Análise Matemática - EXA 393

09 de Junho de 2023

Gleberson Antunes

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Caro colega de curso, fico feliz que tenha chegado até essas soluções (Ficaria mais feliz se lerem isso hahaha). Meu nome é Gleberson Antunes e sou o autor dessas soluções (Acho melhor dizer que sou o criador dessa pasta, já que essas soluções não são necessariamente originais). Boa parte delas foram desenvolvidas durante os semestres **2022.2** e **2023.1**, onde fui monitor da disciplina EXA 393 - Análise Matemática, sob supervisão do Professor Dr. Jean Fernandes Barros.

Até então, o objetivo era treinar meus conhecimentos sobre Análise Real e minha digitação no TeX. Acontece que gosto de escrever, e fica aqui uma oportunidade de deixar uma marca no curso (Quem não quer ser lembrado? Hahahaha). Análise é uma disciplina um tanto quanto complicada. Mais do que tudo, é necessário maturidade matemática e muitas horas de estudo.

Isto posto, espero que minhas resoluções ajudem você de alguma maneira. Os pdfs que começam com a letra "E" foram desenvolvidos no semestre **2022.2**. Tome cuidado. Cometi muitos erros crassos durante a escrita deles. Os que começam com a letra "L" foram desenvolvidos no semestre **2023.1** e não vi erros.

Caso tenha dúvidas, não hesite em me enviar um e-mail :) .

Resolução parcial!

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

09 de Outubro de 2022

Lista de exercícios 4

Exercício 1. Seja (s_n) uma sequência em $\mathbb{K}$. Suponha que (s_n) é monótona decrescente em $\mathbb{K}$. Mostre que:

(s_n) é limitada se, e somente se, (s_n) tem uma subsequência limitada.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que (s_n) é uma sequência monótona descrescente limitada. Então, existe $c > 0$ real tal que

$$|s_n| \leq c \, *$$

para todo n pertencente a $\mathbb{N}$. Além disso

$$s_n > s_{n+1}.$$

Seja então $(s_{n'})$ uma subsequência de (s_n) qualquer. Ora, sabemos que $(s_{n'})$ é uma restrição de s a um subconjunto $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$ infinito qualquer. Logo

$$s(\mathbb{N}') \subset s(\mathbb{N})$$

É fácil ver que $s(\mathbb{N})$ é um conjunto limitado pois vale *. Segue que $s(\mathbb{N}')$ é limitado uma vez que é um subconjunto de um conjunto limitado e portanto, $(s_{n'})$ é uma subsequência limitada.

$(\Leftarrow)$ Seja $(s_{n'})$ uma subsequência limitada de (s_n), onde (s_n) é uma sequência monótona descrescente. Então, existe $d > 0$ real tal que

$$|s_{n'}| \leq d \, **$$

para todo n' pertencente a $\mathbb{N}'$. Obviamente, dado n' pertencente a $\mathbb{N}'$ qualquer, existe n pertencente a $\mathbb{N}$ tal que

$$n' < n$$

Logo

$$s_n < s_{n'} \leq d$$

por **. Logo, (s_n) é uma sequência limitada.

Exercício 2. Seja (s_n) uma sequência em $\mathbb{K}$. Mostre que (s_n) é uma sequência convergente se, e somente se, para cada k pertencente a $\mathbb{N}$, (s_{n+k}) é uma sequência convergente.

$(\Rightarrow)$ Seja (s_n) uma sequência convergente. Então, existe a pertencente a $\mathbb{K}$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n > n_0 \Rightarrow |s_n - a| < \varepsilon$$

Dado k pertencente a $\mathbb{N}$, considere a subsequência (s_{n+k}). Note que $n_0 < n_0 + k$. Assim

$$n + k > n_0 + k \Rightarrow n + k > n_0 \Rightarrow |s_{n+k} - a| < \varepsilon.$$

Portanto, (s_{n+k}) é uma sequência convergente.

Exercício 3. Seja (s_n) uma sequência em $\mathbb{K}$. Suponha que (s_n) tem limite $a \in \mathbb{K}$. Mostre que a sequência $(|s_n|)$ é convergente e tem limite $|a|$. Pergunta-se: Vale a recíproca ? Justifique.

Demonstração:

Sendo (s_n) convergente então existe n_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$n > n_0 \Rightarrow |s_n - a| < \varepsilon$$

Tome então o mesmo n_0. Daí

Ver desigualdades envolvendo módulo.

$$n > n_0 \Rightarrow ||s_n| - |a|| \leq |s_n - a| < \varepsilon$$

Portanto, $(|s_n|)$ é convergente.

A recíproca não vale. Considere a sequência $(|s_n|)$ cujo termo geral é dado por $|s_n| = |-1|^n$. Essa sequência converge porém a sequência (s_n) cujo termo geral é dado por $s_n = -1^n$ não converge.

Exercício 4. Seja (s_n) uma sequência em $\mathbb{K}$. Mostre que (s_n) converge e tem limite 0 se, e somente se, $(|s_n|)$ converge e tem limite 0.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que (s_n) é uma sequência convergente e tem limite 0. Então existe n_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$n > n_0 \Rightarrow ||s_n| - 0| = |s_n - 0| < \varepsilon$$

Portanto, $(|s_n|)$ converge para 0.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $(|s_n|)$ é uma sequência convergente e tem limite 0. Então, existe n_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$n > n_0 \Rightarrow |s_n - 0| = ||s_n| - 0| = |s_n| < \varepsilon$$

Vocês vão provar esse Teorema em aula.

Portanto, (s_n) converge para 0.

Teorema 1 (Teorema do valor médio). Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em (a,b). Então, existe algum ponto c em (a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corolário 1. $|\sin x| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

(1) Se x = 0 não há o que provar.

(2) Se $x \neq 0$ então, pelo Teorema do valor médio, existe c entre (0,x) tal que

$$\cos c = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

Ora, sabemos que $|\cos x| \leq 1$ para todo x em $\mathbb{R}$. Logo

$$\frac{|\sin x|}{|x|} = |\cos c| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\sin x| \leq |x|$$

para todo x em $\mathbb{R}$.

Exercício 5. Seja $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $s_n = \sin\frac{1}{n}$. Mostre que a sequência é convergente.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Então

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\sin\frac{1}{n} - 0| \leq \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Exercício 6. Seja $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $s_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$. Mostre que a sequência (s_n) é convergente.

Demonstração:

Ora, sabemos que a sequência $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{1}{n}$$

é convergente e tem limite igual a 0. Por outro lado, sabemos pelo Exercício 5 que a sequência (b_n) definida por

$$b_n = \sin\frac{1}{n}$$

converge e tem limite igual a 0. Desse modo

$$\lim\ (a_n \cdot b_n) = \lim\ (s_n) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Teorema 2. Se $\lim\ (x_n) = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada, então $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Vimos esse mesmo resultado para funções (algo mais geral) em cálculo I.

Demonstração:

Sendo (y_n) uma sequência limitada, então existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$. Por outro lado, sendo $\lim\ (x_n) = 0$, existe n_0 em $\mathbb{N}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{c}$$

Desse modo

$$|x_n|{\cdot}|y_n| = |x_n \cdot y_n| \leq \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Exercício 7. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\frac{cos(nx)}{n}$. Mostre que (s_n) é convergente.

Demonstração: Análoga ao Exercício 6.

Ora, sabemos que a sequência $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{1}{n}$$

é convergente e tem limite igual a 0. Por outro lado, sabemos que a sequência (b_n) definida por

$$b_n = \cos(nx)$$

é limitada pois $|\cos(nx)| \leq 1$. Segue do Teorema 2 que

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(s_n) = 0.$$

Esse fato também vale para o módulo do seno. Vocês podem ter uma ideia mais geométrica olhando o gráfico da função seno e cosseno no geogebra.

Exercício 8. Seja (s_n) uma sequência tal que (s_{2n}) e (s_{2n-1}) são subsequências convergentes de (s_n), e têm limite $a \in \mathbb{K}$. Mostre que (s_n) é convergente e têm limite a.

Demonstração:

Sendo (s_{2n}) convergente, então existe m_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$2n > m_0 \Rightarrow |s_{2n} - a| < \varepsilon$$

Da mesma maneira, sendo (s_{2n-1}) convergente então existe p_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$2n - 1 > p_0 \Rightarrow |s_{2n-1} - a| < \varepsilon$$

Tome então $n_0 = \text{máx}\{m_0, p_0\}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$

$$n > n_0 \Rightarrow |s_n - a| < \varepsilon.$$

Exercício 9. Seja (s_n) uma sequência convergente em $\mathbb{K}$, cujo limite é um elemento não-nulo de $\mathbb{K}$. Mostre que, para n suficientemente grande, os termos da sequência (s_n) são todos não-nulos, e têm o mesmo sinal do limite.

Demonstração:

(1) Suponhamos $a = \lim(s_n) > 0$. Tome então $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Logo, vai existir n_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |s_n - a| < \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < s_n < \frac{3a}{2}.$$

Ou seja, a partir de n_0, s_n é sempre maior do que zero, logo têm o mesmo sinal de a.

(2) Suponhamos que $a = \lim(s_n) < 0$. Tome então $\varepsilon = - a$. Logo, vai existir n_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que

como a < 0, - a > 0.

$$n > n_0 \Rightarrow |s_n - a| < - a \Leftrightarrow 2a < s_n < 0.$$

Ou seja, a partir de n_0, s_n é sempre menor do que zero, logo têm o mesmo sinal de a.

Exercício 10. Sejam (s_n) e (t_n) sequências convergentes em $\mathbb{K}$, cujo os limites são a e b, respectivamente. Mostre que:

(a) Se, para n suficientemente grande, $s_n \leq t_n$, então $a \leq b$.

(b) Se, para n suficientemente grande, $s_n \geq c$, então $a \geq c$.

(c) Se $a = b$ e, para n suficientemente grande, $s_n \leq u_n \leq t_n$ *** então (u_n) converge e tem limite a.

Teorema do Confronto para sequências. Vimos no curso de cálculo I uma versão mais geral.

Demonstração:

(a) Por contraposição, suponhamos $a > b$. Então, $a - b = \lim(s_n) - \lim(t_n) = \lim(s_n - t_n) > 0$. Segue do Exercício 9 que para todo n suficiente grande

$$s_n - t_n > 0 \Leftrightarrow s_n > t_n.$$

(b) Por contraposição, suponhamos $a < c$. Então, tomando $\varepsilon = c - a$, vai existir n_0 pertencente a $\mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |s_n - a| < c - a \Leftrightarrow - c + 2a < s_n < c \Rightarrow s_n < c.$$

(c) Dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 e p_0 naturais tais que

$$n > m_0 \Rightarrow |s_n - a| < \varepsilon$$

e

$$n > p_0 \Rightarrow |t_n - a| < \varepsilon$$

Tome $n_0 = \text{máx}\{m_0, p_0\}$. Assim

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < s_n < a + \varepsilon$$

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < t_n < a + \varepsilon$$

De *** segue que

$$a - \varepsilon < s_n \leq u_n \leq t_n < a + \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Portanto, (u_n) é uma sequência convergente, cujo limite é a.

Resolução parcial!

Resolução parcial!

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

29 de Setembro de 2022

1 Avaliação 1

Exercício 1. Determine o conjunto solução em $\mathbb{K}$ da inequação

$$1 < |x| + |x - 1|$$

Demonstração:

1) Se x $\in (-\infty, 0)$ não há o que provar, pois a inequação é satisfeita.

2) Se x $\in [0, 1]$ então a inequação nunca é satisfeita.

3) Se x $\in (1, \infty)$ então a inequação é sempre satisfeita.

Logo, o conjunto solução da inequação é

$$S = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Exercício 2. Dado p $\in \mathbb{N}$, com p $\geq$ 2, considere o conjunto

$$X = \left\{\tfrac{1}{p^n} : n \in \mathbb{N}\right\}. \text{ Mostre que:}$$

(a) X é limitado em $\mathbb{Q}$.

(b) inf X = 0 e sup X = $\frac{1}{p}$.

Demonstração:

(a) De fato, X é limitado em $\mathbb{Q}$.

Perceba que 0 é uma cota inferior de X pois

$$0 < \frac{1}{p^n}$$

para todo n pertencente aos naturais. Da mesma maneira, $\frac{1}{p}$ é uma cota superior de X pois

$$\tfrac{1}{p^n} \leq \tfrac{1}{p}$$

para todo n pertencente aos naturais.

(b) Suponhamos que a = inf X seja maior que 0 e que a é um número racional. Como $\mathbb{Q}$ é arquimediano então o subconjunto $\mathbb{N}$ dos naturais contido em $\mathbb{Q}$ é ilimitado superiormente, logo existe um certo n em $\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{a} - 1 < (p - 1)n \Rightarrow \frac{1}{a} < (p - 1)n + 1.$$

Ora, pela desigualdade de Desigualdade de Bernoulli

$$\frac{1}{a} < (p - 1)n + 1 \leq ((p - 1) + 1)^n = p^n$$
$$\Rightarrow a > \frac{1}{p^n}$$

Portanto, $0 = \inf X$. Obviamente $\sup X = \frac{1}{p}$ pois

$$\frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{p}$$

e, como sabemos, $\frac{1}{p}$ é o elemento máximo de X.

Exercício 3. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas.

(a) Mostre que $fg : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $fg(x) = f(x)g(x)$ é uma função limitada.

(b) Mostre que $fg(X) \subset f(X)g(X)$.

(c) Mostre que se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções limitadas positivas, então $\sup(fg) \leq \sup f \sup g$ e $\inf fg \geq \inf f \inf g$.

(d) Mostre que as funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

tem-se $\sup (fg) \leq \sup f \sup g$ e $\inf fg \geq \inf f \inf g$.

Demonstração:

(a) Sendo $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas, vai existir c e d reais, com $c > 0$ e $d > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq c$$
$$|g(x)| \leq d$$
$$\Rightarrow |fg(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq cd$$

Portanto, $fg : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada.

(b) Seja $z \in fg(X)$. Então, vai exister algum x em X tal que

$$z = fg(x)$$

Por definição

$$z = fg(x) = f(x)g(x)$$
$$\Rightarrow z \in f(X)g(X).$$

Portanto,

$$fg(X) \subset f(X)g(X)$$

(c) Primeiramente, note que a letra (a) nos garante que $f(X)g(X)$ é um subconjunto limitado pois cada um dos seus elementos é limitado, portanto, faz sentido que exista um supremo e um ínfimo para este conjunto, pois é um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado. Como era de se esperar, $fg(X)$ é limitado e portanto possui supremo e ínfimo, pois é um subconjunto de um conjunto limitado.

É fácil ver que

$$\inf fg \leq fg(x)$$

para todo $fg(x)$ em $fg(X)$. Ora, como $fg(X)$ é um subconjunto de $f(X)g(X)$ então

$$\inf f \inf g \leq fg(x)$$

para todo $fg(x)$ em $fg(X)$. Segue que $\inf f \inf g \leq \inf fg$.

De forma análoga, temos que

$$fg(x) \leq \sup fg$$

para todo $fg(x)$ em $fg(X)$. Como sabemos, $fg(X)$ é um subconjunto de $f(X)g(X)$ então

$$fg(x) \leq \sup f \sup g$$

para todo $fg(x)$ em $fg(X)$. Segue que $\sup fg \leq \sup f \sup g$.

