

Álgebra Linear

Gleberson Antunes

15 de Setembro de 2023

Compilado de todas as minhas soluções, da parte de Álgebra Linear, das [Provas de admissão ao Mestrado em Matemática na UFBA](#). As resoluções são despretensiosas e são sujeitas à erros.

Sugestões e correções são bem-vindas e podem ser enviadas para gleber-sonset@gmail.com. Outras soluções podem ser encontradas em minha página [Gleberson Antunes](#).

Sumário

Sumário	1
1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2015.2	2
2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.1	7
3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.2	12
4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2017.2	16
5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.1	22
6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.2	29
7 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2023.2	35

1 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2015.2

25 de Agosto de 2023

Exercício 1. Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

Demonstração. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais. Suponhamos então que $\dim V < \dim W$. Se fosse verdade que V e W são isomorfos, então existiria uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ bijetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= 0 + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= \dim W,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\dim V < \dim W$. Logo V e W não podem ser isomorfos.

□

Exercício 2. Sejam E e F espaços vetoriais, $L : E \longrightarrow F$ transformação linear e $N(L)$ seu núcleo. Mostre que

$$L \text{ é injetora} \Leftrightarrow N(L) = \{\vec{0}\},$$

onde $\vec{0}$ é o vetor nulo de E .

Demonstração.

\Rightarrow Suponhamos L injetiva. Seja $v \in E$ tal que $L(v) = 0$. Então

$$L(v) = L(0)$$

$$\Rightarrow v = 0,$$

como queríamos.

\Leftarrow (Por contraposição) Suponhamos que L não é injetiva. Então existem $v, w \in E$ distintos, tais que $L(v) = L(w)$. Segue da linearidade de L que

$$L(v) = L(w)$$

$$\Rightarrow L(v) - L(w) = L(v - w) = 0$$

$$\Rightarrow v - w \in N(L).$$

Como v e w são distintos, temos que $v - w \neq 0$. Logo, $N(L) \neq \{\vec{0}\}$.

□

Exercício 3. Ache a transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(L) = [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \text{ e } I(L) = [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)],$$

onde $N(L)$ é o núcleo de L e $I(L)$ é a imagem de L .

Demonstração. Consideremos a base

$$\alpha = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\},$$

de \mathbb{R}^4 . Pondo

$$L(1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(0, 1, 0, 0) = (1, -1, 0, 2)$$

$$L(0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0)$$

e escrevendo um vetor arbitrário $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ como

$$(x, y, z, w) = (x+t)(1, 0, 1, 0) + (t)(-1, 0, 0, 1) + (y)(0, 1, 0, 0) + (z-x-t)(0, 0, 1, 0),$$

obtemos a transformação linear

$$L(x, y, z, t) = (0, y, z - x - t, 0),$$

que satisfaz o enunciado.

□

Exercício 4. Seja T a aplicação linear com domínio P_2 (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio \mathbb{R} definida por $T(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Determine a matriz de T com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de P_2 e $\{1\}$ de \mathbb{R} .

Demonstração. Sejam $\alpha = \{x^2, x, 1\}$ e $\beta = \{1\}$

$$T(x^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$T(x) = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$T(1) = \int_0^1 x^2 dx = \left. x \right|_0^1 = 1.$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Exercício 5. Seja R a rotação de \mathbb{R}^3 ao redor do eixo z , no sentido anti-horário, com centro na origem e ângulo $\pi/2$. Ou seja, R associa a cada ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um ponto $Q = (-y, x, z)$. Encontre o polinômio característico de R em relação a uma base de \mathbb{R}^3 e, a partir dele, determine os autovalores e autovetores de R (caso eles não existam, justifique sua conclusão com base nos cálculos feitos). Interprete geometricamente o resultado que você obteve.

Demonstração. Seja α a base canônica de \mathbb{R}^3 . Então

$$[R]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue daí que

$$p_R(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda) + 1 - \lambda = (\lambda^2 + 1)(1 - \lambda).$$

Ou seja, os autovalores de R são: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$.

Para $\lambda_1 = 1$ temos que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Logo devemos ter $x = y = 0$ e, por exemplo, $z = 1$. Então, o autoespaço associado a $\lambda_1 = 1$ é gerado por $[(0, 0, 1)]$.

Para $\lambda_2 = i$ temos que

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \\ (1-i)z = 0 \end{cases}$$

Logo devemos ter $x = i, y = 1$ e $z = 0$. Então, o autoespaço associado a $\lambda_2 = i$ é gerado por $[(i, 1, 0)]$.

Para $\lambda_3 = -i$ temos que

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \\ (1+i)z = 0 \end{cases}$$

Logo devemos ter $x = 1, y = i, z = 0$. Então, o autoespaço associado a $\lambda_3 = -i$ é gerado por $[(1, i, 0)]$.

