Grupos Topológicos
Eixo 12: Tópicos especiais de Matemática

Gleberson Gregorio da Silva Antunes

Resumo

Seja $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um grupo topológico se a operação e a inversão de G são funções contínuas quando G $\times$ G está munido da topologia produto. Nosso objetivo neste trabalho é, inicialmente, fazer uma breve introdução sobre Topologia Geral, apresentando conceitos básicos e resultados mais gerais sobre espaços topológicos e funções contínuas. Por fim, aplicaremos os resultados obtidos e as ferramentas adquiridas em grupos topológicos.

Palavras-chaves: Topologia; Grupos; Grupos Topológicos.

Introdução

Um grupo é uma estrutura algébrica que consiste em um conjunto G munido de uma operação $\cdot$, isto é, uma função $\cdot$: G $\times$ G $\longrightarrow$ G que satisfaz a associatividade e a existência do elemento neutro e inverso em G. Por sua vez, um espaço topológico consiste em um conjunto X munido de uma topologia, isto é, uma coleção $\tau_X \subset P(X)$, o conjunto das partes de X, que contém X, o vazio e é fechada para união arbitrárias e interseções finitas.

Seja então $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. Faz sentido perguntar-se, se é sempre que dada uma topologia τ_G em G, $(G, \cdot)$ é grupo cuja a operação e a inversão são funções contínuas. A resposta para essa pergunta é: Nem sempre. Nosso objetivo então é, dado um grupo $(G, \cdot)$ determinar uma topologia que seja compatível com a operação e a inversão do grupo, isto é, tornar estas funções contínuas.

Na seção 1 serão introduzidos conceitos básicos Topologia Geral como topologia, espaço topológico, conjuntos abertos e fechados e demonstraremos alguns teoremas. Na seção 2 apresentaremos a definição de base de uma topologia e introduziremos um dos objetos mais importantes no estudo de grupos topológicos, os filtros. Na seção 3 falaremos sobre a continuidade de funções em espaços topológicos tentando generalizar a ideia de continuidade de funções de uma variável real e apresentando algumas demonstrações. Na seção 4 estudaremos a topologia quociente e por fim, nas seções 5, 6 e 7 aplicaremos as ferramentas adquiridas nas seções 1 a 4.

1 Topologia Geral: Definição e exemplos

Nesta seção, apresentaremos noções básicas de Topologia Geral como topologia, espaço topológico, conjuntos abertos e fechados, fecho, interior, pontos de acumulação, derivado e topologia do subespaço.

Definição 1.1. Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

(2) Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família arbitrária de elementos de τ_X, então U = $\bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$.

(3) Se U_1, ..., U_n são elementos de τ_X, então U = $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau_X$.

O par (X, τ_X), onde X é um conjunto e τ_X é uma topologia em X é chamado de *espaço topológico*. Os elementos U $\in \tau_X$ são chamados de *abertos da topologia* ou simplesmente *abertos*. Daremos agora alguns exemplos de topologias.

Exemplo 1.1. Seja X um conjunto e $P(X)$ o conjunto das partes de X. Então, $P(X)$ é uma topologia em X, chamada de *topologia discreta*.

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto e $I = \{\emptyset, X\}$. Então, I é um topologia em X, chamada de *topologia caótica*.

Exemplo 1.3. Seja X = {a, b, c} e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Então, τ é uma topologia em X.

Exemplo 1.4. Seja X = $\mathbb{R}$. Então, $\tau_{\mathbb{R}} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists\ (a, b)$, a < b, $x \in (a, b) \subset U\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.5. Seja X = $\mathbb{R}^n$. Então, $\tau_{\mathbb{R}^n} = \{\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists\ \mathrm{B}_\varepsilon(x), x \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{U}\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}^n$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$.

Agora definiremos os conjuntos fechados. Os conjuntos fechados são importantes na Topologia pois são o complementar de um conjunto aberto. Isso nos permite definir novos conjuntos e provar resultados sobre conjuntos abertos sem necessariamente trabalhar com estes.

