

Análise Matemática

Gleberon Antunes

22 de Setembro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Análise Real, das [Provas de Admissão ao Mestrado em Matemática na UFSM](#). As resoluções são despretensiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para gleber-sonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página [Gleberon Antunes](#).

Sumário

Sumário	1
1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2009.1	2
2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2010.1	9
3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1	13
4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1 (Curso de Verão - Prova 1)	19
5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1 (Curso de Verão - Prova 2)	29
6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2012.1	34

1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2009.1

22 de Setembro de 2023

Exercício 1. Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) nos itens abaixo, justificando suas respostas.

(a) Seja $A \subset \mathbb{R}$ tal que A possui um elemento máximo a . Então $\sup A = a$.

(b) A sequência $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ é convergente.

(c) Seja $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $L > 0$ uma função par. Então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1$.

Demonstração.

(a) Verdadeiro. Óbvio.

(b) Verdadeiro. Basta notar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

(c) Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)dx &= \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx \\ &= \int_{-L}^0 f(-x)dx + \int_0^L f(x)dx \end{aligned}$$

Tomando $u = -x$, obtemos $du = -dx$. Note que $x = -L \Rightarrow u = L$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L f(x)dx &= -\int_L^0 f(u)du + \int_0^L f(x)dx \\
&= \int_0^L f(u)du + \int_0^L f(x)dx \\
&= 2 \int_0^L f(x)dx.
\end{aligned}$$

(d) Falso. Suponhamos que a afirmação seja verdade. Então, para toda sequência de pontos $x_n \in [0, \infty) - \{0\}$ que é tal que $x_n \rightarrow 0$, $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \rightarrow 1$. Considere então as sequências $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ e $\left(\frac{2}{\pi + 4n\pi}\right)$, que claramente convergem para 0. Note porém que

$$\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \cos(2n\pi) \rightarrow 1,$$

e

$$\cos\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi + 4n\pi}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \rightarrow 0,$$

o que é absurdo. □

Exercício 2.

(a) Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

(b) Prove que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ vale $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Demonstração.

(a) Podemos decompor $\frac{1}{n(n+2)}$ em frações parciais. Nesse caso teríamos

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A(n+2) + Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n + 2A}{n(n+2)}$$

$$A + B = 0$$

$$A = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Assim

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}\right) + \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}\right) \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(b) Sabemos que a função

$$\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin(x),$$

é derivável em toda reta. Escolhamos dois números reais a e b arbitrários. Tome então o intervalo fechado $[a, b]$ (poderá ser $[b, a]$ ou consistirá em um único ponto, dependendo da escolha desses números). O **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c.$$

Em módulo temos que

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| = |\cos c| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\sin b - \sin a| \leq |b - a|,$$

como queríamos provar. □

Exercício 3.

(a) Mostre que $e^x \geq 1 + x$, para todo x real não negativo.

(b) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0. \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

é derivável com derivada primeira contínua.

(c) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração.

(a) Notemos que

$$e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow x \geq \ln(1 + x).$$

Provaremos a segunda afirmação, e portanto, a equivalência. Sabemos que a função

$$\begin{aligned} \ln: (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt, \end{aligned}$$

é monótona crescente e derivável. Para todo $x \in (0, \infty)$ o **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (1, 1 + x)$ tal que

$$\frac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{(x + 1) - 1} = \frac{1}{c} < 1.$$

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{c} < 1.$$

$$\Rightarrow \ln(1 + x) < x.$$

Segue daí que

$$1 + x < e^x,$$

para todo $x \in (0, \infty)$.

(b) Se $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se $x = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Provaremos agora que $f'(x)$ é contínua. Considere então a função

$$f'(x) = \begin{cases} -x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0. \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, então

$$f''(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} - 4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se $x = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(0) = 0,$$

uma vez que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ são funções limitadas. Logo f' é contínua em \mathbb{R} . Isso se dá pois f' é derivável em todo ponto $x \neq 0$, e daí ela será contínua em $\mathbb{R} - 0$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ nos garante a continuidade de f' no ponto $x = 0$.

