Grupos Topológicos

Gleberson Gregorio da Silva Antunes
Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

Café com Teorema UEFS-UFBA

08 de Maio de 2023

Estrutura da apresentação

Grupos topológicos

Definição 1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i: \quad & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot: \quad & G \times G \longrightarrow G \\ & (x, y) \longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação de** G, respectivamente, são contínuas.

Daremos agora alguns exemplos de grupos topológicos.

Grupos topológicos

Definição 1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i: \quad G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot: \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação de** G, respectivamente, são contínuas.

Daremos agora alguns exemplos de grupos topológicos.

Grupos topológicos

Definição 1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i: \quad G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot: \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação de** G, respectivamente, são contínuas.

Daremos agora alguns exemplos de grupos topológicos.

Grupos topológicos

Definição 1

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G, \cdot, \tau_G)$ é dito um **grupo topológico** se as funções

$$\begin{aligned} i : \quad G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

chamadas de **inversão** e **operação de** G, respectivamente, são contínuas.

Daremos agora alguns exemplos de grupos topológicos.

Exemplo 1

O conjunto

$$\mathbb{K}_4 = \{e, a, b, ab\},$$

é um grupo, chamado de **Grupo de Klein**, quando definimos a seguinte tabela de operação

·	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	b	b	a	e

Exemplo 1

O conjunto

$$\mathbb{K}_4 = \{e, a, b, ab\},$$

é um grupo, chamado de **Grupo de Klein**, quando definimos a seguinte tabela de operação

·	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	b	b	a	e

Exemplo 1

O conjunto

$$\mathbb{K}_4 = \{e, a, b, ab\},$$

é um grupo, chamado de **Grupo de Klein**, quando definimos a seguinte tabela de operação

·	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	b	b	a	e

Exemplo 1

O conjunto

$$\mathbb{K}_4 = \{e, a, b, ab\},$$

é um grupo, chamado de **Grupo de Klein**, quando definimos a seguinte tabela de operação

·	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	b	b	a	e

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, \mathrm{ab}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4.$
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{1, ab\} \times \{1, ab\}).$
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \cup (\{a, b\} \times \{1, ab\}).$

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, \text{ab}\}, \{\text{a}, \text{b}\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4$.
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{1, ab\} \times \{1, ab\})$.
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \cup (\{a, b\} \times \{1, ab\})$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, \mathrm{ab}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4.$
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{1, ab\} \times \{1, ab\}).$
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \cup (\{a, b\} \times \{1, ab\}).$

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, ab\}, \{a, b\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4.$
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{1, ab\} \times \{1, ab\}).$
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \cup (\{a, b\} \times \{1, ab\}).$

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, \text{ab}\}, \{\text{a}, \text{b}\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4.$
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{1, ab\} \times \{1, ab\}).$
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \cup (\{a, b\} \times \{1, ab\}).$

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, \mathrm{ab}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4.$
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \cup (\{1, ab\} \times \{1, ab\}).$
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \cup (\{a, b\} \times \{1, ab\}).$

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Considere o grupo $(\mathbb{K}_4, \cdot)$ e $\tau_{\mathbb{K}_4} = \{\emptyset, \{1, ab\}, \{a, b\}, \mathbb{K}_4\}$. Note que

(i) $\cdot$ é contínua pois:

1. $\cdot^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $\cdot^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4$.
3. $\cdot^{-1}(\{1, ab\}) = (\{a, b\} \times \{a, b\}) \ \cup \ (\{1, ab\} \times \{1, ab\})$.
4. $\cdot^{-1}(\{a, b\}) = (\{1, ab\} \times \{a, b\}) \ \cup \ (\{a, b\} \times \{1, ab\})$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4 \times \mathbb{K}_4}$.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 1

Da mesma maneira, temos que

(ii) i é contínua pois:

1. $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $i^{-1}(\mathbb{K}_4) = \mathbb{K}_4$.
3. $i^{-1}(\{1, ab\}) = \{1, ab\}$.
4. $i^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

São abertos em $\tau_{\mathbb{K}_4}$. Portanto, $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ é um grupo topológico.