Definição 1.2. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e $F \subset X$. Então, F é dito *fechado* em X ou simplesmente *fechado* se F^c = X - F $\in \tau_X$.

Exemplo 1.6. $\emptyset, X$ são fechados em X pois $\emptyset^c = X$ e $X^c = \emptyset$ são abertos.

Exemplo 1.7. Considere $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ onde $\tau_{\mathbb{R}}$ é a topologia usual de $\mathbb{R}$. Então, todo intervalo fechado [a,b] é fechado em $\mathbb{R}$ pois $[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$.

Exemplo 1.8. Seja (X, τ_X) o espaço topológico descrito no Exemplo 1.3. Então, os subconjuntos fechados em X são: $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}$.

Teorema 1.1. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Então:

(1) A interseção arbitrária de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado.

(2) A união finita de subconjuntos fechados em X é um subconjunto fechado.

Demonstração: Imediata pelas Leis de DeMorgan.

É possível notar que os conjuntos fechados possuem propriedades semelhantes aos abertos da topologia. Isso é verdade pois qualquer afirmação sobre conjuntos abertos é também uma afirmação sobre os conjuntos fechados e mais ainda, pode-se também definir topologia em um conjunto por meio dos conjuntos fechados utilizando este teorema.

Definição 1.3. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e U $\subset$ X. O *interior* de U, representado por int(U) ou U°, é a união de todos os abertos que estão contidos em U.

Definição 1.4. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e U $\subset$ X. O *fecho* de U, representado por $\bar{U}$ é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contém U.

Alguns autores, quando falam de vizinhanças de um ponto, estão se referindo a um conjunto aberto que contém esse ponto. Utilizaremos uma definição um pouco diferente, que também é correta, e será necessária na seção 5.

Definição 1.5. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Uma *vizinhança* de um ponto $x \in$ X é um conjunto U que contém um subconjunto aberto N_x tal que $x \in N_x \subset U$. O conjunto N_x é chamado de *vizinhança aberta* de x.

O próximo Teorema é importante pois ele estabelece uma condição para que um subconjunto de um espaço topológico seja aberto relacionando-o com vizinhanças abertas.

Teorema 1.2 Seja (X, τ_X) um espaço topológico e U $\subset$ X. Então, U $\in \tau_X$ se,e somente se, U contém uma vizinhança aberta para cada um dos seus pontos.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se U é aberto então ele é uma vizinhança aberta para cada um dos seus pontos.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se U contém uma vizinhança aberta N_x para cada um dos seus pontos então

$$\mathrm{U} = \bigcup_{x \in U} \mathrm{N}_x$$

é aberto, pois é a união arbitrária de abertos.

Decorre deste Teorema que um conjunto é aberto se, e somente se, é igual ao seu interior.

Definição 1.6. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. Um ponto x $\in$ X é dito um ponto de acumulação de A se toda vizinhança aberta N_x de x é tal que (N_x - $\{x\}$) $\cap$ A $\neq \emptyset$.

Definição 1.7. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. O *derivado* de A, representado por A$'$, é o conjunto de todos os pontos de acumulação de A.

Teorema 1.3. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. A é fechado em X se, e somente se, A$'$ $\subset$ A.

Teorema 1.4. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X não-vazio. Então $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança aberta N_x de x intersecta A não trivialmente.

Definição 1.8. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. A *topologia subespaço* em A é definida da seguinte maneira:

$$\tau_A := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{A} \mid \mathrm{U} = \mathrm{V} \cap \mathrm{A},\ \mathrm{V} \in \tau_X\}$$

Teorema 1.5. Seja (X, τ_X) um espaço topológico e A $\subset$ X. Então τ_A é uma topologia em A.

2 Bases de uma topologia e topologia produto

Nesta seção prepararemos o terreno para iniciar o estudo de grupos topológicos. Definiremos base de uma topologia, a topologia produto e por fim definiremos filtro e base de um filtro.

Definição 2.1. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Uma coleção β de subconjuntos de X, cujos elementos são chamados de *abertos básicos*, é dita uma *base* para uma topologia em X se:

(1) $\bigcup\limits_{B\in\beta} B =$ X.

