Uma Pequena Introdução à Topologia Geral

Gleberson G. da Silva Antunes

Universidade Estadual de Feira de Santana

XIX Semana de Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana

Uma pergunta natural

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é:

Uma pergunta natural

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é:

- O que é Topologia ?

Uma pergunta natural

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é:

- O que é Topologia ?

Antes de definirmos o que é Topologia, daremos alguns exemplos que facilitarão o entendimento.

Todos nós, em algum momento da nossa vida, tivemos contato com a Geometria euclidiana.

Todos nós, em algum momento da nossa vida, tivemos contato com a Geometria euclidiana. Nela, estudamos certos objetos, como por exemplo

Todos nós, em algum momento da nossa vida, tivemos contato com a Geometria euclidiana. Nela, estudamos certos objetos, como por exemplo

Todos nós, em algum momento da nossa vida, tivemos contato com a Geometria euclidiana. Nela, estudamos certos objetos, como por exemplo

Figura 1 - Triângulo e quadrado

o triângulo, o quadrado e outras figuras planas.

O que todas essas figuras planas têm em comum é que são preservadas por certas transformações, chamadas de *transformações euclidinas*, que ocorrem no plano.

O que todas essas figuras planas têm em comum é que são preservadas por certas transformações, chamadas de *transformações euclidinas*, que ocorrem no plano.São exemplos de *transformações euclidianas*:

Geometria Euclidiana

O que todas essas figuras planas têm em comum é que são preservadas por certas transformações, chamadas de *transformações euclidinas*, que ocorrem no plano.São exemplos de *transformações euclidianas*:

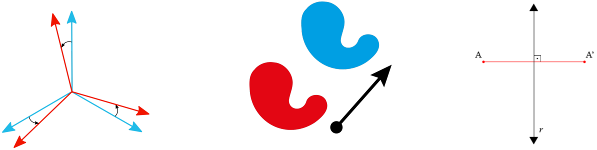

Figura 2 - Rotação, translação e reflexão

Outras transformações euclidianas podem ser determinadas a partir da combinação dessas três.

Outra transformação euclidiana que podemos considerar é a multiplicação por escalar (positivo).

Geometria Euclidiana

Outra transformação euclidiana que podemos considerar é a multiplicação por escalar (positivo). Assim, é possível falar sobre congruência e semelhança de triângulos, por exemplo.

Outra transformação euclidiana que podemos considerar é a multiplicação por escalar (positivo). Assim, é possível falar sobre congruência e semelhança de triângulos, por exemplo.

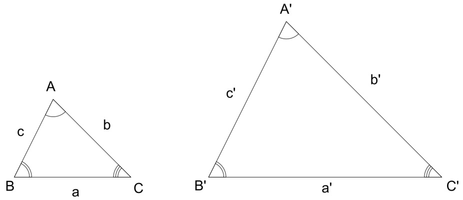

Figura 3 - Triângulos semelhantes

Outra transformação euclidiana que podemos considerar é a multiplicação por escalar (positivo). Assim, é possível falar sobre congruência e semelhança de triângulos, por exemplo.

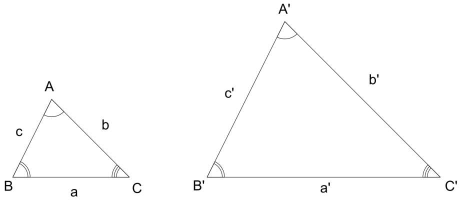

Figura 3 - Triângulos semelhantes

Pode-se definir a Geometria Euclidiana como sendo o estudo das propriedas das figuras planas que são invariantes sob transformações euclidianas.

Teoria de Grupos

Definição

Um grupo é um par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

Teoria de Grupos

Definição

Um grupo é um par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.

Teoria de Grupos

Definição

Um grupo é um par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.
2. Para todo $g \in G$, existe $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$.

Teoria de Grupos

Definição

Um grupo é um par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.
2. Para todo $g \in G$, existe $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$.
3. Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Teoria de Grupos

Definição

Um grupo é um par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.
2. Para todo $g \in G$, existe $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$.
3. Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Definição

Um grupo é um par $(G, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.
2. Para todo $g \in G$, existe $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$.
3. Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

São exemplos de grupos:

- $(\mathbb{R}, +)$, o conjunto dos números reais munido da operação de soma.

