Uma breve apresentação sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações

Gleberson Gregorio da Silva Antunes

Eixo 9: Tópicos Especiais de Matemática

Resumo

Neste trabalho estudaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Este teorema garante a existência e unicidade de um ponto fixo em um certo tipo de função contínua, chamada de contração. Além disso, daremos algumas aplicações desse teorema na resolução de equações.

Introdução

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um clássico resultado matemático que estabelece a existência e a unicidade de um ponto fixo para uma aplicação contrativa em um espaço métrico completo. Suas aplicações se estendem por uma ampla gama de áreas, como análise funcional, teoria das equações diferenciais, otimização, economia, física, e diversos outros campos da matemática e da ciência.

O conteúdo deste trabalho está dividido em 5 capítulos. No Capítulo 1, iniciaremos com uma introdução concisa aos espaços métricos, fornecendo definições e diversos exemplos. Em seguida, no Capítlo 2, abordaremos as sequências de Cauchy e os espaços métricos completos. No Capítulo 3, introduziremos a continuidade de funções em espaços métricos, uma que esse tópico é relevante para o entendimento da prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

No Capítulo 4, apresentaremos a prova deste teorema, elucidando os detalhes essenciais para sua compreensão. Por fim, no Capítulo 5, exploraremos duas aplicações práticas desse teorema na resolução de equações. Embora muitas demonstrações sejam omitidas neste texto, faremos referência às fontes onde podem ser encontradas.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Neste capítulo apresentaremos a definição de espaço métrico, bem como exemplos desse objeto matemático. De um modo geral, a referência para esse capítulo é Lima [4].

Definição 1.1. Um *espaço métrico* consiste em um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma função

$$\begin{aligned} d\colon M \times M &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

chamada de *métrica*, que associa cada par $(x, y) \in M \times M$ a um número real $d(x, y)$, chamado *a distância de x até y*, e que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

1. $d(x, x) = 0$.
2. Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os elementos de (M, d) são chamados de *pontos*.

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.2. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e a função

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |y - x|, \end{aligned}$$

formam um espaço métrico.

Exemplo 1.3. Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano e $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. As aplicações $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dadas por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad d'(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} \quad \text{e} \quad d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

são métricas.

Exemplo 1.4. O conjunto $C([a, b])$, cujos elementos são as aplicações contínuas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, e a função

$$\begin{aligned} d \colon C([a,b]) \times C([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (f, g) &\longmapsto \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx}, \end{aligned}$$

formam um espaço métrico. Essa métrica, em específico, é induzida pelo produto interno usual de $C([a, b])$ (Ver Lima [2], Exemplo 10.3, Capítulo 10).

Exemplo 1.5. O conjunto $C([a, b])$, cujos elementos são as aplicações contínuas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, e a função

$$\begin{aligned} d' \colon C([a,b]) \times C([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (f, g) &\longmapsto \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|, \end{aligned}$$

formam um espaço métrico.

Exemplo 1.6. O conjunto $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

formam um espaço métrico. Na verdade, qualquer conjunto M não vazio munido dessa métrica, chamada de *métrica discreta* ou *métrica zero-um*, torna-se um espaço métrico (Ver Lima [4], Exemplo 1, Capítulo 1).

Capítulo 2

Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos

Nesta capítulo falaremos sobre sequências convergentes, sequências de Cauchy e espaços métricos completos. De um modo geral, a referência para esse capítulo é Ferreira [1] e Lima [4].

Definição 2.1. Uma *sequência* em um espaço métrico (M, d) é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e se chamará *n-ésimo termo* da sequência. Usaremos a notação (x_n) e $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ para representar uma sequência.

Daremos agora alguns exemplos de sequências.

Exemplo 2.2. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico do Exemplo 1.2. A aplicação

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

é uma sequência em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.3. Seja $(C([a, b]), d)$ o espaço métrico do Exempo 1.4. A aplicação

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow C([a, b]) \\ n &\longmapsto x^n, \end{aligned}$$

é uma sequência em $C([a, b])$.

Exemplo 2.4. Seja (M, d) o espaço métrico do Exemplo 1.6. A aplicação

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow M \\ n &\longmapsto 5, \end{aligned}$$

é uma sequência.

Definição 2.5. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (M, d). Diremos que o ponto $a \in M$ é o limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; d(x_n, a) \;<\; \varepsilon.$$

Quando $\lim x_n = a$, diz-se que a sequência *converge para* a e escreve-se $x_n \longrightarrow a$. Se não existir $a \in M$ tal que $x_n \longrightarrow a$, então (x_n) será dita *divergente.*

Exemplo 2.6. Seja (x_n) a sequência do Exemplo 2.2. Então $\lim x_n = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 \;>\; \frac{1}{\varepsilon}.$$

Segue daí que, para todo $n > n_0$

$$n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \;<\; \frac{1}{n_0} \;<\; \varepsilon.$$

Logo $x_n \longrightarrow 0$.