(2) Se $x \in$ B$_1 \cap$ B$_2$, com B$_1$, B$_2 \in \beta$, então existe B$_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

A condição 1 é equivalente a dizer que β cobre X, isto é, para cada $x \in$ X, existe B $\in \beta$ tal que $x \in$ B. A *topologia gerada* por β é a coleção:

$$\tau_\beta := \{\text{U} \subset \text{X} \mid \forall x \in \text{U}, \exists\ \text{B} \in \beta,\ x \in B \subset \text{U}\}.$$

Exemplo 2.1. A coleção $\mathscr{C} = \{$U $\subset \mathbb{R} \mid \forall\ x \in$ U, $\exists$ [a,b), a $<$ b, $x \in$ [a,b) $\subset$ U$\}$ gera uma topologia $\tau_{L\mathbb{R}}$ em $\mathbb{R}$, chamada de *topologia da mão esquerda.*

Exemplo 2.2. A coleção $\mathscr{D} = \{$V $\subset \mathbb{R} \mid \forall\ x \in$ V, $\exists$ (a,b], a $<$ b, $x \in$ (a,b] $\subset$ V$\}$ gera uma topologia $\tau_{R\mathbb{R}}$ em $\mathbb{R}$ chamada de *topologia da mão direita.*

Definição 2.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos quaisquer. A *topologia produto* em X $\times$ Y, representada por $\tau_{X\times Y}$, é a topologia gerada pela base:

$$\beta := \{\text{U} \times \text{V} \subset \text{X} \times \text{Y} \mid \text{U} \in \tau_X,\ \text{V} \in \tau_Y\}.$$

Um *filtro* é um objeto matemático que é utilizado para estudar convergência em espaços topológicos. Aqui, porém, não estamos diretamente interessados em convergência.

Definição 2.4. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X é chamada de filtro se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

(2) Se A, B $\in \mathscr{F}$ então A $\cap$ B $\in \mathscr{F}$.

(3) Se A $\in \mathscr{F}$ e A $\subset$ B, então B $\in \mathscr{F}$.

Exemplo 2.3. Seja (X, τ_X) um espaço topológico. Dado $x \in X$, chamamos de *filtro de vizinhanças* de x conjunto $\mathscr{V} = \{$U $\subset$ X $\mid \exists N_x \in \tau_X$, x $\in N_x \subset$ U$\}$ formado por todas as vizinhanças U de x.

Assim como uma base de uma topologia gera uma topologia, uma base de um filtro gera um filtro de maneira semelhante.

Definição 2.5. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X é chamada de *base de um filtro* se satisfaz as seguintes condições:

(1) $\emptyset \notin \mathscr{B}$.

(2) Se B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$ então existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

O filtro $\mathscr{F}$ gerado por $\mathscr{B}$ é o conjunto:

$$\mathscr{F} = \{\mathrm{U} \subset \mathrm{X} \mid \exists\ \mathrm{B} \in \mathscr{B}, \mathrm{B} \subset \mathrm{U}\}.$$

Exemplo 2.4. Seja $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathscr{B} = \{\mathrm{N} \subset \mathrm{G} \mid \mathrm{N} \trianglelefteq \mathrm{G}$ e $|\mathrm{G} : \mathrm{N}|$ é finito$\}$ é uma base de um filtro.

Veremos na seção 6 que o filtro de vizinhanças do elemento neutro de um grupo topológico representa sua topologia.

3 Funções contínuas e homeomorfismos

Nesta seção, falaremos sobre a continuidade de funções entre espaços topológicos, definiremos o que são homeomorfismos e apresentaremos algumas proposições que serão úteis na seção 4 e 5. Nosso objetivo é generalizar a ideia de continuidade de funções de uma variável real.

Definição 3.1 Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita contínua se, dado $\mathrm{U} \in \tau_Y$ qualquer, $f^{-1}(\mathrm{U}) \in \tau_X$.

