Análise Matemática

Gleberson Antunes

22 de Setembro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Análise Real, das provas de admissão ao Mestrado em Matemática na UFSM. As resoluções são desprentesiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página Gleberson Antunes.

Sumário

1 Prova de seleção para o Mestrado em Matemática 2009.1

22 de Setembro de 2023

Exercício 1. Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) nos intens abaixo, justificando suas respostas.

(a) Seja $A \subset \mathbb{R}$ tal que A possui um elemento máximo a. Então sup $A = a$.

(b) A sequência $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ é convergente.

(c) Seja $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$, $L > 0$ uma função par. Então

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$$

(d) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left[cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1.$

Demonstração.

(a) Verdadeiro. Óbvio.

(b) Verdadeiro. Basta notar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \;=\; (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

(c) Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x)dx &= \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &= \int_{-L}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \end{aligned}$$

Tomando $u = -x$, obtemos $du = -dx$. Note que $x = -L \Rightarrow u = L$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)dx &= -\int_{L}^{0} f(u)du + \int_{0}^{L} f(x)dx\\ &= \int_{0}^{L} f(u)du + \int_{0}^{L} f(x)dx\\ &= 2\int_{0}^{L} f(x)dx.\end{aligned}$$

(d) Falso. Suponhamos que a afirmação seja verdade. Então, para toda sequência de pontos $x_n \in [0,\infty) - \{0\}$ que é tal que $x_n \longrightarrow 0$, $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \longrightarrow 1$. Considere então as sequências $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ e $\left(\frac{2}{\pi + 4n\pi}\right)$, que claramente convergem para 0. Note porém que

$$cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = cos(2n\pi) \longrightarrow 1,$$

e

$$cos\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi+4n\pi}}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \longrightarrow 0,$$

o que é absurdo. □

Exercício 2.

(a) Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

.

(b) Prove que $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ vale $|sin\ b - sin\ a| \leq |b - a|$.

Demonstração.

(a) Podemos decompor $\frac{1}{n(n+2)}$ em frações parciais. Nesse caso teríamos

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)}$$

$$\begin{aligned} A+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \\ \Rightarrow B-\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Assim

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

Notemos que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)+...+\left(\frac{1}{2(n-2)}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n+1)}\right) \\ +\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+2)}\right)+\left(\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n+3)}.$$

Segue daí que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n+3)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

(b) Sabemos que a função

$$\begin{aligned} sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto sin(x), \end{aligned}$$

é derivável em toda reta. Escolhamos dois números reais a e b arbitrários. Tome então o intervalo fechado $[a, b]$ (poderá ser $[b, a]$ ou consitirá em um único ponto, dependendo da escolha desses números). O **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{sin\ b - sin\ a}{b - a} \ = \ cos\ c.$$

Em módulo temos que

$$\left|\frac{sin\ b - sin\ a}{b - a}\right| \ = \ |cos\ c| \ \leq \ 1$$

$$\Rightarrow |sin\ b - \ sin\ a| \ \leq \ |b - a|,$$

como queríamos provar. $\square$

Exercício 3.

(a) Mostre que $e^x \geq 1 + x$, para todo x real não negativo.

(b) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se}\, x \neq 0. \\ 0, & \text{se}\, x = 0. \end{cases}$$

é derivável com derivada primeira contínua.

(c) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração.

(a) Notemos que

$$e^x \ \geq \ 1+x \ \Leftrightarrow \ x \ \geq \ ln(1+x).$$

Provaremos a segunda afirmação, e portanto, a equivalência. Sabemos que a função

$$\begin{aligned} ln\colon (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt, \end{aligned}$$

é monótona crescente e derivável. Para todo $x \in (0,\infty)$ o **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (1, 1+x)$ tal que

$$\frac{ln(1+x) - ln(1)}{(x+1)-1} \ = \ \frac{1}{c} \ < \ 1.$$

$$\frac{ln(1+x)}{x} \ = \ \frac{1}{c} \ < \ 1.$$

$$\Rightarrow ln(1+x) \ < \ x.$$

Segue daí que

$$1+x \ < \ e^x,$$

para todo $x \in (0,\infty)$.

(b) Se $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) \ + \ 3x^2 \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se $x = 0$, então

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3\cdot sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x-0} \;=\; \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3\cdot sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} \;=\; \lim_{x\longrightarrow 0} x^2\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; 0.$$

Provaremos agora que $f'(x)$ é contínua. Considere então a função

$$f'(x)=\begin{cases} -x\cdot cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \;+\; 3x^2\cdot sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se}\, x\neq 0.\\ 0, & \text{se}\, x=0.\end{cases}$$

Se $x\neq 0$, então

$$f''(x)=\frac{sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} \;-\; 4\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) \;+\; 6x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se $x=0$, então

$$\lim_{x\longrightarrow 0} -x\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) \;+\; 3x^2\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(0)=0,$$

uma fez que $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ são funções limitadas. Logo f' é contínua em $\mathbb{R}$. Isso se dá pois f' é derivável em todo ponto $x\neq 0$, e daí ela será contínua em $\mathbb{R}-0$. Por outro lado, $\lim_{x\longrightarrow 0} f'(x)=f'(0)$ nos garante a continuidade de f' no ponto $x=0$.