(c) Sabemos que toda função contínua é integrável. Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**, sabemos que toda função contínua possui uma primitiva. Considere então a função

$$F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f(x)dx.$$

Essa função é contínua e derivável, com $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \cdot \left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx \right) = F'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a} \cdot \left(\int_a^b f(x) dx - 0 \right) = f(c)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

□

2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2010.1

Exercício 1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência dada recursivamente por $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, $n > 1$. Mostrar que $\{a_n\}$ é convergente. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Demonstração. Facilmente verificamos que (a_n) é uma sequência monótona crescente. Provaremos agora que ela é limitada e, portanto, é convergente. Por indução, temos que:

Para $n = 1$, $a_1 = \sqrt{3} < 10$. Suponhamos então que essa afirmação é válida para um certo $n > 1$, isto é, $a_n < 10$. Então

$$\begin{aligned} 3 + a_n &< 3 + 10 \\ \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} &< \sqrt{3 + 10} < 10. \end{aligned}$$

Logo (a_n) é limitada. Seja $S = \lim a_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots}}}}$. Note que

$$S^2 = 3 + \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots}}}}}_S.$$

Então

$$S^2 - S - 3 = 0,$$

e daí as possíveis soluções são:

$$S_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Como (a_n) é uma sequência estritamente positiva, temos que $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. \square

Exercício 2.

- (a) Seja A um subconjunto de \mathbb{R} , caracterize ponto interior e ponto de fronteira de A .
- (b) Sejam $A = [a, b]$ um intervalo fechado e $f : A \longrightarrow A$ uma função contínua. Mostre que f tem um ponto fixo em A , ou seja, existe $c \in A$ tal que $f(c) = c$.
- (c) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de \mathbb{R} e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $f'(x) = 0$ para todo x no interior de I , então f é constante.

Demonstração.

(a)

Definição. Diremos que $a \in A$ é um *ponto interior de A* quando existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A.$$

Definição. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de fronteira de A* quando para todo $\varepsilon > 0$, temos que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset.$$

(b) Consideremos a função contínua

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x - f(x).$$

Como $a \leq f(a)$ e $f(b) \leq b$, devemos ter

$$a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b).$$

Se for $a - f(a) = 0$ ou $b - f(b) = 0$, então f possui um ponto fixo. Do contrário, sendo $a - f(a) < 0 < b - f(b)$, o **Teorema do Valor Intermediário** nos garante que existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned}c - f(c) &= 0 \\ \Rightarrow f(c) &= c.\end{aligned}$$

Logo f possui um ponto fixo.

(c) Para todo $x \in [a, b]$, o **Teorema do Valor Médio**, nos garante que existe $d \in (a, x)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= f'(d) = 0 \\ \Rightarrow f(x) - f(a) &= 0 \\ \Rightarrow f(x) &= f(a).\end{aligned}$$

Como $f(a) = f(b)$ por esse mesmo teorema, temos que f deve ser constante.

□

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + |x|^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0. \\ k, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Qual o valor de k que torna f contínua.

(b) A função f , como k escolhido no item anterior, é derivável?

Demonstração.

(a) f será contínua quando $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Nesse caso, se tomarmos $k = \frac{1}{2}$, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + |x|^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} |x|^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{0}{=} \frac{1}{2} = f(0).$$

(b) Se $x \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= -|x|^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^5}{|x|^3} \\ &= -|x| \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + |x| \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Se $x = 0$, então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + |x|^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo f será derivável.

□

3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1

Exercício 1. Faça o gráfico da função $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Prove que sua imagem é o intervalo $|y| < 1$. Prove que ela é injetiva e calcule sua inversa.

Demonstração. Sabemos que uma função é injetiva se, e somente se, possui inversa à esquerda. Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \Rightarrow y^2(x^2 + 1) &= x^2 \\ \Rightarrow y^2 &= x^2 - y^2x^2 \\ \Rightarrow y^2 &= (1 - y^2)x^2 \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{y^2}{1 - y^2} \\ \Rightarrow x &= \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

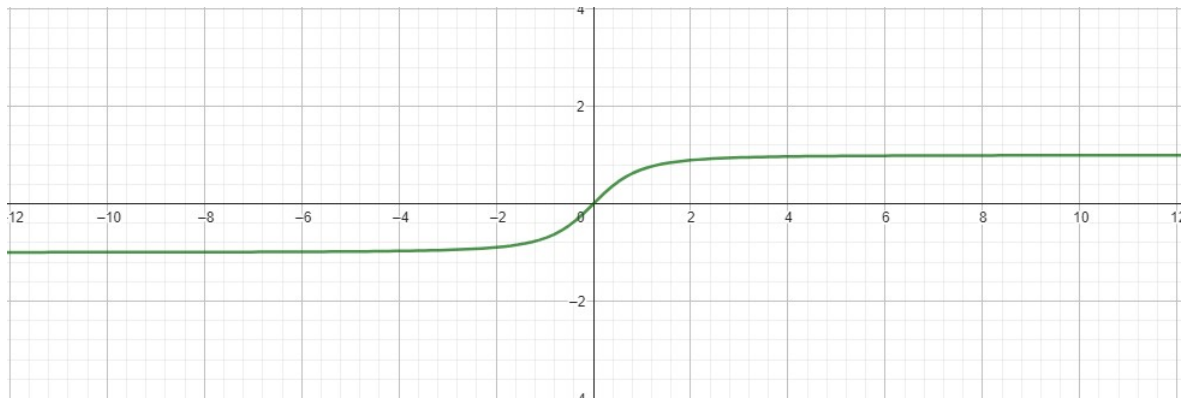
Daí

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}} \\
&= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Logo a função