É fácil ver que essa definição de continuidade que foi apresentada agora, é equivalente a definição de continuidade utilizando $\epsilon - \delta$, no caso em que $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é o nosso espaço topológico e estamos falando de funções de uma variável real. Na verdade, trata-se de uma generalização para espaços topológicos mais ou menos abstratos.

Teorema 3.1. Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \to Z$ funções contínuas. Então, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é uma função contínua.

Teorema 3.2. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$. Então, $f|_A : A \longrightarrow Y$ é uma função contínua.

Teorema 3.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então, são equivalentes:

(1) $f : X \to Y$ é uma função contínua.

(2) Se β é uma base da topologia τ_Y em Y, então $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \tau_X$, $\forall\ \mathrm{B} \in \beta$.

(3) $\forall x \in \mathrm{X}$, $\forall\ \mathrm{N}_{f(x)}$ de $f(x)$, $\exists N_x$ de x tal que $N_x \subset f^{-1}(\mathrm{N}_{f(x)})$.

(4) $\forall x \in \mathrm{X}$, $\forall\ \mathrm{N}_{f(x)}$ de $f(x)$, $\exists N_x$ de x tal que $f(N_x) \subset N_f(x)$.

(5) Seja $\mathrm{U} \subset \mathrm{Y}$ fechado. Então $f^{-1}(\mathrm{U})$ é fechado em X.

Definição 3.2. Uma função $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ é dita contínua em um ponto x se satisfaz a condição 4 do Teorema 3.3 para um certo x pertencente a X.

Obviamente, se f satisfaz essa condição para todo x pertencente a X então f é na verdade contínua em todo seu domínio.

Teorema 3.4. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ uma função. Se f é contínua então $f : \mathrm{X} \longrightarrow f(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{Y}$ é também contínua.

Teorema 3.5. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Então, as funções:

$$p_x: \begin{array}{l} X \times Y \longrightarrow X \\ (x,y) \longmapsto \ x \end{array} \qquad\qquad p_y: \begin{array}{l} X \times Y \longrightarrow Y \\ (x,y) \longmapsto \ y \end{array}$$

chamadas *projeções*, são contínuas quando X x Y está munido com topologia produto.

Demonstração: Seja U $\in \tau_X$, então p_x^{-1}(U) = U x Y $\in \tau_{X\times Y}$, logo p$_x$ é contínua. A continuidade de p_y se dá de forma análoga.

Teorema 3.6. Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y) e (Z, τ_Z) espaços topológicos e $f: Z \longrightarrow$ X $\times$ Y. Então, f é contínua se, e somente se, $p_x \circ f$ e $p_y \circ f$ são funções contínuas.

Teorema 3.7. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Então, as funções:

$$i_x: \begin{array}{l} X \longrightarrow X \times Y \\ x \longmapsto (x,y) \end{array} \qquad\qquad i_y: \begin{array}{l} Y \longrightarrow X \times Y \\ y \longmapsto (x,y) \end{array}$$

chamadas *aplicações de inclusão*, são contínuas quando X $\times$ Y está munido da topologia produto.

Demonstração: Segue do Teorema 3.5.

Definição 3.3. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f: X \longrightarrow Y$ é dita um mapa aberto se f(U) $\in \tau_Y$, $\forall$ U $\in \tau_X$. De forma análoga, $f: X \longrightarrow Y$ é dita um mapa fechado se f(U) $\subset$ Y é fechado, $\forall$ U $\subset$ X fechado.

Definição 3.4. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma bijeção $f: X \longrightarrow Y$ contínua cuja inversa é contínua.

Definição 3.5. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Dizemos que (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são homeomorfos (denotamos por $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$) se existir um homeomorfismo $f: X \longrightarrow Y$.

Exemplo 3.1. Os espaços topológicos $(\mathbb{R}, \tau_{L\mathbb{R}})$ e $(\mathbb{R}, \tau_{R\mathbb{R}})$ dos Exemplos 2.1 e 2.2 são homeomorfos.