(c) Sabemos que toda função contínua é integrável. Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**, sabemos que toda função contínua possui uma primitiva. Considere então a função

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \int_a^x f(x)dx. \end{aligned}$$

Essa função é contínua e derivável, com $F'(x)=f(x)$, para todo $x\in[a,b]$. Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\cdot\left(\int_a^b f(x)dx-\int_a^a f(x)dx\right) \;=\; F'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a} \cdot \left(\int_a^b f(x)dx - 0 \right) = f(c)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ = \ f(c)(b-a).$$

$\square$

2 Prova de seleção para o Mestrado em Matemática 2010.1

Exercício 1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência dada recursivamente por $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, $n > 1$. Mostrar que $\{a_n\}$ é convergente. Calcule $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$.

Demonstração. Facilmente verificamos que (a_n) é uma sequência monótona crescente. Provaremos agora que ela é limitada e, portanto, é convergente. Por indução, temos que:

Para $n = 1$, $a_1 = \sqrt{3} < 10$. Suponhamos então que essa afirmação é válida para um certo $n > 1$, isto é, $a_n < 10$. Então

$$\begin{aligned} 3 + a_n &< 3 + 10 \\ &\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3 + 10} < 10. \end{aligned}$$

Logo (a_n) é limitada. Seja $S = \lim a_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\ldots}}}}$. Note que

$$S^2 = 3 + \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\ldots}}}}}_{S}.$$

Então

$$S^2 - S - 3 = 0,$$

e daí as possíveis soluções são:

$$S_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Como (a_n) é uma sequência estritamente positiva, temos que $S = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$. $\square$

Exercício 2.

(a) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, caracterize ponto interior e ponto de fronteira de A.

(b) Sejam $A = [a, b]$ um intervalo fechado e $f : A \longrightarrow A$ um função contínua. Mostre que f tem um ponto fixo em A, ou seja, existe $c \in A$ tal que $f(c) = c$.

(c) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $f'(x) = 0$ para todo x no interior de I, então f é constante.

Demonstração.

(a)

Definição. Diremos que $a \in A$ é um *ponto interior de* A quando existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A.$$

Definição. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de fronteira de* A quando para todo $\varepsilon > 0$, temos que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset.$$

(b) Consideremos a função contínua

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - f(x). \end{aligned}$$

Como $a \leq f(a)$ e $f(b) \leq b$, devemos ter

$$a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b).$$

Se for $a - f(a) = 0$ ou $b - f(b) = 0$, então f possui um ponto fixo. Do contrário, sendo $a \; - \; f(a) \; < \; 0 \; < \; b \; - \; f(b)$, o **Teorema do Valor Intermediário** nos garante que existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} c \; - \; f(c) \; &= \; 0 \\ \Rightarrow f(c) \; &= \; c. \end{aligned}$$

Logo f possui um ponto fixo.

(c) Para todo $x \in [a, b)$, o **Teorema do Valor Médio**, nos garante que existe $d \in (a, x)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \; &= \; f'(d) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) - f(a) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) = f(a). \end{aligned}$$

Como $f(a) = f(b)$ por esse mesmo teorema, temos que f deve ser constante.

$\square$

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + |x|^3 sin\Big(\frac{1}{x}\Big), & \text{se}\, x \neq 0. \\ k, & \text{se}\, x = 0. \end{cases}$$

(a) Qual o valor de k que torna f contínua.

(b) A função f, como k escolhido no item anterior, é derivável?

Demonstração.

(a) f será contínua quando $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) \; = \; f(0)$. Nesse caso, se tomarmos $k \; = \; \dfrac{1}{2}$, teríamos

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{2} + |x|^3 sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{2} + \cancelto{0}{\lim_{x\longrightarrow 0} |x|^3 sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2} = f(0).$$

(b) Se $x \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= -|x|^3 \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^5}{|x|^3} \\ &= -|x| \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) + |x| \cdot x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Se $x = 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + |x|^3 sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}}{x - 0} &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{|x|^3 sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2 \cdot |x| sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0} x \cdot |x| sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo f será derivável.

$\square$

3 Prova de seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1

Exercício 1. Faça o gráfico da função $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Prove que sua imagem é o intervalo $|y| < 1$. Prove que ela é injetiva e calcule sua inversa.

