Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Arleane Gleice de Sousa Bispo
Gleberson Gregorio da Silva Antunes

Oficinas de Matemática básica e outros temas legais

23 de Maio de 2023

Estrutura da apresentação

1. Motivação
2. Conjuntos Enumeráveis
3. Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Motivação

Considere os conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c, d, e\}.$$

É claro que $A \subset B$. É **comum** dizermos que B é maior que A, pois A é um subconjunto de B e B possui elementos que não pertencem a A.

Motivação

Considere os conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c, d, e\}.$$

É claro que $A \subset B$. É **comum** dizermos que B é maior que A, pois A é um subconjunto de B e B possui elementos que não pertencem a A.

Motivação

Considere os conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c, d, e\}.$$

É claro que $A \subset B$. É **comum** dizermos que B é maior que A, pois A é um subconjunto de B e B possui elementos que não pertencem a A.

Motivação

Considere os conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c, d, e\}.$$

É claro que $A \subset B$. É **comum** dizermos que B é maior que A, pois A é um subconjunto de B e B possui elementos que não pertencem a A.

Motivação

Considere os conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c, d, e\}.$$

É claro que $A \subset B$. É **comum** dizermos que B é maior que A, pois A é um subconjunto de B e B possui elementos que não pertencem a A.

Motivação

Considere os conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c, d, e\}.$$

É claro que $A \subset B$. É **comum** dizermos que B é maior que A, pois A é um subconjunto de B e B possui elementos que não pertencem a A.

Motivação

Considere agora os conjuntos

$$C = \{7, 11, 13\} \quad \text{e} \quad D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

É **comum** dizermos que C é menor que D, pois C é um subconjunto de D e D possui elementos que não pertencem a C.

Motivação

Considere agora os conjuntos

$$C = \{7, 11, 13\} \quad \text{e} \quad D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

É **comum** dizermos que C é menor que D, pois C é um subconjunto de D e D possui elementos que não pertencem a C.

Motivação

Considere agora os conjuntos

$$C = \{7, 11, 13\} \quad \text{e} \quad D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

É **comum** dizermos que C é menor que D, pois C é um subconjunto de D e D possui elementos que não pertencem a C.

Motivação

Considere agora os conjuntos

$$C = \{7, 11, 13\} \quad \text{e} \quad D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

É **comum** dizermos que C é menor que D, pois C é um subconjunto de D e D possui elementos que não pertencem a C.

Motivação

Considere agora os conjuntos

$$C = \{7, 11, 13\} \quad \text{e} \quad D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

É **comum** dizermos que C é menor que D, pois C é um subconjunto de D e D possui elementos que não pertencem a C.

Motivação

Podemos pensar desse mesmo modo quando trabalhamos com conjuntos infinitos?

Isto é, dizer que $\mathbb{N}$ é **menor** que $\mathbb{Z}$ ou dizer que $\mathbb{Z}$ é **menor** que $\mathbb{Q}$, com base nos critérios que estabelecemos?

A resposta é: **Não!**

Mostraremos agora que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, possuem o mesmo **"tamanho"**.

Motivação

Podemos pensar desse mesmo modo quando trabalhamos com conjuntos infinitos?

Isto é, dizer que $\mathbb{N}$ é **menor** que $\mathbb{Z}$ ou dizer que $\mathbb{Z}$ é **menor** que $\mathbb{Q}$, com base nos critérios que estabelecemos?

A resposta é: **Não!**

Mostraremos agora que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, possuem o mesmo **"tamanho"**.

Motivação

Podemos pensar desse mesmo modo quando trabalhamos com conjuntos infinitos?

Isto é, dizer que $\mathbb{N}$ é **menor** que $\mathbb{Z}$ ou dizer que $\mathbb{Z}$ é **menor** que $\mathbb{Q}$, com base nos critérios que estabelecemos?

A resposta é: **Não!**

Mostraremos agora que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, possuem o mesmo **"tamanho"**.