Do ponto de vista da topologia, dois espaços topológicos homeomorfos são equivalentes. Por isso, existe uma piada na comunidade matemática sobre como um topólogo não consegue diferenciar dois objetos simples, como por exemplo, uma caneca de café de uma rosquinha de donuts ou um quadrado de uma circunferência pois esses objetos são homeomorfos.

Teorema 3.8. Uma bijeção $f: X \longrightarrow Y$ contínua é um homeomorfismo se, e somente se, leva abertos em abertos.

4 Topologia quociente

Nesta seção, falaremos sobre a topologia quociente. Nosso objetivo é, dado um espaço topológico (X, τ_X) e uma relação de equivalência $\sim$ em X, tornar o conjunto quociente de X por $\sim$ um espaço topológico.

Definição 4.1. Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Chamamos de *classe de equivalência de x* o conjunto:

$$[\mathrm{x}] := \{\mathrm{y} \in \mathrm{X} \mid \mathrm{y} \sim \mathrm{x}\}.$$

Definição 4.2. Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Definimos o *conjunto quociente* de X por $\sim$ como o conjunto:

$$\mathrm{X}/\!\sim\, := \{[\mathrm{x}] \mid \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}.$$

Seja então (X, τ_X) um espaço topológico, $\sim$ uma relação de equivalância em X e X/$\sim$ o conjunto quociente de X por $\sim$. Existe uma aplicação natural sobrejetiva, conhecida como *projeção canônica*, dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} : X &\longrightarrow \mathrm{X}/\!\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Teorema 4.1. A coleção:

$$\tau_{X/\sim} := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{X}/\!\sim\, \mid \mathrm{q}^{-1}(\mathrm{U}) \in \tau_X\}$$

é uma topologia, chamada de *topologia quociente*, em X/$\sim$.

5 Grupos topológicos

Nesta seção, definiremos o que é um grupo topológico, provaremos uma equivalência de definições e falaremos sobre a continuidade de homomorfismos.

Definição 5.1. Seja $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um grupo topológico se as funções

$$\begin{aligned} i : \quad G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

chamadas de inversão e operação de G respectivamente, são contínuas quando G $\times$ G é munido com a topologia produto.

Exemplo 5.1. Seja $(\mathbb{R}, +)$ o grupo aditivo dos números reais e $\tau_{\mathbb{R}}$ a topologia usual de $\mathbb{R}$. O trio $(\mathbb{R}, +, \tau_{\mathbb{R}})$ é um grupo topológico.

Exemplo 5.2. Seja $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ o grupo multiplicativo dos inteiros módulo 5 e $\tau_{\mathbb{Z}_5^*} = \{\emptyset$, {1,4}, {2,3}, $\mathbb{Z}_5^*\}$. O trio $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot, \tau_{\mathbb{Z}_5^*})$ é um grupo topológico.

Exemplo 5.3. Seja $(S_3, \circ)$ o grupo de permutação de 3 elementos e N = {id, (123), (132)}. A topologia τ gerada pela base $\mathcal{B} = \{\mathrm{Nx} \mid \mathrm{x} \in S_3\}$ é tal que $(S_3, \circ, \tau)$ é um grupo topológico.

Em algumas refrerências, é comum encontrar que o trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é um grupo topológico se a aplicação f : G $\times$ G $\longrightarrow$ G, dada por $f(x, y) = xy^{-1}$, é contínua quando G $\times$ G é munido com a topologia produto. Mostraremos agora que essas duas definições são equivalentes.

Teorema 5.1. Seja $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. Então, $(G, \cdot, \tau_G)$ é um grupo topológico se, e somente se, a função

$$
\begin{aligned}
f : \mathrm{G} \times \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{G} \\
(x, y) &\longmapsto x \cdot y^{-1}
\end{aligned}
$$