(d) É claro que 1 é igual ao $\sup f$ que é igual ao $\sup g$ e $\frac{1}{2}$ é igual ao infímo de f que é igual ao ínfimo de g. Considere a função $fg(x)$ definida conforme o enunciado. Temos então dois casos:

1) $x \geq 0$.

$$fg(x) = f(x)g(x) = \tfrac{1}{2}$$

2) $x < 0$.

$$fg(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})g(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}$$

Desse modo

$$\inf f \ \inf g = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \inf fg$$

e

$$\sup fg = \frac{1}{2} < 1 = \sup f \ \sup g.$$

Lema 1. Sejam x e y números reais. Se x $\leq$ y + ϵ para todo $\epsilon > 0$ então x $\leq$ y.
Demonstração: Por contraposição, suponhamos y $<$ x. Então

$$0 < \mathrm{x - y}$$

Tome então $\epsilon = \frac{x-y}{2}$. Desse modo, existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$\mathrm{x} > \mathrm{y} + \epsilon$$

De fato

$$\mathrm{x} > \mathrm{y} + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$$

pois

$$\mathrm{2x - x - y} > 0$$

Portanto, o Lema é verdadeiro.
Exercício 4. Seja Y um conjunto não vazio limitado de números reais. Mostre que

$$\sup \mathrm{Y} - \inf \mathrm{Y} = \sup\{|\mathrm{x - y}| \mid \mathrm{x} \in \mathrm{Y}, \mathrm{y} \in \mathrm{Y}\}.$$

Demonstração: Definimos

$$\mathrm{A} := \{|\mathrm{x - y}| \mid \mathrm{x} \in Y, \mathrm{y} \in \mathrm{Y}\}$$

Sejam x, y elementos de Y. É claro que

$$\mathrm{x} \leq \sup \mathrm{Y} \text{ e } \inf \mathrm{Y} \leq \mathrm{y}$$
$$\Rightarrow \mathrm{x - y} \leq \sup \mathrm{Y} - \inf \mathrm{Y}$$

Por outro lado

$$\inf Y \leq x \text{ e } y \leq \sup Y$$
$$\Rightarrow y - x = -(x - y) \leq \text{Sup } Y - \inf Y$$
$$\Leftrightarrow |x - y| \leq \sup Y - \inf Y$$

Portanto

$$\sup A \leq \sup Y - \inf Y$$

Sabemos, pela questão 5 da lista avaliativa avaliativa 1, que dado $\epsilon > 0$, existe x em Y tal que sup Y - $\frac{\epsilon}{2} < x \leq$ sup Y e y em Y tal que inf Y $\leq y <$ inf Y + $\frac{\epsilon}{2}$. Daí

$$\sup Y - \inf Y - \epsilon = \sup Y - \frac{\epsilon}{2} - (\inf Y + \frac{\epsilon}{2}) < x - y \leq |x - y| \leq \sup A$$
$$\Rightarrow \sup Y - \inf Y \leq \sup A + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue do **Lema 1** que

$$\sup Y - \inf Y \leq \sup A$$

Logo, sup Y - inf Y = sup A = sup$\{|x - y| \mid x \in Y, y \in Y\}$.

Exercício 5. Seja s : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $s_n = cos\frac{n\pi}{2}$.

(a) Mostre que (s_n) é limitada.

(b) Mostre que (s_n) não é monótona.

Demonstração:

(a) Como $n \in \mathbb{N}$, temos duas opções: Ou n é par ou n é ímpar. Analisaremos os dois casos.

1) Suponhamos n par. Assim, existe q inteiro tal que n = 2q. Segue que

$$(s_n)_{n \in 2\mathbb{N}} = cos\frac{n\pi}{2} = cos\frac{2q\pi}{2} = \cos q\pi = (-1)^q$$

2) Suponhamos n ímpar. Assim, existe q inteiro tal que n = 2q + 1. Segue que

$$(s_n)_{n \in 2\mathbb{N}+1} = cos\frac{n\pi}{2} = cos\frac{(2q+1)\pi}{2} = 0$$

Como não nos resta mais opções, temos que

$$-1 \leq s_n \leq 1$$

para todo n natural. Portanto, (s_n) é uma sequência limitada.

(b) Note que $s_4 = 1$, $s_5 = 0$ e $s_6 = -1$. Assim

$$s_4 \leq s_5 \not\Rightarrow s_4 \leq s_6$$

Resolução par-
cial!

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

13 de Setembro de 2022

1 Lista de exercícios 1

Exercício 1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado.

(a) Dados a, b, c, d $\in \mathbb{K}$ com c, d > 0. Mostre que se $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, então

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$

(b) Dados a, b $\in \mathbb{K}$, com b $\neq 0$, mostre que

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Demonstração:

(a) Ora,

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \Rightarrow \text{ad} < \text{bc}.$$

Isso é possível pois tanto c quanto d são maiores que zero. Logo, o produtdo cd é maior que 0. Daí, se segue que

$$\text{ad} + \text{ac} < \text{bc} + \text{ac} = \text{a(c + d)} < \text{c(a + b)} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d}.$$

Por outro lado,

$$\text{ad} + \text{bd} < \text{bc} + \text{bd} = \text{d(a + b)} < \text{b(c + d)} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$

Portanto,

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$

(b)

Primeiramente, note que, dado b maior que zero

$$1 = |\text{b}|\cdot\frac{1}{|b|}$$

Por outro lado,

$$1 = |1| = |\text{b} \cdot \text{b}^{-1}| = |\text{b}| \cdot |b^{-1}|$$

Pela lei do corte da multiplicação, temos que

$$|\mathrm{b}| \cdot \frac{1}{|b|} = |\mathrm{b}| \cdot |b^{-1}|$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|b|} = |b^{-1}|$$

Dessa maneira, temos que

$$\left|\frac{a}{b}\right| = |\mathrm{ab}^{-1}| = |\mathrm{a}||\mathrm{b}^{-1}| = |\mathrm{a}|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Exercício 2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dados a, b $\in \mathbb{K}$, mostre que:

(a) Para todo x $\in \mathbb{K}$, tem-se que

$$|\mathrm{x} - \mathrm{a}| + |\mathrm{x} - \mathrm{b}| \geq |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$

(b) Para todo x $\in \mathbb{K}$, tem-se que

$$|\ |\mathrm{x} - \mathrm{a}| + |\mathrm{x} - \mathrm{b}|\ | \leq |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$

Demonstração:

(a) Sabemos, pelas propiedades de valor absoluto, que dado x $\in \mathbb{K}$ temos que

$$|\mathrm{a} - \mathrm{b}| \leq |\mathrm{a} - \mathrm{x}| + |\mathrm{x} - \mathrm{b}| = |\mathrm{x} - \mathrm{a}| + |\mathrm{x} - \mathrm{b}|$$
$$\Rightarrow |\mathrm{a} - \mathrm{b}| \leq |\mathrm{x} - \mathrm{a}| + |\mathrm{x} - \mathrm{b}|$$
$$\Leftrightarrow |\mathrm{x} - \mathrm{a}| + |\mathrm{x} - \mathrm{b}| \geq |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$

(b) De forma análoga,

$$|\mathrm{x} - \mathrm{a}| \leq |\mathrm{x} - \mathrm{b}| + |\mathrm{b} - \mathrm{a}|$$
$$\Rightarrow |\mathrm{x} - \mathrm{a}| - |\mathrm{x} - \mathrm{b}| \leq |\mathrm{b} - \mathrm{a}|$$
$$\Rightarrow |\mathrm{x} - \mathrm{a}| - |\mathrm{x} - \mathrm{b}| \leq |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$

Note que

$$|\mathrm{x} - \mathrm{b}| \leq |\mathrm{x} - \mathrm{a}| + |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$
$$\Rightarrow |\mathrm{x} - \mathrm{b}| - |\mathrm{x} - \mathrm{a}| = -\ (\ |\mathrm{x} - \mathrm{a}| - |\mathrm{x} - \mathrm{b}|\ ) \leq |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$

Ora, sabemos que $|\mathrm{x}| \leq \mathrm{a} \Leftrightarrow \mathrm{x} \leq \mathrm{a}$ e $-\mathrm{x} \leq \mathrm{a}$ pois $|\mathrm{x}| = \max \{\mathrm{x}, -\mathrm{x}\}$. Como $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ satisfaz essa mesma condição, temos que

$$|\ |\mathrm{x} - \mathrm{a}| - |\mathrm{x} - \mathrm{b}|\ | \leq |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$$

Exercício 3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado.

(a) Mostre que, dados a, b, $\epsilon \in \mathbb{K}$, com $\epsilon > 0$, se |a - b| $< \epsilon$, então

$$a < |b| + \epsilon$$

(b) Mostre que, dados a, b $\in \mathbb{K}$, se |a - b| $< \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, então a = b.

Demonstração:

(a)

$$|a - b| < \epsilon \Leftrightarrow - \epsilon < a - b < \epsilon \Rightarrow - \epsilon - b < a < \epsilon + b$$

Como

$$|b| = \text{máx}\{b, -b\}$$

Temos que

$$a < \epsilon + b \leq \epsilon + |b|$$
$$\Rightarrow a < \epsilon + |b|$$

(b) Por contraposição, suponhamos a $\neq$ b. SPG, considere a $<$ b, então tome

$$\epsilon = \frac{|b - a|}{2}$$

Logo, $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $\epsilon <$ |b - a|.

Exercício 4. Mostre que um corpo ordenado é completo se, e somente se, todo subconjunto não-vazio limitadado inferiormente tem ínfimo.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e Y $\subset$ $\mathbb{K}$ um subconjunto não-vazio limitado inferiormente.

Desse modo $\exists k \in \mathbb{K}$ tal que

$$k \leq y, \forall\ y \in Y.$$

Sendo assim

$$-k \geq -y$$

Então, o conjunto

$$-Y = \{-y \mid y \in Y\}$$

é um subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente. Como $\mathbb{K}$ completo, -Y possui um supremo a. Observe que

$$-y \leq a \Rightarrow -a \leq y, \forall\, y \in Y.$$

Seja então b em $\mathbb{K}$ tal que - a < b $\Rightarrow$ - b < a. Como a = sup (-Y), $\exists y_0 \in$ Y tal que -b $< -y_0 \leq$ a $\Rightarrow$ - a $\leq y_0 < b$. Portanto, -a = inf Y.

($\Leftarrow$) Análogo a ida.

Exercício 5. Seja X $\subset \mathbb{R}$, com X $\neq \emptyset$.

(a) Se X é limitado superiormente, mostre que, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que sup X - $\epsilon < x_0 \leq$ sup X.

(b) Se X é limitado inferiormente, mostre que, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que inf X $\leq x_0 <$ inf X + ϵ .

Demonstração:

(a) Suponhamos por absurdo que, dado $\epsilon > 0$, não existe $x_0 \in X$ tal que sup X - $\epsilon < x_0$. Então

$$x \leq \sup X - \epsilon, \forall x \in X.$$

Assim, sup X - ϵ é uma cota superior de X menor que sup X. Absurdo! .

(b) De forma análoga, suponhamos por absurdo que, dado $\epsilon > 0$, não existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 <$ inf X + ϵ. Então

$$\inf X + \epsilon \leq x\ , \forall x \in X.$$

Assim, inf X + ϵ é uma cota inferior de X maior que inf X. Absurdo!.

Lema 1.1 Sejam x, y $\in \mathbb{Z}$, x > 1, y > 1 e s $\in \mathbb{N}$. Se x $\nmid$ y então $x^s \nmid y^s$.

Demonstração:

Pelo T.F.A, $\exists\ p_1^{n_1}, ..., p_r^{n_r},\ p_1^{m_1}, ..., p_r^{m_r}$ primos, tais que x = $p_1^{n_1} \cdot .... \cdot p_r^{n_r}$ e y = $p_1^{m_1} \cdot .... \cdot p_r^{m_r}$. Como x $\nmid$ y então existe algum $p_i^{n_i}$ que é tal que $p_i^{n_i} \mid$ x e $p_i^{n_i} \nmid$ y $\Rightarrow$ $p_i^{s(n_i)} \mid x^s$ e $p_i^{s(n_i)} \nmid y^s \Rightarrow x^s \nmid y^s$.

Exercício 6. Mostre que, dados n, m $\in \mathbb{N}$, se $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Se fosse verdade que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, então existem p, q $\in \mathbb{Z}$ com mdc(p, q) = 1 tais que

$$\sqrt[n]{m} = \tfrac{p}{q} \Rightarrow p^n = mq^n \Rightarrow q^n \mid p^n$$

Mas, mdc(p, q) = 1, isto é, q $\nmid$ p e portanto $q^n \nmid p^n$ pelo **Lema 1.1**. Logo $\sqrt[n]{m}$ $\in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercício 7. Seja X $= \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Mostre que:

(a) X é limitado em $\mathbb{Q}$.

(b) inf X $= 0$ e sup X $= 1$.

Demonstração:

(a) De fato, X é limitado em $\mathbb{Q}$.

Perceba que 0 é uma cota inferior de X pois, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{1}{n}$$

e 1 é uma cota superior de X pois, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tfrac{1}{n} \leq 1$$

(b) Como $\mathbb{Q}$ é arquimediano, se supormos que inf X > 0 então vai existir n $\in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} <$ inf X. Obviamente, $1 =$ sup X, pois $1 \in$ X e $\frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício 8. Dado p $\in \mathbb{N}$, com p ≥ 2, considere o conjunto

$$\text{X} = \left\{\tfrac{1}{p^n} : n \in \mathbb{N}\right\}. \text{ Mostre que:}$$

(a) X é limitado em $\mathbb{Q}$.

(b) inf X $= 0$ e sup X $= \frac{1}{p}$.

Demonstração:

(a) De fato, X é limitado em $\mathbb{Q}$.

Perceba que 0 é uma cota inferior de X pois, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{1}{p^n}$$

e 1 é uma cota superior de X pois, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 - \tfrac{1}{p^n} = \tfrac{p^n \; - \; 1}{p^n} > 0.$$

(b) Suponhamos que a $=$ inf X > 0, a $\in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ é ilimitado superiormente, existe n $\in \mathbb{N}$ tal que

$$\tfrac{1}{a} \text{ - } 1 < (\text{p - }1)\text{n} \Rightarrow \tfrac{1}{a} < (\text{p - }1)\text{n} + 1.$$

Ora, pela desigualdade de Desigualdade de Bernoulli

$$\frac{1}{a} < (p - 1)n + 1 \leq ((p - 1) + 1)^n = p^n$$
$$\Rightarrow a > \frac{1}{p^n}$$

Portanto, 0 = inf X. Obviamente, sup X = $\frac{1}{p}$ pois, $\frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{p}$ $\forall$n $\in \mathbb{N}$, e $\frac{1}{p}$ é um elemento de X.

Exercício 9. Seja X $\subset \mathbb{R}$, com X $\neq \emptyset$ limitado

(a) Mostre que todo subconjunto de X não-vazio é limitado.

(b) Se $\emptyset \neq Y \subset X$, mostre que inf X $\leq$ inf Y $\leq$ sup Y $\leq$ sup X.

Demonstração:

(a) Suponhamos por absurdo que existe $\emptyset \neq Y \subset X$ ilimitado. Então, não existem a, b $\in \mathbb{R}$ tal que a $\leq$ y $\leq$ b, $\forall$ y $\in$ Y. Ora, sendo X limitado, existem c, d $\in \mathbb{R}$ que são tais que c $\leq$ x $\leq$ d, $\forall$ x $\in$ X. Como Y $\subset$ X, c $\leq$ y $\leq$ d, $\forall$ y $\in$ Y. Absurdo! pois Y é ilimitado.

Como vimos anteriormente, todo subconjunto não-vazio de um conjunto limitado é limitado e, como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, todo subconjunto não-vazio limitado possui um supremo e um ínfimo em $\mathbb{R}$. Logo, X e Y possuem supremo e ínfimo.

(b) Sejam a, c $\in \mathbb{R}$, a = inf X e c = inf Y. Então, c $\leq$ y, $\forall$ y $\in \mathbb{R}$. Ora, a $\leq$ y, $\forall$ y $\in \mathbb{R}$, logo a $\leq$ c. De forma análoga, sejam b, d $\in \mathbb{R}$, a = sup X e d = sup Y. Então, temos que y $\leq$ d, $\forall$ y $\in \mathbb{R}$. Mas, y $\leq$ b, $\forall$ y $\in \mathbb{R}$, logo d $\leq$ b. Como inf Y $\leq$ sup Y, temos que

$$\text{inf X} \leq \text{inf Y} \leq \text{sup Y} \leq \text{sup X}$$

Exercício 10. Sejam X, Y $\subset \mathbb{R}$ não-vazios.