□

2 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.1

26 de Agosto de 2023

Exercício 1. Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

Demonstração. Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais. Suponhamos então que $\dim V < \dim W$. Se fosse verdade que V e W são isomorfos, então existiria uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ bijetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= 0 + \dim \operatorname{Im}(T) \\ &= \dim W,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\dim V < \dim W$. Logo V e W não podem ser isomorfos.

□

Exercício 2. Sejam V e U espaços vetoriais e $T : V \longrightarrow U$ uma transformação linear, de núcleo W , e sejam $v \in V$, $u \in U$ tais que $T(v) = u$. Seja $v + W$ a classe lateral $v + W = \{v + w : w \in W\}$. Mostre que $v + W = \{x \in V : T(x) = u\}$.

Demonstração. Seja $v' \in v + W$. Então existe $w' \in W$ tal que $v' = v + w'$. Segue daí que

$$T(v') = T(v + w') = T(v) + T(w') = u + 0 = u.$$

Seja $x \in V$ tal que $T(x) = u$. Então $x = v + (x - v) \in v + W$, uma vez que

$$T(x - v) = T(x) - T(v) = u - u = 0.$$

□

Exercício 3. Ache a transformação linear $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(L) = [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \text{ e } I(L) = [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)],$$

onde $N(L)$ é o núcleo de L e $I(L)$ é a imagem de L .

Demonstração. Consideremos a base

$$\alpha = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\},$$

de \mathbb{R}^4 . Pondo

$$L(1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$L(0, 1, 0, 0) = (1, -1, 0, 2)$$

$$L(0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0)$$

e escrevendo um vetor arbitrário $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ como

$$(x, y, z, w) = (x + t)(1, 0, 1, 0) + (t)(-1, 0, 0, 1) + (y)(0, 1, 0, 0) + (z - x - t)(0, 0, 1, 0),$$

obtemos a transformação linear

$$L(x, y, z, t) = (0, y, z - x - t, 0),$$

que satisfaz o enunciado.

□

Exercício 4. Seja T a aplicação linear com domínio P_2 (o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio \mathbb{R} definida por $T(p) = \int_0^1 p(t)dt$. Determine a matriz de T com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de P_2 e $\{1\}$ de \mathbb{R} .

Demonstração. Sejam $\alpha = \{x^2, x, 1\}$ e $\beta = \{1\}$

$$\begin{aligned} T(x^2) &= \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}. \\ T(x) &= \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}. \\ T(1) &= \int_0^1 1 dx = \left. x \right|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Lema 1. Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial com produto interno e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear unitário. Então os autovalores de T possuem módulo igual a 1.

Demonstração. Sendo T um operador unitário, então $T^* = T^{-1}$ e, além disso, T preserva produto interno. Ou seja, para todo $v \in V$ temos que

$$\langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^* T(v) \rangle = \langle v, v \rangle.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T e $u \in V$ um autovetor de T associado a λ . Então

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \langle v, v \rangle &= \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle. \\ \Rightarrow |\lambda| &= 1. \end{aligned}$$

□

Exercício 5. Sejam n um inteiro positivo e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear que é uma isometria, i.e, $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Mostre que, se n for ímpar, então existe um subespaço vetorial não-trivial que é tal que: ou todos os pontos desse subespaço são fixados por T ; ou todos os pontos desse subespaço são levados por T em seus opostos.
- (b) O mesmo vale para dimensões pares? Justifique cuidadosamente a sua resposta, provando-a, se for positiva ou apresentando contra-exemplo, se for negativa.

Demonstração. Sabemos que um operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, é um operador unitário.

- (a) Seja $p_T(\lambda)$ o polinômio característico do operador T . Sendo $\text{gr}(p_T(\lambda)) = n$ ímpar, então $p_T(\lambda)$ admite pelo menos uma raiz real, uma vez que seus coeficientes são reais e as raízes complexas nesse caso ocorrem aos pares (**se $a + bi \in \mathbb{C}$ é raiz de $p_T(\lambda)$ então $a - bi$ também será**).

O **Lema 1** nos garante que o módulo dessas raízes, que são exatamente os autovalores de T , é igual a 1. Seja λ_α uma raiz real de $p_T(\lambda)$. Então ou $\lambda_\alpha = 1$ ou $\lambda_\alpha = -1$. Assim, o autoespaço associado a λ_α é tal que todos os seus pontos são fixados por T ou são levados nos seus opostos.

- (b) Falso. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (y, -x)$. Com respeito a base canônica α temos que

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que esse operador é unitário pois o módulo de cada um dos vetores coluna é igual a 1. Porém

$$p_T(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

não possui solução real.

□

3 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2016.2

26 de Agosto de 2023

Exercício 1. Escreva a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e a imagem seja a reta $y = 2x$.

