

# Introdução à Topologia Geral

## Eixo 12: Tópicos especiais de Matemática

Gleberson Gregorio da Silva Antunes

### Resumo

Seja  $X$  um conjunto, uma topologia  $\tau_X$  em  $X$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  que contém o todo, o vazio e é fechada para união arbitrárias e interseções finitas. Neste minicurso, o objetivo é fazer uma breve introdução à Topologia Geral, apresentando conceitos básicos e resultados gerais sobre espaços topológicos e funções contínuas.

**Palavras-chaves:** Topologia; Topologia Geral; Espaços topológicos.

### Introdução

A Topologia enquanto área da Matemática e objeto de estudo, surgiu por volta da século XIX e desde então, têm demonstrado extrema relevância uma vez que possui aplicações em diversas áreas, como por exemplo, no estudo dos Sistemas Dinâmicos e da Geometria Diferencial. Uma topologia em um conjunto  $X$  consiste em uma coleção de subconjuntos de  $X$ , isto é, uma coleção  $\tau_X \subset P(X)$ , o conjunto das partes de  $X$ , que contém o todo, o vazio e é fechada para união arbitrárias e interseções finitas.

Na seção 1 serão introduzidos conceitos básicos Topologia Geral como topologia, espaço topológico, conjuntos abertos e fechados e demonstraremos alguns teoremas. Na seção 2 apresentaremos a definição de base de uma topologia e introduziremos um dos objetos mais importantes no estudo de grupos topológicos, os filtros. Na seção 3 falaremos sobre a continuidade de funções em espaços topológicos tentando generalizar a ideia de continuidade de funções de uma variável real e apresentando algumas demonstrações. Na seção 4 estudaremos a topologia quociente.

## Planejamento

**Pré-requisitos:** Teoria de Conjuntos, Cálculo Diferencial e Álgebra Linear.

**Ementa:** Espaços topológicos. Bases de uma topologia e topologia produto. Funções contínuas e homeomorfismos. Topologia quociente.

**Objetivos:** Definir Espaços Topológicos. Conceituar bases de uma topologia. Estudar a continuidade de funções por meio de abertos. Compreender o que são homeomorfismos. Definir a topologia quociente.

**Metodologia:** Aula expositiva dialogada.

**Carga horária:** 4 horas.

**Materiais necessários:** Datashow e lousa.

## 1 Topologia Geral: Definição e exemplos

Nesta seção, apresentaremos noções básicas de Topologia Geral como topologia, espaço topológico, conjuntos abertos e fechados, fecho, interior, pontos de acumulação, derivado e topologia do subespaço.

**Definição 1.1.** Uma *topologia* em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau_X$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1)  $\emptyset, X \in \tau_X$ .
- (2) Se  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$  é uma família arbitrária de elementos de  $\tau_X$ , então  $U = \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda \in \tau_X$ .
- (3) Se  $U_1, \dots, U_n$  são elementos de  $\tau_X$ , então  $U = \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_X$ .

O par  $(X, \tau_X)$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\tau_X$  é uma topologia em  $X$  é chamado de *espaço topológico*. Os elementos  $U \in \tau_X$  são chamados de *abertos da topologia* ou simplesmente *abertos*. Daremos agora alguns exemplos de topologias.

**Exemplo 1.1.** Seja  $X$  um conjunto e  $P(X)$  o conjunto das partes de  $X$ . Então,  $P(X)$  é uma topologia em  $X$ , chamada de *topologia discreta*.

**Exemplo 1.2.** Seja  $X$  um conjunto e  $I = \{\emptyset, X\}$ . Então,  $I$  é uma topologia em  $X$ , chamada de *topologia caótica*.

**Exemplo 1.3.** Seja  $X = \{a, b, c\}$  e  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ . Então,  $\tau$  é uma topologia em  $X$ .

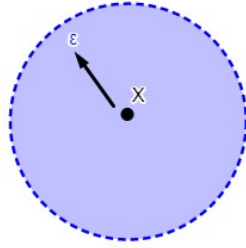
**Exemplo 1.4.** Seja  $X = \mathbb{R}$ . Então,  $\tau_{\mathbb{R}} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists (a, b), a < b, x \in (a, b) \subset U\}$  é uma topologia em  $\mathbb{R}$ , conhecida como *topologia usual* de  $\mathbb{R}$ .