$$\begin{aligned}
g: (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
y &\longmapsto \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},
\end{aligned}$$

é a inversa à esquerda de f . Consequentemente, $\text{Im} f = (-1, 1)$.



□

Exercício 2. Considere o conjunto $X = \left\{1 - \frac{1}{3n^2}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Mostre que $\sup X = 1$.

(b) Mostre que a sequência $x_n = 1 - \frac{1}{3n^2}$ converge para 1.

(c) O conjunto X é compacto em \mathbb{R} ? Justifique.

Demonstração. **Provarei primeiramente (b) e depois (a).**

(b) Sabemos que a sequência $z_n = \frac{1}{n}$ converge para 0. Daí

$$-\frac{1}{3n^2} = -\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right] = -\frac{1}{3} \cdot [z_n \cdot z_n] \longrightarrow -\frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Como a sequência constante $y_n = 1$ converge para 1, temos que

$$x_n = y_n - z_n = 1 - \frac{1}{3n^2} \longrightarrow 1 - 0 = 1.$$

(a) Notemos, inicialmente, que a sequência x_n é monótona limitada. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m < n$, teremos que

$$\begin{aligned} m < n &\Rightarrow m^2 < n^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{m^2} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3m^2} < -\frac{1}{3n^2} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{3m^2} < 1 - \frac{1}{3n^2} \\ &= x_m < x_n, \end{aligned}$$

Logo (x_n) é monótona crescente. Como ela converge pelo item (b), temos que $1 = \sup X$, pois o conjunto X corresponde a imagem da sequência (x_n) e, como sabemos, **toda sequência monótona crescente converge para o supremo do conjunto da sua imagem.**

(c) Sabemos, pelo **Teorema de Heine-Borel**, que um conjunto é compacto em \mathbb{R} se, e somente se, é fechado e limitado. Notemos que

$$\overline{X} = X \cup \{1\}.$$

Note que X sequer é fechado. Logo não pode ser compacto. \square

Exercício 3. Prove que toda coleção de abertos dois a dois disjuntos e não vazio de \mathbb{R} é enumerável.

Demonstração. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma coleção arbitrária de abertos dois a dois disjuntos. Para cada $a \in A_\lambda$, existe um intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, tal que $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A_\lambda$.

Como \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , todo intervalo aberto em \mathbb{R} contém um número racional. Para cada A_λ escolhamos um número racional $\lambda_r \in A_\lambda$. A aplicação

$$\begin{aligned} f: \{A_\lambda\}_{\lambda \in I} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ A_\lambda &\longmapsto \lambda_r, \end{aligned}$$

é injetiva. Logo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é enumerável. \square

Exercício 4. Identifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:

- (a) Toda sequência monótona limitada é convergente.
- (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
- (c) Se a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $c \in (a, b)$, e $f'(c) = 0$ então f tem um extremo relativo em c .
- (d) Se $X \subset \mathbb{Q}$ e X é limitado, então existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $b = \sup X$.
- (e) Toda função integrável à Riemann em $[a, b]$ possui primitiva em $[a, b]$.

Demonstração.

(a). Verdade. Isso se dá pelo **Teorema de Convergência Monótona**.

(b). Verdade. Isso se dá pelo **Crítério de Cauchy para convergência de séries**.

(c). Falso. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f: [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3. \end{aligned}$$

Note que $f'(0) = 0$, mas f não possui um extremo relativo em 0.

(e). Falso. Seja X a imagem da sequência

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Essa sequência é monótona crescente e limitada. Portanto, converge, pelo **Teorema de Convergência Monótona**. Note que $x_n \longrightarrow e = \sup X$, mas $e \notin \mathbb{Q}$.

(e). Sabemos que: **Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em I então f' não admite descontinuidades de primeira espécie**. Considere então a função $f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \mathbb{N}. \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não pode existir uma função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$, pois f admite descontinuidades de primeira espécie.

□

Exercício 5. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, com $f(a) = f(b)$. Mostre que existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) \cdot f'(c) = 0$.

