# Álgebra Linear

Gleberson Antunes

26 de Outubro de 2023

**Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Álgebra Linear, das Provas de Admissão ao Mestrado em Matemática na UFSM. As resoluções são desprentesiosas e são sujeitas à erros.**

**Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página Gleberson Antunes.**

## Sumário

# 1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2009.1

**26 de Outubro de 2023**

**Exercício 1**. Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais de dimensão finita e $T$ uma transformação linear de $V$ em $W$.

(a) Mostre que o núcleo de $T$ e a imagem de $T$ são subespaços de $V$ e $W$, respectivamente.

(b) Dado o vetor unitário $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}u$, projeção ortogonal de $v$ sobre o eixo $u$. Mostre que $T^2(v) = T(v)$, determine o núcleo de $T$, a matriz de $T$ e a matriz $H = I - 2T$ na base canônica.

*Demonstração.*

$(a)$ Trivial.

$(b)$ Seja $v \in \mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{aligned}
T^2(v) &= T(T(v)) \\
&= T\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}u\right) \\
&= \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}T(u) \\
&= \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}\left(\cancelto{1}{\frac{\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}}u\right) \\
&= \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}u.
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
T(v) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow v \in \langle u\rangle^{\perp} \\
&\Rightarrow \text{Ker } \ T = \langle u\rangle^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Consideremos então o produto interno usual. Então

$$
\begin{aligned}
T(1,0,0) &= \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} u. \\
T(0,1,0) &= \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} u. \\
T(0,0,1) &= \frac{a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} u.
\end{aligned}
$$

Seja $\alpha$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Então

$$
[T]_\alpha = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}.
$$

Além disso

$$
[H]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{2a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \dfrac{2a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \dfrac{2a_3 a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \dfrac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & 1 - \dfrac{2a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \dfrac{2a_3 a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ \dfrac{2a_1 a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \dfrac{2a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & 1 - \dfrac{2a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{bmatrix}.
$$

□

**Exercício 2.** Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $F$.

(a) Mostre que os autovalores de um operador nilpotente são todos nulos.

(b) Seja $T$ um operador linear sobre $V$, tal que posto $(T) = 1$. Usando o item a), mostre que se $T$ não é nilpotente, então $T$ é diagonalizável.

*Demonstração.*

$(a)$ Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador nilpotente. Suponhamos que $T$ admite algum autovalor $\alpha \in F$ não nulo. Então existe $v \in V$ não nulo tal que

$$T(v) = \alpha v.$$

**Como $T$ é nilpotente, existe $m$ natural tal que $T^m = 0$.** Seja $n$ o menor natural (que existe pelo **Princípio da Boa Ordenação**) tal que $T^n = 0$. Então

$$\begin{aligned} T^n(v) &= \alpha^n v = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = 0, \end{aligned}$$

o que é absurdo por hipótese. Logo os autovalores de $T$ devem ser todos iguais a zero.

$(b)$ Seja $n = \dim V$. Suponhamos que $T$ não é um operador linear nilpotente. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} T &= n - 1 \\ &= \dim \ E_0, \end{aligned}$$

o autoespaço associado ao autovalor 0. Como o posto $(T) = 1$, então a imagem de $T$ é uma reta. Seja $v \in V - \operatorname{Ker} T$ não nulo tal que $\langle v \rangle = Im(T)$. Então $T(v) = \alpha v$ para algum $\alpha \in F$ não nulo. **Segue dai que o operador $T$ é diagonalizável, uma vez que as multiplicidades algébricas e geométricas dos autoespaços $A_0$ e $A_\lambda$ coincidem**.

□

**Exercício 3**. Nos itens abaixo, considere $A, B, K$ e $I$ matrizes $n \times n$, onde $I$ é matriz identidade.

(a) Seja $K$ uma matriz anti-simétrica, isto é, $K^T = -K$. Suponha que $I - K$ é não-singular. Mostre que $I + K$ é não singular. Se $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, mostre que $B^T B = BB^T = I$.

(b) Se $M$ é uma matriz anti-simétrica então $I + M$ e $I - M$ são não-singulares. Demonstre esta afirmação nos casos em que $M$ é uma matriz de ordem $2 \times 2$ e $3 \times 3$.