(a) Suponha que, dados x $\in$ X e y $\in$ Y, tem-se x $\leq$ y.

(i) Mostre que sup X $\leq$ inf Y

(ii) Mostre que sup X = inf Y se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existem $x_0 \in$ X e $y_0 \in$ Y tais que y_0 - $x_0 < \epsilon$.

(b) Suponha que X e Y são limitados superiormente.

(i) Mostre que o conjunto X + Y = {x + y | x $\in$ X, y $\in$ Y} é limitado superiormente.

(ii) Mostre que sup (X + Y) = sup X + sup Y.

Demonstração:

(a)

(i) É claro que X é um subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{R}$ e Y é um subconjunto limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ pois, dados x $\in$ X e y $\in$ Y, tem-se x $\leq$ y. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, X possui um supremo a e Y possui um ínfimo b em $\mathbb{R}$. Note que, dado y $\in$ Y, x $\leq$ y $\forall$ x $\in$ X $\Rightarrow$ sup X $\leq$ y $\leq$ inf Y. Portanto,

$$\text{sup X} \leq \text{inf Y}$$

(ii)

($\Rightarrow$)

Sabemos pela questão (5) que, sendo X limitado superiormente, Y limitado inferiormente e dado $\epsilon > 0$, $\exists$ $y_0 \in Y$ tal que

$$x \leq \sup X \text{ e } y_0 \leq \inf Y + \epsilon, \forall x \in X.$$

Como sup X = inf Y, temos que

$$y_0 - x < \sup X + \epsilon - \sup X$$
$$y_0 - x < \epsilon$$

($\Leftarrow$)

Se sup X < inf Y então teríamos

$$x \leq \sup X < \inf Y \leq y$$
$$\Rightarrow \inf Y - \sup X \leq y - x$$

$\forall$ x $\in$ X e $\forall$ y $\in$ Y. Tome então ϵ = inf Y - sup X. Então, por hipótese, existem $y_0 \in$ Y e $x_0 \in$ X tais que

$$y_0 - x_0 < \epsilon$$

Absurdo! pois inf Y - sup X $\leq y_0 - x_0$. Logo, sup X = inf Y.

(b)

(i)

Como X e Y são conjuntos limitados, $\exists$ a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, com a < b, c < d que são tais que X $\subset$ [a, b] e Y $\subset$ [c, d]. Desse modo, dados x $\in$ X e y $\in$ Y, temos que

$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d$$
$$\Rightarrow a + c \leq x + y \leq b + d$$

Portanto, X + Y = $\{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ é limitado superiormente.

(ii)

X + Y é um subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{R}$, que é ordenado completo, logo X + Y possui um supremo em $\mathbb{R}$. Como x $\leq$ sup X e y $\leq$ sup Y, temos

$$x + y \leq \sup X + \sup Y \Rightarrow \sup (X + Y) \leq \sup X + \sup Y$$

Note que

$$x + y \leq \sup (X + Y) \Rightarrow x \leq \sup (X + Y) - y$$

Logo, $\sup (X + Y) - y$ é uma cota superior de X, para todo $x \in X$ e cada $y \in Y$. Assim, temos que $\sup X \leq \sup (X + Y) - y$.

Por outro lado,

$$\sup X \leq \sup (X + Y) - y \Rightarrow y \leq \sup (X + Y) - \sup X$$

Dessa forma, $\sup (X + Y) - \sup X$ é uma cota superior de Y, para todo $y \in Y$ e cada $x \in X$. Então, $\sup Y \leq \sup (X + Y) - \sup X \Rightarrow \sup X + \sup Y \leq \sup (X + Y)$

Concluímos que

$$\sup (X + Y) = \sup X + \sup Y$$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

18 de Dezembro de 2022

Gabarito - Avaliação III

Exercício 1. Seja X $\subset \mathbb{R}$ e a um ponto isolado de X. Mostre que toda função definida em X é contínua em a.

Demonstração. Ver observação 2 do capitulo 7 (Funções Contínuas) de Curso de Análise vol. 1.

$\square$

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 + 1}$. Mostre que existe uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi|_{\mathbb{R}-\{-1,1\}} = f$.

Demonstração. Ora, sabemos que as funções racionais são contínuas em todos os pontos em que são definidas. Portanto, f é descontínua em $x = 1$ e $x = -1$. Logo estamos trabalhando com uma descontinuidade removível. Considere a função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = f(x)$, se $x \neq 1$ e $x \neq -1$, se $x = 1$ então $\phi(1) = 1$ e se $x = -1$ então $\phi(-1) = 0$. Note que ϕ é contínua em todos os seus pontos pois

$$\lim_{x \to 1^+} \phi(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \phi(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \phi(1) = 1$$

$$\lim_{x \to -1^+} \phi(x) = \lim_{x \to -1^+} \phi(x) = \lim_{x \to -1^-} \phi(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \phi(-1) = 0$$

Além disso, $\phi|_{\mathbb{R}-\{-1,1\}} = f$.

$\square$

Teorema 1. A composta de duas funções contínuas é contínua.

Demonstração. Ver Teorema 6 do capítulo 7 (Funções Contínuas) de Curso de Análise vol. 1.

$\square$

Exercício 3. Mostre que a função $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua. Conclua que a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ é contínua.

Demonstração. Mostraremos que f é contínua em 0. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon^2$. Assim

$$0 < |x \text{ - } 0| < \epsilon^2 \Rightarrow |x| < \epsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|\ x\ |} = |\sqrt{x}| = |\sqrt{x} - 0| = |f(x) - 0| < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

Portanto, f é contínua em 0. Mostraremos agora que f é contínua em todo ponto $a \in (0, \infty)$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon \cdot \sqrt{a}$. Assim

$$\begin{gathered} 0 < |x-a| < \epsilon \cdot \sqrt{a} \Rightarrow \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \\ = \frac{|(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a}|)}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} = |\sqrt{x}-\sqrt{a}| \cdot \frac{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \\ \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{\epsilon \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \epsilon. \end{gathered}$$

Desse modo, f é contínua. Ora, sabemos que a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 1 + x^2$ é contínua pois é uma função polinomial. Note que h($\mathbb{R}$) $\subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Segue do **Teorema 1** que $f \circ h = g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

□

Teorema 2. Para que $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$ para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

Demonstração. Ver Teorema 4 do capítulo 7 (Funções Contínuas) de Curso de Análise vol. 1.

□

Teorema 3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então a função $(f-g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração. Ver Teorema 5 do capítulo 7 (Funções Contínuas) de Curso de Análise vol. 1.

□

Exercício 4. Um subconjunto F $\subset \mathbb{R}$ é dito fechado se, o limite de toda sequência convergente em F pertence a F, isto é, se (x_n) em F é tal que $x_n \to a$ então $a \in$ F. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ é fechado. Conclua que se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas então o conjunto F $= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\ \}$ é fechado

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que Z_f não é fechado. Então existe uma sequência (z_n) de pontos de Z_f tal que $z_n \to a$ e $a \notin Z_f$. Como f é contínua então, pelo **Teorema 2**, temos que $\lim f(z_n) = 0 = f(a)$. Portanto, $a \in Z_f$. Pelo **Teorema 3** temos que a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$ é contínua. Então o conjunto F $= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\ \} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\ \}$, o conjunto dos pontos em que h é zero. Pelo resultado anterior, F é fechado.

□

Definição 1.1. Um subconjunto D de $\mathbb{R}$ é dito denso quando $\bar{D} = \mathbb{R}$ (o fecho de D é igual a $\mathbb{R}$). Isto significa dizer que o menor conjunto fechado que contém D é a própria reta real $\mathbb{R}$ ou equivalentemente, significa dizer que D está espalhado pela reta real, logo dado qualquer intervalo (a,b), com a < b, podemos encontrar x $\in D \cap (a,b)$.

Exercício 5. Seja D um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(x) = 0$, para todo $x \in$ D, mostre que f é identicamente nula.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Como D é denso em $\mathbb{R}$ então para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in$ D tal que $x_\delta \in$ D $\cap$ $(x - \delta, x + \delta)$. Montaremos agora uma sequência de elementos de D que converge para x. Tome $\delta = 1$ então existe $x_1 \in$ D tal que $x_1 \in$ D $\cap$ $(x - 1, x + 1)$. Prossigamos, por recursão, da seguinte maneira: Tomaremos para cada $n \in \mathbb{N}, x_n \in D \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ tal que $x_n < x_{n+1}$. Note que essa sequência é monótona e limitada, portanto converge e possui $\lim x_n = x$. Como a função f é contínua, segue do **Teorema 1** que $\lim f(x_n) = 0 = f(x)$. Portanto, f é identicamente nula.

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

15 de Março de 2023

Exercício 1. Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

i. $X \supset A$ e $X \supset B$.

ii. Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$.

Prove que $X = A \cup B$.

Demonstração. Facilmente verificamos que $A \cup B$ satisfaz as condições i e ii. Suponhamos agora que existe um conjunto Z que também satisfaz essas duas condições. Então

$$Z \supset A \cup B$$

pelo item ii. Por outro lado,

$$A \cup B \supset Z$$

também pelo item ii. Logo, só pode

$$Z = A \cup B.$$

□

Exercício 12. Dada a função $f : A \longrightarrow B$:

i. Prove que se tem $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$ sejam quais forem X e Y contidos em A.

ii. Mostre que se f for injetiva então $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A.

Demonstração.

i. Seja $z \in f(X) - f(Y)$. Então $z \in f(X)$ e $z \notin f(Y)$. Assim, existe $x \in X$ tal que

$$f(x) = z$$

e não existe $y \in Y$ tal que

$$f(y) = z.$$

Logo, não pode $x \in Y$, portanto, $x \in X - Y$, desse modo

$$f(x) = z \in f(X - Y).$$

ii. Ora, sabemos que

$$X - Y = X \cap (A - Y)$$

Então

$$f(X - Y) = f(X \cap (A - Y))$$

Segue da injetividade de f que

$$f(X \cap (A - Y)) = f(X) \cap f((A - Y))$$

Notemos o seguinte:

$$f(X) - f(Y) = f(X) \cap (B - f(Y))$$

Então, dado $z \in f(A - Y)$, temos que

$$z \neq f(y)$$

para todo $y \in Y$, logo

$$z \in B - f(Y)$$

Portanto

$$f(X - Y) \subset f(X) - f(Y)$$

Como a outra inclusão se verifica por i, temos que

$$f(X - Y) = f(X) - f(Y)$$

$\square$

Exercício 13. Mostre que a função $f : A \longrightarrow B$ é injetiva se, e somente se, $f(A - X) = f(A) - f(X)$ para todo $X \subset A$.

Demonstração. Sabemos pelo **Exercício 12** que se f é injetiva e X e Y são subconjuntos quaisquer de A então

$$f(X - Y) = f(X) - f(Y).$$

Em particular

$$f(A - X) = f(A) - f(X)$$

pois A é subconjunto de si mesmo. $\square$

Exercício 14. Dada a função $f : A \longrightarrow B$, prove:

i. $f^{-1}(f(X)) \supset X$ para todo $X \subset A$.

ii. f é injetiva se, e somente se, $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A$.

Demonstração.

i. Seja $x \in X$. Existe $b \in B$ tal que $f(x) = b$. Segue que

$$x \in f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{b\}) \subset f^{-1}(f(X)).$$

Logo, $x \in f^{-1}(f(X))$.

ii.

$\Rightarrow$ Suponhamos que f seja injetiva, então, dados $x, x' \in A$ distintos, os subconjuntos unitários $\{f(x)\}$, $\{f(x')\} \subset B$ são tais que

$$\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \emptyset$$

e

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\} \text{ e } f^{-1}(\{f(x')\}) = \{x'\}.$$

Segue que, dado $X \subset A$ qualquer, temos que

$$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\bigcup_{x \in X} \{f(x)\}) = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(\{f(x)\}) = \bigcup_{x \in X} \{x\} = X.$$

$\Leftarrow$ Suponhamos que, dados $x, x' \in A$, tenhamos

$$\{f(x)\} = \{f(x')\}$$

então $f(x) = f(x')$. Segue que

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\} = \{x'\} = f^{-1}(\{f(x')\})$$

então $x = x'$, logo f é injetiva.

$\square$

Exercício 15. Dada $f : A \longrightarrow B$, prove:

i. Para todo $Z \subset B$, tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.

ii. f é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(Z)) = Z$ para todo $Z \subset B$.

Demonstração.

i. Seja $y \in f(f^{-1}(Z))$. Então existe $x \in f^{-1}(Z)$ tal que $f(x) = y$. Segue que

$$y \in f(\{x\}) \subset Z.$$

Logo, $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.

ii.

$\Rightarrow$ Suponhamos que f seja sobrejetiva. Então, dado $z \in Z$, temos que

$$f^{-1}(\{z\}) \neq \emptyset.$$

Além disso,

$$f(f^{-1}(\{z\})) = \{z\}.$$

Segue que

$$f(f^{-1}(Z)) = f(\bigcup_{z \in Z} f^{-1}(\{z\})) = \bigcup_{z \in Z} f(f^{-1}(\{z\})) = \bigcup_{z \in Z} \{z\} = Z.$$

$\Leftarrow$ Dado $z \in Z$, seja $\{z\} \subset B$. Então

$$f(f^{-1}(\{z\})) = \{z\}$$

Como $f(\emptyset) = \emptyset$, deve existir algum $x \in A$ tal que $f(x) = z$, logo f é sobrejetiva. □

Exercício 16. Dada uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

i. Para todo $\lambda \in L$, tem-se $X \supset A_\lambda$.

ii. Se $Y \supset A_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, então $Y \supset X$.

Prove que, nestas condições, tem-se $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Demonstração. Análoga a demonstração do **Exercício 2**.

□

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

25 de Março de 2023

Exercício 1. Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto infinito enumerável. Consideremos o conjunto das partes finitas de X, isto é, *o conjuntos de todos os subconjuntos não-vazios de X que são finitos*, denotemo-no por $\mathcal{P}_F(X)$. Observemos que $\mathcal{P}_F(X) \subset \mathcal{P}(X)$. Definamos sobre $\mathcal{P}_F(X)$ a seguinte relação:

$$A \sim B \text{ se, e somente se } \#A = \#B.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Utilizaremos o fato de que a relação "="é uma relação de equivalência.

i . $A \sim A$.

Seja $A \in \mathcal{P}_F(X)$. Então, de fato, $A \sim A$ pois

$$\#A = \#A.$$

ii. Se $A \sim B$ então $B \sim A$.

Sejam $A, B \in \mathcal{P}_F(X)$. Se $A \sim B$ então

$$\#A = \#B.$$

Segue que

$$\#B = \#A$$

Logo, $B \sim A$, como queríamos.

iii. Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}_F(X)$ tais que $A \sim B$ e $B \sim C$. Então

$$\#A = \#B$$

e

$$\#B = \#C.$$

Logo

$$\#A = \#C.$$

E, portanto, $A \sim C$, como queríamos. Concluímos que "$\sim$" é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}_F(X)$.

$\square$

Agora, dado $A \in \mathcal{P}_F(X)$, consideremos $\overline{A}$ a classe de equivalência de representante A. Sendo assim, a família $\{\overline{A} \mid A \in \mathcal{P}_F(X)\}$ é uma partição de $\mathcal{P}_F(X)$. Definamos a função $\phi : \mathcal{P}_F(X)/\sim \longrightarrow \mathbb{N}$ por $\phi(\overline{A}) = \#A$. **Mostre que ϕ é uma bijeção**.

Demonstração. Inicialmente, verificaremos que ϕ é bem definida.

i . ϕ é bem-definida.

Sejam $A, B \in \mathcal{P}_F(X)$. Se $A \sim B$ então

$$f(\overline{A}) = \#A = \#B = f(\overline{B}).$$

ii . ϕ é injetiva.