Exemplo 2.7. Seja (x_n) a sequência do Exemplo 2.4. Então $\lim x_n = 5$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $n = 1$. Então

$$n > 1 \;\Rightarrow\; d(x_n, 5) \;=\; d(5, 5) \;=\; 0 \;<\; \varepsilon.$$

Logo $x_n \longrightarrow 5$.

Exemplo 2.8. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico do Exemplo 1.2. A aplicação

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto n, \end{aligned}$$

é uma sequência divergente.

Apresentaremos agora a definição de sequência de Cauchy. A grosso modo, uma sequência de Cauchy é uma sequência em que, para qualquer margem de erro positiva escolhida, existe um ponto na sequência a partir do qual todos os termos subsequentes estão dentro dessa margem de erro uns dos outros. Em outras palavras, os termos se aproximam uns dos outros à medida que a sequência avança.

Definição 2.9. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M, d) é dita ser uma *sequência de Cauchy* quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) \ < \ \varepsilon,$$

para todos $m, n > n_0$.

Teorema 2.10. Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Encontra-se em Ferreira [1], Teorema 1.3.4.

□

Exemplo 2.11. As sequências dos Exemplos 2.6 e 2.7 são sequências de Cauchy, uma vez que convergem.

Apresentamos agora a definição de espaço métrico completo. Essa definição será de extrema importância quando formos provar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, uma vez que ela vai garantir que toda sequência de Cauchy converge para um ponto nesse espaço.

Definição 2.12. Um espaço métrico (M, d) é dito *completo* quando toda sequência de Cauchy convergir em M.

Exemplo 2.13. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e a função

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto |y - x|, \end{aligned}$$

formam um espaço métrico. Consideremos então a sequência

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Os termos dessa sequência são todos números racionais e, sabemos por Lima [3], que essa sequência é convergente. De posse do Teorema 2.10, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Notemos porem que $x_n \longrightarrow e$, mas $e \notin \mathbb{Q}$. Logo $(\mathbb{Q}, d)$ não é um espaço métrico completo.

Exemplo 2.14. O espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$ do Exemplo 1.2 é completo.

Exemplo 2.15. Os espaços métricos $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d')$ e $(\mathbb{R}^n, d'')$ do Exemplo 1.3 são completos.

Exemplo 2.16. O espaço métrico $(C([a, b]), d')$ do Exemplo 1.5 é completo.

Capítulo 3

Funções contínuas

Neste capítulo falaremos sobre a continuidade de funções em espaços métricos. De um modo geral, as referências para esse capítulo são Ferreira [1] e Lima [4].

Definição 3.1. Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. Diremos que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é *contínua no ponto* $a \in M$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) \; < \; \delta \; \Rightarrow \; d(f(x), f(a)) \; < \; \varepsilon.$$

Diremos que $f : M \longrightarrow N$ é *contínua* quando ela for contínua em todos os pontos $a \in M$.

Exemplo 3.2. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico do Exemplo 1.2. A aplicação

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x. \end{aligned}$$

é contínua.

Definição 3.3. Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. Diremos que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é *lipschitiziana* quando existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \; \leq \; \alpha \cdot d(x, y),$$

para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.4. Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. Toda aplicação $f : M \longrightarrow N$ lipschitiziana é contínua.

Demonstração. Fixemos $a \in M$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$. Então, por definição, temos que

$$d(f(x), f(a)) \; \leq \; \alpha \cdot d(x, a) \; < \; \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} \; = \; \varepsilon,$$

logo f é contínua.

$\square$

Exemplo 3.5. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico do Exemplo 1.2. A aplicação

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1. \end{aligned}$$

é lipschitiziana e, portanto, é contínua.

Definição 3.6. Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é dita uma *contração* quando existe uma constante $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \ \leq \ \alpha \cdot d(x, y),$$

para quaisquer que sejam $x, y \in M$.

É fácil ver que toda contração é uma função contínua, uma vez que ela também é uma função lipschitiziana.

Exemplo 3.7. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico do Exemplo 1.2. A aplicação

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2}+1. \end{aligned}$$

é uma contração.

Teorema 3.8. Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. Afim de que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \longrightarrow a$ em M implique $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ em N.

Demonstração. Encontra-se em Lima [4], Proposição 9, capítulo 5

$\square$

Capítulo 4

O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta capítulo apresentaremos a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Definição 4.1. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \longrightarrow M$ uma função. Diremos que $x_0 \in M$ é um ponto fixo de f quando

$$f(x_0) = x_0.$$

Exemplo 4.2. Seja $(\mathbb{R}, d)$ o espaço métrico do Exemplo 1.2. A aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3. \end{aligned}$$

admite -1, 0 e 1 como pontos fixos.

