstração.*

$\Rightarrow$  Sejam  $T : V \longrightarrow W$  injetora e  $\alpha$  uma base de  $V$ . Suponhamos que

$$\dim V < \dim W$$

.

**Como  $T$  é injetora, então  $T$  leva conjuntos L.I em conjuntos L.I.** Sendo assim,  $T(\alpha)$  é um subconjunto L.I de  $W$ . Notemos então que

$$\dim V = \dim \langle T(\alpha) \rangle.$$

Mas isso é um absurdo, pois  $\langle T(\alpha) \rangle$  é um subespaço vetorial de  $W$  e **todo subespaço vetorial de  $W$  deve possuir dimensão menor ou igual a dimensão de  $W$ .**

$\Leftarrow$  Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  bases desses espaços vetoriais, respectivamente. Suponhamos que

$$\dim V > \dim W.$$

Então

$$|\alpha| \leq |\beta|.$$

Sendo assim, existe uma função  $f : \alpha \longrightarrow \beta$  injetiva. Podemos então estender essa função  $f$  para uma transformação linear  $T$  injetiva da seguinte maneira. Escrevamos um vetor  $v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \alpha_i$  como uma combinação linear dos elementos de  $\alpha$ . Então

$$T(v) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(\alpha_i).$$

é uma transformação linear injetiva. □

**Exercício 2.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : V \longrightarrow W$  uma transformação linear. Prove que, para todo subespaço  $U$  de  $V$  e para todo  $v \in V$ ,  $Tv \in T(U)$  se, e somente se, existe  $u \in \text{Ker } T$  tal que  $v + u \in U$ .

*Demonstração.*

$\Rightarrow$  Sejam  $U$  um subespaço vetorial de  $V$  e  $v \in V$  tais que  $T(v) \in T(U)$ . Por definição

$$T(U) = \{T(u) ; u \in U\}.$$

Sendo assim, existe  $u \in U$  tal que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(v) \\ \Leftrightarrow T(u) - T(v) &= T(u - v) = 0 \\ \Rightarrow u - v &\in \text{Ker } T. \end{aligned}$$

Note então que  $v + (u - v) = u \in U$ .

$\Leftarrow$  Sejam  $U$  um subespaço vetorial de  $V$  e  $v \in V$  tais que  $v + u \in U$ , para algum  $u \in \text{Ker } T$ . Então

$$\begin{aligned}
T(v+u) &= T(v) + T(u) \\
&= T(v) + \cancel{T(u)}^0 \\
&= T(v) \\
&\in T(U).
\end{aligned}$$

□

**Exercício 3.** Sejam  $\mathbb{K}$  um corpo e  $P(\mathbb{K})$  o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial dos polinômio em um uma indeterminada com coeficientes em  $\mathbb{K}$ . Demonstre que o operador de derivação  $D : P(\mathbb{K}) \longrightarrow P(\mathbb{K})$  é linear e é sobrejetor mas não injetor.

*Demonstração.*

1.  $D$  é linear.

Sejam  $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in P(\mathbb{K})$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Então

$$\begin{aligned}
D\left(\alpha \cdot p + q\right) &= D\left(\sum_{i=0}^n \alpha \cdot a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^n \alpha \cdot a_i \cdot i \cdot x^{i-1} + \sum_{j=0}^m b_j \cdot j \cdot x^{j-1} \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot i \cdot x^{i-1} + \sum_{j=0}^m b_j \cdot j \cdot x^{j-1} \\
&= \alpha \cdot D(p) + D(q).
\end{aligned}$$

2.  $D$  é sobrejetor.

Seja  $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in P(\mathbb{K})$  arbitrário. Tome  $q = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i} \in P(\mathbb{K})$ . Então

$$D\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} D\left(\frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = p.$$

Logo  $D$  é uma aplicação sobrejetiva.

3.  $D$  não é injetor.

Note que

$$D(1) = D(2) = 0,$$

com  $1 \neq 2$ .

□

**Teorema 1.** Seja  $A$  uma matriz e  $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m}$  o seu polinômio característico. Então  $A$  **será diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal é da forma**  $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)$ .

*Demonstração.* Encontra-se em <<https://encurtador.com.br/uyzCN>>, Teorema 1.

□

**Exercício 4.** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x, -x + 2y - z, -2x + 2y - z).$$

Determine a matriz  $A$  associada a  $T$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ , verifique se  $A$  é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização  $P$ .

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  a base canônica do  $\mathbb{R}^3$ . Então

$$[A]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Seja



$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda-1)^2.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo  $A$  é diagonalizável, pelo **Teorema 1**. Tomando  $\lambda = 1$  obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned}
-x + y - z &= 0 \\
-2x + 2y - 2z &= 0
\end{aligned}$$

Tomando  $x = y - z$  encontramos

$$\begin{aligned}
(y - z, -y + z + 2y - z, -2y + 2z + 2y - z) &= (y - z, y, z) \\
&= y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)
\end{aligned}$$

Logo o auto-espaço associado a  $\lambda = 1$  é  $[(1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$ . Note que

$$T(0, 1, 2) = 0 \cdot (0, 1, 2) = 0.$$

Sendo assim, o auto-espaço associado a  $\lambda = 0$  é  $[(0, 1, 2)]$ . Desse modo,

$$[P]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma triz de diagonalização.