Exemplo 2

O conjunto

$$\mathbb{Q}_8 = \{1, \bar{1},\ i,\ \bar{i},\ j,\ \bar{j},\ k,\ \bar{k}\},$$

é um grupo, chamado de **grupo dos quatérnios**, quando definimos a seguinte tabela de operações

$\cdot$	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
1	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k
i	i	$\bar{i}$	$\bar{1}$	1	$\bar{k}$	k	j	$\bar{j}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	i	1	$\bar{1}$	k	$\bar{k}$	$\bar{j}$	j
j	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i
$\bar{j}$	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$
k	k	$\bar{k}$	j	$\bar{j}$	$\bar{i}$	i	$\bar{1}$	1
$\bar{k}$	$\bar{k}$	k	$\bar{j}$	j	i	$\bar{i}$	1	$\bar{1}$

Exemplo 2

O conjunto

$$\mathbb{Q}_8 = \{1, \bar{1},\ i,\ \bar{i},\ j,\ \bar{j},\ k,\ \bar{k}\},$$

é um grupo, chamado de **grupo dos quatérnios**, quando definimos a seguinte tabela de operações

$\cdot$	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
1	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k
i	i	$\bar{i}$	$\bar{1}$	1	$\bar{k}$	k	j	$\bar{j}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	i	1	$\bar{1}$	k	$\bar{k}$	$\bar{j}$	j
j	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i
$\bar{j}$	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$
k	k	$\bar{k}$	j	$\bar{j}$	$\bar{i}$	i	$\bar{1}$	1
$\bar{k}$	$\bar{k}$	k	$\bar{j}$	j	i	$\bar{i}$	1	$\bar{1}$

Exemplo 2

O conjunto

$$\mathbb{Q}_8 = \{1, \bar{1},\ i,\ \bar{i},\ j,\ \bar{j},\ k,\ \bar{k}\},$$

é um grupo, chamado de **grupo dos quatérnios**, quando definimos a seguinte tabela de operações

$\cdot$	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
1	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k
i	i	$\bar{i}$	$\bar{1}$	1	$\bar{k}$	k	j	$\bar{j}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	i	1	$\bar{1}$	k	$\bar{k}$	$\bar{j}$	j
j	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i
$\bar{j}$	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$
k	k	$\bar{k}$	j	$\bar{j}$	$\bar{i}$	i	$\bar{1}$	1
$\bar{k}$	$\bar{k}$	k	$\bar{j}$	j	i	$\bar{i}$	1	$\bar{1}$

Exemplo 2

O conjunto

$$\mathbb{Q}_8 = \{1, \bar{1},\ i,\ \bar{i},\ j,\ \bar{j},\ k,\ \bar{k}\},$$

é um grupo, chamado de **grupo dos quatérnios**, quando definimos a seguinte tabela de operações

$\cdot$	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
1	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k
i	i	$\bar{i}$	$\bar{1}$	1	$\bar{k}$	k	j	$\bar{j}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	i	1	$\bar{1}$	k	$\bar{k}$	$\bar{j}$	j
j	j	$\bar{j}$	k	$\bar{k}$	$\bar{1}$	1	$\bar{i}$	i
$\bar{j}$	$\bar{j}$	j	$\bar{k}$	k	1	$\bar{1}$	i	$\bar{i}$
k	k	$\bar{k}$	j	$\bar{j}$	$\bar{i}$	i	$\bar{1}$	1
$\bar{k}$	$\bar{k}$	k	$\bar{j}$	j	i	$\bar{i}$	1	$\bar{1}$

Considere o grupo $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ e $\mathrm{N} = \{1, \bar{1}\}$. A topologia τ gerada pela base

$$\mathscr{B} = \{\{1, \bar{1}\}, \{\mathrm{i}, \bar{i}\}, \{\mathrm{j}, \bar{j}\}, \{\mathrm{k}, \bar{k}\}\},$$

torna $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ um grupo topológico.

Considere o grupo $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ e $\mathrm{N} = \{1, \bar{1}\}$. A topologia τ gerada pela base

$$\mathscr{B} = \{\{1, \bar{1}\}, \{\mathrm{i}, \bar{i}\}, \{\mathrm{j}, \bar{j}\}, \{\mathrm{k}, \bar{k}\}\},$$

torna $(\mathbb{Q}_8, \cdot)$ um grupo topológico.