Demonstração. O **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \Rightarrow f(c) \cdot f'(c) &= f(c) \cdot \frac{0}{b - a} = 0, \end{aligned}$$

como queríamos.

□

4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1

(Curso de Verão - Prova 1)

Exercício 1. Mostre que o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é denso em \mathbb{R} .

Demonstração. Seja $(a, b) \subset \mathbb{R}$ não-degenerado. Como $b - a > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{p} < b - a,$$

pois \mathbb{R} é arquimediano. Consideremos o conjunto

$$S = \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m}{p} \geq b \right\}.$$

Sabemos que: **Todo conjunto de números inteiros limitado inferiormente possui um elemento mínimo.**

No caso do conjunto S é fácil ver que se m pertence a S , então $m \geq bp$. Logo S é limitado inferiormente por bp (**Isso não significa que bp é o elemento mínimo do conjunto S**). Seja $m_0 = \min S$. Como $m_0 - 1 < m_0$, temos que

$$\frac{m_0 - 1}{p} < b.$$

Se fosse

$$\frac{m_0 - 1}{p} < a < b \leq \frac{m_0}{p},$$

então

$$b - a < \frac{m_0}{p} - \frac{m_0 - 1}{p} = \frac{1}{p},$$

o que é absurdo. Logo

$$\begin{aligned} a < \frac{m_0 - 1}{p} < b \\ \Leftrightarrow \frac{m_0 - 1}{p} \in (a, b). \end{aligned}$$

Ou seja, todo intervalo aberto não-degenerado contém um número racional. Assim, \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} .

□

Exercícios 2. Considere $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}$, com $X \neq \emptyset$.

- (a) Mostre que se f e g são não-negativas e limitadas superiormente, então $fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada superiormente e $\sup (fg) \leq \sup f \cdot \sup g$.
- (b) Dê exemplos mostrando que pode ocorrer $\sup (fg) < \sup f \cdot \sup g$.

Demonstração.

(a) Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ não-negativas e limitadas e $\alpha = \sup f(X)$ e $\beta = \sup g(X)$.

Então

$$f(x) < \alpha \quad \text{e} \quad g(x) < \beta,$$

para todo $x \in X$. Segue daí que

$$\begin{aligned} fg(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &< \alpha \cdot \beta \\ &= \sup f \cdot \sup g, \end{aligned}$$

Logo fg é limitada superiormente e $\sup fg < \sup f \cdot \sup g$, como queríamos mostrar.

(b) Considere as funções $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1). \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0, 1]. \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que $\sup f = \sup g = 1$ mas $\sup fg = 0$. □

Exercício 3. Seja (a_n) a sequência definida indutivamente por:

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ e } a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \text{ para } n > 1.$$

- (a) Mostre, por indução, que $a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Mostre que (a_n) é crescente (sugestão: verifique que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$, para $n \geq 1$, então $a_{n+1} > a_n$).
- (c) Conclua, pelos itens anteriores, que (a_n) é convergente e calcule seu limite.

Demonstração.

(a) Por indução, para $n = 1$, temos que

$$a_1 = \sqrt{2} < 2.$$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo $n > 1$, isto é,

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < 2.$$

Então

$$2 + a_n = 2 + \sqrt{2 + a_{n-1}} < 4,$$

o que implica que

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2,$$

como queríamos provar.

(b) Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_n^2 &= 2 + a_n - a_n^2 \\ &= (2 - a_n) \cdot (1 + a_n) \\ &> 0, \end{aligned}$$

pois $0 < a_n < 2$. Como todos os termos da sequência (a_n) são positivos, segue daí que $a_n < a_{n+1}$.

(c) Os itens (a) e (b) nos garantem que a sequência (a_n) é monótona limitada. Segue do **Teorema de Convergência Monótona** que (a_n) é convergente. Seja

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}} \\ \Rightarrow S^2 &= 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}_S. \end{aligned}$$

Obtemos então a equação

$$S^2 - S - 2 = 0,$$

cujas soluções são: $S_1 = -1$ e $S_2 = 2$. Como os termos da sequência são números positivos, devemos ter $S = 2$. Logo $\lim a_n = 2$.

□

Exercício 4. Dizemos que (a_n) é uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

- (a) Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy.
- (b) Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente então a sequência é convergente.
- (c) Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.
- (d) Conclua que uma sequência é convergente se, e somente se, a sequência é de Cauchy.

Demonstração.

(a) Seja $a = \lim a_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todos $m, n > n_0$ temos que

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo (a_n) é uma sequência de Cauchy.