Definição

Um grupo é um par $(\mathrm{G}, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.
2. Para todo $g \in \mathrm{G}$, existe $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$ tal que $\mathrm{g} \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{g} = \mathrm{g}$.
3. Para todo $g \in \mathrm{G}$, existe $\mathrm{g}^{-1} \in \mathrm{G}$ tal que $\mathrm{g} \cdot \mathrm{g}^{-1} = \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{g} = \mathrm{e}$.

São exemplos de grupos:

- $(\mathbb{R}, +)$, o conjunto dos números reais munido da operação de soma.
- Seja X um conjunto qualquer. Considere $\mathrm{S(X)} = \{f : X \longrightarrow X \mid f$ é bijeção$\}$. Então, o par $(\mathrm{S(X)}, \circ)$, onde $\circ$ é a composição de funções, é um grupo.

Definição

Um grupo é um par $(\mathrm{G}, \cdot)$, onde G é um conjunto e $\cdot$ é uma operação, isto é, uma função $\cdot : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\cdot$ é associativa.
2. Para todo $g \in \mathrm{G}$, existe $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$ tal que $\mathrm{g} \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{g} = \mathrm{g}$.
3. Para todo $g \in \mathrm{G}$, existe $\mathrm{g}^{-1} \in \mathrm{G}$ tal que $\mathrm{g} \cdot \mathrm{g}^{-1} = \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{g} = \mathrm{e}$.

São exemplos de grupos:

- $(\mathbb{R}, +)$, o conjunto dos números reais munido da operação de soma.
- Seja X um conjunto qualquer. Considere $\mathrm{S(X)} = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ é bijeção}\}$. Então, o par $(\mathrm{S(X)}, \circ)$, onde $\circ$ é a composição de funções, é um grupo.
- $(Gl_n(\mathbb{R}), \cdot)$, o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, com determinante não-nulo, munido da operação de produto de matrizes.

Sejam então $(G, \cdot)$ e $(H, \circ)$ grupos. Um *homomorfismo de grupos* é uma aplicação

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto f(g) \end{aligned}$$

tal que $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$, para todo $g_1, g_2 \in G$.

Teoria de Grupos

Sejam então (G, $\cdot$) e (H, $\circ$) grupos. Um *homomorfismo de grupos* é uma aplicação

$$\begin{aligned} f\,:\, \mathrm{G} &\longrightarrow \mathrm{H} \\ \mathrm{g} &\longmapsto f(\mathrm{g}) \end{aligned}$$

tal que $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$, para todo $g_1,\, g_2 \in \mathrm{G}$.
A grosso modo, a Teoria de Grupos pode ser definida como o estudo das propiedades de grupos que são preservadas por homomorfismos de grupos, em particular, os isomorfismos (um homomorfismo de grupos bijetor).

Uma pergunta natural

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é:

- O que é Topologia ?

Uma pergunta natural

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é:

- O que é Topologia ?

A Topologia é o estudo das propriedades de certos objetos, chamados de *espaços topológicos*, e que são preservadas por certas transformações, chamadas de *funções contínuas* e que são invariantes sob certas transformações chamadas de *homeomorfismos*.

Definição

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

Espaço Topológico

Definição

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:
(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

Espaço Topológico

Definição

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

(2) Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família arbitrária de elementos de τ_X, então U $= \bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$.

Definição

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

(2) Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família arbitrária de elementos de τ_X, então $\mathrm{U} = \bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$.

(3) Se U_1, ..., U_n são elementos de τ_X, então $\mathrm{U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau_X$.

Definição

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

(2) Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família arbitrária de elementos de τ_X, então U $= \bigcup\limits_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$.

(3) Se U_1, ..., U_n são elementos de τ_X, então U $= \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau_X$.

O par (X, τ_X), onde X é um conjunto e τ_X é uma topologia em X é chamado de *espaço topológico*. Os elementos U $\in \tau_X$ são chamados de *abertos da topologia* ou simplesmente *abertos*.

Definição

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ_X de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau_X$.

(2) Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família arbitrária de elementos de τ_X, então U $= \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$.

(3) Se U_1, ..., U_n são elementos de τ_X, então U $= \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_X$.