Sejam $\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{P}_F(X)/\sim$. Se

$$f(\overline{A}) = \#A = f(\overline{B}) = \#B$$

então $A \sim B$, logo $\overline{A} = \overline{B}$, portanto, f é injetiva.

iii. ϕ é sobrejetora.

Sejam n um número natural qualquer e $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow X$ uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e X. Como X é infinito enumerável, existe algum elemento $x_n \in X$ tal que $\alpha(n) = x_n$. Considere o conjunto I_n formado por todos os números naturais menores ou iguais a n. Segue então que

$$\phi(\overline{I_n}) = n.$$

Concluímos que ϕ é uma bijeção.

$\square$

Exercício 2. Sejam $X \neq \emptyset$ e a função $f : X \longrightarrow X$. Como $f(X) \subset X$, podemos definir indutivamente $f^1 = f$ e $f^{n+1} = f \circ f^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que um subconjunto A de X é $f-$estável se $f(A) \subset A$. Obsermemos que X sempre tem dois subconjuntos $f-$estáveis, que são $\emptyset$ e X.

Dado $x_0 \in X$, consideremos o conjunto

$$O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0), ...\}$$

denominado *a órbita de x_0 por f*. Um ponto $x_0 \in X$ é dito *periódico* se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0)$. O menor número natural n_0 **(sempre existe!)** tal que x_0 é periódico é dito *o período de x_0*.***Observe que $O_f(x_0)$ é f-estável*** .

(a) ***Mostre que se $x_0 \in X$ é um ponto periódico, então a órbita de x_0 é um conjunto finito de X. Neste caso, quantos elementos tem a órbita de x_0? Justifique.***

(b) ***Mostre que se f é injetiva, mas não é sobrejetiva, dado $x_0 \in X - f(X)$, então a órbita de x_0 é um conjunto infinito enumerável.***

(c) ***Mostre que X é finito se, e somente se, existe uma função f tal que os únicos subconjuntos f-estáveis de X são $\emptyset$ e X.***

Demonstração.

(a). Sejam $x_0 \in X$ um ponto periódico de f e $n_0 \in \mathbb{N}$ o menor númeral natural tal que $f^{n_0}(x_0) = x_0$. Afirmamos que $\#O_f(x_0) = n_0$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : I_{n_0} &\longrightarrow O_f(x_0) \\ n &\longmapsto f^n(x_0). \end{aligned}$$

i ϕ é injetiva.

Sejam $m, n \in I_{n_0}$. Se

$$f^m(x_0) = f^n(x_0)$$

então existe $h \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^h(f^m(x_0)) = f^h(f^n(x_0)) = x_0$$

Assim

$$\begin{aligned} m + h = n_0 &= n + h \\ \Rightarrow m &= n. \end{aligned}$$

Logo, f é injetiva.

ii. ϕ é sobrejetora.

Seja $f^n(x_0) \in O_f(x_0)$. Se o índice n for menor que n_0 então $n \in I_{n_o}$ e

$$\phi(n) = f^n(x_0).$$

Se n for maior que n_0 então, o algoritimo da divisão euclidiana nos garante que

$$n = n_0 q + r$$

onde $0 \leq r < n_0$. Segue que

$$\phi(r) = f^r(x_0) = f^r(f^{n_0}(x_0)) = f^r(f^{n_0 q}(x_0)) = f^{n_0+q}(x_0).$$

Desse modo, ϕ é uma bijeção e $\#O_f(x_0) = n_0$.

(b.) Notemos o seguinte: Como X é $f-$estável, temos que

$$f(X) \subset X \Rightarrow f^2(X) = f(f(X)) \subset f(X) \subset X.$$

Indutivamente

$$f^n(X) \subset f(X) \; *$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_0 \in X - f(X)$ então x_0 não é um ponto periódico de f. De fato, como $x_0 \notin f(X)$ então $x_0 \notin f^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que vale *.

Considere agora a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{N} &\longrightarrow O_f(x_0) \\ n &\longmapsto f^n(x_0). \end{aligned}$$

i. α é injetiva. (Provaremos uma equivalência, isto é, provaremos que os elementos de $O_f(x_0)$ são dois a dois distintos, por indução).

O caso $n = 1$ é verdade. De fato, $x_0 \neq f(x_0)$, pois $x_0 \notin f(X)$. Como f é injetiva, segue que

$$f(x_0) \neq f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n, isto é, $f^n(x_0) \neq f^{n+1}(x_0)$**. Se fosse verdade que

$$f^{n+1}(x_0) = f^{n+2}(x_0).$$

Então, seguiria da injetividade de f que

$$f(f^n(x_0)) = f(f^{n+1}(x_0)) \Rightarrow f^n(x_0) = f^{n+1}(x_0).$$

Absurdo por **. Logo, dados $m, n \in \mathbb{N}$ distintos, temos que $\alpha(n) = f^n(x_0) \neq f^m(x_0) = \alpha(m)$. Portanto, α é injetiva.

ii. α é sobrejetiva.

De fato, dado $f^n(x_0) \in O_f(x_0)$, tome $n \in \mathbb{N}$. Então $\alpha(n) = f^n(x_0)$, como queríamos.

Concluímos que α é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $O_f(x_0)$. Desse modo, a órbita de x_o é um conjunto infinito enumerável.

(c.)

$\Rightarrow$ Suponhamos que $X = \{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto finito. Definamos a aplicação

$$\alpha(x) = \begin{cases} x_{n+1}, & \text{se } 1 \leq x \leq n-1 \\ x_1, & \text{se } x = n \end{cases}$$

Como X é finito, existe uma bijeção $\rho : I_n \longrightarrow X$ tal que $\rho(n) = x_n$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f = \rho \circ \alpha : X &\longrightarrow X \\ x_n &\longmapsto x_{n+1}. \end{aligned}$$

Afirmamos que, com exceção dos subconjuntos $\emptyset$ e X, nenhum outro é $f-$estável. Seja

$$\{x_{ik}, ..., x_{ij}\}$$

um subconjunto próprio não-vazio de X com os índices ordenados. Então

$$f(\{x_{ik}, ..., x_{ij}\}) \not\subset \{x_{ik}, ..., x_{ij}\}$$

pois $f(x_{ij}) = x_{ij+1} \notin \{x_{ik}, ..., x_{ij}\}$.

$\Leftarrow$ Por contraposição, suponhamos que X é infinito. Dado $x_0 \in X$, considere

$$O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0), ...\}$$

a órbita de x_0. Note que não se pode

$$O_f(x_0) \neq X$$

pois então, $O_f(x_0)$ seria um conjunto $f-$estável próprio e não-vazio de X e, como sabemos, os únicos subconjuntos f-estáveis de X são $\emptyset$ e X. Sendo assim, nos resta

$$O_f(x_0) = X.$$

Então, deve existir algum número natural n tal que $f^n(x_0) = x_0$. Segue do item (a) da Questão 2 que X é finito.

Concluímos que X infinito é um absurdo.

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

28 de Março de 2023

Para resolver essa questão, utilizaremos dois lemas.

Lema. $f^n(x_0) \notin f^{n+1}(X), \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por indução, considere o caso $n = 1$. Então

$$f(x_0) \notin f^2(X),$$

pois, caso pertencesse, seguiria da injetividade de f que

$$f(x_0) = f(f(x)) = f^2(x) \Rightarrow x_0 = f(x),$$

para algum $x \in X$, mas, $x_0 \in X - f(X)$. Suponha que a afirmação é válida para um certo n maior que 1, isto é,

$$f^n(x_0) \notin f^{n+1}(X). \; *$$

Ou seja, $f^n(x_0) \neq f^{n+1}(x)$, para todo $x \in X$. Então, caso

$$f^{n+1}(x_0) \in f^{n+2}(X),$$

existiria algum $x \in X$ tal que $f^{n+1}(x_0) = f^{n+2}(x)$. Segue da injetividade de f que

$$f(f^n(x_0)) = f(f^{n+1}(x)) \Rightarrow f^n(x_0) = f^{n+1}(x).$$

Absurdo por *.

□

Lema 2. Fixado $g \in \mathbb{N}$, temos que $f^g(x_0) \notin f^{g+n}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $g \in \mathbb{N}$ qualquer. Por indução, o caso $n = 1$ se verifica pelo **Lema 1**, uma vez que

$$f^g(x_0) \notin f^{g+1}(X).$$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n maior que 1, isto é

$$f^g(x_0) \notin f^{g+n}(X).$$

Então, caso

$$f^g(x_0) \in f^{g+(n+1)}(X),$$

existiria algum $x \in X$ tal que

$$f^g(x_0) = f^{g+(n+1)}(x).$$

Mas isso é absurdo, pois

$$f^{n+1}(X) \subset f^n(X)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, como $f(X)$ é f-estável, temos que

$$f^g(f^{n+1}(X)) = f^{g+(n+1)}(X) \subset f^g(f^n(X)) = f^{g+n}(X),$$

e $f^g(x_0) \notin f^{g+n}(X)$, portanto, não pode pertencer a $f^{g+(n+1)}(X)$.

□

(b). Mostre que se f é injetiva, mas não é sobrejetiva, dado $x_0 \in X - f(X)$, então a órbita de x_0 é um conjunto infinito enumerável.

Demonstração. Considere agora a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{N} &\longrightarrow O_f(x_0) \\ n &\longmapsto f^n(x_0). \end{aligned}$$

1. α é injetiva.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$. Então $m = n + r$, onde $r \geq 1$. Se fosse verdade que

$$f^m(x_0) = f^n(x_0),$$

então seguiria que

$$f^m(x_0) = f^r(f^n(x_0)) = f^n(x_0),$$

ou seja, $f^n(x_0)$ é um ponto periódico da função f. Sendo assim, a órbita de $f^n(x_0)$ é um conjunto finito.

Seja r_0 o menor número natural (que existe por conta do Princípio da Boa Ordenação) tal que

$$f^{r_0}(x_0) = f^n(x_0).$$

Observe o seguinte: $r_0 > n \geq 1$ (estritamente maior) pois segue do **Lema 1** que $f^n(x_0) \neq f^{n+1}(x_0)$.

Como $r_0 < 2r_0$, segue que $r_0 - 1 < 2r_0 - 1$. Pelo **Lema 1** e **Lema 2**, concluímos que

$$f^{r_0-1}(x_0) \notin f^{2r_0-1}(X),$$

ou seja, $f^{r_0-1}(x_0) \neq f^{2r_0-1}(x_0)$ ** . Mas

$$f(f^{r_0-1}(x_0) = f^{r_0}(x_0) = f^n(x_0) = f(f^{2r_0-1}(x_0) = f^{2r_0}(x_0).$$

Absurdo, por $**$. Logo, f não poderia ser injetiva.

Concluimos que $f^m(x_0) = f^n(x_0) \Rightarrow m = n$, logo α é injetiva.

2. α é sobrejetora.

Dado $f^n(x_0) \in O_f(x_0)$, tome $n \in \mathbb{N}$. Então $\alpha(n) = f^n(x_0)$. $\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

28 de Março de 2023

(b). Mostre que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b < mc$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $c < b$. Então $1 \leq c < b$. Tome $m = b+1$. Note que

$$b < (b+1)c,$$

pois

$$bc + c - b = b(c-1) + c \geq 0.$$

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

25 de Abril de 2023

Exercício 4. Sejam $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ corpos. Uma função $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ chama-se um *homomorfismo* quando se tem $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$.

i. Dado um homomorfismo $f : K \longrightarrow L$, prove que $f(0) = 0$.

ii. Prove também que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, ou então $f(1) = 1$ e f é injetivo.

Lema 1. Sejam $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ corpos e $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ um homomorfismo tal que $f(1) = 1$. Dado $x \in \mathbb{K}$ não-nulo, temos que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{K}$ não-nulo. Então

$$1 = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) \cdot f(x^{-1}).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $f(x)^{-1}$, segue que

$$f(x)^{-1} = f(x^{-1}).$$

$\square$

Demonstração.

i. Ora, sabemos que $0 = 0 + 0$. Então

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0).$$

Ou seja,

$$f(0) = f(0) + f(0).$$

Somando $(-f(0))$ em ambos os lados da igualdade, tem-se que

$$f(0) + (-f(0)) = f(0) + f(0) + (-f(0)).$$
$$0 = f(0),$$

como queríamos provar.

ii. Ora, sabemos que $x = x \cdot 1$. Então

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1).$$

Note que

$$f(x) - f(x) \cdot f(1) = f(x)[1 - f(1)] = 0.$$

Como $\mathbb{K}$ é um corpo e, portanto, é um *domínio de integridade*, temos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$ ou $f(1) = 1$.

Provaremos agora que, quando $f(1) = 1$, f é injetiva. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ tais que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x - y) = 0.$$

Se fosse verdade que $z = x - y \neq 0$ então seguiria do **Lema 1** que

$$f(z) \cdot f(z)^{-1} = 1.$$

Mas, $f(z) = f(x - y) = 0$. Desse modo,

$$f(z) \cdot f(z)^{-1} = 0 \cdot f(z)^{-1} = 0.$$

O que é absurdo! Logo, $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

$\square$

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ um homomorfismo. Prove que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ ou então $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Trata-se de um caso particular do **Exercício 4.**

$\square$

Lema 2. Sejam X um conjunto finito e $f : X \longrightarrow X$ uma função. Então f é injetiva se, e somente se, f é sobrejetiva.

Demonstração. Encontra-se em <https://l1nq.com/DSiUm>.

$\square$

Exercício 8. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto onde são válidos todos os axiomas de corpo, salvo a existência de inverso multiplicativo.

i. Dado $a \neq 0$ em $\mathbb{K}$, prove que a função $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $f(x) = ax$ é uma bijeção se, e somente se, a possui inverso.

ii. Mostre que f é injetiva se, e somente se, vale a lei do corte para a.

iii. Conclua que, se $\mathbb{K}$ é finito, a lei do corte é equivalente à existência de inverso para cada elemento não-nulo de $\mathbb{K}$.

Demonstração.

i.

$\Rightarrow$ Suponhamos por absurdo que $a \in \mathbb{K}$ não possui inverso. Então não existe $b \in \mathbb{K}$ tal que

$$a \cdot b = b \cdot a = 1. \; *$$

Como $1 \in \mathbb{K}$ (Por causa dos axiomas do corpo) e, como f é bijeção, existe $x \in \mathbb{K}$ tal que

$$f(x) = 1 = ax.$$

Mas isso é absurdo por *, uma vez que x seria o inverso de a.

$\Leftarrow$ Suponhamos que a possui inverso. Considere a aplicação $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(x) = ax$.

Note que f é injetiva. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{K}$ tais que

$$f(x) = f(y)$$

$$\Leftrightarrow ax = ay$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por a^{-1}, temos que

$$a^{-1}ax = a^{-1}ay \Rightarrow x = y. \ **$$

Notemos também que f é sobrejetiva. Dado $y \in \mathbb{K}$, temos que

$$y = f(a^{-1}y).$$

Logo, f é uma bijeção, como queríamos provar.

ii.

$\Rightarrow$ Suponhamos que f seja injetiva. Se não valesse a lei do corte para a, existiriam $x, y \in \mathbb{K}$ tais que

$$ax = ay \Rightarrow x \neq y.$$

Mas isso é absurdo, pois sendo f injetiva, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

$\Leftarrow$ Suponhamos que valha a lei do corte para a. Então, dados $x, y \in \mathbb{K}$, temos que

$$ax = ay \Rightarrow x = y.$$

Logo, f é injetiva.

iii. Suponhamos que $\mathbb{K}$ é finito.

$\Rightarrow$ (Por contraposição) Seja $a \in \mathbb{K}$ não-nulo, que não possui inverso multiplicativo. Então, o item i nos garante que a aplicação

$$\begin{aligned} \text{f} : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto ax, \end{aligned}$$

não é bijetiva. Suponhamos agora, por absurdo, que vale a lei do corte em $\mathbb{K}$. Então o item ii nos garante que f é injetiva. Seguiria então do **Lema 2** que f é uma bijeção, o que é absurdo!

$\Leftarrow$ Segue do passo **.