(b) Sejam (a_n) uma sequência de Cauchy e (a_{n_k}) uma subsequência de (a_n) convergente. Seja $a = \lim a_{n_k}$. Como (a_n) uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da mesma maneira, como $\lim a_{n_k} = a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ teremos que

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo (a_n) converge para a .

(c) Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1.$$

Fixando $n_0 + 1$ teremos que, para todo $n > n_0$

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n_0+1}| &< 1 \\ \Leftrightarrow a_n &\in (a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1). \end{aligned}$$

Sejam α e β o maior e menor valor, respectivamente, do conjunto

$$X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1\}.$$

Então $a_n \in [\beta, \alpha]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (a_n) é uma sequência limitada.

(d) Provaremos a recíproca do item (a). Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Pelo item (c), toda sequência de Cauchy é limitada. Pelo **Teorema de Bolzano - Weierstrass**, toda sequência limitada admite uma subsequência convergente. Pelo item (b) temos que (a_n) é uma sequência convergente, pois admite uma subsequência convergente.

□

Exercício 5.

(1) Considere duas seqüências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

(2) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\sum \frac{1}{2^n - 1}$.

Demonstração.

(1). Tomemos $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}. *$$

(\Rightarrow) Suponhamos que $\sum a_n$ converge. Então, invertendo a desigualdade * temos que

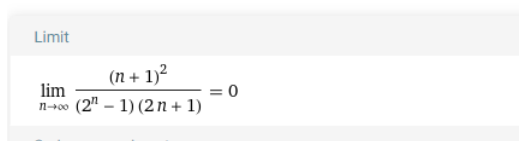
$$\frac{b_n}{a_n} < \frac{2}{c}$$

$$\Rightarrow b_n < \frac{2}{c} \cdot a_n$$

Como $\sum a_n$ converge, temos que $\sum \frac{2}{c} \cdot a_n$ também convergirá. Segue do **Teste da Comparação** que $\sum b_n$ converge.

(\Leftarrow) Análogo.

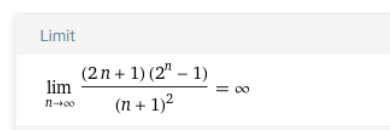
(2) **Não consegui resolver manualmente.** Olhando o [WolframAlpha](#) verificamos que



Limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2^n - 1)(2n + 1)} = 0$$

e



Limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2^n - 1)}{(n+1)^2} = \infty$$

o que, salvo o melhor juízo, não nos dá nenhuma informação. Note também que

Input

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

Infinite sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} = \frac{\log(2) - \psi_{\frac{1}{2}}^{(0)}(1)}{\log(2)} \approx 1.6066$$

Sum convergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \text{ converges}$$

e

Infinite sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} \text{ diverges to } \infty$$

(Não entendi nada.)

□

Exercício 6.

(a) Considere o conjunto $Y = (1, 2) \cup \{0, 3, 4\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\text{int } Y$ e \overline{Y} .

Além disso diga se Y é aberto, fechado ou nem aberto nem fechado. Justifique.

(b) Prove que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto então o conjunto

$$S = \{x + y : x, y \in K\}$$

também é compacto.

(c) Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ mostre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo em que $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demonstração.

(a) Por definição, **int** Y é o maior aberto que está contido em Y . Nesse sentido, temos que $\text{int } Y = (1,2)$. Sabemos que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Então

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \overline{(1,2) \cup \{0,3,4\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}} = \overline{(1,2)} \cup \overline{\{0,3,4\}} \cup \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}} \\ &= [1,2] \cup \{0,3,4\} \cup \left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right) \\ &= [1,2] \cup \{0,3,4\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

Note que Y não é aberto nem fechado.

(b) Sabemos que: **Um conjunto S é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos de S admite uma subsequência que converge para um ponto de S .**

Seja (a_n) uma sequência de pontos de S . Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$a_n = x_n + y_n,$$

onde $x_n, y_n \in K$. Considere então as sequências (x_n) e (y_n) . Como elas são sequências de um conjunto compacto K , ambas admitem subsequências (x_{n_k}) e (y_{n_k}) , respectivamente, que convergem para algum ponto de K . Segue daí que

$$a_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k},$$

é uma subsequência de (a_n) que converge para algum ponto de S . Logo S é compacto.

(c) Consideremos os conjuntos $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Note que

$$\overline{(0, 1) \cap (1, 2)} = \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

e

$$\overline{(0, 1)} \cap \overline{(1, 2)} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}.$$

□

5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2011.1

(Curso de Verão - Prova 2)

Exercício 1. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'$.