Demonstração. Considere a base $\alpha = \{(1, 1), (1, 0)\}$. Então, dado qualquer vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0).$$

Pondo $T(1, 1) = (0, 0)$ e $T(1, 0) = (2, 1)$, a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - 2y, x - y), \end{aligned}$$

satisfaz o enunciado. □

Exercício 2. Seja \mathbb{V} o espaço vetorial das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} e considere $\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = f(-x)\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = -f(-x)\}$.

(a) Mostre que \mathbb{W}_1 e \mathbb{W}_2 são subespaços vetoriais de \mathbb{V} .

(b) Mostre que $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$.

Demonstração.

(a) Óbvio.

(b) Seja $f \in \mathbb{V}$. Então

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{h(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{g(x)}.$$

Note que

$$h(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = h(x),$$

ou seja, $h(x)$ é uma função par. De forma semelhante, temos que

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right) = -g(x),$$

ou seja, $g(x)$ é uma função ímpar. Logo f é soma de uma função par com uma função ímpar.

□

Exercício 3. Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão finita n . Mostre que uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação continua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

Demonstração.

(a)

\Rightarrow Suponhamos T injetiva. Sabemos então que $N(T) = \{0\}$. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim N(T) + \dim Im(T) \\ &= 0 + \dim Im(T) \\ &= \dim F, \end{aligned}$$

ou seja, T é sobrejetiva.

\Leftarrow Suponhamos T sobrejetiva. Então $\text{Im}(T) = F$. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim N(T) + \dim \text{Im}(T) \\ \dim E &= \dim N(T) + \dim F \\ \Rightarrow \dim E - \dim F &= \dim N(T) = 0,\end{aligned}$$

ou seja, T é injetiva.

(b) Provamos no **item b do Exercício 5** que \mathbb{R} é um \mathbb{Q} -espaço vetorial de dimensão infinita. Evidentemente, \mathbb{R}^2 é também um \mathbb{Q} -espaço vetorial de dimensão infinita. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned}T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x.\end{aligned}$$

Essa transformação linear é sobrejetiva mas não é injetiva.

□

Exercício 4. Mostre que se v_1, \dots, v_n são autovetores distintos de uma transformação linear associados a autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, então v_1, \dots, v_n são linearmente independentes.

Demonstração. Encontra-se em: <<https://math.stackexchange.com/questions/29371/how-to-prove-that-eigenvectors-from-different-eigenvalues-are-linearly-independe>> (**Não consegui resolver essa.**)

□

Exercício 5.

(a) Mostre que dois espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) são isomorfos.

Conclua que todo \mathbb{Q} -espaço vetorial de dimensão n é isomorfo a \mathbb{Q}^n .

(b) Mostre que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ é infinita.

Demonstração.

(a) Sejam V e W \mathbb{K} -espaços vetoriais de mesma dimensão n finita, $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de W . Pondo $T(v_i) = w_i$, para cada $1 \leq i \leq n$, obteremos uma transformação linear injetiva. Pelo **Exercício 3** essa transformação é sobrejetiva e, portanto, é um isomorfismo. Logo V e W são isomorfos.

Seja V um \mathbb{Q} -espaço vetorial de dimensão n . **Como \mathbb{Q}^n é um \mathbb{Q} -espaço vetorial de dimensão n , basta tomarmos uma base α de V e uma base β de \mathbb{Q}^n e definir uma transformação linear injetiva, como definimos anteriormente.**

(b) Basta notar que o conjunto

$$\alpha = \{e^n : n \in \mathbb{N}\},$$

formado por todas as potências de e é LI e é infinito. Tal fato pode ser verificado notando que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$ é monótona crescente.

□

4 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2017.2

24 de Outubro de 2023

Exercício 1. Seja V um espaço vetorial (plano) de \mathbb{R}^3 formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $x - 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração. Pondo $x = 2y - 4z$ temos que

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in V &\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 4z, y, z) \quad (\text{é da forma}) \\&\Rightarrow (2y - 4z, y, z) = (2y, y, 0) + (-4z, 0, z) \\&= y(2, 1, 0) + z(-4, 0, 1) \\&\Rightarrow [(2, 1, 0), (-4, 0, 1)] \\&= V.\end{aligned}$$

Considere agora o vetor $(0, 0, 1)$. Então

$$\{(2, 1, 0), (-4, 0, 1), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de \mathbb{R}^3 que satisfaz o enunciado.

□

Exercício 2. Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão finita n . Mostre que uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. A afirmação continua verdadeira em espaços de dimensão infinita? Se verdadeira prove e se falsa dê um contraexemplo.

Demonstração.

\Rightarrow Suponhamos T injetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$n = 0 + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = n.$$

Logo T é sobrejetiva.

\Leftarrow Suponhamos T sobrejetiva. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$n = \dim \operatorname{Ker} T + n$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0.$$

Logo T é injetiva.

Não é válida em espaços vetoriais de dimensão infinita. Considere os \mathbb{Q} -espaços vetoriais \mathbb{R} e \mathbb{R}^∞ . Considere também a transformação linear

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$$

$$x \longmapsto (x, 0, 0, \dots, 0, \dots).$$

Note que T é injetiva mas não é sobrejetiva.

