Álgebra Linear II - EXA 382

Gleberson Antunes

13 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Dadas as matrizes a seguir, encontre o polinômio característico, os autovalores e autovetores correspondentes de cada uma.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad d)\ A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Demonstração. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O polinômio de grau n dado por $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ é chamado de **polinômio característico** da matriz A. Façamos cada uma dessas contas.

(a).

$$p_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Sabemos que os autovalores da matriz A serão as raízes de $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Assim sendo, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Descobriremos agora quem é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Para isso, basta resolver o sistema

$$0x + 0y = 0$$
$$8x - 4y = 0$$

O que implica que $x = \dfrac{y}{2}$. Logo, $v = (1, 2)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 3$. Para descobrir quem é um autovetor associado a $\lambda_2 = -1$, basta resolver o sistema

$$4x + 0y = 0$$

$$8x + 0y = 0$$

O que implica que $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Logo, $w = (0, 1)$ é um autovalor associado a $\lambda_2 = -1$.

(b).

$$p_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(-2 - \lambda) - 36 = \lambda^2 - 8\lambda + 16.$$

Sabemos que os autovalores da matriz A serão as raízes de $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$. Assim sendo, o autovalor é $\lambda = 4$. Descobriremos agora quem é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 4$. Para isso, basta resolver o sistema

$$6x - 9y = 0$$

$$4x - 6y = 0$$

O que implica que $x = \frac{3y}{2}$. Logo, $v = (3, 2)$ é um autovalor associado a $\lambda = 4$.

(c).

$$p_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 12.$$

Sabemos que os autovalores da matriz A serão as raízes de $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 12$. Assim sendo, os autovalores são $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$. Descobriremos agora quem é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$. Para isso, basta resolver o sistema

$$-2\sqrt{3}x + 3y \quad = 0$$

$$4x - 2\sqrt{3}y = 0$$

O que implica que $x = \frac{\sqrt{3}y}{2}$. Logo, $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ é um autovalor associado a $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$. Para descobrirmos quem é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$, basta resolver o sistema

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}x + 3y &= 0 \\ 4x + 2\sqrt{3}y &= 0 \end{aligned}$$

O que implica que $x = -\frac{\sqrt{3}y}{2}$. Logo, $w = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ é um autovalor associado a $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$.

(d).

$$p_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 7 = \lambda^2 + 3.$$

Como estamos trabalhando com $\mathbb{R}-$espaços vetoriais, não será possível determinar os autovalores associados a matriz A, uma vez que as raízes do polinômio característico são complexas (parte imaginária não-nula).

□

Exercício 3. Considere o operador linear definido por $T(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$. Determine o polinômio característico, o polinômio mínimo do operador e diga se é diagonalizável.

Demonstração. Sabemos que

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$p_T(\lambda) = det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

Os autovalores da matriz T serão as raízes de $p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda{+}1)^2(-\lambda{+}2)$. Assim sendo, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Descobriremos agora quem é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$. Para isso, basta resolver o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{aligned}$$

O que implica que $x = -y - z$. Logo, um autovalor associado a $\lambda_1 = -1$ é da forma $(-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$ (Essa seria a "cara"dos vetores do **autoespaço gerado por** $\boldsymbol{\lambda = 1}$**.**) Desse modo, $v = (-1, 1, 0)$ e $w = (-1, 0, 1)$ são autovetores associados a $\lambda_1 = -1$. Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} -2x + \ \ y + \ \ z &= 0 \\ x - 2y + \ \ z &= 0 \\ x + \ \ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos $x = y = z$. Logo, $u = (1, 1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 2$. Note que T é diagonalizável pois

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

O **polinômio minimal** é o polinômio $p_M(\lambda)$ de menor grau, que divide $p_T(\lambda)$, tal que $p_m(T) = 0$. Nesse caso, temos que $p_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(-\lambda + 2)$ (Para ver isso, basta substituir λ por T).

$\square$

Exercício 4. Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{bmatrix}$$

Determine todos os parâmetros de a e b de modo que a matriz A seja diagonalizável.