é contínua, onde G $\times$ G está munido da topologia produto.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $(G, \cdot, \tau_G)$ é um grupo topológico. Então, as funções i e $\cdot$ são contínuas. Segue do Teorema 3.1 que f é contínua

$$
\begin{array}{ccccc}
G \times G & \rightarrow & G \times G & \xrightarrow{\cdot} & G \\
(x, y) & \longmapsto & (x, y^{-1}) & \longmapsto & x \cdot y^{-1}
\end{array}
$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que f é contínua. Segue do Teorema 3.6 e 3.1 que i é contínua pois é a composição de duas funções contínuas

$$
\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{\mathrm{i}_x} & G \times G & \xrightarrow{f} & G \\
x & \longmapsto & (1, x) & \longmapsto & x^{-1}
\end{array}
$$

Da mesma maneira, $\cdot$ também é contínua, pois é a composição de funções contínuas

$$
\begin{array}{ccccc}
G \times G & \rightarrow & G \times G & \xrightarrow{f} & G \\
(x, y) & \longmapsto & (x, y^{-1}) & \longmapsto & x \cdot y
\end{array}
$$

Fixado g $\in$ G, as aplicações

$$
\begin{aligned}
f : \quad G \ \times G &\longrightarrow G \\
(x, y) &\longmapsto xy^{-1}
\end{aligned}
$$

chamadas de *translação à direita*, *translação à esquerda* e *automorfismo interno*, respectivamente, são homeomorfismos.

Agora, determinaremos uma condição para que um homomorfismo de grupos topológicos seja contínuo.

Teorema 5.2. Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \circ, \tau_H)$ grupos topológicos e f : G $\rightarrow$ H um homomorfismo de grupos. Então, f é contínua se, e somente se, é contínua em $1_G \in$ G.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Óbvio.

($\Leftarrow$) Sendo f contínua em $1_G \in$ G então, para toda vizinhança U de $1_H \in$ H, vai existir pelo item 4 do teorema 3.3, uma vizinhança V de 1_G tal que f(V) $\subset$ U. Segue-se daí que, dado g $\in$ G

$$
f(\mathrm{g} \cdot \mathrm{V}) = f(g) \cdot f(V) \subset f(g) \cdot \mathrm{U}.
$$

Logo, f é contínua.

É fácil ver que toda vizinhança U de um ponto g em G é a imagem de uma vizinhaça de 1_G, o elemento neutro do grupo, pela aplicação de translação. Daí, se dá uma das vantagens de se trabalhar com grupos topológicos, que é poder inferir resultados sobre o grupo inteiro ou sobre uma uma vizinhança em particular entendendo como as vizinhanças do elemento neutro funcionam. Por exemplo, podemos mostrar que o grupo topológico é discreto observando se o conjunto unitário, formado apenas pelo elemento neutro, é aberto ou provar que um homomorfismo de grupos é um mapa aberto se leva toda vizinhança aberta do elemento neutro em uma vizinhança aberta do elemento neutro.

Definição 5.2. Seja $(G, \cdot)$ um grupo e U, V $\subset$ G não-vazios. Definimos o produto de U por V e o inverso de U como sendo os conjuntos:

$$\mathrm{U} \cdot \mathrm{V} := \{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} \mid \mathrm{u} \in \mathrm{U}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}\} \text{ e } \mathrm{U}^{-1} := \{\mathrm{u}^{-1} \mid \mathrm{u} \in \mathrm{U}\}.$$

6 Vizinhanças do elemento neutro

Como vimos na seção anterior, dado um grupo topológico $(G, \cdot, \tau_G)$, toda vizinhança U de um ponto g em G é a imagem da aplicação de translação por uma vizinhança do elemento neutro e isso nos permite extrair resultados sobre o grupo. Nosso objetivo neste capítulo é entender como o filtro das vizinhanças do elemento neutro funciona e sobre como ele descreve uma única topologia de grupo sobre o grupo.

Definição 6.1. Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo e g $\in$ G. Chamamos de filtro de todas as vizinhanças de g o conjunto:

$$\mathcal{V}(\mathrm{g}) := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{G} \mid \mathrm{g} \in N_g \subset U,\ N_g \in \tau_G\}.$$

Teorema 6.1. Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $\mathcal{V}(1)$ o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa mesma topologia. Então:

(1) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que V $\cdot$ V $\subset$ U.