O par (X, τ_X), onde X é um conjunto e τ_X é uma topologia em X é chamado de *espaço topológico*. Os elementos U $\in \tau_X$ são chamados de *abertos da topologia* ou simplesmente *abertos*. Daremos agora alguns exemplos de topologias e espaços topológicos.

Exemplo 1

Exemplo 1

Seja X um conjunto e $P(X)$ o conjunto das partes de X. Então, $P(X)$ é uma topologia em X, chamada de *topologia discreta*.

Exemplo 2

Exemplo 2

Seja X um conjunto e $I = \{\emptyset, X\}$. Então, I é um topologia em X, chamada de *topologia caótica*.

Exemplo 3

Seja X = {a, b, c} e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Então, τ é uma topologia em X.

Exemplo 4

Exemplo 4

Seja $X = \mathbb{R}$ e $\tau_{\mathbb{R}} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists\ (a, b), \text{ a} < \text{b}, x \in (a, b) \subset U\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}$.

Exemplo 4

Seja $X = \mathbb{R}$ e $\tau_{\mathbb{R}} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists\ (a,b),\ a < b,\ x \in (a,b) \subset U\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}$.

Figura 4 - Conjunto aberto em $\mathbb{R}$ munido com a topologia usual.

Exemplo 5

Seja $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ e $\tau_{\mathbb{R}^n} = \{\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists\, \mathrm{B}_\varepsilon(x),\ x \in \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{U}\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}^n$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5

Seja $X = \mathbb{R}^n$ e $\tau_{\mathbb{R}^n} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists\, B_\varepsilon(x),\ x \in B_\varepsilon(x) \subset U\}$ é uma topologia em $\mathbb{R}^n$, conhecida como *topologia usual* de $\mathbb{R}^n$.

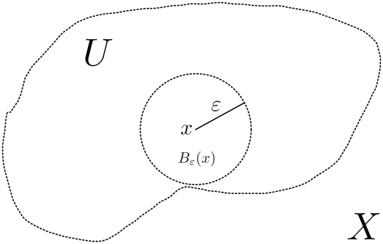

Figura 5 - $B_\varepsilon(x)$, a bola aberta de centro x e raio ε é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Funções contínuas e homeomorfismos

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita contínua se, dado $\mathrm{U} \in \tau_Y$, $f^{-1}(\mathrm{U}) \in \tau_X$.

Funções contínuas e homeomorfismos

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita contínua se, dado $\mathrm{U} \in \tau_Y$, $f^{-1}(\mathrm{U}) \in \tau_X$.

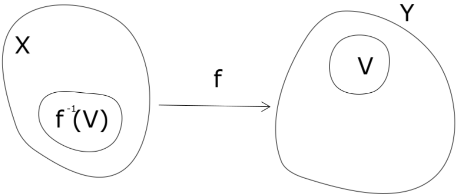

Figura 6 - Função contínua

É fácil ver que essa definição de continuidade que foi apresentada agora, é equivalente a definição de continuidade utilizando $\epsilon - \delta$, no caso em que $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é o nosso espaço topológico e estamos falando de funções de uma variável real.

É fácil ver que essa definição de continuidade que foi apresentada agora, é equivalente a definição de continuidade utilizando $\epsilon - \delta$, no caso em que $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é o nosso espaço topológico e estamos falando de funções de uma variável real.

Teorema

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então, são equivalentes:
(1) $f : X \to Y$ é uma função contínua.
(2) Se β é uma base da topologia τ_Y em Y, então $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \tau_X$, $\forall$ B $\in \beta$.
(3) $\forall x \in$ X, $\forall$ $\mathrm{N}_{f(x)}$ de $f(x)$, $\exists N_x$ de x tal que $N_x \subset f^{-1}(\mathrm{N}_{f(x)})$.
(4) $\forall x \in$ X, $\forall$ $\mathrm{N}_{f(x)}$ de $f(x)$, $\exists N_x$ de x tal que $f(N_x) \subset N_f(x)$.
(5) Seja U $\subset$ Y fechado. Então $f^{-1}(\mathrm{U})$ é fechado em X.

Funções contínuas e homeomorfismos

Definição

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ contínua cuja inversa é contínua.

Funções contínuas e homeomorfismos

Definição

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ contínua cuja inversa é contínua.

Definição

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Dizemos que (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são homeomorfos (denotamos por $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$) se existir um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Funções contínuas e homeomorfismos

Definição

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ contínua cuja inversa é contínua.