Demonstração. **Sabemos que uma função é injetiva se, e somente se, possui inversa à esquerda**. Consideremos a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Rightarrow\ y^2(x^2+1) \ = \ x^2 \\ &\Rightarrow\ y^2 = x^2 - y^2x^2 \\ &\Rightarrow y^2 = (1-y^2)x^2 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \\ &\Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

Daí

$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} &= \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}} \\
&= \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \\
&- \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Logo a função

$$
\begin{aligned}
g\colon (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
y &\longmapsto \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},
\end{aligned}
$$

é a inversa à esquerda de f. Consequentemente, $\mathrm{Im} f = (-1,1)$. □

Exercício 2. Considere o conjunto $X = \left\{1 - \dfrac{1}{3n^2}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Mostre que $\sup X = 1$.

(b) Mostre que a sequência $x_n = 1 - \dfrac{1}{3n^2}$ converge para 1.

(c) O conjunto X é compacto em $\mathbb{R}$? Justifique.

Demonstração. **Provarei primeiramente** (b) **e depois** (a).

(b) Sabemos que a sequência $z_n = \dfrac{1}{n}$ converge para 0. Daí

$$
-\frac{1}{3n^2} = -\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right] = -\frac{1}{3} \cdot [z_n \cdot z_n] \longrightarrow -\frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0.
$$

Como a sequência constante $y_n = 1$ converge para 1, temos que

$$x_n = y_n - z_n = 1 - \frac{1}{3n^2} \longrightarrow 1 - 0 = 1.$$

(a) Notemos, inicialmente, que a sequência x_n é monótona limitada. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m < n$, teremos que

$$\begin{aligned} m < n \Rightarrow \; & m^2 < n^2 \\ \Rightarrow \; & \frac{1}{n^2} < \frac{1}{m^2} \\ \Rightarrow \; & -\frac{1}{3m^2} < -\frac{1}{3n^2} \\ \Rightarrow \; & 1 - \frac{1}{3m^2} < 1 - \frac{1}{3n^2} \\ = \; & x_m < x_n, \end{aligned}$$

Logo (x_n) é monótona crescente. Como ela converge pelo item (b), temos que $1 = \sup X$, pois o conjunto X corresponde a imagem da sequência (x_n) e, como sabemos, **toda sequência monótona crescente converge para o supremo do conjunto da sua imagem.**

(c) Sabemos, pelo **Teorema de Heine-Borel**, que um conjunto é compacto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é fechado e limitado. Notemos que

$$\overline{X} = X \cup \{1\}.$$

Note que X sequer é fechado. Logo não pode ser compacto. $\square$

Exercício 3. Prove que toda coleção de abertos dois a dois disjuntos e não vazio de $\mathbb{R}$ é enumerável.

Demonstração. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma coleção arbitrária de abertos dois a dois disjuntos. Para cada $a \in A_\lambda$, existe um intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, tal que

$a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A_\lambda$.

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ contém um número racional. Para cada A_λ escolhamos um número racional $\lambda_r \in A_\lambda$. A aplicação

$$\begin{aligned} f\colon \{A_\lambda\}_{\lambda \in I} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ A_\lambda &\longmapsto \lambda_r, \end{aligned}$$

é injetiva. Logo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é enumerável. □

Exercício 4. Identifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justicando sua resposta:

(a) Toda sequência monótona limitada é convergente.

(b) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

(c) Se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $c \in (a, b)$, e $f'(c) = 0$ então f tem um extremo relativo em c.

(d) Se $X \subset \mathbb{Q}$ e X é limitado, então existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $b = \sup X$.

(e) Toda função integrável à Riemann em $[a, b]$ possui primitiva em $[a, b]$.

Demonstração.

(a). Verdade. Isso se dá pelo **Teorema de Convergência Monótona**.

(b). Verdade. Isso se dá pelo **Critério de Cauchy para convergência de séries**.

(c). Falso. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f\colon [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3. \end{aligned}$$

Note que $f'(0) = 0$, mas f náo possui um extremo relativo em 0.

(e). Falso. Seja X a imagem da sequência

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Essa sequência é monótona crescente e limitada. Portanto, converge, pelo **Teorema de Convergência Monótona**. Note que $x_n \longrightarrow e = \sup X$, mas $e \notin \mathbb{Q}$.

(e). Falso. Considere a função $f : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se}\, x \notin \mathbb{N}. \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere então $F : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se}\, x \notin \mathbb{N}. \\ x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Que é equivalente a

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Note que F não é derivável em $x = 2$. De fato

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} &= \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{0 - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 2} -\frac{2}{x - 2} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

□

Exercício 5. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em (a,b) e contínua em $[a,b]$, com $f(a) = f(b)$. Mostre que existe um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) \cdot f'(c) = 0$.

Demonstração. O **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \Rightarrow f(c) \cdot f'(c) &= f(c) \cdot \frac{0}{b - a} = 0, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$