# Análise Matemática

Gleberson Antunes

15 de Setembro de 2023

**Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Álgebra Linear, das provas de admissão ao Mestrado em Matemática na UFBA. As resoluções são desprentesiosas e são sujeitas à erros.**

**Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página Gleberson Antunes.**

## Sumário

# 1 Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2015.2

**25 de Agosto de 2023**

**Exercício 1.** Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

*Demonstração.* Sejam $V$ e $W$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Suponhamos então que $\dim V < \dim W$. Se fosse verdade que $V$ e $W$ são isomorfos, então existiria uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ bijetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim N(T) + \dim Im(T)\\ &= 0 + \dim Im(T)\\ &= \dim W,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\dim V < \dim W$. Logo $V$ e $W$ não podem ser isomorfos.

$\square$

**Exercício 2.** Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais, $L : E \longrightarrow F$ transformação linear e $N(L)$ seu núcleo. Mostre que

$$L \text{ é injetora } \Leftrightarrow N(L) = \{\vec{0}\},$$

onde $\vec{0}$ é o vetor nulo de $E$.

*Demonstração.*

$\Rightarrow$ Suponhamos $L$ injetiva. Seja $v \in E$ tal que $L(v) = 0$. Então

$$L(v) = L(0)$$

$$\Rightarrow \; v \; = \; 0,$$

como queríamos.

$\Leftarrow$ (Por contraposição) Suponhamos que $L$ não é injetiva. Então existem $v, w \in E$ distintos, tais que $L(v) = L(w)$. Segue da linearidade de $L$ que

$$\begin{aligned} L(v) \; &= \; L(w) \\ \Rightarrow \; L(v) \; - \; L(w) \; &= \; L(v - w) \; = \; 0 \\ \Rightarrow v \; - \; w &\in N(L). \end{aligned}$$

Como $v$ e $w$ são distintos, temos que $v - w \neq 0$. Logo, $N(L) \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

$\square$

**Exercício 3.** Ache a transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(L) \; = \; [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \text{ e } I(L) \; = \; [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)],$$

onde $N(L)$ é o núcleo de $L$ e $I(L)$ é a imagem de $L$.

*Demonstração.* Consideremos a base

$$\alpha \; = \; \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\},$$

de $\mathbb{R}^4$. Pondo

$$\begin{aligned} L(1, 0, 1, 0) \; &= \; (0, 0, 0, 0) \\ L(-1, 0, 0, 1) \; &= \; (0, 0, 0, 0) \\ L(0, 1, 0, 0) \; &= \; (1, -1, 0, 2) \\ L(0, 0, 1, 0) \; &= \; (0, 1, -1, 0) \end{aligned}$$

e escrevendo um vetor arbitrário $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ como

$$(x, y, z, w) \;=\; (x+t)(1,0,1,0) + (t)(-1,0,0,1) + (y)(0,1,0,0) + (z-x-t)(0,0,1,0),$$

obtemos a transformação linear

$$L(x, y, z, t) \;=\; (0, y, z-x-t, 0),$$

que satisfaz o enunciado.

□

**Exercício 4.** Seja $T$ a aplicação linear com domínio $P_2$ (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio $\mathbb{R}$ definida por $T(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Determine a matriz de $T$ com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de $P_2$ e $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Sejam $\alpha = \{x^2, x, 1\}$ e $\beta = \{1\}$

$$\begin{aligned}
T(x^2) &= \int_0^1 x^2 dx \;=\; \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \;=\; \frac{1}{3}.\\
T(x) &= \int_0^1 x dx \;=\; \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \;=\; \frac{1}{2}.\\
T(1) &= \int_0^1 x^2 dx \;=\; x\Big|_0^1 \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Logo

$$[T]_\beta^\alpha \;=\; \left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\right].$$

□

**Exercício 5.** Seja $R$ a rotação de $\mathbb{R}^3$ ao redor do eixo $z$, no sentido anti-horário, com centro na origem e ângulo $\pi/2$. Ou seja, $R$ associa a cada ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um ponto $Q = (-y, x, z)$. Encontre o polinômio característico de $R$ em relação a uma base de $\mathbb{R}^3$ e, a partir dele, determine os autovalores e autovetores de $R$ (caso eles não existam, justifique sua conclusão com base nos cálculos feitos). Interprete geometricamente o resultado que você obteve.

*Demonstração.* Seja $\alpha$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Então

$$[R]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue daí que

$$p_R(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + 1 - \lambda = (\lambda^2 + 1)(1-\lambda).$$

Ou seja, os autovalores de $R$ são: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$.

Para $\lambda_1 = 1$ temos que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{array}$$

Logo devemos ter $x = y = 0$ e, por exemplo, $z = 1$. Então, o autoespaço associado a $\lambda_1 = 1$ é gerado por $[(0, 0, 1)]$.

Para $\lambda_2 = i$ temos que

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \\ (1-i)z = 0 \end{array}$$

Logo devemos ter $x = i, y = 1$ e $z = 0$. Então, o autoespaço associado a $\lambda_2 = i$ é gerado por $[(i, 1, 0)]$.

