UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
SEP0587 – Princípios de Economia

Prof. Dr. José Eduardo Holler Branco

Exercício 1.3 – Teoria do Consumidor
(Entrega para 02/04/2018)

Considerando que um determinado consumidor possui uma renda de $600,00 para gastar em dois tipos de produtos, vestuário (V) e alimentos (A), que a função utilidade proporcionada pelo consumo dos bens seja $U = 100 - 3.\left(A - {}^{55}/_{6}\right)^2 - 2.\left(V - {}^{45}/_{2}\right)^2$ e que as curvas de indiferença do consumo desses produtos são aquelas apresentadas na **Figura 1**, pede-se:

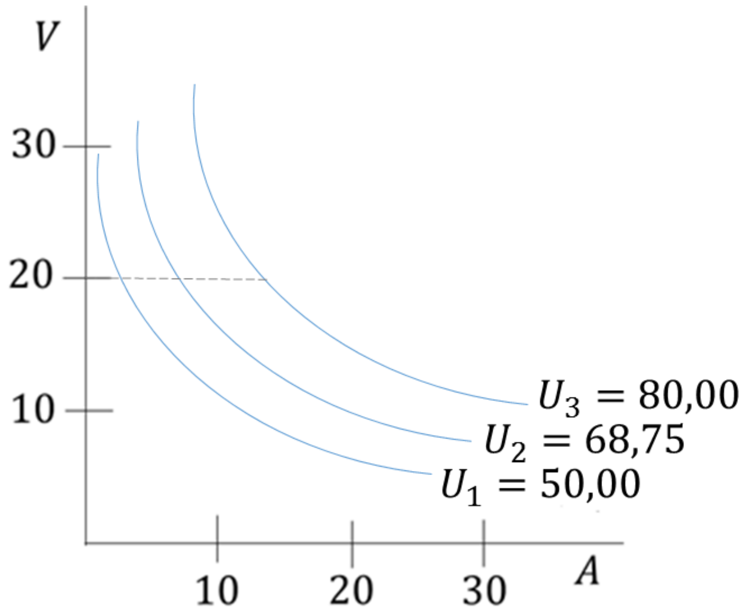

Figura 1 – Curvas de indiferença do consumo entre vestuário e alimento

1) Dado que os preços dos produtos são $p_V = 20$ e $p_A = 30$, trace no gráfico a linha que representa a restrição orçamentária.

   Considerando os preços dos produtos apresentados, a reta que representa a restrição orçamentária pode ser expressa como:

   $I = PA.A + PV.V$
   $600 = 30.A + 20.V$
   $V = -\frac{3}{2}.A + 30$ (reta orçamentária) [1]

   Representando a equação [1] no gráfico com as curvas de indiferença obtém-se:

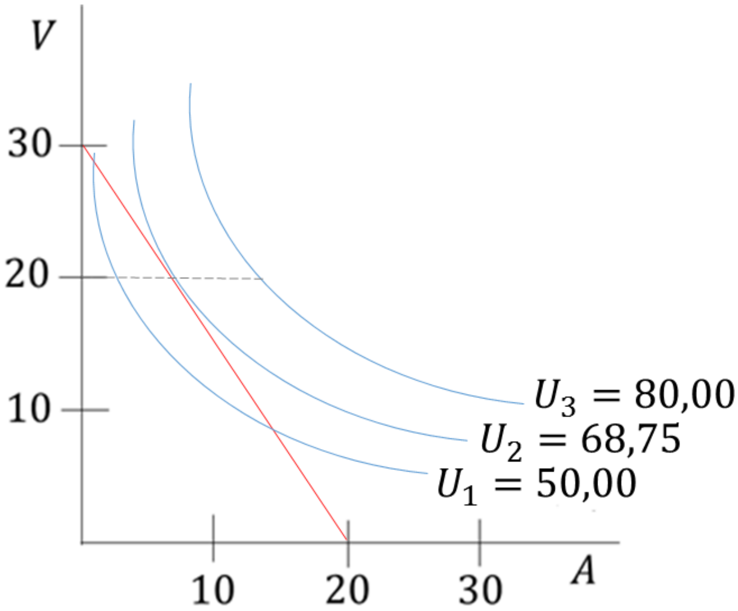

Figura 2 – Curvas de indiferença do consumo entre vestuário e alimento, e linha orçamentária.