□

Exercício 3. Uma matriz quadrada $a = [a_{ij}]$ chama-se simétrica (respectivamente antissimétrica) quando $a_{ij} = a_{ji}$ (respectivamente $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e para todo j). Prove que o conjunto S das matrizes simétricas e o conjunto A das matrizes antissimétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{K})$ e tem-se $M_n(\mathbb{K}) = S \oplus A$.

Demonstração. Facilmente verificamos que S e A são subespaço vetoriais de $M_n(\mathbb{K})$ com $S \cap A = \{0\}$. Seja $X \in M_n(\mathbb{K})$. Note que

$$X = \frac{1}{2}(X + X^t) + \frac{1}{2}(X - X^t).$$

Note que

$$(X + X^t)^t = X^t + X \in S.$$

De forma semelhante temos que

$$(X - X^t)^t = X^t - X = -(X - X^t) \in A.$$

Logo $M_n(\mathbb{K}) = S \oplus A$.

□

Exercício 4. Se os vetores v_1, v_2, \dots, v_m de um espaço vetorial V geram um subespaço de dimensão r , prove que o conjunto dos vetores $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m de dimensão $m - r$.

Demonstração. Seja S' o conjunto dos vetores $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$.

1. $0 \in S'$.

De fato, temos que

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = 0.$$

2. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_m), (\alpha_{1'}, \dots, \alpha_{m'}) \in S'$ então $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) + (\alpha_{1'}, \dots, \alpha_{m'}) \in S'$.

De fato, note que

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \alpha_1'v_1 + \dots + (\alpha_m + \alpha_m')v_m) &= \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m + \alpha_1'v_1 + \dots + \alpha_m'v_m \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S'$, então $\alpha \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S'$.

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \alpha_1v_1 + \dots + \alpha \cdot \alpha_mv_m &= \alpha(\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m) \\
&= \alpha \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m como queríamos mostrar.

Sejam então S o subespaço gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_m e S' o subespaço vetorial gerado pelos vetores $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m = 0$. Seja

$$\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_r\},$$

uma base de S . Se $r = m$ então

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m &= 0 \\
\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m &= 0.
\end{aligned}$$

Logo $S' = \{0\}$ é o subespaço trivial. Portanto $\dim S' = m - r = 0$. Suponhamos então que $r < m$. Então os vetores

$$\{v_{r+1}, \dots, v_m\}$$

podem ser escritos como combinação linear da base $\mathcal{D} = \{v_1, \dots, v_r\}$. Como cada combinação linear **é única**, existem $m - r$ vetores em S' tais que

$$\alpha_{1(r+1)} \cdot v_1 + \dots + \alpha_{r(r+1)} \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+2} + \dots + 0 \cdot v_m = v_{r+1}.$$

\vdots

$$\alpha_{1m} \cdot v_1 + \dots + \alpha_{rm} \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+1} + \dots + 0 \cdot v_{m-1} = v_m.$$

Logo

$$\{(\alpha_{1(r+1)}, \dots, \alpha_{m(r+1)}, -1, \dots, 0), \dots, (\alpha_{1m}, \dots, \alpha_{rm}, 0, \dots, -1)\},$$

é uma base de S' . Portanto $\dim S' = m - r$.

□

Teorema 1. Seja A uma matriz e $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m}$ o seu polinômio característico. Então A será diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal é da forma $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)$.

Demonstração. Encontra-se em <<https://encurtador.com.br/uyzCN>>, Teorema 1.

□

Exercício 5. A transformação linear T em \mathbb{R}^2 definida por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ é tal que $T^2 = T$. Prove que se S é uma transformação linear tal que $S^2 = S$ então $S = 0, S = I$ em que I é a identidade ou existe uma base ordenada \mathcal{B} tal que $[S(x_1, x_2)]_{\mathcal{B}} = [(x_1, 0)]_{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Se $S = 0$ ou $S = I$ então $S^2 = S$. Suponhamos então que $S \neq 0$ e $S \neq I$ e consideremos o polinômio

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1).$$

Como $S \neq 0$, então S não se anula em $q(\lambda) = \lambda$. Como $S \neq I$, então S não se anula em $r(\lambda) = \lambda - 1$. Como

$$\begin{aligned}
p(S) &= S(S - I) \\
&= S^2 - S \\
&= 0,
\end{aligned}$$

teremos que p é o **polinômio minimal** de S . Segue daí que S é diagonalizável, pelo **Teorema 1**. Desse modo, existe uma base \mathcal{B} formada por autovetores de S , tal que que

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente $[S(x_1, x_2)]_{\mathcal{B}} = [(x_1, 0)]_{\mathcal{B}}$.