$\square$

Exercício 14. Seja a um elemento de um corpo ordenado $\mathbb{K}$. Definamos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}$ pondo $f(n) = a^n$. Prove que f é crescente se $a > 1$, decrescente se $a < 1$ e constante se $a = 1$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $1 < a$. Note que

$$1 < a < a^2 < ... < a^n < ...,$$

basta multiplicar a desigualdade $1 < a$ por a, n vezes. Isso traduz o seguinte fato: Para todo n natural, temos que $1 < a^n$ ***. Provaremos agora que f é crescente, isto é, se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n < m$. Então $m = n + h$, onde $1 \leq h$, $h \in \mathbb{N}$. Segue que $a^n < a^m$ pois

$$a^m - a^n = a^{(n+h)} - a^n = a^n \cdot a^h - a^n = a^n(a^h - 1).$$

Como vale ***, temos que $1 < a^h \Leftrightarrow 0 < a^h - 1$. Assim

$$0 < a^n(a^h - 1) \Leftrightarrow a^n < a^m.$$

Logo, f é crescente.

Suponhamos agora que $a < 1$. Note que

$$... < a^n < ... < a^2 < a < 1,$$

basta multiplicar a desigualdade $a < 1$ por a, n vezes. Isso traduz o seguinte fato: Para todo n natural, temos que $a^n < 1$ ****.Provaremos agora que f é descrescente, isto é, se $x < y$ então $f(x) > f(y)$.

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n < m$. Então $m = n + h$, onde $1 \leq h$, $h \in \mathbb{N}$. Segue que $a^n > a^m$ pois

$$a^n - a^m = a^n - a^n \cdot a^h = a^n(1 - a^h).$$

Como vale ****, temos que $a^h < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - a^h$. Assim

$$0 < a^n(1 - a^h) \Leftrightarrow a^m < a^n.$$

Logo, f é decrescente.

Suponhamos agora que $a = 1$. Nosso objetivo é provar que $f(n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Façamos indução em n.

Para $n = 1$, temos que $f(1) = 1^1 = 1$. Suponha então que a afirmação é válida para um certo $n > 1$. Então

$$f(n+1) = 1^{(n+1)} = 1^n \cdot 1 = 1.$$

Se $n = 0$, então

$$f(0) = 1^0 = 1,$$

por definição. Seja então $n < 0$ inteiro. Então $f(-n) = 1^{-n} = 1$, como acabamos de provar. Segue que

$$f(n) = \frac{1}{1^{-n}} = 1.$$

Logo, f é constante. $\square$

Exercício 26. Seja $a > 1$ em um corpo arquimediano $\mathbb{K}$. Considere a função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $f(n) = a^n$. Prove as seguintes afirmações:

i. $f(\mathbb{Z})$ não é limitado superiormente.

ii. $inf f(\mathbb{Z}) = 0$.

Demonstração.

i. Como $a > 1$, temos que $a = 1 + h$, onde $h \in \mathbb{K}$ é maior que zero. Suponhamos, por absurdo, que $f(\mathbb{Z})$ é limitado superiormente. Então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ (não confundir com supremo) tal que $f(n) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{\alpha - 1}{h}.$$

Segue da **Desigualdade de Bernoulli** que

$$\alpha < 1 + nh \leq (1+h)^n = a^n,$$

o que é absurdo, uma vez que α é uma cota superior de $f(\mathbb{Z})$. Segue que $f(\mathbb{Z})$ é ilimitado superiormente.

ii. Vimos na questão 14 que se $a > 1$ então $a^n > 1$ para todo n natural. Se $n = 0$ então $a^0 = 1$ por definição. Se $n < 0$ então $a^n = \frac{1}{a^{-n}} < 1$, onde $a^{-n} > 1$. Segue daí que $0 < a^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Veja o item **12'** da definição de ínfimo do livro do Elon. Utilizaremos essa equivalência agora para provar que nenhum $\alpha > 0$ pode ser o ínfimo de $f(\mathbb{Z})$.

Suponhamos que $\alpha > 0$ é o ínfimo de $f(\mathbb{Z})$. Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{h}.$$

Segue da **Desigualdade de Bernoulli** que

$$\frac{1}{\alpha} < 1 + nh < (1+h)^n = a^n.$$

Consequentemente

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \alpha,$$

o que é absurdo, uma vez que $\alpha \leq a^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Segue então que $0 = inf f(\mathbb{Z})$. $\square$

Exercício 22. Prove que, para todo x num corpo ordenado $\mathbb{K}$, tem-se

$$| x-1 | + | x-2 | \geq \ 1.$$

$$| x-1 | + | x-2 | + | x-3 | \geq \ 2.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{K}$.

i. Note que $| 2-1 |= 1$. Segue daí que

$$1 = | 2-1 | = | (2-x)+(x-1) | \leq | x-2 | + | x-1 |$$

$$\Rightarrow 1 \leq | x-2 | + | x-1 |$$

ii. Note que $| 3-1 |= 2$. Segue daí que

$$2 \ \leq | x-1 | + | x-3 |.$$

Como $| x-2 | \geq \ 0$, segue que

$$2 \ \leq | x-1 | + | x-2 | + | x-3 |.$$

□

Exercício 39. Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos $A \cdot B = \{x \cdot y \mid x \in A \ e \ y \in B\}$. Prove que se A e B forem limitados então $A \cdot B$ é limitado, sendo $sup(A \cdot B) = supA \cdot supB$ e $inf(A \cdot B) = infA \cdot infB$.

Demonstração. Sejam $supA = \alpha$ e $supB = \beta$. Então $| x | \leq \alpha$ e $| y | \leq \beta$ para cada $x \in A$ e $y \in B$, respectivamente. Segue daí que

$$| x \cdot y | \leq \alpha \cdot \beta$$

para cada $x \in A$ e $y \in B$. Consequentemente, temos que $-\ \alpha \cdot \beta \leq x \cdot y \leq \alpha \cdot \beta$. Logo, $A \cdot B$ é limitado. Como $A \cdot B \subset \mathbb{R}$, existe $\psi = sup(A \cdot B) \in \mathbb{R}$, pois $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. Provaremos agora que $sup(A \cdot B) = supA \cdot supB$.

Como $x \leq \alpha$ e $y \leq \beta$ para cada $x \in A$ e $y \in B$ e ambos são números reais positivos, temos que

$$x \cdot y \leq \alpha \cdot \beta.$$

Como $\psi = sup(A \cdot B)$ é a menor das cotas superiores de $A \cdot B$, temos que

$$x \cdot y \leq \psi \leq \alpha \cdot \beta. \ (1)$$

Segue que (1) que

$$x \leq \frac{\psi}{y}$$

para todo $x \in A$ e cada $y \in B$. Logo, temos que

$$x \leq \alpha \leq \frac{\psi}{y}, \ (2)$$

pois α é a menor das cotas superiores de A. Segue de (2) que

$$y \leq \frac{\psi}{\alpha},$$

para todo $y \in B$. Logo, temos que

$$y \leq \beta \leq \frac{\psi}{\alpha},$$

pois β é a menor das cotas superiores de B. Daí

$$\alpha \cdot \beta \leq \psi,$$

o que implica que $sup(A \cdot B) = supA \cdot supB$. Provaremos agora que $inf(A \cdot B) = infA \cdot infB$.

Sejam ρ, σ e θ os infímos de A, B e $A \cdot B$, respectivamente. Como os elementos de A e B são todos positivos, temos que $\rho \cdot \sigma \leq x \cdot y$, para cada $x \in A$ e $y \in B$. Como θ é a maior das cotas inferiores de $A \cdot B$, temos que $\rho \cdot \sigma \leq \theta$. Por um lado, temos que

$$\tfrac{\theta}{x} \leq y,$$

para todo $y \in B$ e cada $x \in A$. Como σ é a maior das cotas inferiores de B, temos que

$$\tfrac{\theta}{x} \leq \sigma \leq y.$$

Segue que

$$\tfrac{\theta}{\sigma} \leq x.$$

para todo $x \in A$. Como ρ é maior das cotas inferiores de A, temos que

$$\tfrac{\theta}{\sigma} \leq \rho \Rightarrow \theta \leq \rho \cdot \sigma.$$

Portanto, temos que $inf(A \cdot B) = infA \cdot infB$.

$\square$

EXA 393 - Análise Matemática

Gleberson Antunes

18 de Abril de 2023

1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, cumpre a seguinte condição: "Se uma sequência (x_n) converge para um ponto $a \in A$ então $x_n \in A$ para todo n suficientemente grande".

Demonstração.

$\Rightarrow$ Suponhamos que $A \subset \mathbb{R}$ seja um conjunto aberto. Seja (x_n) uma sequência de números reais tais que $x_n \longrightarrow a \in A$. Como A é aberto, todos os seus pontos são pontos interiores. Sendo assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A.$$

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \tfrac{1}{m_0} < \varepsilon.$$

Existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \mid x_n - a \mid < \tfrac{1}{m_0} < \varepsilon.$$

Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

$\Leftarrow$ Suponhamos que A não é aberto. Então existe $a \in A$ que não é ponto interior. Assim, dados quaisquer $\varepsilon > 0$, temos que

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \not\subset A.$$

Montaremos agora uma sequência que converge para a, com a propriedade de que nenhum dos termos dessa sequência está em A.

Dado $\varepsilon_1 = 1$, tome $x_1 \in (a-1, a+1)$ tal que $x_1 \notin A$. Tome agora $\varepsilon_2 = min\{\mid x_1 - a \mid, \frac{1}{2}\}$ e $x_2 \in (a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2)$ tal que $x_2 \notin A$. Tome $\varepsilon_3 = min\{\mid x_2 - a \mid, \frac{1}{3}\}$ e $x_3 \in (a-\varepsilon_3, a+\varepsilon_3)$ tal que $x_3 \notin A$. Prossigamos dessa maneira de forma que obtenhamos uma sequência (x_n) de números reais tais que

$$\mid x_{n+1} - a \mid < \mid x_n - a \mid e \mid x_n - a \mid < \tfrac{1}{n}.$$

Note que $x_n \longrightarrow a \in A$, mas $x_n \notin A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Absurdo! Logo A é aberto. $\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

01 de Maio de 2023

Lema 1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ positivos, temos que

$$a < b \quad e \quad c < d \quad \Rightarrow \quad ac < bd.$$

Demonstração. Como $c > 0$, temos que $ac < bc$. Da mesma maneira, como $a > 0$, temos que $ac < ad$. Por fim, como $d > 0$, temos que $ad < bd$. Segue da transitividade de $<$ que: $ac < ad < bd \Rightarrow ac < bd$.

□

Exercício 11 Seja P o conjunto dos elementos positivos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$.

i. Dado um número natural n, prove que a função $f : P \longrightarrow P$, definida por $f(x) = x^n$ é monótona crescente (isto é, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).

ii. Dê um exemplo em que f não é sobrejetiva.

iii. Prove que $f(P)$ não é um subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{K}$.

Demonstração.

i. Faremos indução em n e utilizaremos o **Lema 1**. Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira pois $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Suponhamos agora que a afirmação é verdadeira para um certo $n > 1$. Ora, sabemos que

$$0 < x < y \quad e \quad 0 < x^n < y^n \quad \Rightarrow \quad x^{n+1} < y^{n+1},$$

pelo **Lema 1**. Segue então que, dado n natural, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

ii. (Quando li essa questão pela primeira vez, não entendi muito bem, afinal essa função é sobrejetiva (em $\mathbb{R}$). Acabei me passando nisso durante uma monitoria e passei um vexame kkk).

Considere o nosso corpo ordenado como sendo $\mathbb{Q}$. Seja então $\mathbb{Q}^+$ o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{Q}$. Então, a aplicação $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, dada por $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $f(x) = 2$.

iii. Suponhamos que $f(P)$ é um subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{K}$. Então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $f(x) = x^n \leq \alpha$, para todo $x \in P$. Note que α deve ser positivo. Segue da **Desigualdade de Bernoulli** que $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha > \alpha$. Logo, $f(P)$ é ilimitado superiormente,

$\square$

Exercício 24. Prove que, num corpo ordenado $\mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

i. $\mathbb{K}$ é arquimediano.

ii. $\mathbb{Z}$ é ilimitado superior e inferiormente.

iii. $\mathbb{Q}$ é ilimitado superior e inferiormente.

Demonstração.

i $\Rightarrow$ ii. Suponhamos que $\mathbb{K}$ é arquimediano. Então $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente. Sabemos que $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. Se supormos que $\mathbb{Z}$ é limitado superiormente, então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $z \leq \alpha$, para todo $z \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ tal que $\alpha < n$. Logo, $\mathbb{Z}$ é ilimitado superiormente. Se supormos que $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, então existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $\beta \leq z$, para todo $z \in \mathbb{Z}$. Observe que β deve ser negativo. Segue que $-\beta > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-\beta < n$. Daí, $-n < \beta$. Logo, $\mathbb{Z}$ é ilimitado inferiormente.

ii. Suponhamos que $\mathbb{Q}$ é limitado superiormente. Então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $q \leq \alpha$, para todo $q \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ é ilimitado superiormente, existe $z \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < z$. Logo, $\mathbb{Q}$ é ilimitado superiormente. De forma análoga, provamos que $\mathbb{Q}$ é ilimitado inferiormente.

iii. Suponhamos que $\mathbb{K}$ não é arquimediano. Então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $n \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{Q}$ é ilimitado superiormente, existe $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \leq \frac{m}{n}$. SPG, suponhamos que m, n são todos positivos. Como $\frac{1}{n} \leq 1$, segue que $\frac{m}{n} \leq m$. Logo $\alpha \leq \frac{m}{n} \leq m$, onde $m \in \mathbb{N}$, o que é absurdo pois $\mathbb{K}$ não é arquimediano. Concluímos então que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente e, portanto, $\mathbb{K}$ é arquimediano.

$\square$

Exercício 33. Sejam $A \subset B$ subconjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $infB \leq infA \leq supA \leq supB$.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a = infA \ e \ b = infB$. Como A é um subconjunto de B, temos que $b \leq y$, para todo $y \in A$. Ora, $a \leq y$, para todo $y \in A$ (pois a é o ínfimo do conjunto A), logo $b \leq a$ (pois a é a maior das cotas inferiores de A). Análogamente, sejam $c, d \in \mathbb{R}$, tais que $c = supA \ e \ d = supB$. Temos que $y \leq d$, para todo $y \in A$ (pois d é o supremo de B e A é um subconjunto de B). Por outro lado, $y \leq c$, para todo $y \in A$ (pois c é o supremo do conjunto A), logo $c \leq d$ (pois o supremo de A é a menor das cotas superiores de A). Concluímos que

$$infB \ \leq \ infA \ \leq \ supA \ \leq \ supB.$$

$\square$

Exercício 37. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja $A + B = \{x + y \mid x \in A \ e \ y \in B\}$. Prove que

i. $A + B$ é limitado.

ii. $sup(A + B) = supA + supB$.

iii. $inf(A + B) = infA + infB$.

iv Enuncia e demonstre resultados análogos supondo apenas A e B limitados superiormente (ou A e B limitados inferiormente).

Demonstração.

i. Como A *e* B são conjuntos limitados de números reais, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $c < d$ que são tais que $A \subset [a, b]$ *e* $B \subset [c, d]$. Desse modo, dados $x \in A$ *e* $y \in B$ quaisquer, temos que

$$\text{a} \leq \text{x} \leq \text{b}$$

$$\text{c} \leq \text{y} \leq \text{d}$$

$$\Rightarrow \text{a} + \text{c} \leq \text{x} + \text{y} \leq \text{b} + \text{d}.$$

Portanto, $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ é limitado.

ii. $A + B$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, que é ordenado completo, logo $A + B$ possui um supremo em $\mathbb{R}$. Como $x \leq supA$ *e* $y \leq supB$, temos

$$x + y \ \leq \ supA + supB \Rightarrow sup(A + B) \leq supA + supB.$$

Note que

$$x + y \leq sup(A + B) \Rightarrow x \ \leq \ sup(A + B) - y \ .$$

Logo, $sup(A + B) - y$ é uma cota superior de A, para todo $x \in A$ e cada $y \in B$. Assim, temos que $supA \leq sup(A + B) - y$.