Outros exemplos

Exemplo 3

O grupo aditivo dos números reais $(\mathbb{R}, +)$ munido de $\tau_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de $\mathbb{R}$, é um grupo topológico.

Exemplo 4

Seja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ o grupo dos números complexos não-nulos, com a operação de multiplicação. A topologia da **bola aberta** torna $(\mathbb{C}^*, \cdot, \tau_{\mathbb{C}^*})$ um grupo topológico.

Mais exemplos de grupos topológicos podem ser encontrados em [1] e [2].

Outros exemplos

Exemplo 3

O grupo aditivo dos números reais $(\mathbb{R}, +)$ munido de $\tau_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de $\mathbb{R}$, é um grupo topológico.

Exemplo 4

Seja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ o grupo dos números complexos não-nulos, com a operação de multiplicação. A topologia da **bola aberta** torna $(\mathbb{C}^*, \cdot, \tau_{\mathbb{C}^*})$ um grupo topológico.

Mais exemplos de grupos topológicos podem ser encontrados em [1] e [2].

Outros exemplos

Exemplo 3

O grupo aditivo dos números reais $(\mathbb{R}, +)$ munido de $\tau_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de $\mathbb{R}$, é um grupo topológico.

Exemplo 4

Seja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ o grupo dos números complexos não-nulos, com a operação de multiplicação. A topologia da **bola aberta** torna $(\mathbb{C}^*, \cdot, \tau_{\mathbb{C}^*})$ um grupo topológico.

Mais exemplos de grupos topológicos podem ser encontrados em [1] e [2].

Outros exemplos

Exemplo 3

O grupo aditivo dos números reais $(\mathbb{R}, +)$ munido de $\tau_{\mathbb{R}}$, a topologia usual de $\mathbb{R}$, é um grupo topológico.

Exemplo 4

Seja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ o grupo dos números complexos não-nulos, com a operação de multiplicação. A topologia da **bola aberta** torna $(\mathbb{C}^*, \cdot, \tau_{\mathbb{C}^*})$ um grupo topológico.

Mais exemplos de grupos topológicos podem ser encontrados em [1] e [2].

Aplicações de translação

Fixado $g \in \mathrm{G}$, as aplicações $D_g, E_g, C_g : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$, dadas por $D_g(x) = xg$, $E_g(x) = gx$ e $C_g(x) = gxg^{-1}$, são chamadas de **translação à direita**, **translação à esquerda** e **conjugação por g**, respectivamente.

Apresentamos agora alguns resultados sobre as aplicações de translação.

Aplicações de translação

Fixado $g \in \mathrm{G}$, as aplicações D_g, E_g, $C_g : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$, dadas por $D_g(x) = xg$, $E_g(x) = gx$ e $C_g(x) = gxg^{-1}$, são chamadas de **translação à direita**, **translação à esquerda** e **conjugação por g**, respectivamente.

Apresentamos agora alguns resultados sobre as aplicações de translação.

Aplicações de translação

Fixado $g \in \mathrm{G}$, as aplicações $D_g, E_g, C_g : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$, dadas por $D_g(x) = xg$, $E_g(x) = gx$ e $C_g(x) = gxg^{-1}$, são chamadas de **translação à direita**, **translação à esquerda** e **conjugação por g**, respectivamente.

Apresentamos agora alguns resultados sobre as aplicações de translação.

Aplicações de translação

Teorema 5

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. As aplicações D_g, E_g, C_g : G $\longrightarrow$ G são homeomorfismos.

Teorema 6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $g \in G$. Então, toda vizinhança U de g é a imagem de uma vizinhança V de 1_G por uma aplicação de translação.

Teorema 7

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. Então G é discreto se, e somente se, $\{1_G\}$ é aberto.

Aplicações de translação

Teorema 5

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. As aplicações D_g, E_g, C_g : G $\longrightarrow$ G são homeomorfismos.

Teorema 6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $g \in G$. Então, toda vizinhança U de g é a imagem de uma vizinhança V de 1_G por uma aplicação de translação.