□

5 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.1

20 de Outubro de 2023

Exercício 1. Seja V o espaço das funções polinomiais de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Considere o operador linear $D : V \rightarrow V$ dado por $D(p) = p'$, onde p' denota a derivada da função p , para toda $p \in V$.

(a) Encontre o núcleo e a imagem de D .

(b) D tem inversa à direita?

Demonstração.

(a) Seja $p \in V$. Então

$$\begin{aligned} D(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &\in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \text{Ker}(D) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Provaremos agora que D é sobrejetiva.

Seja $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in V$ arbitrário. Tome $q = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i} \in V$. Então

$$D\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} D\left(\frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = p.$$

Logo D é uma aplicação sobrejetiva. Portanto $\text{Im}(D) = V$.

(b) Sabemos que uma função admite inversa à direita se, e somente se, é **sobrejetiva**. Como D é uma aplicação sobrejetiva, temos que D admite inversa à direita.

□

Exercício 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo F . Dada uma base ordenada $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de V , considere o único operador linear sobre V tal que

$$T(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } T(\alpha_n) = 0.$$

(a) Qual é a matriz de T com relação a \mathcal{B} ?

(b) Prove que $T^n = 0$, mas $T^{n-1} \neq 0$.

Demonstração.

(a) Note que

$$T(\alpha_1) = 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_n.$$

$$T(\alpha_2) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_n.$$

...

...

...

$$T(\alpha_{n-1}) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_{n-1} + 1 \cdot \alpha_n.$$

$$T(\alpha_n) = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_{n-1} + 0 \cdot \alpha_n.$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Notemos que

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n. \end{aligned}$$

Segue do **Teorema de Cayley-Hamilton** que

$$\begin{aligned} p_T(T) &= (T)^n \\ &= T^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Por definição, temos que

$$T^{n-1} = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n-1 \text{ vezes}}.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}
T^{n-1}(\alpha) &= (T \circ T \circ \dots \circ T)(\alpha_1) \\
&= T(T^{n-2}(\alpha_1)) \\
&= T(\alpha_{n-1}) \\
&= \alpha_n.
\end{aligned}$$

Logo $T^{n-1} \neq 0$.

□

Exercício 3. Seja V o espaço vetorial das funções polinomiais de \mathbb{R} em \mathbb{R} , de grau menor ou igual a 2. Sejam a_1 , a_2 e a_3 números reais distintos. Considere a função $L_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $L_i(p) = p(a_i)$, para todo $p \in V$, onde $i = 1, 2, 3$.

- (a) Prove que L_1, L_2 e L_3 são funcionais lineares linearmente independentes.
- (b) Encontre a base de V cuja base dual é $\{L_1, L_2, L_3\}$.

Demonstração. Solução adaptada de <<https://encurtador.com.br/pqFL1>> e <<https://encurtador.com.br/nouwz>>.

- (a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i = 0.$$

Então, para todo $p \in V$, temos que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p) = 0.$$

Considere os pontos $\{(a_1, 0), (a_2, 1), (a_3, 1)\}$. Conseguimos determinar um polinômio p_1 de grau 2, via **Polinômios de Lagrange**, que passa por esses três pontos.

Prosseguindo dessa forma obtemos polinômios p_2 e p_3 de grau dois que passam pelos pontos $\{(a_1, 1), (a_2, 0), (a_3, 1)\}$ e $\{(a_1, 1), (a_2, 1), (a_3, 0)\}$, respectivamente.

Note que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p_1) = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p_2) = \alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \cdot L_i(p_3) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

o que implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

(b) **Não consegui essa.**

□

.

Exercício 4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear. Prove que

$$T^2 - \text{tr}(T)T + \det(T)I = 0,$$

onde I é a transformação identidade.

Demonstração. Seja α uma base de \mathbb{R}^2 e

$$[T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

a matriz de T com respeito a base α . Note que

$$\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{tr}(T)} \lambda + \underbrace{ad - bc}_{\det(T)}.
\end{aligned}$$

Segue do **Teorema de Cayley - Hamilton** que

$$\begin{aligned}
P_T(T) &= (T)^2 - (a + d)T + (ad - bc)I. \\
&= T^2 - \text{tr}(T)T + \det(T)I \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

□

Exercício 5. Considere o conjunto dos números reais \mathbb{R} como espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{Q} dos números racionais, com as operações usuais. Sejam \mathbb{P} o conjunto dos números primos e

$$S = \{\log(p) ; p \in \mathbb{P} \text{ e } p > 1\},$$

onde \log é a função logaritmo natural. Prove que S é linearmente independente.

Conclua que \mathbb{R} possui dimensão infinita sobre \mathbb{Q} , justificando cuidadosamente.