Lema 4.3. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \longrightarrow M$ uma contração. Se f admite um ponto fixo, então ele é único.

Demonstração. Encontra-se em Ferreira [1], Lema 2.1.1.

$\square$

Apresentamos agora o resultado mais importante desse trabalho.

Teorema 4.4. Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \longrightarrow M$ uma contração. Então $f : M \longrightarrow M$ admite um único ponto fixo.

Demonstração. Fixado $x \in M$ arbitrário, considere a sequência

$$(f^n(x)) \;=\; (x, f(x), f^2(x), f^3(x), ..., f^n(x), ...),$$

das iteradas da função f aplicadas em x. Como f é uma contração, notemos que

$$
\begin{aligned}
d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \ &\leq \ \alpha \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \\
&\leq \ \alpha^2 \cdot d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) \\
... \ &\leq \alpha^n \cdot d(f(x), x),
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Provaremos agora que $(f^n(x))$ é uma sequência de Cauchy em M. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, com $n > m$, as propriedades da métrica nos garantem que

$$
\begin{aligned}
d(f^m(x), f^n(x)) \ &\leq \ d(f^m(x), f^{m+1}(x)) \ + \ d(f^{m+1}(x), f^n(x)) \\
&\leq \ d(f^m(x), f^{m+1}(x)) \ + \ d(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x)) \ + \ d(f^{m+2}(x), f^n(x)) \\
&\leq \ d(f^m(x), f^{m+1}(x)) \ + \ ... \ + \ d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \\
&\leq \alpha^m \cdot d(f(x), x) \ + \ \alpha^{m+1} \cdot d(f(x), x) \ + \ ... \ + \ \alpha^{n-1} \cdot d(f(x), x) \\
&= \ (\alpha^m \ + \ ... \ + \ \alpha^{n-1}) \cdot d(f(x), x) \\
&= \ \alpha^m \cdot \left(\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) \cdot d(f(x), x) \\
&< \ \left(\frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \right) \cdot d(f(x), x).
\end{aligned}
$$

Segue daí que $d(f^m(x), f^n(x)) \longrightarrow 0$ quando $m, n \longrightarrow \infty$. Logo, a sequência $(f^n(x))$ das iteradas da função f aplicadas em x é uma sequência de Cauchy em M. Desse modo, existe $\lim\, f^n(x) \ = \ x_0 \in M$, uma vez que esse espaço métrico é completo. Provaremos agora que x_0 é um ponto fixo de f. Por definição

$$
f^n(x) \ = \ f(f^{n-1}(x)).
$$

Note porém que

$$
\begin{aligned}
x_0 \ &= \ \lim f^n(x) \\
&= \ \lim f(f^{n-1}(x)) \\
&= \ f\Big(\lim f^{n-1}(x) \Big) \\
&= \ f(x_0),
\end{aligned}
$$

pelo Teorema 3.8 . Assim, x_0 é um ponto fixo de f. A unicidade de x_0 vem do Lema 4.3.

$\square$

Capítulo 5

Algumas Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo apresentaremos duas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, por conta da limitação do número de páginas. Mais aplicações podem ser encontradas em Ferreira [1].

Exemplo 5.1. A equação $x = \lambda \cdot \cos x$, com $0 < \alpha < 1$, possui uma única solução. De fato, considere a aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \lambda \cos x$. Note que

$$
\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= |\lambda \cdot \cos y - \lambda \cdot \cos x| \\
&= \lambda \cdot \left| \int_x^y \operatorname{sen} t \; dt \right| \\
&\leq \lambda \cdot \int_x^y |\operatorname{sen} t| \; dt \\
&\leq \lambda \cdot \int_x^y \; dt \\
&\leq \lambda \cdot |y - x| \\
&= \lambda \cdot d(f(x), f(y)).
\end{aligned}
$$

Logo f é uma contração. Segue do Teorema 4.4 que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = \lambda \cos x_0$.

Exemplo 5.2. A equação $x = e^{-x}$ admite uma única solução, por conta do Teorema 4.4, no intervalo $[0, 1]$.

Uma aplicação não tão formal.

Exemplo 5.3. Escolha um mapa da sua cidade e deixe-o cair no chão da sua sala. Se definirmos uma função que associa cada ponto da cidade a um ponto correspondente no mapa, então existirá um único ponto na cidade que está exatamente acima do ponto correspondente no mapa, que está no chão da sala.

Bibliografia

[1] FERREIRA, Marcos dos Santos. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações**. 2008. 61 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) - Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, Bahia, 2008. Disponível em: https://marcosferreira.weebly.com/uploads/1/2/3/6/12369997/monografia_marcosferreira.pdf. Acesso em: 10 set. 2023.

[2] LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[3] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol 1**. 15 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[4] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.