Demonstração. Suponhamos que não exista

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Fixemos $L \in \mathbb{R}$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_n \in X$ com

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

Então $x_n \longrightarrow a$ e $f(x_n) \not\rightarrow L$. Como L é arbitrário, essa sequência diverge.

□

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$. Como \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , podemos montar uma sequência (x_n) de números racionais que converge para a . Segue da continuidade de f que

$$x_n \longrightarrow a \Rightarrow 0 = f(x_n) \longrightarrow f(a).$$

Como o limite de uma sequência sempre é único, e $f(x_n) = 0$, para todo $x_n \in \mathbb{Q}$, temos que $f(a) = 0$. Logo f é identicamente nula.

□

Exercício 3. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada crescente (decrescente) no intervalo I de \mathbb{R} . Prove que qualquer reta tangente ao gráfico de f só toca esse gráfico no ponto de tangência.

Demonstração. Suponhamos que dado um ponto $a \in I$, a reta g , tangente ao ponto $(a, f(a))$, corta o gráfico de f em um outro ponto $(b, f(b))$. SPG, suponhamos $a < b$.

Temos então que

$$f'(a) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , o **Teorema do Valor Médio** nos garante que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Mas aí $f'(a) = f'(c)$ com $a < c$. Isso é um absurdo pois a derivada é crescente (o mesmo argumento serve para o caso em que a derivada é decrescente).

□

Exercício 4. Considere uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que se a imagem de f é conjunto enumerável então f é constante.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f não seja constante. Então $Im(f)$ consta de pelo menos dois elementos. Sejam $f(\alpha), f(\beta) \in Im(f)$ distintos. SPG, suponhamos $f(\alpha) < f(\beta)$. Segue da continuidade de f e do **Teorema do Valor Intermediário** que o intervalo

$$[f(\alpha), f(\beta)] \subset Im(f).$$

O que é absurdo, uma vez que $Im(f)$ é um conjunto enumerável e, conseqüentemente, todos os seus subconjuntos são enumeráveis.

□

Exercício 5. Encontre um contra exemplo para cada uma das seguintes afirmações, justificando sua resposta. Aqui I é um intervalo de \mathbb{R} .

- (a) Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que para algum $a \in \text{int}(I)$ tem-se $f'(a) = 0$, então a é um ponto máximo ou mínimo local de f .
- (b) Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f tem um ponto de máximo ou mínimo local em $a \in I$ e f é derivável em a , então $f'(a) = 0$.
- (c) Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que f tem um ponto de máximo ou de mínimo local em $a \in \text{int}(I)$ e f é derivável em a , então $f'(a) = 0$.
- (d) Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e crescente então $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$.
- (e) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$.

Demonstração.

(a) Consideremos a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Note que $f'(0) = 0$, mas 0 não é um mínimo local de f .

(b) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Note que -1 é um mínimo local de f e $f'(-1) = 3$.

(c) **Isso aqui é verdade.**

(d) Consideremos a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Note que f é crescente mas $f'(0) = 0$.

(e). Sabemos que: **Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em I então f' não admite descontinuidades de primeira espécie.** Considere então a função $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \mathbb{N}. \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não pode existir uma função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$, pois f admite descontinuidades de primeira espécie. \square

Exercício 6. Mostre que se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $f \geq 0$ e $f(c) > 0$ para algum $c \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Demonstração. Sendo f contínua em c e sendo $f(c) > 0$, existe uma vizinhança de c de raio $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{f(c)}{2},$$

pelo **Teorema da Conservação de Sinal**. Seja $[\beta_1, \beta_2] \subset (c - \delta, c + \delta) \subset [a, b]$. Então

$$0 < \frac{f(c)(\beta_2 - \beta_1)}{2} \leq \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx.$$

Daí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\beta_1} f(x)dx + \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx + \int_{\beta_2}^b f(x)dx > 0,$$

uma vez que

$$\int_a^{\beta_1} f(x)dx, \int_{\beta_2}^b f(x)dx \geq 0$$

.

\square

Exercício 7. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que para quaisquer $x, c \in [a, b]$ tem-se

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt.$$

Demonstração. Fixado $c \in [a, b]$, considere a função

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(c) + \int_c^x f'(t) dt. \end{aligned}$$

Sabemos que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma lei de formação. Note agora que, para todo $\alpha \in [a, b]$, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(c) + \int_c^\alpha f'(t) dt \\ &= f(c) + f(\alpha) - f(c) \text{ (Pelo Teorema Fundamental do Calculo)} \\ &= f(\alpha). \end{aligned}$$

Logo $f = g$. Assim,

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt,$$

para quaisquer $x, c \in [a, b]$.