**Figura 1** - Conjunto aberto em  $\mathbb{R}$  munido com a topologia usual.

**Fonte:** Acervo do autor.

**Exemplo 1.5.** Seja  $X = \mathbb{R}^n$ . Então,  $\tau_{\mathbb{R}^n} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists B_\varepsilon(x), x \in B_\varepsilon(x) \subset U\}$  é uma topologia em  $\mathbb{R}^n$ , conhecida como *topologia usual* de  $\mathbb{R}^n$ .



**Figura 2** -  $B_\varepsilon(x)$ : A bola aberta de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$  munido da topologia usual.

**Fonte:** Acervo do autor.

Agora definiremos os conjuntos fechados. Os conjuntos fechados são importantes na Topologia pois são o complementar de um conjunto aberto. Isso nos permite definir novos conjuntos e provar resultados sobre conjuntos abertos sem necessariamente trabalhar com estes.

**Definição 1.2.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $F \subset X$ . Então,  $F$  é dito *fechado* em  $X$  ou simplesmente *fechado* se  $F^c = X - F \in \tau_X$ .

**Exemplo 1.6.**  $\emptyset, X$  são fechados em  $X$  pois  $\emptyset^c = X$  e  $X^c = \emptyset$  são abertos.

**Exemplo 1.7.** Considere  $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$  onde  $\tau_{\mathbb{R}}$  é a topologia usual de  $\mathbb{R}$ . Então, todo intervalo fechado  $[a, b]$  é fechado em  $\mathbb{R}$  pois  $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$ .

**Exemplo 1.8.** Seja  $(X, \tau_X)$  o espaço topológico descrito no Exemplo 1.3. Então, os subconjuntos fechados em  $X$  são:  $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}$ .

**Teorema 1.1.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico. Então:

- (1) A interseção arbitrária de subconjuntos fechados em  $X$  é um subconjunto fechado.
- (2) A união finita de subconjuntos fechados em  $X$  é um subconjunto fechado.

Demonstração: Imediata pelas Leis de DeMorgan.

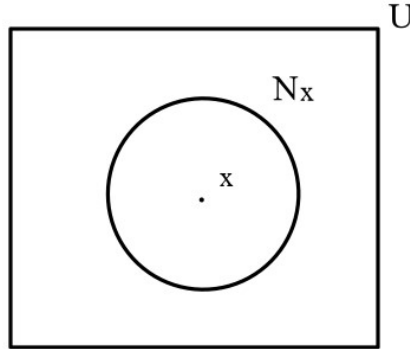
É possível notar que os conjuntos fechados possuem propriedades semelhantes aos abertos da topologia. Isso é verdade pois qualquer afirmação sobre conjuntos abertos é também uma afirmação sobre os conjuntos fechados e mais ainda, pode-se também definir topologia em um conjunto por meio dos conjuntos fechados utilizando este teorema.

**Definição 1.3.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $U \subset X$ . O *interior* de  $U$ , representado por  $\text{int}(U)$  ou  $U^\circ$ , é a união de todos os abertos que estão contidos em  $U$ .

**Definição 1.4.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $U \subset X$ . O *fecho* de  $U$ , representado por  $\bar{U}$  é a interseção de todos os subconjuntos fechados de  $X$  que contém  $U$ .

Alguns autores, quando falam de vizinhanças de um ponto, estão se referindo a um conjunto aberto que contém esse ponto. Utilizaremos uma definição um pouco diferente, que também é correta, e será necessária na seção 5.

**Definição 1.5.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico. Uma *vizinhança* de um ponto  $x \in X$  é um conjunto  $U$  que contém um subconjunto aberto  $N_x$  tal que  $x \in N_x \subset U$ . O conjunto  $N_x$  é chamado de *vizinhança aberta* de  $x$ .



**Figura 3** - Vizinhança de um ponto

**Fonte:** Acervo do autor.

O próximo Teorema é importante pois ele estabelece uma condição para que um subconjunto de um espaço topológico seja aberto relacionando-o com vizinhanças abertas.