Demonstração. Sejam $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \log(p_i) = 0.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que os α_i são todos inteiros (**uma vez que se tomarmos α como sendo o mdc dos denominadores de α_i , teríamos**

$$\alpha \cdot \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \log(p_i) = 0).$$

Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \log(p_i) &= \sum_{i=1}^n \log(p_i^{\alpha_i}) = 0 \\ \Rightarrow \log\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \prod p_i^{\alpha_i} &= 1 \\ \Rightarrow \alpha_i &= 0,\end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n$, por conta da unicidade na decomposição de fatores primos. Desse modo S é um conjunto L.I e infinito. Sendo assim, \mathbb{R} possui dimensão infinita sobre \mathbb{Q} .

□

6 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2018.2

21 de Outubro de 2023

Exercício 1. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensões quaisquer (finitas ou infinitas) sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Demonstre que existe uma transformação linear injetora $T : V \longrightarrow W$ se, e somente se, $\dim V \leq \dim W$.

Demonstração.

\Rightarrow Sejam $T : V \longrightarrow W$ injetora e α uma base de V . Suponhamos que

$$\dim V < \dim W$$

.

Como T é injetora, então T leva conjuntos L.I em conjuntos L.I. Sendo assim, $T(\alpha)$ é um subconjunto L.I de W . Notemos então que

$$\dim V = \dim \langle T(\alpha) \rangle .$$

Mas isso é um absurdo, pois $\langle T(\alpha) \rangle$ é um subespaço vetorial de W e **todo subespaço vetorial de W deve possuir dimensão menor ou igual a dimensão de W .**

\Leftarrow Sejam V e W espaços vetoriais. Sejam α e β bases desses espaços vetoriais, respectivamente. Suponhamos que

$$\dim V > \dim W.$$

Então

$$|\alpha| \leq |\beta|.$$

Sendo assim, existe uma função $f : \alpha \longrightarrow \beta$ injetiva. Podemos então estender essa função f para uma transformação linear T injetiva da seguinte maneira. Escrevamos um vetor $v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \alpha_i$ como uma combinação linear dos elementos de α . Então

$$T(v) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(\alpha_i).$$

é uma transformação linear injetiva. □

Exercício 2. Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo \mathbb{K} e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Prove que, para todo subespaço U de V e para todo $v \in V$, $Tv \in T(U)$ se, e somente se, existe $u \in \text{Ker } T$ tal que $v + u \in U$.

Demonstração.

\Rightarrow Sejam U um subespaço vetorial de V e $v \in V$ tais que $T(v) \in T(U)$. Por definição

$$T(U) = \{T(u) ; u \in U\}.$$

Sendo assim, existe $u \in U$ tal que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(v) \\ \Leftrightarrow T(u) - T(v) &= T(u - v) = 0 \\ \Rightarrow u - v &\in \text{Ker } T. \end{aligned}$$

Note então que $v + (u - v) = u \in U$.

\Leftarrow Sejam U um subespaço vetorial de V e $v \in V$ tais que $v + u \in U$, para algum $u \in \text{Ker } T$. Então

$$\begin{aligned}
T(v+u) &= T(v) + T(u) \\
&= T(v) + \cancel{T(u)} \overset{0}{\rightarrow} \\
&= T(v) \\
&\in T(U).
\end{aligned}$$

□

Exercício 3. Sejam \mathbb{K} um corpo e $P(\mathbb{K})$ o \mathbb{K} -espaço vetorial dos polinômios em uma indeterminada com coeficientes em \mathbb{K} . Demonstre que o operador de derivação $D : P(\mathbb{K}) \longrightarrow P(\mathbb{K})$ é linear e é sobrejetor mas não injetor.

Demonstração.

1. D é linear.

Sejam $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in P(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
D\left(\alpha \cdot p + q\right) &= D\left(\sum_{i=0}^n \alpha \cdot a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^n \alpha \cdot a_i \cdot i \cdot x^{i-1} + \sum_{j=0}^m b_j \cdot j \cdot x^{j-1} \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot i \cdot x^{i-1} + \sum_{j=0}^m b_j \cdot j \cdot x^{j-1} \\
&= \alpha \cdot D(p) + D(q).
\end{aligned}$$

2. D é sobrejetor.

Seja $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in P(\mathbb{K})$ arbitrário. Tome $q = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i} \in P(\mathbb{K})$. Então

$$D\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} D\left(\frac{a_{i-1} x^i}{i}\right) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = p.$$

Logo D é uma aplicação sobrejetiva.

3. D não é injetor.

Note que

$$D(1) = D(2) = 0,$$

com $1 \neq 2$.

□

Teorema 1. Seja A uma matriz e $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m}$ o seu polinômio característico. Então A **será diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal é da forma** $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)$.

Demonstração. Encontra-se em <<https://encurtador.com.br/uyzCN>>, Teorema 1.

□

Exercício 4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x, -x + 2y - z, -2x + 2y - z).$$

Determine a matriz A associada a T na base canônica de \mathbb{R}^3 , verifique se A é diagonalizável e determine uma matriz de diagonalização P .