Teorema 7

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. Então G é discreto se, e somente se, $\{1_G\}$ é aberto.

Aplicações de translação

Teorema 5

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. As aplicações D_g, E_g, C_g : G $\longrightarrow$ G são homeomorfismos.

Teorema 6

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $g \in G$. Então, toda vizinhança U de g é a imagem de uma vizinhança V de 1_G por uma aplicação de translação.

Teorema 7

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. Então G é discreto se, e somente se, $\{1_G\}$ é aberto.

Continuidade de homomorfismos

Agora determinaremos uma condição para que um homomorfismo de grupos seja contínuo.

Teorema 8

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \circ, \tau_H)$ grupos topológicos e $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ um homomorfismo de grupos. Então, f é contínua se, e somente se, f é contínua em $1_G \in \mathrm{G}$.

Continuidade de homomorfismos

Agora determinaremos uma condição para que um homomorfismo de grupos seja contínuo.

Teorema 8

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \circ, \tau_H)$ grupos topológicos e $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ um homomorfismo de grupos. Então, f é contínua se, e somente se, f é contínua em $1_G \in \mathrm{G}$.

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é: Dados um grupo topológico $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$, existe alguma topologia τ_H que torne $(H, \times, \tau_H)$ um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$?

A resposta é **sim**!

Teorema 9

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$. Seja $f : G \longrightarrow H$ um isomorfismo. A coleção

$$\tau_H = \{U \subset H \mid f^{-1}(U) \in \tau_G\},$$

é tal que $(H, \times, \tau_H)$ é um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$.

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é: Dados um grupo topológico $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$, existe alguma topologia τ_H que torne $(H, \times, \tau_H)$ um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$?

A resposta é **sim**!

Teorema 9

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$. Seja $f : G \longrightarrow H$ um isomorfismo. A coleção

$$\tau_H = \{U \subset H \mid f^{-1}(U) \in \tau_G\},$$

é tal que $(H, \times, \tau_H)$ é um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$.

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é: Dados um grupo topológico $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$, existe alguma topologia τ_H que torne $(H, \times, \tau_H)$ um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$?

A resposta é **sim**!

Teorema 9

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$. Seja $f : G \longrightarrow H$ um isomorfismo. A coleção

$$\tau_H = \{U \subset H \mid f^{-1}(U) \in \tau_G\},$$

é tal que $(H, \times, \tau_H)$ é um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$.

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é: Dados um grupo topológico $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$, existe alguma topologia τ_H que torne $(H, \times, \tau_H)$ um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$?

A resposta é **sim**!

Teorema 9

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$. Seja $f : G \longrightarrow H$ um isomorfismo. A coleção

$$\tau_H = \{U \subset H \mid f^{-1}(U) \in \tau_G\},$$

é tal que $(H, \times, \tau_H)$ é um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$.

Uma pergunta natural que podemos nos fazer é: Dados um grupo topológico $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$, existe alguma topologia τ_H que torne $(H, \times, \tau_H)$ um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$?

A resposta é **sim**!

Teorema 9

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $(H, \times)$ um grupo isomorfo a $(G, \cdot)$. Seja $f : G \longrightarrow H$ um isomorfismo. A coleção

$$\tau_H = \{U \subset H \mid f^{-1}(U) \in \tau_G\},$$

é tal que $(H, \times, \tau_H)$ é um grupo topológico homeomorfo a $(G, \cdot, \tau_G)$.

Exemplo 10

Exemplo 10

Considere o grupo topológico $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ do Exemplo 1. Ele é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Então é possível tornar $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ um grupo topológico homeomorfo a $(\mathbb{K}_4, \cdot, \tau_{\mathbb{K}_4})$ por meio da topologia do teorema anterior.

Vizinhanças do elemento neutro

Nosso objetivo nesta seção é entender como o filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro funciona e sobre como ele descreve uma única topologia sobre o grupo.

Mais informações sobre filtros podem ser encontradas em [3].

Vizinhanças do elemento neutro

Nosso objetivo nesta seção é entender como o filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro funciona e sobre como ele descreve uma única topologia sobre o grupo.
Mais informações sobre filtros podem ser encontradas em [3].