(c) Mostre que se $A, B$ e $A + B$ possuem inversas, então o mesmo acontece com $(A^{-1} + B^{-1})$ e $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$.

*Demonstração.*

$(a)$ **Sabemos que se $P$ uma matriz inversível, então det $P$ = det $P^T$.** Suponhamos que $I - K$ é uma matriz não-singular, i.e, inversível. Então

$$\begin{aligned} \det I - K &= \det (I - K)^T \\ &= \det I - (-K) \\ &= \det I + K \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $I + K$ é não-singular.

Notemos que

$$\begin{aligned} B^T &= ((I - K)^{-1})^T (I - K) \\ . &= ((I - K)^T)^{-1} (I - K) \\ &= (I + K)^{-1} (I - K). \end{aligned}$$

Além disso

$$
\begin{aligned}
(I+K)(I-K) &= (I-K)(I+K) \\
&= I-K^2.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
B^TB &= (I+K)^{-1}(I-K)(I+K)(I-K)^{-1} \\
&= (I+K)^{-1}(I+K)(I-K)(I-K)^{-1} \\
&= I^2 \\
&= I.
\end{aligned}
$$

Como $B^TB = I$ e estamos falando de matrizes quadradas, vale $BB^T = I$, uma vez que **a inversa quando existe é única**.

$(b)$ Seja

$$
M = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}
$$

uma matriz anti-simétrica arbitrária. Então

$$
\begin{aligned}
\det 1+M &= \det \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1+a^2 \\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira

$$
\begin{aligned}
\det 1+M &= \det \begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1+a^2 \\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo $I+M$ e $I-M$ são inversíveis quando possuem ordem 2. Seja agora

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

uma matriz anti-simétrica arbitrária. Então

$$\begin{aligned} \det 1+M &= \det \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1+a^2+b^2+c^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$\begin{aligned} \det 1-M &= \det \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1+a^2+b^2+c^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $I+M$ e $I-M$ são inversíveis quando possuem ordem 3.

($c$) Se $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$, então $(A^{-1}+B^{-1}) = B^{-1}(A+B)A^{-1}$. Segue dai que

$$\begin{aligned} \det\,(A^{-1}+B^{-1}) &= \det\, B^{-1}(A+B)A^{-1} \\ &= \det\, B^{-1} \cdot \det\,(A+B) \cdot \det\, A^{-1} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $(A^{-1}+B^{-1})$ é inversível.

$\square$

## 2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2010.1

**27 de Outubro de 2023**

**Exercício 1.** Considere o operador linear $P$ que projeta o vetor $(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5$, no plano

$$\pi : \begin{cases} z &= ax + by, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R} \\ t &= 0 \\ w &= 0, \end{cases}$$

isto é, $P(x, y, z, t, w) = (x, y, ax + by, 0, 0)$.

(a) Calcule a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem de $P$ e exiba uma base para cada um deles.

(b) Encontre o polinômio característico de $P$.

(c) Mostre que $P$ é diagonalizável.

*Demonstração.*

$(a)$

$$P(x, y, z, t, w) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \\ ax + by &=& 0 \end{array}$$

Logo

$$\text{Ker } P = \langle (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Seja então $\alpha$ a base canônica do $\mathbb{R}^5$. Então

$$[P]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo

$$\operatorname{Im}(P) = \langle (1,0,a,0,0),(0,1,b,0,0) \rangle.$$

$(b)$ Notemos inicialmente que

$$P(1,0,a,0,0) = (1,0,a,0,0)$$
$$P(0,1,b,0,0) = (0,1,b,0,0)$$

Logo $(1,0,a,0,0)$ e $(0,1,b,0,0)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$. Como o outro autovalor é 0, temos que

$$p_P(\lambda = \lambda^3(\lambda - 1)^2.$$

$(c)$ Claramente $P$ é diagonalizável. Basta notar que as multiplicidades algébricas e geométricas do autoespaço associado ao autovalor 0 e do autoespaço associado ao autovalor 1 coincidem.

$\square$

**Exercício 2.** Seja $V$ o espaço vetorial real dado pelas funções contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$.

(a) Mostre que $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ é um produto interno em $V$.

(b) Exiba dois vetores não nulos ortogonais em relação ao produto interno dado em $(a)$.