Demonstração. Note que

$$p_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 2-\lambda & 0 \\ 0 & b & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (-\lambda + 1)(-\lambda + 2)^2.$$

Logo os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Uma condição **necessária e suficiente** para que a matriz A seja diagonalizável é que a multiplicidade algébrica dos autovalores (número de vezes em que o autovalor se repete como raiz do polinômio característico) coincida com a multiplicidade geométrica (dimensão do autoespaço associado ao autovalor). Considere agora $\lambda = 1$. Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ ax + \ \ y + 0z &= 0 \\ 0x + by + \ \ z &= 0 \end{aligned}$$

Temos $y = -ax$ e $z = -by \Rightarrow z = abx$. Como $\dim A_{\lambda_1} = 1$, devemos ter $a \cdot b \neq 0$. Considere agora $\lambda_2 = 2$. Resolvendo o sistema

$$
\begin{aligned}
-x + 0y + 0z &= 0 \\
ax + 0y + 0z &= 0 \\
0x + by + z &= 0
\end{aligned}
$$

Obtemos $x = 0$, $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $z = -by$. **Note que se b for igual 0, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ seria <(0, 1, 0)>, que tem dimensão 1. Se b for diferente de 0, teríamos que z está em função de y. Logo o autoespaço teria dimensão 1. Em ambos os casos chegamos em uma contradição. Logo não podemos resolver a questão com os dados fornecidos.** □

Exercício 6. Seja A a matriz de um operador linear, dada por

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

Obtenha o polinômio característico, os autovalores com as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas e diga se é diagonalizável.

Demonstração.

$$
p_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = (\lambda - 2)^2(-\lambda + 3).
$$

Logo $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica igual a 2 e $\lambda_2 = 3$ possui multiplicidade algébrica igual a 1. Considere agora $\lambda = 2$. Resolvendo o sistema

$$
\begin{aligned}
0x + y + 0z &= 0 \\
0x - y - z &= 0 \\
0x + 2y + 2z &= 0
\end{aligned}
$$

Obtemos $x \in \mathbb{R}$ qualquer e $y = z = 0$. Nesse caso, temos $u = (1, 0, 0)$ um autovetor associado ao autovetor $\lambda_1 = 2$. Como o autoespaço associado a $\lambda_1 = 2$ é $< (1, 0, 0) >$, A não pode ser diagonalizável, uma vez que a multiplicidade algébrica (2) é diferente da multiplicidade geométrica (1). $\square$

Álgebra Linear II - EXA 382

Gleberson Antunes

25 de Maio de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 5. Construa, a partir do vetor $(2,1,0)$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual.

Demonstração. Sejam $u = (-1,2,0)$ e $v = (0,0,1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. **Note que**

$$< (2,1,0),(-1,2,0) > = \ 2(-1) + 1(2) + 0(0) = 0.$$

$$< (-1,2,0),(0,0,1) > = \ -1(0) + 2(0) + 0(1) = 0.$$

$$< (2,1,0),(0,0,1) > = \ 2(0) + 1(0) + 0(1) = 0.$$

Como nenhum desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois restantes, o conjunto

$$\mathcal{P} = \{(2,1,0),(-1,2,0),(0,0,1)\},$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$. Segue que o conjunto

$$\mathcal{P}' = \left\{\frac{1}{||\ (2,1,0)\ ||}(2,1,0), \frac{1}{||\ (-1,2,0)\ ||}(-1,2,0),(0,0,1)\right\},$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. □

Exercício 9. Mostre que se A e B são matrizes ortogonais então AB é também ortogonal.

Demonstração. Sejam A e B matrizes ortogonais. Então $A \cdot A^* = A^* \cdot A = id$ e $B \cdot B^* = B^* \cdot B = id$. Como $(AB)^* = B^* \cdot A^*$, temos que AB é ortogonal, pois

$$AB \cdot (AB)^* = AB \cdot B^* \cdot A^* = id.$$

$\square$

Exercício 10. Determine a e b para que os seguintes operadores sejam auto-adjuntos:

(b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, ax + 4y + bz, 2x - 3y + z)$.

Demonstração. Sabemos que uma matriz A é auto-adjunta se, e somente se, $A = A^*$. Nesse caso, devemos ter

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 4 & b \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, devemos ter $a = 0$ e $b = -3$. $\square$

Exercício 11 . Sejam V um espaço com produto interno e seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Prove que

(b) $Im(T^*) = [Ker(T)]^\perp$.

Demonstração. Provaremos que $Im(T^*)^\perp = Ker(T)$, o que é equivalente a mostrar que $Im(T^*) = [Ker(T)]^\perp$.

$\Rightarrow$ Seja $u \in Ker(T)$. Então $T(u) = 0$. Dado $v \in V$ **qualquer**, segue que

$$0 \ = < T(u), v > = < u, T^*(v) > \Longleftrightarrow u \in Im(T^*)^\perp.$$

$\Leftarrow$ Seja $v \in Im(T^*)^\perp$.Dado $u \in V$ **qualquer**, temos que

$$0 \ = < v, T^*(u) > = < T(v), u > \Longleftrightarrow \ v \in Ker(T).$$

Como $Im(T^*)^\perp = Ker(T)$, temos que $Im(T^*) = [Ker(T)]^\perp$.

$\square$