**Teorema 1.2** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $U \subset X$ . Então,  $U \in \tau_X$  se, e somente se,  $U$  contém uma vizinhança aberta para cada um dos seus pontos.

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Se  $U$  é aberto então ele é uma vizinhança aberta para cada um dos seus pontos.

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, se  $U$  contém uma vizinhança aberta  $N_x$  para cada um dos seus pontos então

$$U = \bigcup_{x \in U} N_x$$

é aberto, pois é a união arbitrária de abertos.

Decorre deste Teorema que um conjunto é aberto se, e somente se, é igual ao seu interior.

**Definição 1.6.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Um ponto  $x \in X$  é dito um ponto de acumulação de  $A$  se toda vizinhança aberta  $N_x$  de  $x$  é tal que  $(N_x - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ .

**Definição 1.7.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . O *derivado* de  $A$ , representado por  $A'$ , é o conjunto de todos os pontos de acumulação de  $A$ .

**Teorema 1.3.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ .  $A$  é fechado em  $X$  se, e somente se,  $A' \subset A$ .

**Teorema 1.4.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $A \subset X$  não-vazio. Então  $x \in \bar{A}$  se, e somente se, toda vizinhança aberta  $N_x$  de  $x$  intersecta  $A$  não trivialmente.

**Definição 1.8.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . A *topologia subespaço* em  $A$  é definida da seguinte maneira:

$$\tau_A := \{U \subset A \mid U = V \cap A, V \in \tau_X\}$$

**Teorema 1.5.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Então  $\tau_A$  é uma topologia em  $A$ .

## 2 Bases de uma topologia e topologia produto

Nesta seção prepararemos o terreno para iniciar o estudo de grupos topológicos. Definiremos base de uma topologia, a topologia produto e por fim definiremos filtro e base de um filtro.

**Definição 2.1.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico. Uma coleção  $\beta$  de subconjuntos de  $X$ , cujos elementos são chamados de *abertos básicos*, é dita uma *base* para uma topologia em  $X$  se:

$$(1) \bigcup_{B \in \beta} B = X.$$

(2) Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \beta$ , então existe  $B_3 \in \beta$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

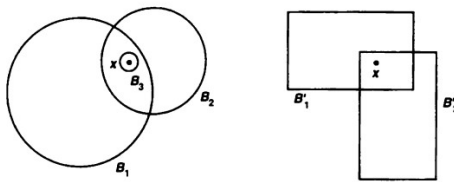
A condição 1 é equivalente a dizer que  $\beta$  cobre  $X$ , isto é, para cada  $x \in X$ , existe  $B \in \beta$  tal que  $x \in B$ . A *topologia gerada* por  $\beta$  é a coleção:

$$\tau_\beta := \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \beta, x \in B \subset U\}.$$

**Exemplo 2.1.** A coleção  $\mathcal{C} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists [a, b), a < b, x \in [a, b) \subset U\}$  gera uma topologia  $\tau_{L\mathbb{R}}$  em  $\mathbb{R}$ , chamada de *topologia da mão esquerda*.

**Exemplo 2.2.** A coleção  $\mathcal{D} = \{V \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in V, \exists (a, b], a < b, x \in (a, b] \subset V\}$  gera uma topologia  $\tau_{R\mathbb{R}}$  em  $\mathbb{R}$  chamada de *topologia da mão direita*.

**Exemplo 2.3** Seja  $\rho$  a coleção de todos os círculos e  $\psi$  a coleção formada pelo interior de todos os retângulos, no plano. Então,  $\rho$  e  $\psi$  são bases de uma topologia no plano.



**Figura 4** -  $\rho$  e  $\psi$  satisfazem a condição ii) do exemplo 2.1

**Fonte:** MUNKRES, 2000, p. 78.

**Definição 2.3.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos quaisquer. A *topologia produto* em  $X \times Y$ , representada por  $\tau_{X \times Y}$ , é a topologia gerada pela base:

$$\beta := \{U \times V \subset X \times Y \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}.$$

Um *filtro* é um objeto matemático que é utilizado para estudar convergência em espaços topológicos. Aqui, porém, não estamos diretamente interessados em convergência.