Para $\lambda_3 = -i$ temos que

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \\ (1+i)z = 0 \end{array}$$

Logo devemos ter $x = 1, y = i, z = 0$. Então, o autoespaço associado a $\lambda_3 = -i$ é gerado por $[(1, i, 0)]$.

$\square$

## 2 Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2016.1

**26 de Agosto de 2023**

**Exercício 1.** Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

*Demonstração.* Sejam $V$ e $W$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Suponhamos então que $\dim V < \dim W$. Se fosse verdade que $V$ e $W$ são isomorfos, então existiria uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ bijetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim N(T) + \dim Im(T) \\ &= 0 + \dim Im(T) \\ &= \dim W, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\dim V < \dim W$. Logo $V$ e $W$ não podem ser isomorfos.

□

**Exercício 2.** Sejam $V$ e $U$ espaços vetoriais e $T : V \longrightarrow U$ uma transformação linear, de núcleo $W$, e sejam $v \in V$, $u \in U$ tais que $T(v) = u$. Seja $v + W$ a classe lateral $v + W = \{v + w : w \in W\}$. Mostre que $v + W = \{x \in V : T(x) = u\}$.

*Demonstração.* Seja $v' \in v + W$. Então existe $w' \in W$ tal que $v' = v + w'$. Segue daí que

$$T(v') = T(v + w') = T(v) + T(w') = u + 0 = u.$$

Seja $x \in V$ tal que $T(x) = u$. Então $x = v + (x - v) \in v + W$, uma vez que

$$T(x - v) = T(x) - T(v) = u - u = 0.$$

$\square$

**Exercício 3.** Ache a transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(L) \;=\; [(1,0,1,0),(-1,0,0,1)] \text{ e } I(L) \;=\; [(1,-1,0,2),(0,1,-1,0)],$$

onde $N(L)$ é o núcleo de $L$ e $I(L)$ é a imagem de $L$.

*Demonstração.* Consideremos a base

$$\alpha \;=\; \{(1,0,1,0),(-1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\},$$

de $\mathbb{R}^4$. Pondo

$$\begin{aligned} L(1,0,1,0) &= (0,0,0,0) \\ L(-1,0,0,1) &= (0,0,0,0) \\ L(0,1,0,0) &= (1,-1,0,2) \\ L(0,0,1,0) &= (0,1,-1,0) \end{aligned}$$

e escrevendo um vetor arbitrário $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ como

$$(x,y,z,w) \;=\; (x+t)(1,0,1,0)+(t)(-1,0,0,1)+(y)(0,1,0,0)+(z-x-t)(0,0,1,0),$$

obtemos a transformação linear

$$L(x,y,z,t) \;=\; (0,y,z-x-t,0),$$

que satisfaz o enunciado.

$\square$

**Exercício 4.** Seja $T$ a aplicação linear com domínio $P_2$ (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio $\mathbb{R}$ definida por $T(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Determine a matriz de $T$ com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de $P_2$ e $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

*Demonstração.* Sejam $\alpha = \{x^2, x, 1\}$ e $\beta = \{1\}$

$$
\begin{aligned}
T(x^2) &= \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}. \\
T(x) &= \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}. \\
T(1) &= \int_0^1 x^2 dx = \left. x \right|_0^1 = 1.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
[T]_\beta^\alpha = \left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\right].
$$

□

**Lema 1.** Sejam $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear unitário. Então os autovalores de $T$ possuem módulo igual a 1.

*Demonstração.* **Sendo $T$ um operador unitário, então $T^* = T^{-1}$ e, além disso, T preserva produto interno. Ou seja, para todo $v \in V$ temos que**

$$
\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T * T(v)\rangle = \langle v, v\rangle.
$$

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de $T$ e $u \in V$ um autovetor de $T$ associado a $\lambda$. Então

$$
|\lambda|^2 \langle v, v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle.
$$

$$
\Rightarrow |\lambda| = 1.
$$

$\square$

**Exercício 5.** Sejam $n$ um inteiro positivo e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear que é uma isometria, i.e, $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que, se $n$ for ímpar, então existe um subespaço vetorial não-trivial que é tal que: ou todos os pontos desse subespaço são fixados por $T$; ou todos os pontos desse subespaço são levados por $T$ em seus opostos.

(b) O mesmo vale para dimensões pares? Justifique cuidadosamente a sua resposta, provando-a, se for positiva ou apresentando contra-exemplo, se for negativa.

*Demonstração.* Sabemos que um operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, é um operador unitário.

$(a)$ Seja $p_T(\lambda)$ o polinômio característico do operador $T$. Sendo $gr(p_T(\lambda)) = n$ ímpar, então $p_T(\lambda)$ admite pelo menos uma raiz real, uma vez que seus coeficientes são reais e as raízes complexas nesse caso ocorrem aos pares (**se** $a + bi \in \mathbb{C}$ **é raiz de** $p_T(\lambda)$ **então** $a - bi$ **também será**).

