Análise Matemática

Gleberson Antunes

15 de Setembro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Análise Real, de provas de admissão ao Mestrado em Matemática, em universidades que tenho interesse. As resoluções são desprentesiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página Gleberson Antunes.

Sumário

1 Prova de seleção para o mestrado em Matemática da UFPB 2022.1

08 de Setembro de 2023

Exercício 1. Sejam A e B conjuntos não vazios de números reais, tais que vale: $x \in A$ e $y \in B \Rightarrow x \leq y$.

a) Mostre que $sup\ A\ \leq inf\ B$.

b) Mostre que $sup\ A\ = inf\ B$ se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $x_0 \in A$ arbitrário. Para todo $y \in B$ temos que $x_0 \ \leq\ y$. Então $x_0 \leq \inf B$. Como x_0 é arbitrário, $x \leq \inf B$ para todo $x \in A$. Consequentemente, $\sup A \leq \inf B$.

$\Leftarrow$ Sabemos que $\sup\ A \leq \inf\ B$. Se for $\sup\ A < \inf\ B$, tome $\varepsilon = \inf\ B - \sup\ A$. Então, para todo $x \in X$ e $y \in Y$ temos $y - x \geq \varepsilon$. De fato

$$y\ -\ x\ -\ (\inf B - \sup A)\ =\ y\ -\ \inf B\ +\ \sup\ A\ -\ x\ \geq 0$$

$\Rightarrow$ Suponhamos agora que $\sup A = \inf B$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que

$$y\ <\ \sup A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sup A - \frac{\varepsilon}{2}\ <\ x.$$

Daí

$$y - x\ <\ \varepsilon.$$

$\square$

Exercício 2. Seja (a_n) uma sequência de números reais tal que $a_n \neq 0$ para todo n e lim $a_n \neq 0$.

a) Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $|a_n| > \delta$ para todo n.

b) Usando a), mostre que a sequência $(1/a_n)$ é convergente e $\lim(1/a_n) = 1/\lim$ a_n.

Demonstração. Sabemos que se $a_n \longrightarrow L$, então $|a_n| \longrightarrow |L|$. Dado $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; |L| - |a_n| \;\leq\; ||a_n| - |L|| \;\leq\; |a_n - L| \;<\; \frac{|L|}{2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{|L|}{2} \;<\; |a_n|.$$

Tome agora

$$\delta \;=\; \min\left\{\frac{|L|}{2}\;,\;\frac{|a_i|}{2} : 1 \leq i \leq n_0\right\}.$$

Existe então $\delta > 0$ tal que $|a_n| > \delta$ para todo n.

b) Como $|a_n| > \delta$ para todo n, temos que $|a_n L| > |L|\delta$. Segue daí que

$$0 \;<\; \frac{1}{|a_n L|} \;<\; \frac{1}{|L|\delta}.$$

Sabemos que $L - a_n \longrightarrow 0$. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; |L - a_n| \;<\; \varepsilon |L| \delta.$$

Portanto,

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{L-a_n}{a_nL}\right| \;=\; \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| \;<\; \frac{\varepsilon|L|\delta}{|L|\delta} \;=\; \varepsilon.$$

Logo, $\dfrac{1}{a_n} \longrightarrow \dfrac{1}{L}$. □

Exercício 3. Mostre que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$, para todos $m \geq n \geq n_0$. (**O enunciado está errado. O correto seria: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$, para quaisquer que seja $n > n_o$ e $p \in \mathbb{N}$**).

Demonstração. Consideremos a sequência $(s_n) = (a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n, ...)$, chamada de **sequência das reduzidas de** $\sum a_n$. Então, por definição, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim s_n = L$.

$\Rightarrow$ Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; |s_n - L| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para todos $m \geq n > n_0$, temos que:

Se $m = n$, então

$$|s_m - s_n| \;=\; 0 \;<\; \varepsilon.$$

Se $m > n$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Segue daí que

$$|s_m - s_n| \;=\; |s_{n+p} - s_n| \;=\; \left|\sum_{j=1}^{p} a_{n+p}\right| \;\leq\; |s_m - L| \;+\; |s_n - L| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Suponhamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\left|\sum_{j=1}^{p} a_{n+p}\right| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$. Então

$$|s_{n+p} - s_n| \ = \ \left|\sum_{j=1}^{p} \ a_{n+p}\right| \ < \ \varepsilon,$$

nos garante que (s_n) é uma sequência de Cauchy. Logo existe $L \in \mathbb{R}$, tal que lim s_n $= L$. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \ a_n$ converge. $\square$

Exercício 4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.

a) Mostre que $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ é um conjunto fechado.

b) Conclua, usando a), que $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

Demonstração.

a) **Sabemos que $Z \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, para toda sequência convegente (z_n) de pontos de Z, tem-se que lim $z_n \in Z$.**

Seja $z_n \longrightarrow z$ uma sequência convergente de pontos de Z. Como f é uma função contínua, temos que

$$f(z_n) \longrightarrow f(z).$$

Consequentemente, $f(z) = 0$, pois $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que $z \in Z$ e, portanto, Z é conjunto fechado.

b) Seja $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = f(x) - g(x)$. Por a), temos que o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\},$$

é fechado. $\square$

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável. Se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \ \leq \ |f(x)| \ \forall x \in \mathbb{R}$, mostre que f é a função identicamente nula.

Demonstração. Sabemos que $|f|$ é contínua em $[0, \frac{1}{2}]$. Pelo **Teorema de Weierstrass**, $|f|$ possui um máximo M e um mínimo $m = 0$ nesse intervalo. Notemos que

$$|f'(t)| \ \leq \ |f(t)| \ \leq \ M$$
$$\Leftrightarrow \ -M \ \leq \ f'(t) \ \leq \ M.$$

Integrando cada um dos termos dessa desigualdade teremos que

$$-M(x-0) \ \leq \ \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) \ \leq \ M(x-0)$$
$$\Leftrightarrow \ |f(x)| \ \leq \ Mx,$$

para todo $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Segue daí que

$$|f(x)| \ \leq \ \frac{M}{2},$$

Mas aí teria que ser $M \leq \dfrac{M}{2}$. Logo $M = m = 0$ e, portanto, f é nula em $[0, \frac{1}{2}]$. Por indução em n, mostramos que f é nula em $[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]$. Logo f é nula em $[0, \infty)$. De forma análoga mostra-se que f é nula em $(-\infty, 0]$.

Solução adaptada de Analysis.

□

Exercício 6. Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis.

a) Mostre que se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

b) Conclua, usando $a)$, que $\int_a^b |f(x)|dx$.

Demonstração.

a) Sabemos que se f e g são funções integráveis, então $g - f$ é também uma função integrável. Sejam $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, b = t_n\}$ uma partição arbitrária do intervalo $[a, b]$ e $m_i = \inf g - f([t_{i-1}, t_i])$. Como $g(x) - f(x) \geq 0$, para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$, temos que $m_i \geq 0$. Segue daí que

$$s(g - f : P) \ = \ \sum_{i=0}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \geq 0.$$

Consequentemente

$$\sup_P s(g - f : P) \ = \ \int_a^b g(x) - f(x)\ dx \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

b) Sabemos que $f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Segue de a) que

$$\int_a^b f(x)\ dx \ \leq \ \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

$\square$