Por outro lado,

$$y \leq sup(A + B) - supA.$$

Dessa forma, $sup(A+B) - supA$ é uma cota superior de B. Então, $supB \leq sup(A+B) - supA \Rightarrow supA + supB \leq sup(A+B)$.

Concluímos que

$$sup(A+B) = supA + supB.$$

iii. **Análogo ao item ii.**

iv **Análogo ao item ii e iii.**

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

16 de Maio de 2023

As resoluções são desprentesiosas e sujeitas à erros. Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$. Mostre que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{1}{ln\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]}$. Então

$$0 < x < \frac{1}{ln\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]} \Rightarrow \frac{1}{x} > ln\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow e^{\dfrac{1}{x}} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{e^{\dfrac{1}{x}}} = \left| e^{\dfrac{-1}{x}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

25 de Maio de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Se $\lim x_n = a$ então $\lim \mid x_n \mid = \mid a \mid$. Dê um contra-exemplo mostrando que a recíprova é falsa, salvo quando $a = 0$.

Demonstração.

1. **Mostraremos que** $(\mid x_n \mid)$ **converge para** $\mid a \mid$**.**

Sejam (x_n) uma sequência e $a = \lim x_n$. Considere a sequência $(\mid x_n \mid)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow || \, x_n \mid - \mid a \, || \leq \mid x_n - a \mid < \ \varepsilon.$$

Logo, $\lim \mid x_n \mid = \mid a \mid$.

2. **Mostraremos que não vale a recíproca do resultado**.

Considere a sequência (x_n), cujo termo geral é dado por $x_n = (-1)^n$. Seja então a sequência $(\mid x_n \mid)$, cujo termo geral é dado por $\mid x_n \mid = \mid (-1)^n \mid$. **Evidentemente**, $\mid (-1)^n \mid \longrightarrow 1$, mas $(-1)^n$ não converge, pois admite duas subsequências que convergem para pontos distintos.

3. **Mostraremos que vale a recíproca quando** $a = 0$.

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Suponhamos que a sequência $(\mid x_n \mid)$ converge para 0. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow \mid x_n - 0 \mid = || \, x_n \mid - \mid 0 \, || < \ \varepsilon.$$

□

Exercício 2. Seja $\lim x_n = 0$. Para cada n, ponha $y_n = min\{| x_1 |, | x_2 |, ..., | x_n |\}$. Prove que $y_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow | y_n - 0 | = \ y_n \ \leq | x_n | = | x_n - 0 | < \varepsilon.$$

Logo, $\lim y_n = 0$. □

Exercício 3. Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$, prove que $\lim x_n = a$.

Demonstração. Como $x_{2n} \longrightarrow a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2n > n_1 \ \Rightarrow | x_{2n} - a | < \ \varepsilon.$$

Analogamente, como $x_{2n-1} \longrightarrow a$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2n - 1 > n_2 \ \Rightarrow | x_{2n-1} - a | < \ \varepsilon.$$

Tome $n_0 = máx\{n_1, n_2\}$. Então

$$n > n_0 \ \Rightarrow | x_n - a | < \ \varepsilon.$$

□

Exercício 4. Se $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup ... \cup \mathbb{N}_k$ e $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}_1} x_n = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}_2} x_n = ... \lim\limits_{n \in \mathbb{N}_k} x_n = a$, então $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$.

Demonstração. Imediata do **Exercício 3**.

□

Exercício 6. Se $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$, então $\lim y_n = a$.

Demonstração. **Note que** $y_n = x_n - (x_n - y_n)$. Logo

$$\lim y_n \;=\; \lim[x_n - (x_n - y_n)] = a - 0 = a.$$

$\square$

Exercício 7. Seja $a \neq 0$. Se $\lim \dfrac{y_n}{a} = 1$ então $\lim y_n = a$.

Demonstração. **Note que** $y_n = \dfrac{y_n}{a} \cdot a$. Logo

$$\lim y_n = \lim\left(\left[\frac{y_n}{a}\right] \cdot a\right) = 1 \cdot a = a.$$

$\square$

Exercício 8. Seja $b \neq 0$. Se $\lim x_n = a$ e $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = b$, então $\lim y_n = \dfrac{a}{b}$.

Demonstração. **Note que** $y_n = x_n \cdot \dfrac{y_n}{x_n}$. Logo

$$\lim y_n = \lim\left(\left[x_n \cdot \frac{y_n}{x_n}\right]\right) = \frac{a}{b}.$$

$\square$

Exercício 9. Se $\lim x_n = a \neq 0$ e $\lim x_n y_n = b$, então $\lim y_n = \dfrac{b}{a}$.

Demonstração. **Note que** $y_n = x_n y_n \cdot \dfrac{1}{x_n}$. Logo

$$\lim y_n = \lim\left(\left[x_n y_n \cdot \frac{1}{x_n}\right]\right) = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}.$$

$\square$

Lema 1. Dado $a > 1$, considere a sequência $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$. Então $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > \dfrac{ln\ a}{ln(1+\varepsilon)}$. Então

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{ln(1+\varepsilon)}{ln\ a} \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot ln\ a < ln(1+\varepsilon).$$

Note que

$$\frac{1}{n} \cdot ln\ a < ln(1+\varepsilon) \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \Rightarrow \mid a^{\frac{1}{n}} - 1 \mid < \ \varepsilon.$$

.

Logo, $\lim_{n \longrightarrow \infty} \ a^{\frac{1}{n}} = 1.$

$\square$

Exercício 14. Seja $a \geq 0$, $b \geq 0$. Prove que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \ \sqrt[n]{a^n + b^n} = máx\{a, b\}$.

Demonstração. Seja $c = máx\{a, b\}$. Como $a \geq 0$ e $b \geq 0$, temos que

$$a^n \leq c^n \quad e \quad b^n \leq c^n.$$

Consequentemente,

$$c^n \leq a^n + b^n \leq 2c^n,$$

o que é equivalente a $c \leq \ \sqrt[n]{a^n + b^n} \ \leq \ 2^{\frac{1}{n}} \cdot c$. De posse do **Lema 1**, temos que $\lim_{n \longrightarrow \infty} c = \lim_{n \longrightarrow \infty} \ [2^{\frac{1}{n}} \cdot c] = c$. Segue do **Teorema do Confronto para sequências** que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \ \sqrt[n]{a^n + b^n} = c$.

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

03 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num aberto $A \subset \mathbb{R}$, é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$, os conjuntos $E[f < c] = \{x \in A \mid f(x) < c\}$ e $E[f > c] = \{x \in A \mid f(x) > c\}$ são abertos.

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$ qualquer.

$\Rightarrow$ Suponhamos que f seja contínua. Se fosse verdade que $E[f < c]$ não é aberto, então algum ponto $x' \in E[f < c]$ não é ponto interior. Como f é contínua em x', dado $\varepsilon = c - f(x')$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,\ x') < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x),\ f(x')) < c - f(x').$$

Note que, para todo $x \in A \cap [(x' - \delta,\ x' + \delta)]$, $f(x) \in (-c + 2f(x'),\ c)$. Mas aí, W $= A \cap [(x' - \delta,\ x' + \delta)]$ é uma vizinhança aberta de x' que está contida em $E[f < c]$, o que contradiz o fato de x' não ser um ponto interior de $E[f < c]$. Logo $E[f < c]$ é aberto. De forma análoga, mostramos que $E[f > c]$ é aberto.

$\Leftarrow$ Seja $x' \in A$ qualquer. Dado $\epsilon > 0$, definamos $a = f(x') + \epsilon$ e $b = f(x') - \epsilon$. Por hipótese, os conjuntos $E[f < a]$ e $E[f > b]$ são abertos. Existem então $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$(x' - \delta_1,\ x' + \delta_1) \subset E[f < a] \quad e \quad (x' - \delta_2,\ x' + \delta_2) \subset E[f > b]$$

Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow f(x) < f(x') + \epsilon \quad e \quad d(x, x') < \delta \Rightarrow f(x) > f(x') - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow d(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

$\square$

O leitor mais interessado pode consultar essa referência: <https://encr.pw/J6M7j>. Ela apresenta uma equivalência a definição de continuidade, muito utilizada por Topólogos, quando trabalham com **Espaços Topológicos** que não possuem métrica.

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

08 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um corpo ordenado $\mathbb{K}$ tal que $x_n \longrightarrow a$, com $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Mostre que, dado $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid x_n \mid > \dfrac{\mid a \mid}{k}$, para todo $n > n_0$.

Demonstração. O **Exercício 1** da Lista 9 (Encontra-se em <https://l1nk.dev/uN2mU>) nos garante que se $x_n \longrightarrow a$, então $\mid x_n \mid \longrightarrow \mid a \mid$. De posse desse resultado, dado $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, tome $\varepsilon = \mid a \mid - \dfrac{\mid a \mid}{k}$. Existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \mid\mid x_n \mid - \mid a \mid\mid < \mid a \mid - \frac{\mid a \mid}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mid a \mid}{k} < \mid x_n \mid < 2 \mid a \mid + \frac{\mid a \mid}{k}$$

. ☐

Ou seja existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid x_n \mid > \dfrac{\mid a \mid}{k}$, para todo $n > n_0$.

Exercício 2. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um corpo ordenado $\mathbb{K}$ tal que $x_n \longrightarrow 0$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \min\{\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid, ..., \mid x_n \mid\}$. Mostre que $y_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. **Exercício 2 da Lista 9**. Encontra-se em <https://l1nk.dev/uN2mU>.

☐

Exercício 3. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, suponha que $a \leq x_n \leq n^k$. Mostre que $\sqrt[n]{x_n} \longrightarrow 1$.

Demonstração. O **Exemplo 13** do Capítulo 3 de Curso de Análise Vol 1 prova que a sequência $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$. O **Exemplo 14** desse mesmo capítulo prova que a sequência $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$. Note agora que

$$\sqrt[n]{n^k} = n^{\frac{k}{n}} = [n^{\frac{1}{n}}]^k = [\sqrt[n]{n}]^k \longrightarrow 1^k = 1.$$

Perceba que $a \leq x_n \leq n^k \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{n^k}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De posse do **Teorema do confronto para sequências**, temos que $\sqrt[n]{x_n} \longrightarrow 1$. □

Exercício 4. Seja o conjunto $X = \left\{1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, ..., 1 - \frac{1}{n}, 1\right\}$ com $n+1$ elementos. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica dos elementos de X, mostre que a sequências $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e que $x_n \geq \frac{1}{4}$ para todo $n \geq 2$.

Demonstração. O **Exercício 54** do Capítulo 3 de Curso de Análise Vol 1 nos garante que dado um conjunto $\mathrm{H} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, com n números reais positivos, vale

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \;\leq\; \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Não provarei isso por motivos de preguiça e de trauma. Utilizando essa desigualdade, temos que

$$\sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \;\leq\; \frac{n}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Daí

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

O que prova que a sequência $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, uma vez que $n < n+1 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$.

Provaremos agora que $x_n \geq \frac{1}{4}$ para todo $n \geq 2$. Por indução, para $n = 2$, temos que

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \;\geq\; \frac{1}{4}.$$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo $n > 2$. Isto é,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{4}.$$

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica nos garante que

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;\geq\; \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \;\geq\; \frac{1}{4},$$

o que prova a indução. Logo, $x_n \geq \dfrac{1}{4}$ para todo $n \geq 2$. $\square$

Exercício 5. Sejam as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num corpo arquimediano $\mathbb{K}$, definidas por

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad e \quad y_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(a) Mostre que $\lim x_n y_n = 1$.

(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que $y_n \longrightarrow \frac{1}{e}$, onde e é o número de Euler.

Demonstração.

(a). Notemos inicialmente que

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Por outro lado,

$$y_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

Como $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \longrightarrow 1$, temos que

$$x_n y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \left[\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 \ \cdot \ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \longrightarrow 1.$$

(b) O **Exemplo 16** do Capítulo 4 de Curso de Análise Vol 1 nos garante que $x_n \longrightarrow e$. Como $e \neq 0$, o **Teorema 6** desse mesmo capítulo nos garante que

$$y_n = \left[y_n \cdot x_n\right] \cdot \frac{1}{x_n} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

$\square$

Exercício 6. Dados $a, b \geq 0$, mostre que $\sqrt[n]{a^n + b^n} \longrightarrow máx\{a, b\}$.

Demonstração. **Exercício 14 da Lista 9**. Encontra-se em <https://l1nk.dev/uN2mU>.

$\square$

Exercício 7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq p_n \leq 1$. Se $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow a$, mostre que

$$p_n x_n + (1 - p_n) y_n \longrightarrow a.$$

Demonstração. Basta notar que

$$p_n x_n + (1 - p_n) y_n = p_n[x_n - y_n] + y_n \longrightarrow p_n[0] + a = a.$$

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

10 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Mostre que são equivalentes:

(a) $a \in X'$.

(b) Existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $X - \{a\}$, de termos dois a dois distintos, tal que $x_n \longrightarrow a$.

Demonstração.

$(a) \Rightarrow (b)$. Suponhamos que $a \in X'$. Então, para todo $\delta > 0$, temos que

$$X \cap [(a - \delta, a + \delta) - \{a\}] \neq \emptyset.$$

Tome $\delta_1 = 1$. Existe então $x_1 \in X$ tal que

$$x_1 \in X \cap [(a - 1, a + 1) - \{a\}].$$

Tome agora $\delta_2 = \min\left\{ \mid x_1 - a \mid, \ \frac{1}{2} \right\}$. Existe então

$$x_2 \in X \cap [(a - \delta_2, a + \delta_2) - \{a\}].$$

Note que $x_1 \neq x_2$, pois $\mid x_2 - a \mid < \mid x_1 - a \mid$. Tome agora $\delta_3 = \min\left\{ \mid x_2 - a \mid, \ \frac{1}{3} \right\}$. Existe então

$$x_3 \in X \cap [(a - \delta_3, a + \delta_3) - \{a\}].$$

Note que $x_2 \neq x_3$, pois $\mid x_3 - a \mid < \mid x_2 - a \mid$. Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência de termos dois a dois distintos, tais que

$$| \ x_n - a \ | < \ \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O **Teorema do confronto para sequências** nos garante então que $x_n \longrightarrow a$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em $X - \{a\}$, de termos dois a dois distintos, tal que $x_n \longrightarrow a$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow | \ x_n - a \ | < \ \varepsilon \ \Leftrightarrow x_n \in \Big[X - \{a\}\Big] \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = X \cap [(a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\}].$$

Logo, $a \in X'$.

$\square$

Mostre que se $X' \neq \emptyset$, então X é infinito.

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto finito. Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_1 \ < \ x_2 \ < \ ... \ < \ x_n$. Notemos, inicialmente, que $X \not\subset X'$. De fato, dado $x_i \in X$, basta tomar

$$\delta = min\left\{\frac{| \ x_{i-1} - x_i \ |}{2}, \frac{| \ x_i - x_{i+1} \ |}{2}\right\}.$$

Segue que todos os pontos de X são pontos isolados. Mostraremos agora que nenhum ponto $z \in X^c$ é um ponto de acumulação de X. De fato, como

$$X^c = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup ... \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, \infty),$$

$z \in X^c$ deve pertencer a algum dos abertos disjuntos que decompõe X^c. Como a interseção de cada um desses abertos com X é vazia, $z \notin X'$. Portanto, $X' = \emptyset$.

$\square$

Exercício 2. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere a nova definição de limite:

$$\text{L} \in \ \mathbb{R} \text{ é o limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ tende a } a \text{ se, dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0,$$

$$\text{tal que } \mid f(x) - L \mid < \ \varepsilon, \text{ para todo } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Mostre que a nova definição coincide com a antiga quando $a \notin X$, mas quando $a \in X$, o novo limite existe se, e somente se, o antigo existe e é igual a $f(a)$.

