Grupos Topológicos

Gleberson Gregorio da Silva Antunes - UEFS
glebersonset@gmail.com

1 Introdução

Seja $(G,\cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. Naturalmente, podemos nos perguntar se a operação $\cdot$ e a inversão do grupo sempre vão ser compatíveis com a topologia, isto é, se são funções contínuas. A resposta é: Nem sempre. Nosso objetivo é apresentar algumas definições e resultados básicos a respeito de Grupos Topológicos.

2 Definição e exemplos

Definição 1. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G,\cdot,\tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções:

$$\begin{aligned} i:\ & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot:\ & G\times G \longrightarrow G \\ & (x,y) \longmapsto xy \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação** de G, respectivamente, são contínuas quando G $\times$ G é munido com a topologia produto.

Exemplo 1. Considere o grupo $(\mathbb{K}_4,\cdot)$ e τ = {$\emptyset$, {1, ab}, {a, b}, $\mathbb{K}_4$}. O trio $(\mathbb{K}_4,\cdot,\tau)$ é um grupo topológico.

Exemplo 2. Considere o grupo $(\mathbb{Q}_8,\cdot)$ e N = {1, -1}. A topologia τ gerada pela base $\mathcal{B}$ = {Nx : x $\in \mathbb{Q}_8$} é tal que $(\mathbb{Q}_8,\cdot,\tau)$ é um grupo topológico.

Exemplo 3. Considere o grupo (GL$_n(\mathbb{R})$, $\cdot$) munido com a topologia induzida por $\mathbb{R}^{n^2}$.

Definição 2. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é chamada de **filtro** se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(2) Se A, B $\in \mathcal{F}$ então A $\cap$ B $\in \mathcal{F}$.
(3) Se A $\in \mathcal{F}$ e A $\subset$ B, então B $\in \mathcal{F}$.

Definição 3. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é chamada de **base de um filtro** se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
(2) Se B$_1$, B$_2 \in \mathcal{B}$ então existe B$_3 \in \mathcal{B}$ tal que B$_3 \subset B_1 \cap B_2$.

O filtro gerado por $\mathcal{B}$ é a família:

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{U} \subset \mathrm{X} : \exists\, \mathrm{B} \in \beta, \mathrm{B} \subset \mathrm{U}\}.$$

Exemplo 4. Seja $(G,\cdot)$ um grupo. O conjunto $\mathcal{B}$ formado por todos os subgrupos normais de $(G,\cdot)$ com indíce finito formam uma base de um filtro.

Definição 4 . Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e g $\in$ G. Chamamos de filtro de todas as vizinhanças de g o conjunto:

$$\mathcal{V}(\mathrm{g}) := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{G} : \mathrm{g} \in N_g \subset U, N_g \in \tau_G\}.$$

formado por todas as vizinhanças de g

3 Principais Teoremas

Teorema 1. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. Então, $(G,\cdot,\tau_G)$ é um grupo topológico se, e somente se, a função

$$\begin{aligned} f:\ & G\times G \longrightarrow G \\ & (x,y) \longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

é contínua, onde G $\times$ G está munido da topologia produto.

Teorema 2. Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e $\mathcal{V}(1)$ o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa mesma topologia. Então:

(1) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que V $\cdot$ V $\subset$ U.
(2) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que V$^{-1} \subset$ U.
(3) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que V $\cdot$ V$^{-1} \subset$ U.
(4) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$ e a $\in$ G, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que aVa$^{-1} \subset$ U.

Teorema 3. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e $\mathcal{V}$ um filtro que satisfaz as condições do Teorema 2. Então, existe uma única topologia τ em G que torna $(G,\cdot,\tau)$ um grupo topológico e que faz $\mathcal{V}$ coincidir com $\mathcal{V}(1)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G.

4 Topologias pró-finitas

Daremos agora, alguns exemplos de topologias cuja a base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é formada por subgrupos normais. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e p um número primo.
Exemplo 6. A **topologia pró-finita** com $\mathcal{B}$, a família formada por todos subgrupos normais de indíce finito, em G.

Exemplo 7. A **topologia pró-p-finita** com $\mathcal{P}$, a família formada por todos subgrupos normais cujo indíce é finito e é uma potência de p, em G.

Exemplo 8. A **topologia pró-contável** com $\mathcal{H}$, a família formada por todos subgrupos normais de indíce enumerável, em G.

5 Subgrupos e grupo quociente topológico

Definição 5. Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e H $\leq$ G. O trio $(H,\cdot,\tau_H)$ é chamado de **subgrupo topológico** quando H está munido da topologia induzida por G.

Teorema 4. Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e H $\leq$ G. Então:

(1) H é aberto se, e somente se, int(H) $\neq \emptyset$.
(2) Se H é aberto então H é fechado.
(3) Se H é fechado e tem indíce finito então H é aberto.
(4) Se H é aberto e (G,τ_G) é compacto então H tem índice finito.
(5) $\bar{H} \leq$ G.

Definição 6. Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e N $\trianglelefteq$ G. O trio $(G/N,\cdot,\tau_{G/N})$ é chamado de **grupo topológico quociente** quando G/N é munido da topologia quociente.

Teorema 5. Sejam $(G,\cdot,\tau_G)$ e $(H,\circ,\tau_H)$ grupos topológicos, f : G $\longrightarrow$ H um epimorfismo contínuo e q: G $\longrightarrow G/Kerf$ o homomorfismo canônico. Então, existe um único isomorfismo $f_1 : G/Kerf \longrightarrow$ H contínuo tal que f = $f_1 \circ q$.

6 Conclusão

Os resultados apresentados até agora são básicos porém já dispomos de ferramentas para estudar tópicos mais avançados, como por exemplo, invariantes topológicos como a conexidade, conexidade por caminhos e compacidade, axiomas de separação e aplicar em grupos topológicos.

Referências

[1] DIKRANJAN, Dikran. **Introduction to topological groups**. preparation, http://users. dimi. uniud. it/ dikran. dikranjan/ITG. pdf, 2013.
[2] KUMAR, A. Muneesh; GNANACHANDRA, P. **Exploratory results on finite topological groups**. JP Journal of Geometry and Topology, v. 24, n. 1-2, p. 1-15, 2020.
[3] MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 599 p. Disponível em: https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0. Acesso em: 10 set. 2022.
[4] MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, meu orientador, pelo seu apoio, dedicação e disposição para a realização deste trabalho. Agradeço também a FAPESB pelo apoio financeiro concedido a mim.