Definição 11

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathcal{F}$ é **viável** quando

i. Para cada $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \cdot V \subset U$.

ii. Para cada $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V^{-1} \subset U$.

iii. Para cada $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \cdot V^{-1} \subset U$.

iv. Para cada $U \in \mathcal{F}$ e $a \in G$, tem-se que aUa^{-1}, $a^{-1}Ua \in \mathcal{F}$.

Definição 11

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathcal{F}$ é **viável** quando

i. Para cada U $\in \mathcal{F}$, existe V $\in \mathcal{F}$ tal que V $\cdot$ V $\subset$ U.

ii. Para cada U $\in \mathcal{F}$, existe V $\in \mathcal{F}$ tal que V$^{-1} \subset$ U.

iii. Para cada U $\in \mathcal{F}$, existe V $\in \mathcal{F}$ tal que V $\cdot$ V$^{-1} \subset$ U.

iv. Para cada U $\in \mathcal{F}$ e a $\in G$, tem-se que aUa^{-1}, $a^{-1}Ua \in \mathcal{F}$.

Definição 11

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathcal{F}$ é **viável** quando

i. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$.

ii. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V}^{-1} \subset \mathrm{U}$.

iii. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}^{-1} \subset \mathrm{U}$.

iv. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$ e $\mathrm{a} \in G$, tem-se que aUa^{-1}, $a^{-1}Ua \in \mathcal{F}$.

Definição 11

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathcal{F}$ é **viável** quando

i. Para cada U $\in \mathcal{F}$, existe V $\in \mathcal{F}$ tal que V $\cdot$ V $\subset$ U.

ii. Para cada U $\in \mathcal{F}$, existe V $\in \mathcal{F}$ tal que V$^{-1} \subset$ U.

iii. Para cada U $\in \mathcal{F}$, existe V $\in \mathcal{F}$ tal que V $\cdot$ V$^{-1} \subset$ U.

iv. Para cada U $\in \mathcal{F}$ e a $\in G$, tem-se que aUa^{-1}, $a^{-1}Ua \in \mathcal{F}$.

Definição 11

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathcal{F}$ é **viável** quando

i. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$.

ii. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V}^{-1} \subset \mathrm{U}$.

iii. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, existe $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}^{-1} \subset \mathrm{U}$.

iv. Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$ e $\mathrm{a} \in G$, tem-se que aUa^{-1}, $a^{-1}Ua \in \mathcal{F}$.

Filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro

Definição 12

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ uma topologia em G. Dado $g \in G$, chamamos de **filtro de todas as vizinhanças de** g o conjunto

$$\mathcal{V}(g) := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{G} \mid \mathrm{g} \in N_g \subset U,\ N_g \in \tau_G\}.$$

formado por todas as vizinhanças de g $\in$ G.

Daí, segue o seguinte lema.

Lema 13

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $\mathcal{V}(1_G)$ o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa mesma topologia. Então $\mathcal{V}(1_G)$ é um filtro viável.

Filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro

Definição 12

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ uma topologia em G. Dado $g \in G$, chamamos de **filtro de todas as vizinhanças de** g o conjunto

$$\mathcal{V}(g) := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{G} \mid \mathrm{g} \in N_g \subset U,\ N_g \in \tau_G\}.$$

formado por todas as vizinhanças de g ∈ G.

Daí, segue o seguinte lema.

Lema 13

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $\mathcal{V}(1_G)$ o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa mesma topologia. Então $\mathcal{V}(1_G)$ é um filtro viável.

Filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro

Definição 12

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ uma topologia em G. Dado $g \in G$, chamamos de **filtro de todas as vizinhanças de** g o conjunto

$$\mathcal{V}(g) := \{\mathrm{U} \subset \mathrm{G} \mid \mathrm{g} \in N_g \subset U,\ N_g \in \tau_G\}.$$

formado por todas as vizinhanças de $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$.

Daí, segue o seguinte lema.

Lema 13

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e $\mathcal{V}(1_G)$ o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa mesma topologia. Então $\mathcal{V}(1_G)$ é um filtro viável.

Filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro

O próximo teorema é o resultado mais importante desta seção. É através dele que, dado um grupo $(G, \cdot)$, podemos determinar uma única topologia τ em G de forma que $(G, \cdot, \tau)$ seja um grupo topológico, por meio de filtros.

Antes de enunciarmos esse teorema, citaremos três lemas que relacionam a topologia em um grupo com a continuidade das aplicações de translação e que são úteis para a prova do mesmo.

Filtro de todas as vizinhanças do elemento neutro

O próximo teorema é o resultado mais importante desta seção. É através dele que, dado um grupo $(G, \cdot)$, podemos determinar uma única topologia τ em G de forma que $(G, \cdot, \tau)$ seja um grupo topológico, por meio de filtros.

Antes de enunciarmos esse teorema, citaremos três lemas que relacionam a topologia em um grupo com a continuidade das aplicações de translação e que são úteis para a prova do mesmo.

Filtros viáveis e grupos topológicos

Definição 14

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e τ um topologia em G. Diremos que τ é **invariante à direita** quando, para cada $U \in \tau$ e $g \in G$, $Ug \in \tau$. De forma análoga, diremos que τ é **invariante à esquerda** quando para cada $U \in \tau$ e $g \in G$, $gU \in \tau$.

Segue que

Lema 15

Se τ é uma topologia invariante à direita ou à esquerda, então a topologia produto em $G \times G$ é também invariante à direita ou à esquerda.

Lema 16

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo, $g \in G$ e τ um topologia em G. Então, τ é invariante à direita se, e somente se, D_g é um homeomorfismo. Da mesma maneira, τ é invariante à esquerda se, e somente se, E_g é um homeomorfismo.

Segue que

Lema 15

Se τ é uma topologia invariante à direita ou à esquerda, então a topologia produto em $G \times G$ é também invariante à direita ou à esquerda.

Lema 16

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo, $g \in G$ e τ um topologia em G. Então, τ é invariante à direita se, e somente se, D_g é um homeomorfismo. Da mesma maneira, τ é invariante à esquerda se, e somente se, E_g é um homeomorfismo.

Lema 17

Seja $(G, \cdot)$ um grupo munido de uma topologia τ invariante à direita e à esquerda, respectivamente. Então $(G, \cdot, \tau)$ é um grupo topológico se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

i. $\cdot$ é contínua em $(1_G, 1_G)$.

ii. i é contínua em 1_G.

Lema 17

Seja $(G, \cdot)$ um grupo munido de uma topologia τ invariante à direita e à esquerda, respectivamente. Então $(G, \cdot, \tau)$ é um grupo topológico se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

i. $\cdot$ é contínua em $(1_G, 1_G)$.

ii. i é contínua em 1_G.

Lema 17

Seja $(G, \cdot)$ um grupo munido de uma topologia τ invariante à direita e à esquerda, respectivamente. Então $(G, \cdot, \tau)$ é um grupo topológico se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

i. $\cdot$ é contínua em $(1_G, 1_G)$.

ii. i é contínua em 1_G.

Filtro viáveis e grupos topológicos

Teorema 18

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{V}$ um filtro viável. Então, existe uma única topologia τ em G que torna $(G, \cdot, \tau)$ um grupo topológico e que faz $\mathcal{V}$ coincidir com $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia.

Demonstração: A saber

$$\tau := \{U \subset G \mid \text{para cada } u \in U, \text{ existe } V \in \mathcal{V}, \text{ tal que } \ uV \subset U\}.$$

Filtro viáveis e grupos topológicos

Teorema 18

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $\mathcal{V}$ um filtro viável. Então, existe uma única topologia τ em G que torna $(G, \cdot, \tau)$ um grupo topológico e que faz $\mathcal{V}$ coincidir com $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia.

Demonstração: A saber

$$\tau := \{U \subset G \mid \text{para cada } u \in U, \text{ existe } V \in \mathcal{V}, \text{ tal que } \; uV \subset U\}.$$

Alguns exemplos

Exemplo 19

Seja $(\mathbb{Z}, +)$ o grupo aditivo dos números inteiros. Dado um número primo p, considere a família

$$V_p := \{U \subset \mathbb{Z} \mid \text{existe } n \in \mathbb{N},\, p^n\mathbb{Z} \subset U\}.$$

V_p determina uma topologia em $\mathbb{Z}$, chamada de **topologia p-ádica**, tornando-o um grupo topológico.