2) Qual a utilidade máxima esse consumidor conseguirá alcançar considerando a restrição orçamentária? Demonstre no gráfico.

A utilidade máxima que o consumidor consegue alcançar dada a restrição orçamentária é $U_2 = 68{,}75$. A Figura 2 ilustra essa solução graficamente.

A cesta de produtos que maximiza a função utilidade, respeitando a restrição orçamentária é composta por:

$V = 20$ (obtido graficamente)

$$A = -\frac{2}{3}V + 20 \rightarrow A = -\frac{2}{3}.20 + 20 = \frac{20}{3}$$

3) Qual a Taxa Marginal de Substituição observada nessa cesta de consumo?

A Taxa Marginal de Substituição (TMS) no ponto que maximiza a Utilidade é dada por:

$$TMS = -\frac{\Delta V}{\Delta A} = \frac{pA}{pV} = \frac{30}{20} = 1{,}5$$

4) Calcule a utilidade marginal de V e a utilidade marginal de A dessa cesta de produtos, e encontre a relação $\frac{UM_A}{UM_V}$.

$$UM_V = \frac{\partial U}{\partial V} = -4V + 90$$

$$UM_A = \frac{\partial U}{\partial A} = -6A + 55$$

$$\frac{UM_A}{UM_V} = \frac{-6A + 55}{-4V + 90} = \frac{-6.\frac{20}{3} + 55}{-4.20 + 90} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

5) Verifique se a relação que maximiza a utilidade do consumidor e representa sua escolha é observada $TMS = \frac{UM_A}{UM_V} = \frac{p_A}{p_V}$.

A partir do resultado encontrado em 3 e 4, verifica-se que:

$$TMS = -\frac{\Delta V}{\Delta A} = \frac{p_A}{p_V} = \frac{UM_A}{UM_V} = 1{,}5$$

6) Faça um gráfico em três dimensões representando a função utilidade.

$$U = 100 - 3(A - \frac{55}{6})^2 - 2(V - \frac{45}{2})^2$$

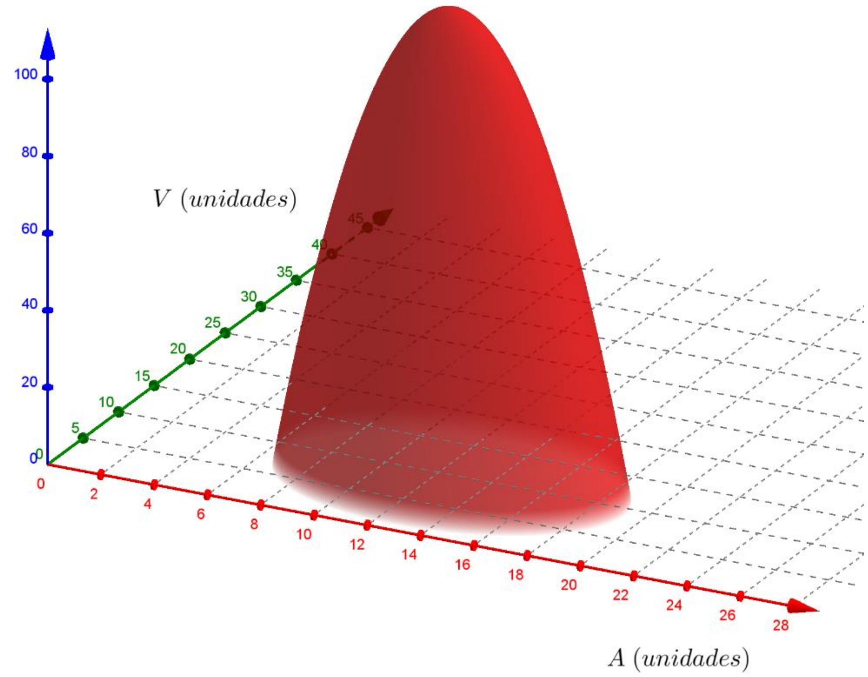

Figura 3 – Representação gráfica da Função Utilidade $U(V, A)$

7) Resolva pelo método do Lagrange o problema de Maximização da Utilidade dada a restrição orçamentária.