Motivação

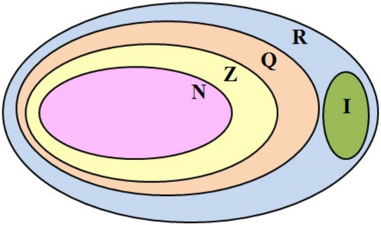
Podemos pensar desse mesmo modo quando trabalhamos com conjuntos infinitos?

Isto é, dizer que $\mathbb{N}$ é **menor** que $\mathbb{Z}$ ou dizer que $\mathbb{Z}$ é **menor** que $\mathbb{Q}$, com base nos critérios que estabelecemos?

A resposta é: **Não!**

Mostraremos agora que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possuem a mesma quantidade de elementos, isto é, possuem o mesmo **"tamanho"**.

Conjuntos enumeráveis



Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Definição 1

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **injetiva** quando, dados $x, y \in X$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Então, f é injetiva pois dados $x, y \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Definição 1

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **injetiva** quando, dados $x, y \in X$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Então, f é injetiva pois dados $x, y \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Definição 1

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **injetiva** quando, dados $x, y \in X$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Então, f é injetiva pois dados $x, y \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Definição 1

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **injetiva** quando, dados $x, y \in X$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Então, f é injetiva pois dados $x, y \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Definição 1

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **injetiva** quando, dados $x, y \in X$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Então, f é injetiva pois dados $x, y \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 2

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **sobrejetiva** quando, para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$. Então, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 2

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **sobrejetiva** quando, para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$. Então, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 2

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **sobrejetiva** quando, para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$. Então, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 2

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **sobrejetiva** quando, para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$. Então, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 2

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **sobrejetiva** quando, para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$. Então, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 3

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **bijetiva** quando é injetiva e sobrejetiva.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 1$. Então, f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Além disso, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 3

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **bijetiva** quando é injetiva e sobrejetiva.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 1$. Então, f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Além disso, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 3

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **bijetiva** quando é injetiva e sobrejetiva.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 1$. Então, f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Além disso, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 3

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **bijetiva** quando é injetiva e sobrejetiva.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 1$. Então, f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Além disso, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 3

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **bijetiva** quando é injetiva e sobrejetiva.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 1$. Então, f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Além disso, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 3

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se **bijetiva** quando é injetiva e sobrejetiva.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 1$. Então, f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

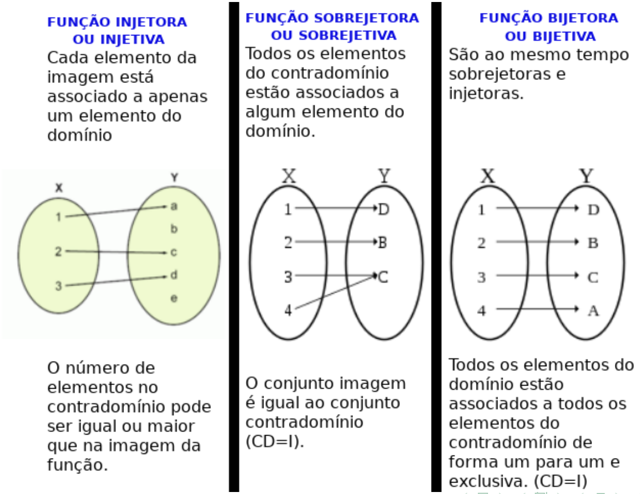
$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 1 = 3y + 1 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y.$$

Além disso, f é sobrejetiva pois dado $y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f\left(\frac{y-1}{3}\right) = y.$$

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

A seguinte imagem pode facilitar o entendimento.



Cardinalidade de um conjunto

Apresentamos agora a definição de cardinalidade de um conjunto. Ela será essencial nessa apresentação.

Definição 4

Sejam X e Y dois conjuntos. Diremos que X e Y **possuem a mesma cardinalidade** quando existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$.

No caso em que X é finito, isto é, está em bijeção com o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, a **cardinalidade de** X será o número natural n, que representa a quantidade de elementos do mesmo.