Definição

Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Dizemos que (X, τ_X) e (Y, τ_Y) são homeomorfos (denotamos por $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$) se existir um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Teorema

$\cong$ é uma relação de equivalência no conjunto de todos os espaços topológicos.

Do ponto de vista da topologia, dois espaços topológicos homeomorfos são indistiguíveis. Por isso, existe uma piada na comunidade matemática sobre como um topólogo não consegue diferenciar dois objetos simples, como por exemplo, uma caneca de café de uma rosquinha de donuts ou um quadrado de uma circunferência pois esses objetos são homeomorfos.

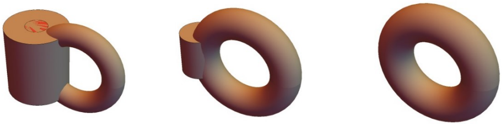

Figura 7 - Coffee mug to Donut

Exemplo 1

Considere $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{S}^2})$ a esfera unitária e (C^3, τ_{C^3}), um cubo, ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, munidos com a topologia de subespaço. Então, existe um homeomorfismo entre esses dois espaços topológicos.

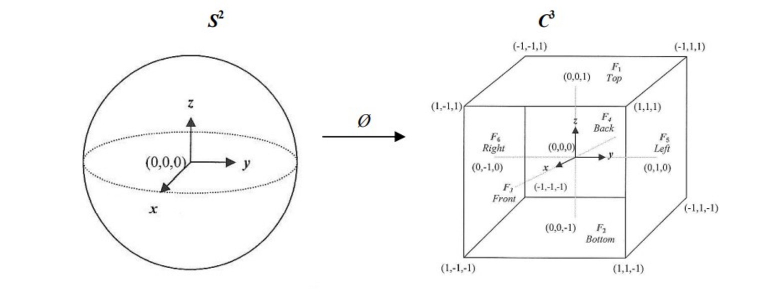

Figura 8 - Mapa de $\mathbb{S}^2$ para C^3

Exemplo 2

Considere $([0,1]^2, \tau_{[0,1]^2})$ o quadrado de lado 1 com a topologia herdada de $(\mathbb{R}^2,\ \tau_{\mathbb{R}^2})$. Defina (x,0) $\sim$ (x,1) e (0,y) $\sim$ (1,y), $\forall\ x, y \in [0,1]$. Então, $([0,1]^2_{/\sim}, \tau_{[0,1]^2_{/\sim}}) = \mathbb{T}^2$, o toro.

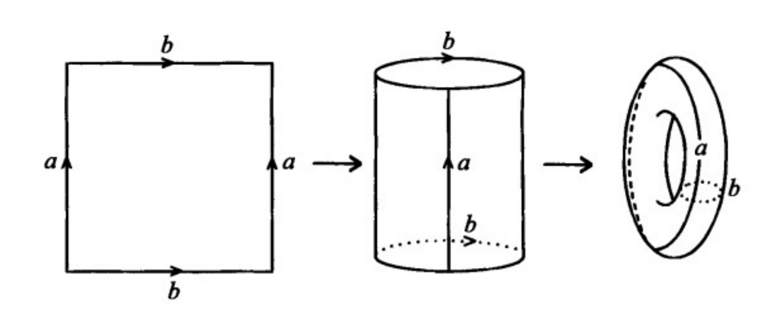

Figura 9 - Construção do Toro

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, meu orientador, pelo seu apoio, dedicação e disposição para a realização deste trabalho. Agradeço também a FAPESB pelo apoio financeiro concedido a mim. Agradeço aos membros da Comissão Científica pelas sugestões e correções do meu trabalho e, por fim, agradeço ao DA de Matemática pela organização do evento.

Referências

[1] IDRIS, Amidora; AHMAD, Tahir; MAAN, Normah. **Homeomorphism between sphere and cube**. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, v. 4, n. 2, 2008.

[2] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 6ª. ed. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2020. 308 p.

[3] MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[4] SHICK, Paul L. **Topology: point-set and geometric**. John Wiley Sons, 2011.

[5] S. M. Blinder. **Coffee mug to donut**, 2007. Disponível em: https://demonstrations.wolfram.com/CoffeeMugToDonut/. Acesso em: 12 set, 2022.