(2) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que $\mathrm{V}^{-1} \subset$ U.

(3) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que V $\cdot$ $\mathrm{V}^{-1} \subset$ U.

(4) Para cada U $\in \mathcal{V}(1)$ e a $\in$ G, existe V $\in \mathcal{V}(1)$ tal que $\mathrm{aVa}^{-1} \subset$ U.

Demonstração: Seja U $\in \mathcal{V}(1)$ e int(U) $= U^\circ$. É claro que $1_G \in U^\circ$.

(1) Como a operação do grupo, $\cdot$, é contínua

$$\cdot^{-1}(U^\circ) \in \tau_{G\times G}.$$

Desse modo, existem A, B $\in \tau_G$ abertos básicos que contém 1_G tais que

$$(1_G, 1_G) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} \subset \cdot^{-1}(U^\circ).$$

Tome então V $=$ A $\cap$ B. Segue-se daí que

$$\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \subset \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \subset U^\circ \subset \mathrm{U}.$$

(2) Ora, sabemos que a inversão i é um homeomorfismo. Desse modo, tome V $= i(U^\circ)$. Então $V^{-1} = U^\circ \subset U$.

(3) Sabemos por 1 que, dado U $\in \mathcal{V}(1)$, existe W $\in \mathcal{V}(1)$ tal que W $\cdot$ W $\subset$ U. Tome então V = W $\cap$ W^{-1}. Logo, V $\cdot$ V^{-1} $\subset$ W $\cdot$ W $\subset$ U.

(4) Considere a aplicação

$$\begin{aligned} i_g^{-1}: \quad & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto g^{-1}xg \end{aligned}$$

Tome então V $= i_g^{-1}(U) = g^{-1}Ug$. Logo $i_g(\mathrm{V}) = gVg^{-1} = i_g(i_g^{-1}(U))$ = U $\subseteq$ U.

O próximo Teorema é o resultado mais importante deste trabalho. É através dele que, dado um grupo $(G,\cdot)$, podemos determinar uma topologia τ em G de forma que $(G,\cdot,\tau)$ se torne um grupo topológico por meio de filtros.

Teorema 6.2. Seja $(G,\cdot)$ um grupo e $\mathcal{V}$ um filtro que satisfazas condições do Teorema 6.1. Então, existe uma única topologia τ em G que torna $(G,\cdot,\tau)$ um grupo topológico e que faz $\mathcal{V}$ coincidir com $\mathcal{V}(1)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G.

Demonstração: A saber, $\tau := \{$U $\subset$ G $\mid \forall x \in U,\ \exists V \in \mathcal{V},\ xV \subset U\}$.

Faz sentido irmos mais fundo, isto é, observar se conseguimos gerar um filtro que satisfaça as condições do Teorema 6.1 por meio de uma base de um filtro. Isso é de fato possível e agora daremos exemplos de bases de filtros que geram filtros que cumprem as condições do Teorema 6.1 e 6.2.

Seja $(G,\cdot)$ um grupo e p um número primo.

Exemplo 6.1. A *topologia pró-finita*, gerada pela família $\mathcal{B}$, que é formada por todos subgrupos normais de indíce finito em G.

Exemplo 6.2. A *topologia pró-p-finita*, gerada pela família $\mathcal{P}$, que é formada por todos subgrupos normais cujo indíce é finito e é uma potência de p em G.

Exemplo 6.3. A *topologia pró-contável*, gerada pela família $\mathcal{H}$, que é formada por todos subgrupos normais de indíce enumerável em G.

Teorema 6.3. Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo, H $\subset$ G e $\mathcal{V}(1)$ o filtro de todas as vizinhanças de 1_G. Então $\bar{H} = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{V}(1)} U \cdot H = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{V}(1)} H \cdot U$.

7 Subgrupos topológicos

Sabemos que, dado um espaço topológico (X,τ_X) e um subconjunto A de X, é possível transformar A em um espaço topológico munindo-o da topologia subespaço. Nesta seção, mostremos que dado um grupo topológico $(G,\cdot,\tau_G)$ e $H <$ G, a topologia subespaço é compatível com a operação do grupo e a inversão, isto é, torna estas funções contínuas. Provaremos também alguns resultados básicos sobre subgrupos topológicos envolvendo classes laterais.