O problema de maximização da função utilidade dada uma restrição do tipo igualdade pode ser resolvido aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, conforme desenvolvimento a seguir:

Problema de otimização:

$$MAX\ U = 100 - 3.\left(A - {}^{55}/_{6}\right)^2 - 2.\left(V - {}^{45}/_{2}\right)^2$$

sujeito a:

$$600 = 30.A + 20.V$$

A Lagrangiana assume a seguinte forma:

$$L(A, V, \boldsymbol{\lambda}) = \ 100 - 3.\left(A - {}^{55}/_{6}\right)^2 - 2.\left(V - {}^{45}/_{2}\right)^2 - \ \boldsymbol{\lambda}.(30A + 20V - 600)$$

Aplicando a condição de primeira ordem, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\nabla L(A, V, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = -6A + 55 - 30\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \qquad [1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial V} = -4V + 90 - 20\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \qquad [2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \ 30A + 20V = 600 \qquad [3]$$

Isolando $\boldsymbol{\lambda}$ nas equações [1] e [2] observa-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{A} + \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{30}} \qquad [1.A]$$

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{V} + \frac{\mathbf{90}}{\mathbf{20}} \qquad [2.A]$$

$$\therefore -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{V} + \frac{\mathbf{90}}{\mathbf{20}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{A} + \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{30}}$$

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{V} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{A} + \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{30}} - \frac{\mathbf{90}}{\mathbf{20}}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A} - \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{2}} \qquad [4]$$

Substituindo [4] em [3] encontra-se:

$$30A + 20(\boldsymbol{A} - \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{2}}) = 600$$

$$50A = 600 + \frac{\mathbf{10.55}}{\mathbf{3}} - \mathbf{10.45}$$

$$50A = \frac{\mathbf{1800}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{550}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1350}}{\mathbf{3}}$$

$$A = \frac{\mathbf{1000}}{\mathbf{3.50}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}} \qquad [5]$$

Substituindo [5] em [4], encontra-se V:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{40-55+135}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{120}}{\mathbf{6}} = 20$$

O método dos Multiplicadores de Lagrange encontra valores extremos de uma função, mas não permite classificar aquele ponto como valor máximo ou valor mínimo da função.

Contudo, como as funções utilidades normalmente são formuladas com uma configuração côncava, conforme é o caso da função utilidade considerada nesse exercício (veja gráfico da questão 5), é possível afirmar que a solução encontrada é um máximo restrito, sem investigar as condições de segunda ordem da otimização.

A Figura a seguir apresenta uma interpretação gráfica da solução encontrada pelo método dos Multiplicadores de Lagrange:

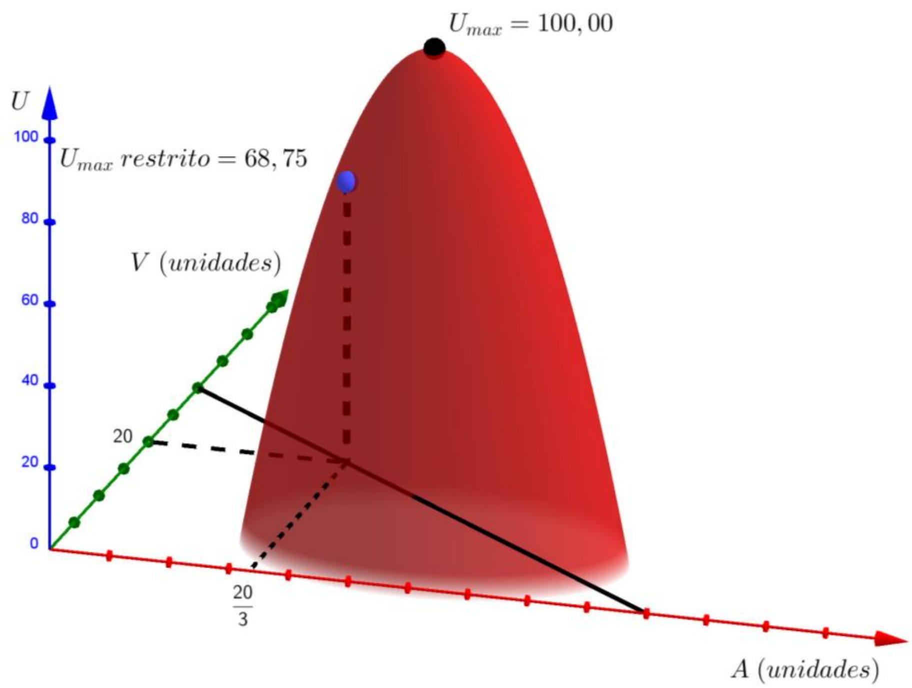

Figura 4 – Representação gráfica da solução encontrada pelo método dos Multiplicadores de Lagrange

Note-se que a função utilidade não restrita apresenta um valor máximo global $U = 100$ e a aplicação do método dos Multiplicadores de Lagrange resultou em uma utilidade máxima restrita ao orçamento igual a $U = 68{,}75$. Verifique ainda que a solução encontra-se em cima da linha que representa a restrição orçamentária, e é equivalente a solução gráfica encontrada na questão 2.

8) Considerando que o gráfico exibido na **Figura 2** traduz a mudança da escolha do consumidor do ponto **A** para o ponto **B** decorrente de uma redução no preço de alimentos, demonstre graficamente qual é o efeito substituição e o efeito renda dessa migração.

Deslocando a linha orçamentária após a redução do preço dos alimentos (aquela que passa no ponto B) de forma a tangenciar a curva de indiferença U_1, encontra-se o ponto A' que define a parcela do efeito total ET que pode ser atribuída ao efeito substituição ES, sendo a outra parcela devido ao efeito renda ER, conforme ilustrado no gráfico a seguir:

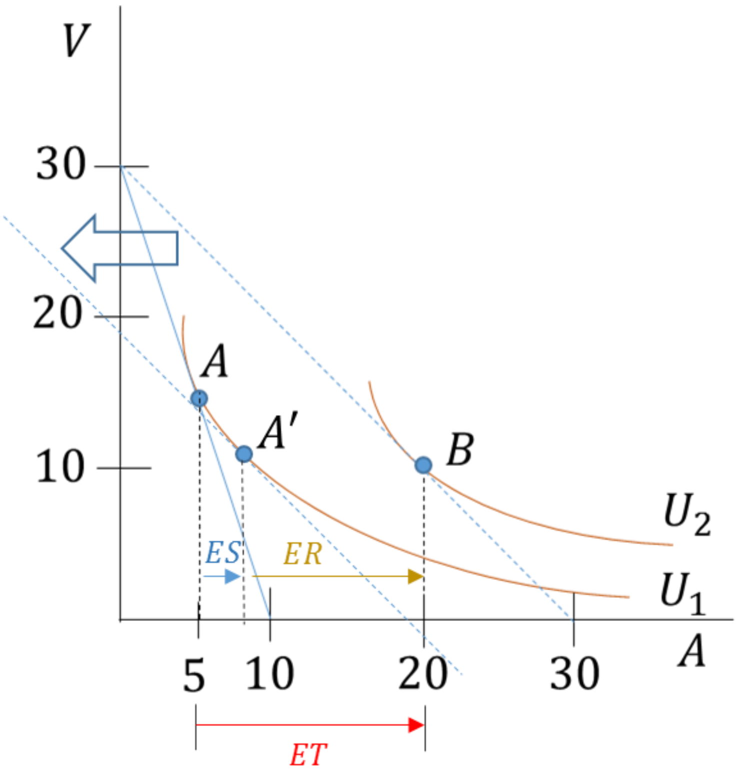

Figura 5 – Representação gráfica do efeito total, efeito substituição e efeito renda