Alguns exemplos

Exemplo 19

Seja $(\mathbb{Z}, +)$ o grupo aditivo dos números inteiros. Dado um número primo p, considere a família

$$V_p := \{U \subset \mathbb{Z} \mid \text{existe } n \in \mathbb{N},\, p^n\mathbb{Z} \subset U\}.$$

V_p determina uma topologia em $\mathbb{Z}$, chamada de **topologia p-ádica**, tornando-o um grupo topológico.

Alguns exemplos

Faz sentido irmos mais fundo, isto é, observar se conseguimos gerar um filtro que satisfaça as condições do Teorema 18. Isso é de fato possível. Daremos exemplos de bases de filtros que geram filtros viáveis e que satisfazem o Teorema 18.

Alguns exemplos

Faz sentido irmos mais fundo, isto é, observar se conseguimos gerar um filtro que satisfaça as condições do Teorema 18. Isso é de fato possível. Daremos exemplos de bases de filtros que geram filtros viáveis e que satisfazem o Teorema 18.

Alguns exemplos

Faz sentido irmos mais fundo, isto é, observar se conseguimos gerar um filtro que satisfaça as condições do Teorema 18. Isso é de fato possível. Daremos exemplos de bases de filtros que geram filtros viáveis e que satisfazem o Teorema 18.

Alguns exemplos

Exemplo 20

A **topologia pró-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{B}$, a família de todos os subgrupos normais de indíce finito em G.

Exemplo 21

A **topologia pró-p-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{P}$, a família de todos os subgrupos normais cujo indíce é finito e é uma potência de p primo em G.

Exemplo 22

A **topologia pró-enumerável**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{H}$, a família de todos subgrupos normais de indíce enumerável em G.

Alguns exemplos

Exemplo 20

A **topologia pró-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{B}$, a família de todos os subgrupos normais de indíce finito em G.

Exemplo 21

A **topologia pró-p-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{P}$, a família de todos os subgrupos normais cujo indíce é finito e é uma potência de p primo em G.

Exemplo 22

A **topologia pró-enumerável**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{H}$, a família de todos subgrupos normais de indíce enumerável em G.

Alguns exemplos

Exemplo 20

A **topologia pró-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{B}$, a família de todos os subgrupos normais de indíce finito em G.

Exemplo 21

A **topologia pró-p-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{P}$, a família de todos os subgrupos normais cujo indíce é finito e é uma potência de p primo em G.

Exemplo 22

A **topologia pró-enumerável**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{H}$, a família de todos subgrupos normais de indíce enumerável em G.

Alguns exemplos

Exemplo 20

A **topologia pró-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{B}$, a família de todos os subgrupos normais de indíce finito em G.

Exemplo 21

A **topologia pró-p-finita**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{P}$, a família de todos os subgrupos normais cujo indíce é finito e é uma potência de p primo em G.

Exemplo 22

A **topologia pró-enumerável**, cuja base do filtro de vizinhanças do elemento neutro é $\mathcal{H}$, a família de todos subgrupos normais de indíce enumerável em G.

Nesta seção apresentaremos uma série de proposições sobre subgrupos, axiomas de separação e grupos topológicos conexos e compactos.

Subgrupos

Teorema 23

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

ii. Se H é aberto, então H é fechado.

iii. Se H é fechado e $| G : H | < \infty$ então H é aberto.

iv. Se H é aberto e $(G, \cdot, \tau_G)$ é compacto, então $| G : H | < \infty$.

Subgrupos

Teorema 23

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

ii. Se H é aberto, então H é fechado.

iii. Se H é fechado e $\mid G : H \mid < \infty$ então H é aberto.

iv. Se H é aberto e $(G, \cdot, \tau_G)$ é compacto, então $\mid G : H \mid < \infty$.

Subgrupos

Teorema 23

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

ii. Se H é aberto, então H é fechado.

iii. Se H é fechado e $| G : H | < \infty$ então H é aberto.

iv. Se H é aberto e $(G, \cdot, \tau_G)$ é compacto, então $| G : H | < \infty$.