Teorema 7.1. Seja $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e $H<$ G. Então, τ_H, a topologia subespaço torna $(H,\cdot,\tau_H)$ um grupo topológico.

Demonstração: Note que a função

$$\begin{aligned} f_H : \quad & H \times H \longrightarrow H \\ & (h, h') \longmapsto h \cdot h'^{\ -1} \end{aligned}$$

é uma restrição de f ao subconjunto $H \times H \subset$ G $\times$ G. Segue do Teorema 3.4 que f_H é contínua. Pelo Teorema 5.1, $(H, \cdot, \tau_H)$ é um grupo topológico.

Teorema 7.2. Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H $<$ G. Então:

(1) H é aberto se, e somente se, int(H) $= H^\circ \neq \emptyset$.

(2) Se $H \in \tau_G$, então $H^c \in \tau_G$.

(3) Se $H^c \in \tau_G$ e $|$G $: H| < \infty$, então $H \in \tau_G$.

Demonstração:

(1)

($\Rightarrow$) Seja $H \in \tau_G$. Se $H^\circ = \emptyset$ então, pelo Teorema 1.2, $H = \emptyset$. Logo, $H \not< $ G.

($\Leftarrow$) Suponhamos $H^\circ \neq \emptyset$. Como $xH^\circ \subseteq H$, $\forall x \in H$, pois $H <$ G, temos que

$$\text{H} = \bigcup_{x \in H} xH^\circ$$

é aberto, pelo Teorema 1.2.

(2) É fácil ver que, $\forall x \in H^c$, $xH^c \cap$ H $= \emptyset$. Logo $H^c = \bigcup\limits_{x \notin H} xH \in \tau_X$.

(3) Seja $H \subset G$ fechado com $|$G $: H| < \infty$. Assim, $\exists$ $a_1, ..., a_n$ em G tais que

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \!\!\!\cdot\;\, a_i H$$

Fixe então $a_n =$ a $\in H$. Então

$$G = \bigcup_{i=1}^{n-1} \!\!\!\cdot\;\, a_i H \cup H = H^c \cup H$$

Logo, H $\in \tau_G$ pois H^c é a união finita de fechados, e portanto é fechado.

8 Considerações finais

Teoria de grupos e Topologia Geral são duas grandes áreas da matemática que, apesar de serem distintas em muitos aspectos, interseccionam-se no estudo de grupos topológicos. Os resultados sobre Topologia Geral e em particular, sobre grupos topológicos apresentados até agora são básicos porém já dispomos de ferramentas para estudar tópicos mais avançados de Topologia, como por exemplo, invariantes topológicos como a conexidade, conexidade por caminhos e compacidade, axiomas de separação e aplicar em grupos topológicos.

Os estudos desenvolvidos para a realização deste trabalho se deram em parte pela Orientação à Pesquisa III, componente curricular obrigatório do curso Licenciatura em Matemática, onde estudei Topologia Geral por um semestre e Orientação à Pesquisa IV, onde continuei os estudos de Topologia Geral e iniciei o estudo de grupos topológicos. Sem dúvidas, esses estudos me permitiram conhecer um pouco das duas áreas e estão contribuindo para a minha formação.

9 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, pela sua dedicação e disposição para a realização deste trabalho.

10 Referências

DIKRANJAN, Dikran. **Introduction to topological groups**. preparation, http://users. dimi. uniud. it/ dikran. dikranjan/ITG. pdf, 2013.

KUMAR, A. Muneesh; GNANACHANDRA, P. **Exploratory results on finite topological groups**. JP Journal of Geometry and Topology, v. 24, n. 1-2, p. 1-15, 2020.

MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 574 p. Disponível em: https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0. Acesso em: 10 set. 2022.

MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

SHICK, Paul L. **Topology: point-set and geometric**. John Wiley Sons, 2011.