O **Lema 1** nos garante que o módulo dessas raízes, que são exatamente os autovalores de $T$, é igual a 1. Seja $\lambda_\alpha$ uma raiz real de $p_T(\lambda)$. Então ou $\lambda_\alpha = 1$ ou $\lambda_\alpha = -1$. Assim, o autoespaço associado a $\lambda_\alpha$ é tal que todos os seus pontos são fixados por $T$ ou são levados nos seus opostos.

$(b)$ Falso. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (y, -x)$. Com respeito a base canônica $\alpha$ temos que

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que esse operador é unitário pois o módulo de cada um dos vetores coluna é igual a 1. Porém

$$p_T(\lambda) \ = \ \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \ = \ \lambda^2 \ + \ 1,$$

não possui solução real. □

# 3 Prova de seleção para o mestrado em Matemática 2016.2

**26 de Agosto de 2023**

**Exercício 1.** Escreva a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e a imagem seja a reta $y = 2x$.

*Demonstração.* Considere a base $\alpha = \{(1,1),(1,0)\}$. Então, dado qualquer vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$(x,y) \;=\; y(1,1) \;+\; (x-y)(1,0).$$

Pondo $T(1,1) = (0,0)$ e $T(1,0) = (2,1)$, a transformação linear

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (2x-2y, x-y), \end{aligned}$$

satisfaz o enunciado. □

**Exercício 2.** Seja $\mathbb{V}$ os espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e considere $\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = f(-x)\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = -f(-x)\}$.

(a) Mostre que $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$.

(b) Mostre que $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$.

*Demonstração.*

$(a)$ Óbvio.

$(b)$ Seja $f \in \mathbb{V}$. Então

$$f(x) \;=\; \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{h(x)}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{g(x)}}.$$

Note que

$$h(-x) \;=\; \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} \;=\; \frac{f(x)+f(-x)}{2} \;=\; h(x),$$

ou seja, $h(x)$ é uma função par. De forma semelhante, temos que

$$g(-x) \;=\; \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} \;=\; \frac{f(-x)-f(x)}{2} \;=\; -\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right) \;=\; -g(x),$$

ou seja, $g(x)$ é uma função ímpar. Logo $f$ é soma de uma função par com uma função ímpar.

$\square$

**Exercício 3.** Sejam $E, F$ espaços vetoriais de mesma dimensão finita $n$. Mostre que uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação contínua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

*Demonstração.*

$(a)$

$\Rightarrow$ Suponhamos $T$ injetiva. Sabemos então que $N(T) = \{0\}$. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim E \;&=\; \dim N(T) \;+\; \dim Im(T) \\ &=\; 0 \;+\; \dim Im(T) \\ &=\; \dim F, \end{aligned}$$

ou seja, $T$ é sobrejetiva.

$\Leftarrow$ Suponhamos $T$ sobrejetiva. Então $Im(T) = F$. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim\ E &= \dim\ N(T) + \dim\ Im(T) \\ \dim\ E &= \dim\ N(T) + \dim\ F \\ \Rightarrow \dim\ E - \dim\ F &= \dim\ N(T) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $T$ é injetiva.

$(b)$ Provamos no **item b do Exercício 5** que $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão infinita. Evidentemente, $\mathbb{R}^2$ é também um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão infinita. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Essa transformação linear é sobrejetiva mas não é injetiva. □

**Exercício 4.** Mostre que se $v_1, ..., v_n$ são autovetores distintos de uma transformação linear associados a autovalores distindos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, então $v_1, ..., v_n$ são linearmente independentes.

*Demonstração.* Encontra-se em: <https://math.stackexchange.com/questions/29371/how-to-prove-that-eigenvectors-from-different-eigenvalues-are-linearly-independe> (Não tankei essa demonstração.)

□

**Exercício 5.**

(a) Mostre que dois espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) são isomorfos. Conclua que todo $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão $n$ é isomoformo a $\mathbb{Q}^n$.

(b) Mostre que $dim_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{R}$ é infinita.

*Demonstração.*

$(a)$ Sejam $V$ e $W$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de mesma dimensão $n$ finita, $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$ e $\beta = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base de $W$. Pondo $T(v_i) = w_i$, para cada $1 \leq i \leq n$, obteremos uma transformação linear injetiva. Pelo **Exercício 3** essa transformação é sobrejetiva e, portanto, é um isomorfismo. Logo $V$ e $W$ são isomorfos.

Seja $V$ um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão $n$. **Como $\mathbb{Q}^n$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial de dimensão $n$, basta tomarmos uma base $\alpha$ de $V$ e uma base $\beta$ de $\mathbb{Q}^n$ e definir uma transformação linear injetiva, como definimos anteriormente.**

$(b)$ Basta notar que o conjunto

$$\alpha = \{e^n : n \in \mathbb{N}\},$$

formado por todas as potências de $e$ é LI e é infinito. Tal fato pode ser verifcado notando que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ é monótona crescente. $\square$