Demonstração. Evidente.

□

Exercício 3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto isolado. Mostre que toda função definida em X é contínua em a.

Demonstração. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$ um ponto isolado. Como a é um ponto isolado, existe $\delta' > 0$ tal que $X \cap [(a - \delta, a + \delta)] = \{a\}$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tome $\delta = \delta'$. Assim

$$\forall x \in \Big[X \cap (a - \delta, a + \delta) \Big], \ f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

□

Exercício 4. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Mostre que f é contínua em a se, e somente se, para todo (x_n) em X tal que $x_n \longrightarrow a$, tem-se que $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Demonstração. Encontra-se em: **Curso de Análise vol 1, Teorema 4, capítulo 7**.

□

Exercício 5. Pergunta-se: Existe $\lim\limits_{x \longrightarrow \ 0} \ cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$? Justifique.

Demonstração. Dê uma olhada em: **Curso de Análise vol 1, Exemplo 6, capítulo 6.**

$\square$

Exercício 6. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponha que $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = 0$. Mostre que a condição necessária para que exista o limite de $\dfrac{f}{g}$ é que $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que existe $L = \lim_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Então

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right] = \lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] \cdot \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L \cdot 0 = 0.$$

$\square$

Exercício 7. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em a, para cada $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

Demonstração. Inicialmente, provaremos que o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\},$$

é fechado. Seja (x_n) uma sequência de pontos de S, tal que $x_n \longrightarrow a$. Como f é contínua em a, temos que

$$f(x_n) \longrightarrow f(a) = 0,$$

uma vez que $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $a \in S$. Portanto, S é fechado. Provaremos agora que F é fechado. Como f e g são funções contínuas, a aplicação $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ é uma função contínua. Observe que

$$F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}.$$

Logo, F é fechado.

$\square$

Exercício 8. Mostre que X é denso em Y se, e somente se, todo ponto de Y é limite de uma sequência de pontos de X.

Demonstração. Análoga à demonstração do **Exercício 1**.

$\square$

Exercício 9. Seja D um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em cada ponto de D e $f(x) = 0$, para todo $x \in D$, mostre que f é identicamente nula.

Demonstração. Ora, sabemos que se D é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$, então todo ponto de $\mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos de D. Seja $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de D, tal que $x_n \longrightarrow a$. Como f é contínua, note que

$$f(x_n) \longrightarrow f(a) = 0,$$

uma vez que $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exercício 10. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em a, para cada $a \in \mathbb{R}$. Suponha que f é constante em $\mathbb{Q}$, isto é, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Mostre que f é constante (em $\mathbb{R}$).

Demonstração. Análoga à demonstração do **Exercício 9**. Basta considerar $D = \mathbb{Q}$.

$\square$

Exercício 11. Seja $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, que é a forma geral de uma função polinomial real de uma variável real de grau $n \in \mathbb{N}$, isto é, para cada $i = 0, 1, 2, ..., n, a_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lim_{x \longrightarrow a} p(x)$ e é igual a $p(a)$, ou seja, p é uma função contínua em cada ponto de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Por indução. Para $n = 0$, temos $p(x) = a_0$. Note que

$$\lim_{x \longrightarrow a} p(x) = a_0,$$

onde $p(a) = a_0$. Suponhamos que essa afirmação é válida para um certo $n > 0$. Isto é, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e

$$\lim_{x \longrightarrow a} p(x) \;=\; p(a) \;=\; a_0 \;+\; a_1(a) \;+\; a_2(a)^2 \;+\; + ... \;+\; a_n(a)^n.$$

Considere agora $n+1$ e $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$, onde $a_{n+1} \neq 0$. Note que

$$\lim_{x \longrightarrow a} p(x) = \lim_{x \longrightarrow a} [a_0 \;+\; a_1x \;+\; a_2x^2 \;+\; ... \;+\; a_nx^n] + \lim_{x \longrightarrow a} a_{n+1}x^{n+1}$$

$$= \; a_0 \;+\; a_1(a) \;+\; a_2(a)^2 \;+\; ... \;+\; a_n(a)^n + a_{n+1}(a)^{n+1} = p(a).$$

Logo, existe $\lim_{x \longrightarrow a} p(x)$ e é igual a $p(a)$. Portanto p é uma função contínua.

□

Exercício 12. Seja a função (racional) $f = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são funções polinomiais reais de uma variável real de graus n e m, respectivamente. Observe que f está definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

(a) Se $p(a) = 0$ e $q(a) \neq 0$, mostre que existe $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ e é igual a 0.

(b) Se $p(a) \neq 0$ e $q(a) \neq 0$, mostre que existe $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ e é igual a $\dfrac{p(a)}{q(a)}$.

(c) Seja a um zero de p de multiplicidade s e de q de multiplicidade t. Mostre que

(i) se $s = t$, existe $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ e é igual a $\dfrac{p_1(a)}{q_1(a)}$.

(ii) se $s > t$, existe $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ e é igual a 0.

(iii) se $s < t$, não existe $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Demonstração.

(a)

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} p(x) \cdot \left[\lim_{x \longrightarrow a} \frac{1}{p(x)}\right] = 0 \cdot \frac{1}{q(a)} = 0.$$

(b)

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} p(x) \cdot \left[\lim_{x \longrightarrow a} \frac{1}{p(x)}\right] = p(a) \cdot \frac{1}{q(a)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

(c)

(i) Se $s = t$, então

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{(x-a)^s \cdot p_1(x)}{(x-a)^s \cdot q_1(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{p_1(a)}{q_1(a)}.$$

(ii) Se $s > t$, então

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{(x-a)^s \cdot p_1(x)}{(x-a)^t \cdot q_1(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{(x-a)^{s-t} \cdot p_1(x)}{q_1(x)}$$

$$= \left[\lim_{x \longrightarrow a} (x-a)^{s-t}\right] \cdot \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = 0 \cdot \frac{p_1(a)}{q_1(a)} = 0.$$

(iii) Se $s < t$, então

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{(x-a)^s \cdot p_1(x)}{(x-a)^t \cdot q_1(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{\cdot p_1(x)}{(x-a)^{t-s} \cdot q_1(x)}$$

$$= \left[\lim_{x \longrightarrow a} \frac{1}{(x-a)^{t-s}} \right] \cdot \lim_{x \longrightarrow a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \infty.$$

$\square$

Exercício 13. Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 - 1}$. Calcule os limites de $f(x)$ quando x tende a 1 e a -1.

Demonstração.

(a)

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{(x^2+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1)} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1) \cdot (x+1)}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x^2+1)} = \frac{2}{2} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{(x^2+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1)} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1) \cdot (x+1)}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x^2+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

$\square$

Exercício 14. Mostre que a função $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua e a, para cada $a \geq 0$.

Demonstração. A prova será dividida em duas partes. Na primeira parte, provaremos que f é contínua em $a = 0$. Em seguida, na segunda parte, provaremos que f é contínua em $a > 0$.

(a) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $x_n \longrightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \mid x_n - 0 \mid < \ \varepsilon^2,$$

o que implica que

$$\mid \sqrt{x_n} - 0 \mid = \mid f(x_n) - 0 \mid < \ \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Logo f é contínua em $a = 0$, pelo **Exercício 4**.

(b) Sejam $a > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $x_n \longrightarrow a$. Dado $\varepsilon = 1$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m_o \ \Rightarrow \mid x_n - a \mid < \ 1.$$

Pelas desigualdades de módulo, vistas em sala, e usando o fato de que os termos de (x_n) são não-negativos, temos que

$$x_n - a \ = \mid x_n \mid - \mid a \mid \leq \mid x_n - a \mid < \ 1$$

$$\Leftrightarrow x_n \ < \ a + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_n} \ < \ \sqrt{a+1}.$$

Daí

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{x_n} \ < \ \sqrt{a+1} + \sqrt{a}.$$

Sem problema algum podemos inverter essa desigualdade, uma vez que os termos desta são todos não-negativos. Segue então que

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \ < \ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x_n}} \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Novamente, utilizando o fato que $x_n \longrightarrow a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > s_0 \ \Rightarrow | \ x_n - a \ | < \ \varepsilon\sqrt{a}.$$

Tome agora $n_0 = min\{m_0, s_0\}$. Então

$$n > n_0 \ \Rightarrow | \ x_n - a \ | \ \cdot \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x_n}} \ < \varepsilon\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \ = \ \varepsilon.$$

Note que

$$\frac{| \ x_n - a \ |}{\sqrt{a}+\sqrt{x_n}} = \frac{| \ (\sqrt{x_n}-\sqrt{a}) \ \cdot \ (\sqrt{x_n}+\sqrt{a}) \ |}{\sqrt{a}+\sqrt{x_n}} \ = \ | \ \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \ | = | \ f(x_n) - f(a) \ | \ .$$

Ou seja

$$n > n_0 \ \Rightarrow | \ \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \ | = | \ f(x_n) - f(a) \ | < \ \varepsilon.$$

Logo f é contínua em a, pelo **Exercício 4**. Isso prova que f é contínua em $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\square$

Exercício 15. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(y) = 1$, para $y \neq 0$, e $g(0) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} g(y) = 1$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g \circ f(x) = 0$.

Demonstração. Notemos, inicialmente, que a função f é a função identicamente nula, portanto é contínua em todos os pontos do seu domínio, e a função g é descontínua na origem (Esse tipo de descontinuidade é chamada de **Descontinuidade de salto**. Para mais informações, veja <https://encr.pw/kqD3F>).

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de $\mathbb{R} - \{0\}$, tal que $x_n \longrightarrow 0$. Como f é descontínua em 0, temos que

$$f(x_n) \longrightarrow 0,$$

pois $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí

$$g(f(x_n)) \longrightarrow 0,$$

por conta da continuidade de g. Logo, temos que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g \circ f(x) = 0$. □

Exercício 16. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$, $g(y) = 0$, para $y \neq 0$, e $g(0) = 1$. Mostre que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y\longrightarrow 0} g(y) = 1$ mas não existe $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g \circ f(x)$.

Demonstração. Dê uma olhada em: **Curso de Análise vol 1, exemplos pós Teorema 8, capítulo 6.**

□

Exercício 17. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(X) \subset Y$. Suponha que existe o limite de $f(x)$ quando x tende para $a \in X'$ e que g é contínua em $b \in Y \cap Y'$. Mostre que existe o limite de $g \circ f(x)$ quando x tende a a.

Demonstração. Dê uma olhada em: **Curso de Análise vol 1, Teorema 9, capítulo 6**.

□

Exercício 18. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(X) \subset Y$. Mostre que se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a.

Demonstração. Como g é contínua em $f(a)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$| \; y - f(a) \; | < \; \delta_1 \; \Rightarrow | \; g(f(y)) - g(f(a)) \; | < \; \varepsilon.$$

Como f é contínua no ponto a, dado $\delta_1 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$| \; x - a \; | < \; \delta_2 \; \Rightarrow | \; f(x) - f(a) \; | < \; \delta_1.$$

Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$| \; x - a \; | < \; \delta \; \Rightarrow | \; f(x) - f(a) \; | < \; \delta_1 \; \Rightarrow | \; g(f(x)) - g(f(a)) \; | < \; \varepsilon.$$

$\square$

Exercício 19. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Mostre que g é contínua em a, para cada $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. O **Exercício 11** nos garante que toda função polinomial é contínua. Logo $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 1 + x^2$ é uma função contínua. O **Exercício 14** nos garante que a aplicação $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua. De posse do **Exercício 18**, temos que $h \circ f = g$ é uma função contínua.

$\square$

Exercício 20. Mostre que nem toda função $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona limitada tem limite em todo ponto de X'.

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se}\, x \geq 0 \\ \\ x-1 & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$$

É claro que $0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}$. O **Teorema 11 do Cap 6 de Curso de Análise vol 1** nos garante que existe $\lim_{x \longrightarrow\ 0} f(x)$ se, e somente se, existem $\lim_{x \longrightarrow\ 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \longrightarrow\ 0^+} f(x)$ e são iguais. Note que

$$\lim_{x \longrightarrow\ 0^-} f(x) = -1 \quad e \quad \lim_{x \longrightarrow\ 0^+} f(x) = 1.$$

Logo, nem toda função monótona limitada tem limite em todo ponto de X'.

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

18 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Teorema 1. Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se lim $x_n = \infty$ então lim $y_n = \infty$.

Demonstração. Suponhamos que lim $x_n = \infty$. Então, dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow x_n > A.$$

Consequentemente, para todo $n > n_0$, teremos

$$y_n \geq x_n > A,$$

o que implica que lim $y_n = \infty$. $\square$

Teorema 2. Seja $x_n > 0$. Então lim $x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \dfrac{1}{x_n} = \infty$.

Demonstração.

$\Rightarrow$ Suponhamos que lim $x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |\ x_n - 0\ | < \ \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\ x_n\ |} = \frac{1}{x_n} \ > \ \varepsilon.$$

Logo, $\lim \dfrac{1}{x_n} = \infty$.

$\Leftarrow$ Suponhamos que $\lim \dfrac{1}{x_n} = \infty$. Então, dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_n} \;>\; \frac{1}{A}$$

$$\Leftrightarrow x_n \;= |\, x_n \,| = |\, x_n - 0 \,| < \; A.$$

Logo, $\lim x_n = 0$. $\square$

Lema 3. Considere a sequência $x_n = \sqrt{n}$. Então $\lim x_n = \infty$.

Demonstração. De fato, dado $A > 0$, tome

$$n > A^2 \Rightarrow \sqrt{n} > A.$$

$\square$

Lema 4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

Demonstração. Por indução, para $n = 1$, temos que

$$\sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \approx 1,4.$$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo $n > 1$, isto é, $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$. Provaremos agora que $\sqrt{n+1} < \sqrt{(n+1)+1}$. De fato,

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n+2},$$

uma vez que

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \;=\; [\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}] \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} > 0.$$

$\square$

Exercício 1. Prove que $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

Demonstração. De posse dos **Lemas 1 e 2** e **Teorema 1** temos que $\lim \sqrt{n+1} = \infty$. Evidentemente, $\lim \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \infty$. Segue do **Teorema 2** que

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Note agora que

$$\lim[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \;=\; \lim[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \;=\; \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

o que prova o exercício.

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

18 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja a sequência $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $s_n = cos\,\dfrac{n\pi}{2}$.

(a) Liste a sequência s.

(b) Descreva o conjunto dos termos da sequência s.

(c) Mostre que a sequência (s_n) é limitada.

(d) Pergunta-se: (s_n) é monótona? Justifique.

Demonstração.

(a). $(0, -1, 0, 1, 0, -1\ ...)$

(b). $s(\mathbb{N}) = \{-1, 0, 1\}$.

(c). De fato, (s_n) é limitada uma vez que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\ x_n\ | \leq\ 1$.

(d). Uma sequência é dita monótona se é crescente, não-decrescente, decrescente e não-crescente. Note que $s_1 > s_2$ mas $s_3 > s_2$. Logo (s_n) não pode ser monótona.

$\square$

Exercício 2. Dado $a \in \mathbb{K}$, seja a sequência (s_n) de termo geral $s_n = a^n$.

(a) Para $a = 0$ e $a = 1$, mostre que a sequência (a^n) é monótona e limitada.

(b) Para $0 < a < 1$, mostre que a sequência é monótona e limitada.

(c) Para $a > 1$, mostre que a sequência (a^n) é monótona, limitada inferiormente e ilimitada superiormente.

(d) Para $a = -1$, mostre que a sequência (a^n) não é monótona, mas é limitada.

(e) Para $-1 < a < 0$, mostre que a sequência (a^n) não é monótona, mas é limitada.

(f) Para $a < -1$, mostre que a sequência (a^n) não é monótona e é ilimitada inferior e superiormente.

Demonstração.

(a). Se $a = 0$, então $a^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (a^n) é na verdade a sequência

$$(0, 0, 0, 0,\ \ldots),$$

que é constante e, portanto, monótona. De forma análoga, se $a = 1$, então $a^n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (a^n) é na verdade a sequência

$$(1, 1, 1, 1\ \ldots),$$

que é constante e, portanto, monótona.