**Definição 2.4.** Seja  $X$  um conjunto. Uma família não-vazia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  é chamada de filtro se satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .
- (2) Se  $A, B \in \mathcal{F}$  então  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .
- (3) Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subset B$ , então  $B \in \mathcal{F}$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico. Dado  $x \in X$ , chamamos de *filtro de vizinhanças* de  $x$  conjunto  $\mathcal{V} = \{U \subset X \mid \exists N_x \in \tau_X, x \in N_x \subset U\}$  formado por todas as vizinhanças  $U$  de  $x$ .

Assim como uma base de uma topologia gera uma topologia, uma base de um filtro gera um filtro de maneira semelhante.

**Definição 2.5.** Seja  $X$  um conjunto. Uma família não-vazia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  é chamada de *base de um filtro* se satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ .
- (2) Se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

O filtro  $\mathcal{F}$  gerado por  $\mathcal{B}$  é o conjunto:

$$\mathcal{F} = \{U \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B}, B \subset U\}.$$

### 3 Funções contínuas e homeomorfismos

Nesta seção, falaremos sobre a continuidade de funções entre espaços topológicos, definiremos o que são homeomorfismos e apresentaremos algumas proposições que serão úteis na seção 4 e 5. Nosso objetivo é generalizar a ideia de continuidade de funções de uma variável real.

**Definição 3.1** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita contínua se, dado  $U \in \tau_Y$  qualquer,  $f^{-1}(U) \in \tau_X$ .

É fácil ver que essa definição de continuidade que foi apresentada agora, é equivalente a definição de continuidade utilizando  $\epsilon - \delta$ , no caso em que  $\mathbb{R}$  munido da topologia usual é o nosso espaço topológico e estamos falando de funções de uma variável real. Na verdade, trata-se de uma generalização para espaços topológicos mais ou menos abstratos.

**Teorema 3.1.** Sejam  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  e  $(Z, \tau_Z)$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  funções contínuas. Então,  $g \circ f : X \rightarrow Z$  é uma função contínua.

**Teorema 3.2.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e  $A \subset X$ . Então,  $f|_A : A \rightarrow Y$  é uma função contínua.

**Teorema 3.3.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Então, são equivalentes:

- (1)  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua.
- (2) Se  $\beta$  é uma base da topologia  $\tau_Y$  em  $Y$ , então  $f^{-1}(B) \in \tau_X, \forall B \in \beta$ .
- (3)  $\forall x \in X, \forall N_{f(x)} \text{ de } f(x), \exists N_x \text{ de } x \text{ tal que } N_x \subset f^{-1}(N_{f(x)}).$
- (4)  $\forall x \in X, \forall N_{f(x)} \text{ de } f(x), \exists N_x \text{ de } x \text{ tal que } f(N_x) \subset N_{f(x)}.$
- (5) Seja  $U \subset Y$  fechado. Então  $f^{-1}(U)$  é fechado em  $X$ .

**Definição 3.2.** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita contínua em um ponto  $x$  se satisfaz a condição 4 do Teorema 3.3 para um certo  $x$  pertencente a  $X$ .

Obviamente, se  $f$  satisfaz essa condição para todo  $x$  pertencente a  $X$  então  $f$  é na verdade contínua em todo seu domínio.

**Teorema 3.4.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Se  $f$  é contínua então  $f : X \rightarrow f(X) \subseteq Y$  é também contínua.

**Teorema 3.5.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos. Então, as funções:

$$\begin{aligned} p_x : X \times Y &\rightarrow X & p_y : X \times Y &\rightarrow Y \\ (x, y) &\mapsto x & (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

chamadas *projeções*, são contínuas quando  $X \times Y$  está munido com topologia produto.

Demonstração: Seja  $U \in \tau_X$ , então  $p_x^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{X \times Y}$ , logo  $p_x$  é contínua. A continuidade de  $p_y$  se dá de forma análoga.

**Teorema 3.6.** Sejam  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  e  $(Z, \tau_Z)$  espaços topológicos e  $f : Z \rightarrow X \times Y$ . Então,  $f$  é contínua se, e somente se,  $p_x \circ f$  e  $p_y \circ f$  são funções contínuas.

