Лекция №10. Антагонистические матричные игры: чистые и смешанные стратегии. Методы решения конечных игр: сведение игры m x n к задаче ЛП, численный метод - метод итераций.

Введение

Антагонистические игры – это игры, в которых цели участников противоположны друг другу, т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Такие игры представлены в форме матрицы выигрышей, где **строки** соответствуют стратегиям одного игрока, **столбцы** — стратегиям другого, а клетки содержат выигрыши первого игрока | проигрыши второго.

Простые примеры антагонистических игр включают классические сценарии типа «камень-ножницы-бумага» и др.

Основные понятия

Матрица выигрышей

Пусть два игрока участвуют в игре. Первый игрок имеет m возможных стратегий (S_A), второй — n стратегий (S_B).

Обозначим a_{ij} — выигрыш первого игрока, если первый выбрал стратегию i, а второй — стратегию j. Если же второй игрок выигрывает, то выигрыш первого считается отрицательным числом.

Пример простой матрицы выигрышей размером 2×2:

	B_1	B_2
A_1	3	-2
A_2	-1	4

Задача состоит в поиске наилучших стратегий, обеспечивающих максимальный выигрыш первому игроку и минимальный второму.

Чистые стратегии

Чистой называется такая стратегия, при которой игрок фиксирует единственный вариант своего поведения (строку или столбец в матрице).

Пусть оба игрока применяют чистые стратегии. Рассмотрим возможные варианты выбора:

- **Доминирование:** одна стратегия доминирует над другой, если её применение даёт лучший результат независимо от выбора противника.

  Например, если для всех стратегий соперника выполняется условие $\mathbf{a_{i,j}} > \mathbf{a_{k,j}}$**,** значит, стратегия i лучше стратегии k.

- **Парето-доминантность:** если среди стратегий существует пара (i, j), при которой никто из игроков не хочет менять свою стратегию, то эта комбинация считается **устойчивым решением (равновесием Нэша**).

Однако не всякая игра обладает таким простым решением. Часто приходится искать компромиссные стратегии.

Смешанные стратегии

При отсутствии очевидных доминантных стратегий вводятся **смешанные стратеги:** когда игрок применяет каждую чистую стратегию с некоторой вероятностью.

То есть, каждому варианту присваиваются веса (вероятности):

- Игрок A выбирает стратегию i-ю с вероятностью p_i,
- Игрок B выбирает стратегию j-ю с вероятностью q_j.
- Тогда общий ожидаемый выигрыш игрока A рассчитывается по формуле:

$$\boxed{E(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}}$$

Задача теперь состоит в выборе такого набора вероятностей p и q, при которых гарантированный выигрыш максимален для игрока A и минимален для игрока B.

Оптимальное решение: Линейное программирование

Оптимальная стратегия часто находится путём преобразования игры в стандартную задачу линейного программирования (ЛП).

Конечную игру m×n можно свести к двум двойственным задачам ЛП:

Для игрока A задача формулируется так:

Максимизация: V,

при ограничениях:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq v & \forall j \in \{1, \ldots, n\} \\ y_i \geq 0 & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \end{array}}$$

Аналогично для игрока B:

Минимизация: W,

при ограничениях:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} x_j b_{ji} \leq w & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}}$$

Решив обе задачи методами ЛП (симплекс-метод, градиентный спуск и т.п.), получаем оптимальное распределение стратегий y^* и x^*.

Итерационные методы решения игр

Другой распространённый способ — использование итерационных процедур, таких как **алгоритм Браун-Робинсон** (фиктивная игра). Этот метод основан на постепенном улучшении текущих оценок оптимальной стратегии путем наблюдения средних выигрышей.

Алгоритм:

Шаг 1. Инициализируем вероятности $p^{(0)} = (1/m)$ и $q^{(0)} = (1/n)$.

Шаг 2. Зафиксировав $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, вычисляем средние выигрыши

$$\boxed{E_k = \frac{\sum E(p^{(k)}, q^{(k)})}{N}.}$$

Шаг 3. Изменяем вероятности, сдвигаясь в сторону лучшей стратегии:

$$\boxed{\mathbf{p}^{(k+1)} = \alpha \cdot \mathbf{e}_s + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{p}^{(k)}}$$

где

$\mathbf{e}_s$ — единичный вектор соответствующей наилучшей стратегии,

$\boldsymbol{\alpha}$ — коэффициент обновления.

Шаг 4. Продолжаем процесс до стабилизации значений выигрышей.

Заключение

Изучение антагонистических игр позволяет решать важные практические задачи, такие как распределение ресурсов, проведение переговоров и многое другое.

Использование комбинаций чистых и смешанных стратегий, преобразование игр в задачи линейного программирования и итерационный подход позволяют находить эффективные решения даже в сложных ситуациях.

Применение методов решения игровых моделей становится мощным инструментом для понимания динамики конкурентных взаимодействий и разработки эффективных стратегий в разных сферах жизни.