(b). Se $0 < a < 1$, então afirmo que (a^n) é uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1. Provaremos agora que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < a^{n+1} < a^n < 1$. Para $n = 1$, temos que

$$0 < a < 1^* \quad \Rightarrow \quad 0 < a^2 < a < 1.$$

Para ver isto, basta multiplicar a desigualdade * por a. Suponhamos que a afirmação é válida para um certo $n > 1$, isto é,

$$0 < a^{n+1} < a^n < 1^{**}.$$

Multiplicando a desigualdade ** por a, temos que

$$0 < a^{n+2} < a^{n+1} < a^n < 1,$$

o que prova a indução, e mostra que (a^n) é decrescente e limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1.

(c). Por indução, facilmente verificamos que $a^{n+1} > a^n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (a^n) é crescente (portanto, monótona). Mostraremos agora que (a^n) é ilimitada superiormente. Seja $M > 0$ arbitrário. Como $a > 1$, podemos escrever a como sendo $a = 1 + h$, onde $h > 0$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \ > \ \frac{M-1}{h}$$

$$\Rightarrow \ M < 1 + nh \ \leq \ (1+h)^n = a^n,$$

pela **Desigualdade de Bernoulli**. Logo, (a^n) é ilimitada superiormente.

(d) Se $a = -1$, então $a^n = 1$, para n par e $a^n = -1$, para n ímpar. Logo, (a^n) é na verdade a sequência

$$(-1, 1, -1, 1, \ ...),$$

que apesar de não ser monótona, é limitada.

(e). Se $-1 < a < 0 < 1 \ \Rightarrow |\ a \ | < \ 1$. Note que

$$|\ a\ |^n = |\ a^n\ | < \ 1^n = 1.$$

Logo (a^n) é limitada, mas não é monótona pois seus termos alternam entre negativos e positivos.

(f). Note que $a_1 = a < -1$. Porém, $a_2 = a^2 > -a > 1$ e $a_3 = a^3 < -a^2 < a < -1$. Ou seja

$$a_1 \;<\; a_2 \quad \text{e} \quad a_3 < a_1 < a_2.$$

Logo, (a^n) não pode ser monótona. Note que a subsequência (a^{2n}) é uma subsequência ilimitada superiormente. Portanto (a^n) não pode ser limitada superiormente. Note agora que a subsequência (a^{2n+1}) é ilimitada inferiormente. Portanto, (a^n) não pode ser limitada inferiormente. $\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

20 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n sin\,\dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, mostre que existe $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

(b) Para quais valores de $n \in \mathbb{N}$ existe

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}?$$

Justifique.

Teorema 1. Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada, então $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (fg)(x) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que g é limitada. Então existe $\alpha > 0$ tal que $\mid g(x) \mid < \alpha$, para todo $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$

$$\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - 0 \mid < \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Segue daí que

$$\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - 0 \mid \cdot \mid g(x) \mid = \mid fg(x) - 0 \mid < \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (fg)(x) = 0$.

$\square$

Demonstração.

(a). Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Ora, sabemos, pelas **Propriedades aritméticas de limites** que $\lim_{x \longrightarrow 0} x^n = 0$. Outra coisa que sabemos é que $|\ sin\ x\ | \leq\ 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, a função $sin(x)$ é **limitada**. Segue do **Teorema 1** que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x^n sin\ \frac{1}{x} = 0.$$

(b). Se $n \geq 2$, temos que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^n sin\ \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^n sin\ \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} x^{n-1} sin\ \frac{1}{x} = 0,$$

por causa do **Teorema 1**, uma vez que $\lim_{x \longrightarrow 0} x^{n-1} = 0$. Se $n = 1$, temos que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{xsin\ \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{xsin\ \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} sin\ \frac{1}{x},$$

que não existe pelo **Exemplo 6 do capítulo 6 de Curso de Análise vol 1.** □

Exercício 2. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Suponha que existem os limites de $(f + g)(x)$ e de $g(x)$ quando x tende para a. Mostre que existe $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Demonstração. Sejam $L = \lim_{x \longrightarrow a} (f + g)(x)$ e $M = \lim_{x \longrightarrow a} g(x)$. Note então que

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} ([f(x) + g(x)] - g(x)) = \lim_{x \longrightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \longrightarrow a} g(x)$$

$$= L - M.$$

□

Exercício 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n sin\, \dfrac{1}{x} - cos\, \dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Para quais valores de n existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 0. Justifique?

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Considere as sequências $\dfrac{1}{2n\pi}$ e $\dfrac{2}{4n\pi + \pi}$. É fácil ver que $\dfrac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0$ e $\dfrac{2}{4n\pi + \pi} \longrightarrow 0$. Note agora que

$$f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \left(\frac{1}{2n\pi}\right)^n sin\left(\frac{1}{2n\pi}^{-1}\right) - cos\left(\frac{1}{2n\pi}^{-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2n\pi}\right)^n sin(2n\pi) - cos(2n\pi) \longrightarrow 0 - 1 = -1.$$

Por outro lado

$$f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \left(\frac{2}{4n\pi + \pi}\right)^n sin\left(\frac{2}{4n\pi + \pi}^{-1}\right) - cos\left(\frac{2}{4n\pi + \pi}^{-1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{4n\pi + \pi}\right)^n sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow 0 - 0 = 0.$$

Logo, não existe $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$, por conta do **Teorema 6 do capítulo 6 de Curso de Análise vol 1**.

□

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{x^4 - 1}$. Mostre que não existe $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$.

Demonstração. O **Exercício 6** da Lista 12 (Encontra-se em <https://l1nk.dev/uN2mU>) nos fornece uma condição necessária para que o limite de um quociente, onde o limite do denominador é zero, exista. Neste caso, basta tomar a contrapositiva desse exercício. Como $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} x^4 - 1 = 0$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} x^3 + x - 1 = 1$, não pode existir $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^3 + x - 1}{x^4 - 1}$.

$\square$

Teorema 1. $p - q$ divide $p^n - q^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ distintos. Além disso

$$p^n - q^n = (p-q)(p^{n-1} + p^{n-2}q + ... + pq^{n-2} + q^{n-1}).$$

Demonstração. Encontra-se em <https://encr.pw/lpIm6>.

$\square$

Exercício 5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, seja $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Para cada $a \geq 0$, mostre que existe $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Demonstração. Sejam $s \in \mathbb{N}$, com $s \geq 2$ e $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ quaisquer. Afirmo que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \sqrt[s]{x} = \sqrt[s]{a}$. A prova será dividida em duas partes. Na primeira parte, provaremos que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sqrt[s]{x} = 0$. Em seguida, na segunda parte, provaremos que é $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \sqrt[s]{x} = \sqrt[s]{a}$, quando $a > 0$.

(a) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}_{\geq 0} - \{0\}$, tal que $x_n \longrightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \;\Rightarrow | \, x_n - 0 \, | < \; \varepsilon^s,$$

o que implica que

$$| \, \sqrt[s]{x_n} - 0 \, | = | \, f(x_n) - 0 \, | < \; \sqrt[s]{\varepsilon^n} \; = \; \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sqrt[s]{x} = 0$, pelo **Exercício 4**.

(b) Sejam $a > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}_{\geq 0} - \{a\}$, tal que $x_n \longrightarrow a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \ \Rightarrow \mid x_n - a \mid < \ \varepsilon\sqrt[s]{a^{s-1}}.$$

De posse do **Teorema 1**, temos que

$$x_n - a = (\sqrt[s]{x_n} - \sqrt[s]{a})(\sqrt[s]{x_n^{s-1}} + \sqrt[s]{x_n^{s-2}}\sqrt[s]{a} + ... + \sqrt[s]{x_n}\sqrt[s]{a^{s-2}} + \sqrt[s]{a^{s-1}}).$$

Como

$$\sqrt[s]{a^{s-1}} \ \leq \ \sqrt[s]{x_n^{s-1}} + \sqrt[s]{x_n^{s-2}}\sqrt[s]{a} + ... + \sqrt[s]{x_n}\sqrt[s]{a^{s-2}} + \sqrt[s]{a^{s-1}},$$

temos que

$$\frac{1}{\sqrt[s]{x_n^{s-1}} + \sqrt[s]{x_n^{s-2}}\sqrt[s]{a} + ... + \sqrt[s]{x_n}\sqrt[s]{a^{s-2}} + \sqrt[s]{a^{s-1}}} \ \leq \ \frac{1}{\sqrt[s]{a^{s-1}}}$$

Daí

$$n > n_0 \ \Rightarrow \mid x_n - a \mid \ \cdot \ \frac{1}{\sqrt[s]{x_n^{s-1}} + \sqrt[s]{x_n^{s-2}}\sqrt[s]{a} + ... + \sqrt[s]{x_n}\sqrt[s]{a^{s-2}} + \sqrt[s]{a^{s-1}}}$$

$$\frac{\mid x_n - a \mid}{\sqrt[s]{x_n^{s-1}} + \sqrt[s]{x_n^{s-2}}\sqrt[s]{a} + ... + \sqrt[s]{x_n}\sqrt[s]{a^{s-2}} + \sqrt[s]{a^{s-1}}} \ = \mid \sqrt[s]{x_n} - \sqrt[s]{a} \mid < \ \frac{\varepsilon\sqrt[s]{a^{s-1}}}{\sqrt[s]{a^{s-1}}} = \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \sqrt[s]{x} = \sqrt[s]{a}$, pelo **Exercício 4**, o que conclui a demonstração.

$\square$

Análise Matemática - EXA 393

Gleberson Antunes

26 de Junho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Demonstração. Como f é contínua, $f([a, b])$ é compacto. Pelo **Teorema de Weierstrass**, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

para todo $x \in [a, b]$. Se o mínimo $f(x_1)$ e o máximo $f(x_2)$ forem atingidos nos extremos desse intervalo, o **Teorema do Valor Médio, de Lagrange**, juntamente com a hipótese, nos garantem que

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b),$$

e aí f é constante. Suponhamos agora que o mínimo e o máximo não são atingidos simultaneamente nos extremos. Devemos então, ter $x_1, x_2 \in [a, b)$ ou $x_1, x_2 \in (a, b]$. Em ambos os casos, temos duas possibilidades. Ou $x_1 = x_2$ ou $x_1 \neq x_2$. No primeiro caso, facilmente verificamos que f será constante. Suponhamos então $x_1 < x_2$. Considere a aplicação contínua $g = f|_{[x_1, x_2]}$. Como a derivada de f no ponto a é o limite do **quociente de Newton** quanto x tende a a, temos para todo $s \in (x_1, x_2)$ que

$$\lim_{x \longrightarrow s} \frac{f(x) - f(s)}{x - s} = \lim_{x \longrightarrow s} \frac{g(x) - g(s)}{x - s} \ = \ f'(s) \ = \ 0.$$

Segue do **Teorema do Valor Médio, de Lagrange** que

$$0 \ = \ \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow g(x_1) \ = (x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1) \ = \ f(x_2).$$

Logo, f é constante. $\square$

Análise Matemática

Gleberson Antunes

02 de Julho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, i.e., f é duas vezes diferenciável e f'' é uma função contínua. Suponha também que $f''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é um polinômio.

Demonstração. Seja [a, b] um intervalo fechado arbitrário. Como $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, f' é contínua em [a, b] e derivável em (a, b). Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe para cada $x \in (a, b]$, um ponto $c \in (a, x)$ tal que

$$0 = f''(c) = \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(a).$$

Logo, f' é constante em [a, b]. Como esse intervalo é arbitrário, f' é constante em $\mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = a$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Definamos a função $g(x) = ax$. Então

$$f(x) - ax = k,$$

Uma vez que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue que

$$f(x) = ax + k,$$

Logo é um polinômio de grau no máximo 1. $\square$

Análise Matemática

Gleberson Antunes

07 de Julho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Mostre que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

$\Rightarrow$ Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \overline{X}$. Segue da continuidade de f que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mid z - a \mid < \ \delta \ \Rightarrow \mid f(z) - f(a) \mid < \ \varepsilon.$$

Como $a \in \overline{X}$, temos que

$$[(a - \delta, a + \delta) - \{a\}] \cap X \neq \emptyset.$$

Ou seja, existe pelo menos um $x \in X$ tal que

$$\mid x - a \mid < \ \delta \ \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \ \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $f(a) \in \overline{f(X)}$.

É possível definir a continuidade de funções por meio de abertos. Diremos então que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua quando, dado um aberto V, $f^{-1}(V)$ é aberto. É possível provar que essa definição é equivalente a definição de continuidade que vinhamos trabalhando até então. Segue a referência para quem se interessar: <https://encr.pw/dDOJa>.

Uma consequência dessa equivalência, e que podemos provar, vide: <https://l1nq.com/u2k4c> é que uma função f é contínua se, e somente se, a imagem inversa de um conjunto fechado é também um conjunto fechado. Utilizaremos esse fato para provar a volta da demonstração.

$\Leftarrow$ Suponhamos que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, temos $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$. Seja $C \subset \mathbb{R}$ fechado. Provaremos que $D = f^{-1}(C)$ é fechado. Por hipótese, temos que

$$f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)} = \overline{f[f^{-1}(C)]} \subset C.$$

Ou seja, $\overline{D} \subset f^{-1}(C) = D$. Logo, $D = \overline{D}$ e, portanto, f é contínua.

Análise Matemática

Gleberson Antunes

08 de Julho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau par, cujo coeficiente líder é positivo. Prove que p assume um valor mínimo em $\mathbb{R}$, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) \leq p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $p(x_0) < 0$, mostre que p possui pelo menos duas raízes

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} p(x) \ = \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} p(x) \ = \ \infty.$$

Existem então $S, K > 0$ que são tais que

$$x > S \ \Rightarrow \ p(x) > p(0) \quad \text{e} \quad x < -K \ \Rightarrow \ p(x) > p(0).$$

Seja $V = \max\{S, K\}$. Então

$$| \ x \ | > \ V \ \Rightarrow \ p(x) \ > \ p(0).$$

Considere agora o intervalo fechado $[-V, V]$. Pelo **Teorema de Weierstrass**, existe $x_0 \in [-V, V]$ tal que $p(x_0) \leq p(0)$. Segue que para todo $x \in \mathbb{R}, \ \ p(x_0) \leq p(x)$.

Se $p(x_0) < 0$, basta então aplicar o **Teorema do Valor Intermediário** para obter as raízes desejadas. Se supormos que o coeficiente líder é negativo, então p admitirá um máximo absoluto. Utilizando o **Teorema do Valor Intermediário**, conseguimos provar que nesse caso, p também admite pelo menos duas raízes, desde que seja $p(x_0) > 0$. $\square$

Análise Matemática

Gleberson Antunes

18 de Julho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se existem $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$, então f é uniformemente contínua.

Demonstração. Sejam $L = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x)$ e $S = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $M, N > 0$ tais que

$$x > M \Rightarrow |\, f(x) - L \,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad x < -N \Rightarrow |\, f(x) - S \,| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para todos $x, y \in (M, \infty)$ e $x, y \in (-\infty, -N)$, temos que

$$|\, f(x) - f(y) \,| \leq |\, f(x) - L \,| + |\, f(y) - L \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

e

$$|\, f(x) - f(y) \,| \leq |\, f(x) - S \,| + |\, f(y) - S \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, f é uniformemente contínua nesses intervalos. Como f é uniformemente contínua no intervalo $[-N, M]$, temos que f deve ser uniformemente contínua em toda a reta.

$\square$

Análise Matemática

Gleberson Antunes

18 de Julho de 2023

Sugestões e correções podem ser enviadas para glebersonset@gmail.com.

Exercício 1. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Mostre que a função $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ é lipschitiziana.

Demonstração. Como f é limitada, existe $\alpha > 0$ tal que $\mid f(t) \mid \leq \alpha$ para todo $t \in [a, b]$. Para todos $x, y \in [a, b]$, temos que

$$\left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y \mid f \mid \leq \alpha \mid x - y \mid .$$

$\square$