**Teorema 3.7.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos. Então, as funções:

$$\begin{aligned} i_x : X &\rightarrow X \times Y & i_y : Y &\rightarrow X \times Y \\ x &\mapsto (x, y) & y &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

chamadas *aplicações de inclusão*, são contínuas quando  $X \times Y$  está munido da topologia produto.

Demonstração: Segue do Teorema 3.5.

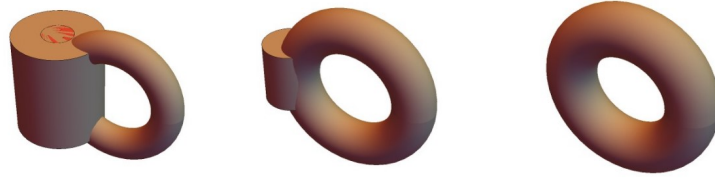
**Definição 3.3.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita um mapa aberto se  $f(U) \in \tau_Y, \forall U \in \tau_X$ . De forma análoga,  $f : X \rightarrow Y$  é dita um mapa fechado se  $f(U) \subset Y$  é fechado,  $\forall U \subset X$  fechado.

**Definição 3.4.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma bijeção  $f : X \rightarrow Y$  contínua cuja inversa é contínua.

**Definição 3.5.** Sejam  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  espaços topológicos. Dizemos que  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  são homeomorfos (denotamos por  $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$ ) se existir um homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ .

**Exemplo 3.1.** Os espaços topológicos  $(\mathbb{R}, \tau_{L\mathbb{R}})$  e  $(\mathbb{R}, \tau_{R\mathbb{R}})$  dos Exemplos 2.1 e 2.2 são homeomorfos.

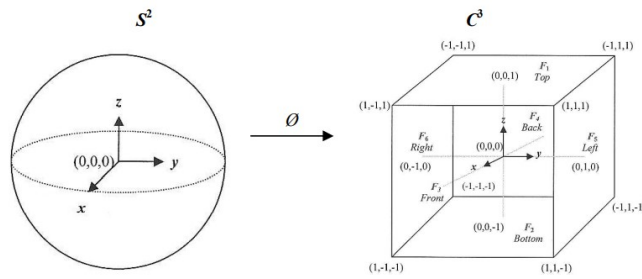
Do ponto de vista da topologia, dois espaços topológicos homeomorfos são equivalentes. Por isso, existe uma piada na comunidade matemática sobre como um topólogo não consegue diferenciar dois objetos simples, como por exemplo, uma caneca de café de uma rosquinha de donuts ou um quadrado de uma circunferência pois esses objetos são homeomorfos.



**Figura 5** - Coffee Mug to Donut

**Fonte:** S. M. Blinder, 2007.

**Exemplo 3.2.** Considere  $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{S}^2})$  a esfera unitária e  $([-1, 1]^3 - (-1, 1)^3, \tau_{[-1, 1]^3 - (-1, 1)^3})$  o cubo unitário, ambos subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ , munidos com a topologia do teorema 1.5. Então, existe um homeomorfismo entre esses dois espaços topológicos.



**Figura 6** - Mapa de  $\mathbb{S}^2$  para  $([-1, 1]^3 - (-1, 1)^3)$

**Fonte:** IDRIS, AHMAD e MAAN, 2014.

**Teorema 3.8.** Uma bijeção  $f : X \longrightarrow Y$  contínua é um homeomorfismo se, e somente se, leva abertos em abertos.

## 4 Topologia quociente

Nesta seção, falaremos sobre a topologia quociente. Nosso objetivo é, dado um espaço topológico  $(X, \tau_X)$  e uma relação de equivalência  $\sim$  em  $X$ , tornar o conjunto quociente de  $X$  por  $\sim$  um espaço topológico.