(c) Considere $[f, g] = \int_0^{2\pi} f(x)g(2\pi - x)dx$. Então $[f, g]$ define um produto interno em $V$?

*Demonstração.*

(a) Sejam $f, g, h \in V$. Então

$$\begin{aligned}
\langle f + h, g\rangle &= \int_0^{2\pi} (f(x) + h(x))g(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) + h(x)g(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} h(x)g(x)dx \\
&= \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, g + h\rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)(g(x) + h(x))dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) + f(x)h(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x)h(x)dx \\
&= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx \\
&= \langle g, f\rangle.
\end{aligned}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha f, g\rangle &= \int_0^{2\pi} \alpha f(x)g(x)dx \\
&= \alpha \cdot \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \\
&= \alpha \cdot \langle f, g\rangle.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)\alpha g(x)dx \\
&= \alpha \cdot \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \\
&= \alpha \cdot \langle f, g\rangle.
\end{aligned}
$$

Seja $f \in V$. Então $f(x)^2 \geq 0$, para todo $x \in [0, 2\pi]$. Então

$$
\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \\
0 &\leq \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx.
\end{aligned}
$$

(b) Consideremos as funções $x^2 - \dfrac{4\pi^2}{3}, 1 \in V$. Então

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 - \frac{4\pi^2}{3}, 1 \right\rangle &= \int_0^{2\pi} (x^2 - \frac{4\pi^2}{3}) \cdot 1 \ dx \\
&= \int_0^{2\pi} x^2 - \frac{4\pi^2}{3} \ dx \\
&= \int_0^{2\pi} x^2 dx - \int_0^{2\pi} \frac{4\pi^2}{3} \ dx \\
&= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{4\pi^2}{3}x\bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{8\pi^3}{3} - 0 - \frac{8\pi^3}{3} + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo $x^2 - \dfrac{4\pi^2}{3}$ e 1 são ortogonais em relação ao produto interno dado.

$(c)$ Consideremos as funções $x, x^2 \in V$. Então

$$\begin{aligned}
[x, x^2] &= \int_0^{2\pi} x(2\pi - x)^2 \ dx \\
&= \int_0^{2\pi} 4\pi^2 x - 4\pi x^2 + x^3 \ dx \\
&= 12\pi^4 - \frac{32\pi^4}{3}.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
[x^2, x] &= \int_0^{2\pi} x^2(2\pi - x) \ dx \\
&= \int_0^{2\pi} 2\pi x^2 - x^3 \ dx \\
&= \frac{16\pi^4}{3} - 4\pi^4.
\end{aligned}$$

Logo

$$[x, x^2] \neq [x^2, x].$$

Portanto $[f, g]$ não é um produto interno em $V$.

$\square$

**Exercício 3.** Prove que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico. Use isso para provar que se $V$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T$ é um operador linear definido sobre $V$, então $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ produzem os mesmo autovalores para $\alpha$ e $\beta$ bases quaisquer.

*Demonstração.*

1. Sejam $A$ e $B$ matrizes semelhantes. Então existe uma matriz quadrada $P$ inversível tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

Sejam $p_A(\lambda)$ e $p_B(\lambda)$ os polinômios característicos de $A$ e $B$, respectivamente. Note que

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\,(A - \lambda I) \\ &= \det\,(P^{-1}BP - \lambda I) \\ &= \det\,(P^{-1}BP - \lambda P^{-1}PI) \\ &= \det\,P^{-1}(B - \lambda I)P \\ &= \det\,P^{-1} \cdot \det\,(B - \lambda I) \cdot \det\,P \\ &= \det\,(B - \lambda I) \\ &= p_B(\lambda). \end{aligned}$$

**Logo os polinômios característicos de matrizes semelhantes coincidem**.

2. Sejam então $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e $\alpha$ e $\beta$ bases de $V$. Então

$$\begin{aligned} [T]_\alpha^\alpha &= [I]_\alpha^\beta [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha \\ &= ([I]_\beta^\alpha)^{-1} [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha. \end{aligned}$$

Como a matriz $[I]_\beta^\alpha$ é inversível, temos que $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são semelhantes. **Segue do item 1 que $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ possuem o mesmo polinômio característico e, portanto, possuem os mesmos autovalores.**

□