



# IV CONGRESSO BRASILEIRO DE JOVENS PESQUISADORES EM MATEMÁTICA PURA, APLICADA E ESTATÍSTICA

João Pessoa - Paraíba

05, 06 e 07 de Outubro, 2022

## Grupos Topológicos

Gleberson Gregorio da Silva Antunes

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

gleberonset@gmail.com

### 1 Introdução

Teoria de grupos e Topologia são duas de grandes áreas da Matemática, surgidas no século XIX, e que estudam objetos distintos: Grupos e Espaços topológicos, respectivamente. Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $\tau_G$  uma topologia em  $G$ . Faz sentido perguntar-se, se é sempre que dada uma topologia  $\tau_G$  em  $G$ ,  $(G, \cdot)$  é um grupo cuja a operação e a inversão são funções contínuas. A resposta para essa pergunta é: Nem sempre. Neste pôster, apresentaremos alguns resultados básicos sobre grupos topológicos que são parte do meu projeto de iniciação científica, em estágio inicial.

### 2 Definição e exemplos

**Definição 1.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $\tau_G$  uma topologia em  $G$ . O trio  $(G, \cdot, \tau_G)$  é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G & \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} & (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação** de  $G$  respectivamente, são contínuas quando  $G \times G$  é munido com a topologia produto.

**Exemplo 1.** Considere o grupo  $(\mathbb{K}_4, \cdot)$  e  $\tau = \{\emptyset, \{1, ab\}, \{a, b\}, \mathbb{K}_4\}$ . O trio  $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico.

**Exemplo 2.** Considere o grupo  $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$  e  $N = \{1, -1\}$ . A topologia  $\tau$  gerada pela base  $\mathcal{B} = \{Nx : x \in \mathbb{Q}_8\}$  é tal que  $(\mathbb{Q}_8, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico.

**Definição 2.** Seja  $X$  um conjunto. Uma família não-vazia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  é chamada de **filtro** se satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .
- (2) Se  $A, B \in \mathcal{F}$  então  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .
- (3) Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subset B$ , então  $B \in \mathcal{F}$ .

**Definição 3.** Seja  $X$  um conjunto. Uma família não-vazia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  é chamada de **base de um filtro** se satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ .
- (2) Se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

O filtro gerado por  $\mathcal{B}$  é a família:

$$\mathcal{F} = \{U \subset X : \exists B \in \mathcal{B}, B \subset U\}.$$

**Exemplo 3.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo. O conjunto  $\mathcal{B}$  formado por todos os subgrupos normais de  $(G, \cdot)$  com índice finito formam uma base de um filtro.

**Exemplo 4.** Seja  $(G, \cdot, \tau_G)$  um grupo topológico e  $g \in G$ . Chamamos de filtro de todas as vizinhanças de  $g$  o conjunto:

$$\mathcal{V}(g) := \{U \subset G : g \in N_g \subset U, N_g \in \tau_G\}.$$

formado por todas as vizinhanças de  $g$

### 3 Principais Teoremas

**Teorema 1.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $\tau_G$  uma topologia em  $G$ . Então,  $(G, \cdot, \tau_G)$  é um grupo topológico se, e somente se, a função

$$\begin{aligned} f : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

é contínua, onde  $G \times G$  está munido da topologia produto.

**Teorema 2.** Seja  $(G, \cdot, \tau_G)$  um grupo topológico e  $\mathcal{V}(1)$  o filtro de todas as vizinhanças de  $1_G$  nessa mesma topologia. Então:

- (1) Para cada  $U \in \mathcal{V}(1)$ , existe  $V \in \mathcal{V}(1)$  tal que  $V \cdot V \subset U$ .
- (2) Para cada  $U \in \mathcal{V}(1)$ , existe  $V \in \mathcal{V}(1)$  tal que  $V^{-1} \subset U$ .
- (3) Para cada  $U \in \mathcal{V}(1)$ , existe  $V \in \mathcal{V}(1)$  tal que  $V \cdot V^{-1} \subset U$ .
- (4) Para cada  $U \in \mathcal{V}(1)$  e  $a \in G$ , existe  $V \in \mathcal{V}(1)$  tal que  $aVa^{-1} \subset U$ .

**Teorema 3.** Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $\mathcal{V}$  um filtro que satisfaz as condições do Teorema 2. Então, existe uma única topologia  $\tau$  em  $G$  que torna  $(G, \cdot, \tau)$  um grupo topológico e que faz  $\mathcal{V}$  coincidir com  $\mathcal{V}(1)$ , o filtro de todas as vizinhanças de  $1_G$ .

### 4 Topologias pró-finitas

Daremos agora, alguns exemplos de topologias cuja a base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é formada por subgrupos normais. Seja  $(G, \cdot)$  um grupo e  $p$  um número primo.

**Exemplo 5.** A **topologia pró-finita** com  $\mathcal{B}$ , a família formada por todos subgrupos normais de índice finito, em  $G$ .

**Exemplo 6.** A **topologia pró-p-finita** com  $\mathcal{P}$ , a família formada por todos subgrupos normais cujo índice é finito e é uma potência de  $p$ , em  $G$ .

**Exemplo 7.** A **topologia pró-contável** com  $\mathcal{H}$ , a família formada por todos subgrupos normais de índice enumerável, em  $G$ .

### 5 Conclusão

Os resultados apresentados até agora são básicos porém já dispomos de ferramentas para estudar tópicos mais avançados, como por exemplo, invariantes topológicos como a conexidade, conexidade por caminhos e compacidade, axiomas de separação e aplicar em grupos topológicos.

### Referências

- [1] DIKRANJAN, Dikran. **Introduction to topological groups**. preparation, <http://users.dimi.uniud.it/~dikran.dikranjan/ITG.pdf>, 2013.
- [2] KUMAR, A. Muneesh; GNANACHANDRA, P. **Exploratory results on finite topological groups**. JP Journal of Geometry and Topology, v. 24, n. 1-2, p. 1-15, 2020.
- [3] MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 599 p. Disponível em: <https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0>. Acesso em: 10 set. 2022.
- [4] MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

### Agradecimentos

Agradeço ao Professor Dr. Kisney Emiliano de Almeida, meu orientador, pelo seu apoio, dedicação e disposição para a realização deste trabalho. Agradeço também a FAPESB pelo apoio financeiro concedido a mim.