Cardinalidade de um conjunto

Apresentamos agora a definição de cardinalidade de um conjunto. Ela será essencial nessa apresentação.

Definição 4

Sejam X e Y dois conjuntos. Diremos que X e Y **possuem a mesma cardinalidade** quando existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$.

No caso em que X é finito, isto é, está em bijeção com o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, a **cardinalidade de** X será o número natural n, que representa a quantidade de elementos do mesmo.

Cardinalidade de um conjunto

Apresentamos agora a definição de cardinalidade de um conjunto. Ela será essencial nessa apresentação.

Definição 4

Sejam X e Y dois conjuntos. Diremos que X e Y **possuem a mesma cardinalidade** quando existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$.

No caso em que X é finito, isto é, está em bijeção com o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, a **cardinalidade de** X será o número natural n, que representa a quantidade de elementos do mesmo.

Cardinalidade de um conjunto

Exemplo 5

Sejam $2\mathbb{N} = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ e $2\mathbb{N} - 1 = \{1, 3, ..., 2n - 1, ...\}$ o conjunto dos números pares e dos números ímpares, respectivamente. Então $2\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N} - 1$ possuem a mesma **cardinalidade** pois a aplicação $f : 2\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} - 1$ dada por $f(n) = n - 1$ é uma bijeção.

Até agora os fatos apresentados não são surpreendentes pois é intuitivo pensar que a quantidade de números pares e ímpares é a mesma. Porém, é possível mostrar que a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais pares, que é igual a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais ímpares, é a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números naturais.

Cardinalidade de um conjunto

Exemplo 5

Sejam $2\mathbb{N} = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ e $2\mathbb{N} - 1 = \{1, 3, ..., 2n - 1, ...\}$ o conjunto dos números pares e dos números ímpares, respectivamente. Então $2\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N} - 1$ possuem a mesma **cardinalidade** pois a aplicação $f : 2\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} - 1$ dada por $f(n) = n - 1$ é uma bijeção.

Até agora os fatos apresentados não são surpreendentes pois é intuitivo pensar que a quantidade de números pares e ímpares é a mesma. Porém, é possível mostrar que a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais pares, que é igual a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais ímpares, é a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números naturais.

Cardinalidade de um conjunto

Exemplo 5

Sejam $2\mathbb{N} = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ e $2\mathbb{N} - 1 = \{1, 3, ..., 2n - 1, ...\}$ o conjunto dos números pares e dos números ímpares, respectivamente. Então $2\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N} - 1$ possuem a mesma **cardinalidade** pois a aplicação $f : 2\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} - 1$ dada por $f(n) = n - 1$ é uma bijeção.

Até agora os fatos apresentados não são surpreendentes pois é intuitivo pensar que a quantidade de números pares e ímpares é a mesma. Porém, é possível mostrar que a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais pares, que é igual a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais ímpares, é a mesma quantidade de elementos do conjunto dos números naturais.

Conjuntos enumeráveis

Apresentamos agora a definição de conjunto enumerável.

Definição 6

Um conjunto X é dito **enumerável** quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Mostraremos agora que $2\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

Para tal, considere as aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$.

Conjuntos enumeráveis

Apresentamos agora a definição de conjunto enumerável.

Definição 6

Um conjunto X é dito **enumerável** quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Mostraremos agora que $2\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

Para tal, considere as aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$.

Conjuntos enumeráveis

Apresentamos agora a definição de conjunto enumerável.

Definição 6

Um conjunto X é dito **enumerável** quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Mostraremos agora que $2\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

Para tal, considere as aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$.

Conjuntos enumeráveis

Apresentamos agora a definição de conjunto enumerável.