Demonstração. Seja α a base canônica do \mathbb{R}^3 . Então

$$[A]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Seja

$$\begin{aligned}
 p_T(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda(\lambda-1)^2.
 \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo A é diagonalizável, pelo **Teorema 1**. Tomando $\lambda = 1$ obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned}
 -x + y - z &= 0 \\
 -2x + 2y - 2z &= 0
 \end{aligned}$$

Tomando $x = y - z$ encontramos

$$\begin{aligned}
 (y - z, -y + z + 2y - z, -2y + 2z + 2y - z) &= (y - z, y, z) \\
 &= y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)
 \end{aligned}$$

Logo o auto-espaço associado a $\lambda = 1$ é $[(1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$. Note que

$$T(0, 1, 2) = 0 \cdot (0, 1, 2) = 0.$$

Sendo assim, o auto-espaço associado a $\lambda = 0$ é $[(0, 1, 2)]$. Desse modo,

$$[P]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma triz de diagonalização.

□

Exercício 5. Sejam W o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $(2, -1, 1)$ e $(-3, 0, 1)$, e seja \cdot o produtor interno no espaço \mathbb{R}^3 definido por

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^3 (i+1)a_i b_i.$$

Encontre o complemento ortogonal W^{\perp} de W neste produto interno e uma base ortonormal de W^{\perp} .

Demonstração. Considere o vetor $(6, 20, 9)$. Note que

$$\begin{aligned} (6, 20, 9) \cdot (2, -1, 1) &= 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 20 \cdot (-1) + 4 \cdot 9 \\ &= 24 - 60 + 36 \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (6, 20, 9) \cdot (-3, 0, 1) &= 2 \cdot 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 20 \cdot 0 + 4 \cdot 9 \\ &= -36 + 36 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } W^{\perp} = \left[\frac{(6, 20, 9)}{\|(6, 20, 9)\|} \right].$$

□

7 Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática 2023.2

25 de Outubro de 2023

Parte I

Nas questões a seguir, assinale a(s) alternativa(s) corretamente com verdadeiro (V) ou falso (F).

Exercício 1. Seja V o espaço vetorial real de todos os polinômios com coeficientes reais de grau no máximo n (incluindo o polinômio nulo), na indeterminada t . Consideremos o operador linear $T : V \longrightarrow V$ definido por $T(p) = p'$ (derivada de p), para todo $p \in V$.

- (a) 0 é o único autovalor de T .
- (b) T é injetivo.
- (c) T é sobrejetivo.
- (d) T é diagonalizável.
- (e) O polinômio característico de T é x^{n+1} .

Demonstração.

(a) Verdadeiro. Suponhamos que T admita um autovalor $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo. Então existe um polinômio $p \in V$ não nulo, tal que

$$T(p) = \alpha \cdot p.$$

Como o grau de p é no máximo n , teremos que sua $(n + 1)$ -ésima derivada deverá ser igual a 0. Isso contradiz o fato de α ser um autovalor de T , uma vez que

$$T^{n+1}(p) = \alpha^{n+1} \cdot p.$$

Logo o único autovalor de T é 0.

(b) Falso. Note que

$$T(1) = T(0),$$

com $1 \neq 0$.

(c) Falso. Note que não existe $p \in V$ tal que

$$T(p) = x^n.$$

(e) Verdadeiro. Trivial.

□

Exercício 2. Seja V o espaço vetorial real de todas as matrizes reais $n \times n$. Consideremos o operador linear $T : V \longrightarrow V$, definido por $T(A) = A^t$ (transposta de A), para todo $A \in V$, e seja A_T a matriz associada a T na base canônica.

(a) 1 e -1 são os únicos autovalores de T .

(b) O autoespaço associado a 1 tem dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$.

(c) O autoespaço associado a -1 tem dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

(d) $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$.

(e) $\text{Ker } T \neq \{0\}$.

Demonstração.

(a) Verdadeiro.

(b) Verdadeiro.

(c) Verdadeiro.

(d) Verdadeiro. Note que a matriz associada a T na base canônica consiste na permutação das colunas da matriz identidade I_{n^2} . **Como permutar as colunas de uma matriz quadrada altera apenas o sinal do determinante**, teremos que $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$.

(e) Falso. Como $\det(A_T) \in \{-1, 1\}$, teremos que o operador T é inversível. Sendo assim, T é injetivo e, portanto, $\text{Ker } T = \{0\}$.

□

Exercício 3. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n munido de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam $S_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $S_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ um sistema de n vetores distintos de V . Adicionalmente, sejam A e B dois operadores lineares em V tais que $\langle Au, A_u \rangle = \langle B_u, B_u \rangle$, para todo $u \in V$.