**Definição 4.1.** Seja  $X$  um conjunto e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Chamamos de *classe de equivalência de  $x$*  o conjunto:

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

**Definição 4.2.** Seja  $X$  um conjunto e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Definimos o *conjunto quociente* de  $X$  por  $\sim$  como o conjunto:

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

Seja então  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico,  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$  e  $X/\sim$  o conjunto quociente de  $X$  por  $\sim$ . Existe uma aplicação natural sobrejetiva, conhecida como *projeção canônica*, dada por:



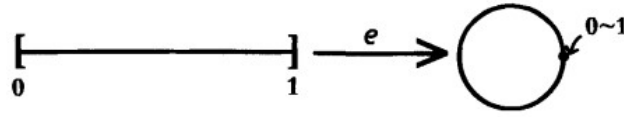
$$\begin{aligned} q : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

**Teorema 4.1.** A coleção:

$$\tau_{X/\sim} := \{U \subset X/\sim \mid q^{-1}(U) \in \tau_X\}$$

é uma topologia, chamada de *topologia quociente*, em  $X/\sim$ .

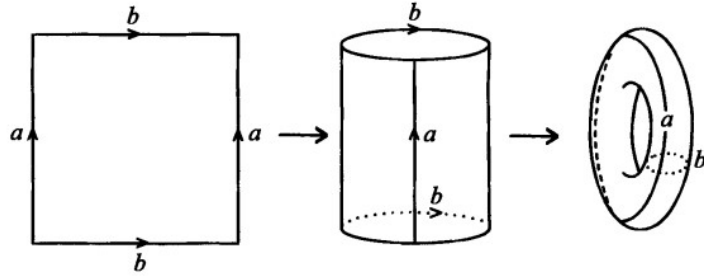
**Exemplo 4.1.** Considere o espaço topológico  $([0, 1], \tau_{[0,1]})$  com a topologia herdada por  $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$  do exemplo 1.4. Defina  $0 \sim 1$  e  $x \sim x \ \forall x \in X \neq 0$ . Então,  $([0, 1]_{/\sim}, \tau_{[0,1]_{/\sim}})$  é homeomorfo a  $(\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$ , o círculo unitário.



**Figura 7** - Representação do homeomorfismo entre  $([0, 1]_{/\sim}, \tau_{[0,1]_{/\sim}})$  e  $(\mathbb{S}^1, \tau_{\mathbb{S}^1})$

**Fonte:** SHICK, 2007, p. 103.

**Exemplo 4.2.** Considere  $([0, 1]^2, \tau_{[0,1]^2})$  o quadrado de lado 1 com a topologia herdada de  $(\mathbb{R}^2, \tau_{\mathbb{R}^2})$  do exemplo 1.5. Defina  $(x, 0) \sim (x, 1)$  e  $(y, 0) \sim (y, 1)$ ,  $\forall x, y \in [0, 1]$ . Então,  $([0, 1]^2_{/\sim}, \tau_{[0,1]^2_{/\sim}}) = \mathbb{T}^2$ , o toro.



**Figura 8** - Construção do Toro

**Fonte:** SHICK, 2007, p. 104.

## 5 Considerações finais

Os resultados sobre Topologia Geral apresentados até agora são básicos porém já dispomos de ferramentas para estudar tópicos mais avançados de Topologia, como por exemplo, invariantes topológicos como a conexidade, conexidade por caminhos e compacidade, axiomas de separação. Os estudos desenvolvidos para a realização deste trabalho se deram em parte pela Orientação à Pesquisa III, componente curricular obrigatório do curso Licenciatura em Matemática da UEFS, onde estudei Topologia Geral por um semestre e Orientação à Pesquisa IV, onde continuei os estudos de Topologia Geral e iniciei o estudo de grupos topológicos.

## 6 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, pelas orientações em Topologia Geral, que foram a base para realização deste trabalho. Agradeço também ao Professor Dr. Marcos Grilo Rosa pelas sugestões, quando este trabalho seria apenas sobre homeomorfismos e que muito me serviram nessa nova organização.

## 7 Referências

IDRIS, Amidora; AHMAD, Tahir; MAAN, Normah. **Homeomorphism between sphere and cube**. Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences, v. 4, n. 2, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. 3<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2014. 297 p.

MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 574 p. Disponível em: <https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0>. Acesso em: 10 set. 2022.

MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

SHICK, Paul L. **Topology: point-set and geometric**. John Wiley Sons, 2011.

S. M. Blinder. **Coffee mug to donut**, 2007. Disponível em: <https://demonstrations.wolfram.com/CoffeeMugToDonut/>. Acesso em: 12 set, 2022.