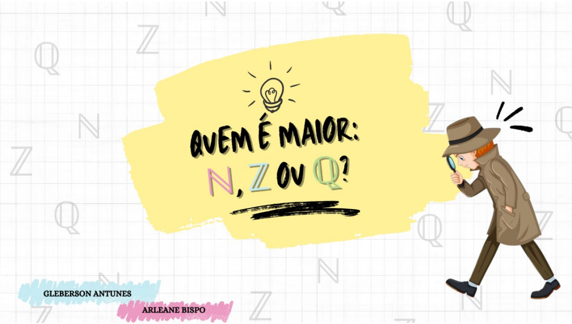
Definição 6

Um conjunto X é dito **enumerável** quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Mostraremos agora que $2\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

Para tal, considere as aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$.

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?



Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Teorema 7

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.

Demonstração.

Afim de que $\mathbb{Z}$ seja enumerável, é preciso que exista uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Para tal, considere a função

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{-(n+1)}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

□

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Teorema 7

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.

Demonstração.

Afim de que $\mathbb{Z}$ seja enumerável, é preciso que exista uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Para tal, considere a função

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{-(n+1)}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Apresentamos agora três teoremas, cujas demonstrações serão omitidas, e que serão essenciais para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema 8

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é um conjunto enumerável.

Demonstração.

Encontra-se em [1], Corolário 1 do Teorema 8, Cap 2. □

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Apresentamos agora três teoremas, cujas demonstrações serão omitidas, e que serão essenciais para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema 8

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é um conjunto enumerável.

Demonstração.

Encontra-se em [1], Corolário 1 do Teorema 8, Cap 2. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Apresentamos agora três teoremas, cujas demonstrações serão omitidas, e que serão essenciais para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema 8

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é um conjunto enumerável.

Demonstração.

Encontra-se em [1], Corolário 1 do Teorema 8, Cap 2. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Teorema 9

Seja X um conjunto enumerável. Se $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva, então Y é enumerável.

Demonstração.

Encontra-se em [1], Teorema 9, Cap 2. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Teorema 9

Seja X um conjunto enumerável. Se $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva, então Y é enumerável.

Demonstração.

Encontra-se em [1], Teorema 9, Cap 2. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Teorema 10

Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável

Demonstração.

Encontra-se em [1], Teorema 10, Cap 2. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Teorema 10

Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável

Demonstração.

Encontra-se em [1], Teorema 10, Cap 2. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Corolário 11

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável

Demonstração.

Considere $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos númerios inteiros não-nulos. Segue do **Teorema 8** que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do **Teorema 10** que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Por fim, considere a aplicação

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}.$$

Como f é sobrejetiva, segue do **Teorema 9** que $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Corolário 11

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável

Demonstração.

Considere $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos númerios inteiros não-nulos. Segue do **Teorema 8** que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do **Teorema 10** que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Por fim, considere a aplicação

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}.$$

Como f é sobrejetiva, segue do **Teorema 9** que $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Corolário 11

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável

Demonstração.

Considere $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos númerios inteiros não-nulos. Segue do **Teorema 8** que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do **Teorema 10** que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Por fim, considere a aplicação

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}.$$

Como f é sobrejetiva, segue do **Teorema 9** que $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Corolário 11

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável

Demonstração.

Considere $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos númerios inteiros não-nulos. Segue do **Teorema 8** que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do **Teorema 10** que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Por fim, considere a aplicação

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}.$$

Como f é sobrejetiva, segue do **Teorema 9** que $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Corolário 11

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável

Demonstração.

Considere $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos númerios inteiros não-nulos. Segue do **Teorema 8** que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do **Teorema 10** que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Por fim, considere a aplicação

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}.$$

Como f é sobrejetiva, segue do **Teorema 9** que $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Quem é maior: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?

Corolário 11

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável

Demonstração.

Considere $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos númerios inteiros não-nulos. Segue do **Teorema 8** que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do **Teorema 10** que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Por fim, considere a aplicação

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}.$$

Como f é sobrejetiva, segue do **Teorema 9** que $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, Vol. 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2019.

[2] RAO, Satish; TSE, David. **Discrete Mathematics and Probably Theory: Note 20**. Disponível em `http://stanford.edu/~dntse/classes/cs70_fall09/n20_fall09.pdf`, 2009. Notas de aula.

Thank You