Subgrupos

Teorema 23

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

ii. Se H é aberto, então H é fechado.

iii. Se H é fechado e $\mid G : H \mid < \infty$ então H é aberto.

iv. Se H é aberto e $(G, \cdot, \tau_G)$ é compacto, então $\mid G : H \mid < \infty$.

Subgrupos

Teorema 23

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

ii. Se H é aberto, então H é fechado.

iii. Se H é fechado e $\mid G : H \mid < \infty$ então H é aberto.

iv. Se H é aberto e $(G, \cdot, \tau_G)$ é compacto, então $\mid G : H \mid < \infty$.

Subgrupos

Ainda sobre subgrupos, temos que

Teorema 24

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap_{U,V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV)$.

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

iii. $N = \overline{\{1\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Subgrupos

Ainda sobre subgrupos, temos que

Teorema 24

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap_{U,V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV).$

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

iii. $N = \overline{\{1\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Subgrupos

Ainda sobre subgrupos, temos que

Teorema 24

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap_{U,V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV)$.

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

iii. $N = \overline{\{1\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Subgrupos

Ainda sobre subgrupos, temos que

Teorema 24

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathcal{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (UH) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}(1_G)} (HU) = \bigcap_{U,V \in \mathcal{V}(1_G)} (UHV)$.

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

iii. $N = \overline{\{1\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Axiomas de separação

Definição 25

Um espaço topológico (X, τ_X) é dito **regular** quando dados um conjunto fechado F e um ponto x que não pertence a F, existem abertos U e V disjuntos que contém F e x, respectivamente.

Teorema 26

Todo grupo topológico é regular.

Axiomas de separação

Definição 25

Um espaço topológico (X, τ_X) é dito **regular** quando dados um conjunto fechado F e um ponto x que não pertence a F, existem abertos U e V disjuntos que contém F e x, respectivamente.

Teorema 26

Todo grupo topológico é regular.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.
ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.
iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.
iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.
ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.
iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.
iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.

ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.

iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.

iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.

ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.

iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.

iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.
ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.
iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.
iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.
ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.
iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.
iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Axiomas de separação

Ainda sobre os axiomas de separação, temos que

Teorema 27

Seja $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico. São equivalentes

i. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_3$.
ii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_2$.
iii. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_1$.
iv. (G, τ_G) é $\mathbb{T}_0$.

Teorema 28

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então

i. O quociente $G/_H$ é discreto se, e somente se, H é aberto.

ii. O quociente $G/_H$ é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.

Teorema 28

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então

i. O quociente $G/_H$ é discreto se, e somente se, H é aberto.

ii. O quociente $G/_H$ é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.

Teorema 28

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então

i. O quociente $G/_{H}$ é discreto se, e somente se, H é aberto.

ii. O quociente $G/_{H}$ é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.

Teorema 28

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então

i. O quociente $G/_H$ é discreto se, e somente se, H é aberto.

ii. O quociente $G/_H$ é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.

Conexidade e compacidade

Teorema 28

Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e N um subgrupo normal de G. Então

i. Se N e $G/_N$ são conexos então G é conexo.

ii. Se G é compacto então $G/_N$ é compacto.

iii. Se N e $G/_N$ são compactos então G é compacto.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, meu orientador, pelo convite para realizar a apresentação. Agradeço também a FAPESB pelo apoio financeiro concedido a mim.

Referências

[1] DIKRANJAN, Dikran. **Introduction to topological groups**. preparation, `http://users.dimi.uniud.it/~dikran.dikranjan/ITG.pdf`, 2013.

[2] KUMAR, A. Muneesh; GNANACHANDRA, P. **Exploratory results on finite topological groups**. JP Journal of Geometry and Topology, v. 24, n. 1-2, p. 1-15, 2020.

[3] MEZABARBA, Renan Maneli. **Fundamentos de Topologia Geral**. [S. l.: s. n.], 2022. 574 p. Disponível em: `https://sites.google.com/view/rmmezabarba/home?authuser=0`. Acesso em: 10 set. 2022.

[4] SAN MARTIN, Luiz AB. **Grupos de lie**. Editora Unicamp, 2016.

Thank You