Занятие 3

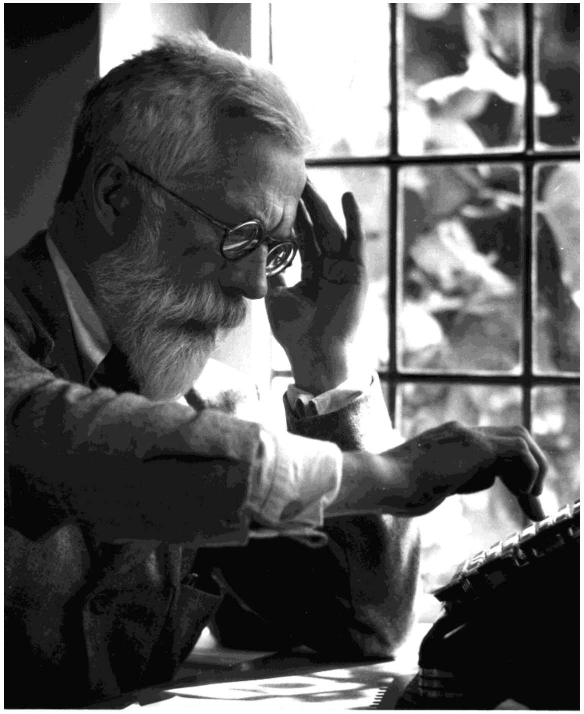
Дисперсионный анализ ANOVA

ANOVA

Сравнение **ДВУХ** И **БОЛЕЕ** групп

Дисперсионный анализ
ANOVA (analysis of variance)

Дисперсионный анализ — метод, направленный на поиск зависимостей в экспериментальных данных путём исследования значимости различий в средних значениях. В отличие от t-критерия, позволяет сравнивать средние значения трёх и более групп. Разработан Р. Фишером для анализа результатов экспериментальных исследований. В литературе также встречается обозначение ANOVA (от англ. ANalysis Of VAriance).



Сэр Ро́налд Э́йлмер Фи́шер
(Sir Ronald Aylmer Fisher)

ANOVA

Мы тестировали гипотезы о среднем значении для одной и двух выборок.
Теперь выборок **три или больше**.

Например, у нас 4 группы тигров, которых кормят по-разному. Различается ли средняя масса тигра в этих группах?








ANOVA

Одна <u>зависимая</u> переменная (variable): масса;
Одна <u>независимая</u> (группирующая, factor) – тип еды. $\rightarrow$ One-way ANOVA

Тигров кормили:

1. овощами;
2. фруктами;
3. рыбой;
4. мясом.

Формулируем гипотезу H_0:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

Это <u>сложная гипотеза</u> (omnibus hypothesis). Она включает в себя много маленьких гипотез (для 3-х групп – 3, для 4-х – 12 …):

$$\left.\begin{aligned} H_{01} &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_{02} &: \mu_1 = \mu_4 \\ H_{03} &: \mu_1 = \mu_3 \\ H_{04} &: \mu_2 = \mu_3 \\ H_{05} &: \mu_2 = \mu_4 \\ H_{06} &: \mu_3 = \mu_4 \end{aligned}\right\}$$

Парные (pairwise) нулевые гипотезы

$$\left.\begin{aligned} H_{07} &: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \\ H_{08} &: \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3} \\ &\ldots \end{aligned}\right\}$$

Комплексные (complex) нулевые гипотезы

ANOVA

Формулируем альтернативную гипотезу:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \quad \textbf{?}$$

НЕВЕРНО!

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ **или** $\mu_1 \neq \mu_3$ **или** $\mu_1 \neq \mu_4$ **…**

Мы отвергаем общую H_0 гипотезу если верна хотя бы одна из маленьких частных альтернативных гипотез (парных или комплексных)!

Какая именно – ANOVA не говорит.

Почему бы не сравнить группы попарно *t*-критерием? (Ошибка использования критерия Стьюдента)

1. мы таким образом проверяем не все гипотезы, которые содержатся в сложной гипотезе;
2. резко увеличивается вероятность найти различия, где их нет!! (общая вероятность ошибки 1-го рода).

Эффект МНОЖЕСТВЕННЫХ СРАВНЕНИЙ
(при сравнении нескольких групп попарно).

Level of Significance, α, Used in the t Tests

k	C	0.05	0.01
2	1	0.05	0.01
3	3	0.14	0.03
4	6	0.26	0.06
5	10	0.40	0.10
6	15	0.54	0.14
10	45	0.90	0.36
	∞	1.00	1.00

*There are $C = k(k-1)/2$ pairwise comparisons of k means.

В случае, если все H_0 верны, суммарная **вероятность ошибки 1-го рода** в эксперименте из *C* сравнений -

$$p = 1 - (1 - \alpha)^C$$

В случае 4-х групп ≈ **26,5%**

Zar, 2010

Общая логика ANOVA

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$ (т.е., средние в 4-х популяциях равны)

Формируем 4 независимых случайных выборки и считаем выборочные средние для каждой из них (они оценивают популяционные средние).