□

6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2012.1

Exercício 1.

- (a) Defina o que vem a ser um conjunto enumerável em \mathbb{R} .
- (b) Mostre que se A e B são conjuntos enumeráveis de \mathbb{R} então $A \cup B$ é enumerável.

Demonstração.

- (a) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito enumerável se é finito ou se está em bijeção com o conjunto \mathbb{N} dos números naturais.
- (b) Sabemos que

- (a) Se X é um conjunto enumerável e $f : X \longrightarrow Y$ é uma função sobrejetiva, então Y é enumerável.
- (b) O produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Como A e B são conjuntos enumeráveis, existem funções sobrejetivas $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow A$ e $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow B$. Como $\{1, 2\}$ e \mathbb{N} são conjuntos enumeráveis, o conjunto $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Considere então a função

$$\begin{aligned} f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} &\longrightarrow A \cup B \\ (m, n) &\longmapsto f_m(n). \end{aligned}$$

Notemos que essa função é sobrejetiva. Se tomarmos $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(1, m) = f_1(n) = x.$$

Da mesma maneira, se $x \in B$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(2, m) = f_2(m) = x.$$

Logo f é sobrejetiva. Segue do item (a) que $A \cup B$ é um conjunto enumerável.

□

Provaremos os seguintes lemas antes de darmos início a resolução da questão 2.

Lema 1. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1.$$

+ Fixando $n_0 + 1$ teremos que, para todo $n > n_0$

$$|a_n - a_{n_0+1}| < 1$$

$$\Leftrightarrow a_n \in (a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1).$$

Sejam α e β o maior e menor valor, respectivamente, do conjunto

$$X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1\}.$$

Então $a_n \in [\beta, \alpha]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (a_n) é uma sequência limitada.

□

Lema 2. Se uma sequência de Cauchy admite uma subsequência convergente, então ela própria é convergente.

Demonstração. Sejam (a_n) uma sequência de Cauchy e (a_{n_k}) uma subsequência de (a_n) convergente. Seja $a = \lim a_{n_k}$. Como (a_n) uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da mesma maneira, como $\lim a_{n_k} = a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ teremos que

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo (a_n) converge para a .

□

Exercício 2. Uma sequência $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ é dita *sequência de Cauchy* se para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

- (a) Mostre que se $(x_n)_n$ é convergente então $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.
- (b) Mostre que se $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy então $(x_n)_n$ é convergente.

Demonstração.

(a) Seja $a = \lim a_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todos $m, n > n_0$ temos que

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo (a_n) é uma sequência de Cauchy.

(b) Provaremos a recíproca do item (a). Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Pelo **Lema 1** temos que toda sequência de Cauchy é limitada. Pelo **Teorema de Bolzano - Weierstrass**, toda sequência limitada admite uma subsequência convergente. Pelo **Lema 2** temos que (a_n) é uma sequência convergente, pois admite uma subsequência convergente.

□

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e é descontínua em \mathbb{Q} .
- (b) A função f é integrável em $[0,1]$? Justifique!

Demonstração.

- (a) Seja $\frac{p}{q}$ um número racional. Consideremos a sequência $\frac{p}{q} + \frac{1}{n}$.

É claro que

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{p}{q},$$

e

$$f\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{np+q}{qn}\right) = 1 + \frac{1}{qn} \longrightarrow 1.$$

Note porém que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + \frac{1}{q}.$$

Logo f é descontínua em $\frac{p}{q}$. Como f é arbitrário, temos que f é descontínua em \mathbb{Q} .

Sabemos que se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \subset \mathbb{Q}$ é tal que $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow x$, então $q_n \rightarrow \infty$.

Sejam i um número irracional e (x_n) uma sequência de pontos em \mathbb{R} que converge para i . Se (x_n) constar apenas de números irracionais, então

$$1 = f(x_n) \rightarrow f(i) = 1.$$

Se (x_n) for da forma $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ onde p_n e q_n são inteiros, então

$$f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = 1 + \frac{1}{q_n} \rightarrow 1.$$

Por fim, se (x_n) consta de termos racionais e irracionais, então para n suficientemente grande, a sequência convergirá para 1. Logo f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) Sabemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula. Como sabemos, \mathbb{Q} é enumerável e, portanto, tem medida nula. Como f é descontínua em \mathbb{Q} , temos que f é integrável.

□

Exercício 4. Suponha que $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável, com $f(0) = 0$, e que $f' : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seja crescente. Mostre que a função $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em $(0, \infty)$.