□

**Exercício 5.** Sejam  $W$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $(2, -1, 1)$  e  $(-3, 0, 1)$ , e seja  $\cdot$  o produtor interno no espaço  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^3 (i+1)a_i b_i.$$

Encontre o complemento ortogonal  $W^{\perp}$  de  $W$  neste produto interno e uma base ortonormal de  $W^{\perp}$ .

*Demonstração.* Considere o vetor  $(6, 20, 9)$ . Note que

$$\begin{aligned} (6, 20, 9) \cdot (2, -1, 1) &= 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 20 \cdot (-1) + 4 \cdot 9 \\ &= 24 - 60 + 36 \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (6, 20, 9) \cdot (-3, 0, 1) &= 2 \cdot 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 20 \cdot 0 + 4 \cdot 9 \\ &= -36 + 36 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } W^{\perp} = \left[ \frac{(6, 20, 9)}{\|(6, 20, 9)\|} \right].$$

□

## 7 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2023.2

25 de Outubro de 2023

### Parte I

Nas questões a seguir, assinale a(s) alternativa(s) corretamente com verdadeiro (V) ou falso (F).

**Exercício 1.** Seja  $V$  o espaço vetorial real de todos os polinômios com coeficientes reais de grau no máximo  $n$  (incluindo o polinômio nulo), na indeterminada  $t$ . Consideremos o operador linear  $T : V \longrightarrow V$  definido por  $T(p) = p'$  (derivada de  $p$ ), para todo  $p \in V$ .

- (a) 0 é o único autovalor de  $T$ .
- (b)  $T$  é injetivo.
- (c)  $T$  é sobrejetivo.
- (d)  $T$  é diagonalizável.
- (e) O polinômio característico de  $T$  é  $x^{n+1}$ .

*Demonstração.*

(a) Verdadeiro. Suponhamos que  $T$  admita um autovalor  $\alpha \in \mathbb{R}$  não nulo. Então existe um polinômio  $p \in V$  não nulo, tal que

$$T(p) = \alpha \cdot p.$$

Como o grau de  $p$  é no máximo  $n$ , teremos que sua  $(n + 1)$ -ésima derivada deverá ser igual a 0. Isso contradiz o fato de  $\alpha$  ser um autovalor de  $T$ , uma vez que

$$T^{n+1}(p) = \alpha^{n+1} \cdot p.$$

Logo o único autovalor de  $T$  é 0.

(b) Falso. Note que

$$T(1) = T(0),$$

com  $1 \neq 0$ .

(c) Falso. Note que não existe  $p \in V$  tal que

$$T(p) = x^n.$$

(e) Verdadeiro. Trivial.

□

**Exercício 2.** Seja  $V$  o espaço vetorial real de todas as matrizes reais  $n \times n$ . Consideremos o operador linear  $T : V \longrightarrow V$ , definido por  $T(A) = A^t$  (transposta de  $A$ ), para todo  $A \in V$ , e seja  $A_T$  a matriz associada a  $T$  na base canônica.

(a) 1 e -1 são os únicos autovalores de  $T$ .

(b) O autoespaço associado a 1 tem dimensão  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

(c) O autoespaço associado a -1 tem dimensão  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

(d)  $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$ .

(e)  $\text{Ker } T \neq \{0\}$ .

*Demonstração.*

(a) Verdadeiro.

(b) Verdadeiro.

(c) Verdadeiro.

(d) Verdadeiro. Note que a matriz associada a  $T$  na base canônica consiste na permutação das colunas da matriz identidade  $I_{n^2}$ . **Como permutar as colunas de uma matriz quadrada altera apenas o sinal do determinante**, teremos que  $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$ .

(e) Falso. Como  $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$ , teremos que o operador  $T$  é inversível. Sendo assim,  $T$  é injetivo e, portanto,  $\text{Ker } T = \{0\}$ .

□

**Exercício 3.** Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e sejam  $S_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$  e  $S_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$  um sistema de  $n$  vetores distintos de  $V$ . Adicionalmente, sejam  $A$  e  $B$  dois operadores lineares em  $V$  tais que  $\langle Au, A_u \rangle = \langle B_u, B_u \rangle$ , para todo  $u \in V$ .