- (a) As hipóteses dadas implicam que $\langle A_u, A_v \rangle = \langle B_u, B_v \rangle$, para todo $u, v \in V$.
- (b) Não existe um operador ortogonal $C : V \longrightarrow V$ tal que $A = CB$.
- (c) Existe, e não é único, um operador linear $F : V \longrightarrow V$ tal que $F(v_i) = w_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.
- (d) Existe um automorfismo $G : V \longrightarrow V$ tal que $G(S_1) = S_2$ se, e somente se, S_2 é linearmente independente.
- (e) Se S_2 é linearmente independente e $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Então existe um automorfismo ortogonal $H : V \longrightarrow V$ tal que $Hv_i = w_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração.

(a) Verdadeiro. Sejam $u, v \in V$. Consideremos então o vetor $u - v \in V$. Note que

$$\begin{aligned}
\langle A(u-v), A(u-v) \rangle &= \langle B(u-v), B(u-v) \rangle \quad (\text{por hipótese}) \\
\Leftrightarrow \langle A(u), A(u) \rangle - 2\langle A(u), A(v) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle &= \langle B(u), B(u) \rangle - 2\langle B(u), B(v) \rangle + \langle B(v), B(v) \rangle \\
\Rightarrow \langle A(u), A(u) \rangle - 2\langle A(u), A(v) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle &= \langle A(u), A(u) \rangle - 2\langle B(u), B(v) \rangle + \langle A(v), A(v) \rangle \\
\Rightarrow -2\langle A(u), A(v) \rangle &= -2\langle B(u), B(v) \rangle \\
\Rightarrow \langle A(u), A(v) \rangle &= \langle B(u), B(v) \rangle,
\end{aligned}$$

para todos $u, v \in V$.

(b) Falso. Suponhamos que os operadores A e B são iguais. Então $A = I \cdot B$, onde I é o operador identidade. Como sabemos, I é um operador ortogonal.

(c) Falso. O operador linear F existe e é único.

(d) Falso.

\Rightarrow Suponhamos que existe um automorfismo $G : V \longrightarrow V$ tal que $G(S_1) = S_2$.

Como G é injetiva, então G leva vetores L.I em vetores L.I. Como S_1 é uma base de V e, portanto, é um conjunto L.I, então $G(S_1) = S_2$ é um conjunto L.I.

\Leftarrow Suponhamos que S_2 é um conjunto L.I. Facilmente podemos definir uma transformação linear $G : V \longrightarrow V$ tal que $G(S_1) = S_2$. Basta associar a cada vetor $v_i \in S_1$ o vetor $G(v_i) = w_i \in S_2$. **Essa transformação linear será injetiva. Portanto será sobrejetiva. Consequentemente G será um automorfismo.**

(e) Verdadeiro.

□

Parte II

Resolver as seguintes questões, justificando por extenso cada resposta.

Exercício 4. Considere a função

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (3z, 2y - x, -y)$$

e as bases

$$B = \{(2, 0, 0), (-1, -1, 0), (1, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

para o domínio e contradomínio respectivamente.

- (a) Verifique que T é uma transformação linear.
- (b) Determine a matriz A associada a T respeito às bases B e B' .
- (c) Determine $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$. Em particular, determinar uma base e a dimensão para cada um desses espaços.
- (d) Estude a injetividade e a sobrejetividade de T .

Demonstração.

$$1. \quad T(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

De fato

$$T(0, 0, 0) = (3 \cdot 0, 2 \cdot 0 - 0, -0) = (0, 0, 0).$$

$$2. \quad \text{Se } u, v \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}. \text{ Então } T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot T(u) + T(v).$$

Sejam $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') &= (3 \cdot (\lambda z + z'), 2 \cdot (\lambda y + y') - (\lambda x + x'), -(\lambda y + y')) \\ &= (3\lambda z, 2\lambda y - \lambda x, -\lambda y) + (3z', 2y' - x', -y') \\ &= \lambda \cdot (3z, 2y - x, -y) + (3z', 2y' - x', -y') \\ &= T(x, y, z) + T(x', y', z'). \end{aligned}$$

Logo T é uma transformação linear.

(b)

$$[A]_{B'}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Note que

$$3z = 0$$

$$T(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow 2y - x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

$$-y = 0$$

Desse modo T é injetiva. Consequentemente, $\dim \text{Ker } T = 0$. Segue do **Teorema do Núcleo e da Imagem** que $\dim \text{Im}(T) = 3$. Sendo assim

$$A = \{0\} \quad \text{e} \quad B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\},$$

são bases do Núcleo e da Imagem de T , respectivamente.

(d) Verificamos pelo item c que T é uma bijeção. Portanto T é injetiva e sobrejetiva.

□

Exercício 5. Demonstre a seguinte afirmação:

Seja A uma matriz superiormente triangular de ordem n . Então o operador linear de \mathbb{R}^n definido por A é um automorfismo se e somente se todos os elementos da diagonal principal de A são não nulos.

Demonstração. Sabemos que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal. Sendo assim

A automorfismo $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

\Leftrightarrow Produto dos elementos da diagonal principal é diferente de zero.

\Leftrightarrow Cada elemento da diagonal principal de A é não nulo.

□