Demonstração. Sabemos que **se uma função possui derivada positiva em todos os pontos de um intervalo I então ela é crescente em I .** Provaremos agora que a derivada da função g é positiva no intervalo $(0, \infty)$.

Dado $x > 0$, existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c).$$

□

Como f' é crescente, e $x > c$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &> f'(c) \\ f'(x) &> \frac{f(x)}{x} \\ \Rightarrow f'(x) \cdot x &> f(x) \\ \Rightarrow f'(x) \cdot x - f(x) &> 0 \\ \Rightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} &> 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in (0, \infty)$. Como

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2},$$

g é uma função crescente. **Exercício 5.**

(a) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, com $g(a) < f(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

(b) Sendo $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, através do item (a) mostre que a função $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x - \cot g(x)$ possui infinitas raízes.

Demonstração.

(a) Consideremos a função contínua

$$\begin{aligned} g - f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) - f(x). \end{aligned}$$

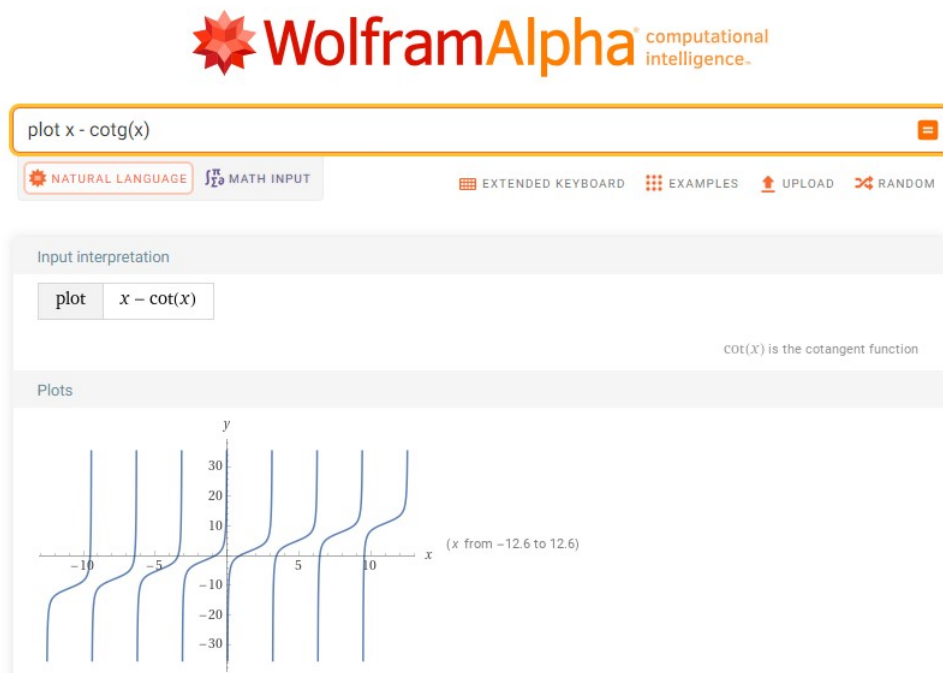
Notemos que

$$g(a) - f(a) < 0 \quad \text{e} \quad g(b) - f(b) > 0.$$

Segue do **Teorema do Valor Intermediário** que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} g(c) - f(c) &= 0 \\ \Leftrightarrow g(c) &= f(c). \end{aligned}$$

(b) (**Não consegui resolver essa**). Olhando o [Wolfram Alpha](#) vemos que de fato existem infinitas raízes



Posso estar enganado, mas essa questão parecer ser do tipo que foi elaborada para ninguém acertar, com base nesse link: [Closed form of \$\cot x = x\$](#) . □

Exercício 6. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que f é integrável em $[a, b]$.

Demonstração. O **Cr  rio de Riemann para integrabilidade** nos garante que uma função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$   Riemann-integrável se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ (que pode depender de ε) que   tal que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$. Sabemos também que toda função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont  ua   uniformemente cont  ua.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Seja $P = \{a = a_1, a_2, \dots, a_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que todos os intervalos $[a_{i-1}, a_i]$ tem comprimento menor que δ . Como f   cont  ua, o **Teorema de Weierstrass** nos garante que f atinge seus extremos em cada um desses intervalos $[a_{i-1}, a_i]$. Sejam $m_i = \min f([a_{i-1}, a_i])$ e $M_i = \max f([a_{i-1}, a_i])$ e $w_i = M_i - m_i$. Segue daí que

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum_{i=1}^n w_i(t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo f   integrável.

 