- (a) As hipóteses dadas implicam que  $\langle A_u, A_v \rangle = \langle B_u, B_v \rangle$ , para todo  $u, v \in V$ .
- (b) Não existe um operador ortogonal  $C : V \longrightarrow V$  tal que  $A = CB$ .
- (c) Existe, e não é único, um operador linear  $F : V \longrightarrow V$  tal que  $F(v_i) = w_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- (d) Existe um automorfismo  $G : V \longrightarrow V$  tal que  $G(S_1) = S_2$  se, e somente se,  $S_2$  é linearmente independente.
- (e) Se  $S_2$  é linearmente independente e  $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Então existe um automorfismo ortogonal  $H : V \longrightarrow V$  tal que  $Hv_i = w_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Demonstração.*

(a) Verdadeiro. Sejam  $u, v \in V$ . Consideremos então o vetor  $u - v \in V$ . Note que

$$\begin{aligned}
\langle A(u-v), A(u-v) \rangle &= \langle B(u-v), B(u-v) \rangle \quad (\text{por hipótese}) \\
\Leftrightarrow \langle A(u), A(u) \rangle - 2\langle A(u), A(v) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle &= \langle B(u), B(u) \rangle - 2\langle B(u), B(v) \rangle + \langle B(v), B(v) \rangle \\
\Rightarrow \langle A(u), A(u) \rangle - 2\langle A(u), A(v) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle &= \langle A(u), A(u) \rangle - 2\langle B(u), B(v) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle \\
\Rightarrow -2\langle A(u), A(v) \rangle &= -2\langle B(u), B(v) \rangle \\
\Rightarrow \langle A(u), A(v) \rangle &= \langle B(u), B(v) \rangle,
\end{aligned}$$

para todos  $u, v \in V$ .

(b) Falso. Suponhamos que os operadores  $A$  e  $B$  são iguais. Então  $A = I \cdot B$ , onde  $I$  é o operador identidade. Como sabemos,  $I$  é um operador ortogonal.

(c) Falso. O operador linear  $F$  existe e é único.

(d) Falso.

$\Rightarrow$  Suponhamos que existe um automorfismo  $G : V \longrightarrow V$  tal que  $G(S_1) = S_2$ .

**Como  $G$  é injetiva, então  $G$  leva vetores L.I em vetores L.I.** Como  $S_1$  é uma base de  $V$  e, portanto, é um conjunto L.I, então  $G(S_1) = S_2$  é um conjunto L.I.

$\Leftarrow$  Suponhamos que  $S_2$  é um conjunto L.I. Facilmente podemos definir uma transformação linear  $G : V \longrightarrow V$  tal que  $G(S_1) = S_2$ . Basta associar a cada vetor  $v_i \in S_1$  o vetor  $G(v_i) = w_i \in S_2$ . **Essa transformação linear será injetiva. Portanto será sobrejetiva. Consequentemente  $G$  será um automorfismo.**

(e) Verdadeiro.

□

## Parte II

Resolver as seguintes questões, justificando por extenso cada resposta.

**Exercício 4.** Considere a função

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (3z, 2y - x, -y)$$

e as bases

$$B = \{(2, 0, 0), (-1, -1, 0), (1, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

para o domínio e contradomínio respectivamente.

- (a) Verifique que  $T$  é uma transformação linear.
- (b) Determine a matriz  $A$  associada a  $T$  respeito às bases  $B$  e  $B'$ .
- (c) Determine  $\text{Ker } T$  e  $\text{Im } T$ . Em particular, determinar uma base e a dimensão para cada um desses espaços.
- (d) Estude a injetividade e a sobrejetividade de  $T$ .

*Demonstração.*

$$1. \quad T(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

De fato

$$T(0, 0, 0) = (3 \cdot 0, 2 \cdot 0 - 0, -0) = (0, 0, 0).$$

$$2. \quad \text{Se } u, v \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}. \text{ Então } T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot T(u) + T(v).$$

Sejam  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Então

$$\begin{aligned} T(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') &= (3 \cdot (\lambda z + z'), 2 \cdot (\lambda y + y') - (\lambda x + x'), -(\lambda y + y')) \\ &= (3\lambda z, 2\lambda y - \lambda x, -\lambda y) + (3z', 2y' - x', -y') \\ &= \lambda \cdot (3z, 2y - x, -y) + (3z', 2y' - x', -y') \\ &= T(x, y, z) + T(x', y', z'). \end{aligned}$$

Logo  $T$  é uma transformação linear.

(b)

$$[A]_{B'}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Note que

$$3z = 0$$

$$T(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow 2y - x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

$$-y = 0$$

Desse modo  $T$  é injetiva. Consequentemente,  $\dim \text{Ker } T = 0$ . Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que  $\dim \text{Im}(T) = 3$ . Sendo assim

$$A = \{0\} \quad \text{e} \quad B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\},$$

são bases do Núcleo e da Imagem de  $T$ , respectivamente.

(d) Verificamos pelo item c que  $T$  é uma bijeção. Portanto  $T$  é injetiva e sobrejetiva.

□



**Exercício 5.** Demonstre a seguinte afirmação:

Seja  $A$  uma matriz superiormente triangular de ordem  $n$ . Então o operador linear de  $\mathbb{R}^n$  definido por  $A$  é um automorfismo se e somente se todos os elementos da diagonal principal de  $A$  são não nulos.

*Demonstração.* Sabemos que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal. Sendo assim

$A$  automorfismo  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

$\Leftrightarrow$  Produto dos elementos da diagonal principal é diferente de zero.

$\Leftrightarrow$  Cada elemento da diagonal principal de  $A$  é não nulo.

□