Если H_0 верна, выборочные средние должны быть **примерно** одинаковы.

Чем дальше друг от друга отстоят средние значения в группах, тем меньше вероятность, что верна H_0

ANOVA

Пусть все группы будут одинакового размера (для простоты объяснения).

Если H_0 верна, то 4 наших группы получены из ОДНОЙ популяции с конкретными средним μ и дисперсией σ^2.

Получим 2 независимые **точечные оценки σ^2 и сравним их!**

На этой идее основана АНОВА.

1. Оценим σ^2 на основе дисперсии групповых средних (как будто это выборочные средние)

$$s^2_{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (\bar{X}_j - \bar{X}_G)^2}{k-1}$$

число групп

2. Оценим σ^2 на основе дисперсий внутри групп

овощи	фрукты	мясо	рыба
151	108	147	130
135	94	138	128
137	84	143	140
118	87	135	142
132	82	153	139
135	79	137	145
131	74	148	144
137	73	140	140
121	67	144	141
140	78	146	140
152	63	151	142
133	90	145	137
151	81	146	148
132	96	147	142
139	83	150	143
96	89	144	140
133,7	***83***	***144,6***	***140,1***

1. Оценка общей дисперсии по разбросу МЕЖДУ группами

средние в каждой группе

общее среднее

$$MS_B = \boxed{s_{\bar{X}}^2 n} = \frac{\sum \left(\bar{X}_j - \bar{X}_G\right)^2}{k-1} n$$

$\boxed{df_B = k\text{-}1}$

число групп -1 (4 - 1 = 3)

размер группы

MS_B – **m**ean **s**quare **b**etween groups, оценка расстояния между средними в группах (сокращение от mean squared deviation from the mean)

различия большие - H_0 не верна

MS_B = groups MS

ANOVA

овощи	фрукты	мясо	рыба
151	108	147	130
135	94	138	128
137	84	143	140
118	87	135	142
132	82	153	139
135	79	137	145
131	74	148	144
137	73	140	140
121	67	144	141
140	78	146	140
152	63	151	142
133	90	145	137
151	81	146	148
132	96	147	142
139	83	150	143
96	89	144	140
133,7	***83***	***144,6***	***140,1***

2. Оценка общей дисперсии по разбросу ВНУТРИ групп

сумма квадратов стандартных отклонений внутри групп

$$MS_W = \frac{\overbrace{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_k^2}}{k}$$

число групп

$$\boxed{df_W = n_G - k}$$

статистика:

$$\boxed{F = \frac{MS_B}{MS_W}}$$

MS_w = error MS

Статистика критерия: F

$$F = \frac{\text{оценка дисперсии } \textbf{между} \text{ группами}}{\text{оценка дисперсии } \textbf{внутри} \text{ групп}} \qquad F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

- Не соответствует общей формуле

$$\text{Статистика} = \frac{\text{параметр } \textbf{выборки} - \text{параметр } \textbf{популяции}}{\text{стандартная } \textbf{ошибка} \text{ параметра выборки}}$$

- Приводится как F_{df_B, df_W}, т.е., например, $F_{3,60}$

ANOVA

ANOVA table

источник изменчивости	***SS***	***df***	***MS***	***F***
между	SS_B	df_B	MS_B	F
внутри	SS_W	df_W	MS_W	
общее	SS_T	df_T		

$$SS_T = SS_W + SS_B$$

$$df_T = df_W + df_B$$

$df_W = n_G - k$ $df_B = k-1$

SS это суммы квадратов отклонений (sum of squared deviations):

SS_B - средних в группах от <u>общего среднего</u> = **Effect**;

SS_W – измерений от <u>средних в группах</u> = **Error**.

$$\boxed{SS_T} = \sum (X_{ij} - \overline{X_G})^2 = \sum (X_{ij} - \overline{X_j})^2 + \sum (\overline{X_j} - \overline{X_G})^2 = \boxed{SS_W + SS_B}$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{df_W} \qquad MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$$

$$\boxed{F = \frac{MS_B}{MS_W}}$$

ANOVA
связь с двухвыборочным t-критерием Стьюдента

В случае числа групп k=2 однофакторный дисперсионный анализ ANOVA эквивалентен t-критерию Стьюдента, причём

$$F = t^2$$

MS_w идентично s_{pooled}

Т.е., условия применения и выводы одинаковы, за исключением того, что ANOVA – всегда двусторонний тест.

ANOVA

ANOVA effect size

«Практическая значимость» результата:

1. $$\boxed{\eta^2 = \frac{SS_B}{SS_T}}$$

η = 0.0099 – маленький эффект,
η = 0.0588 – средний эффект,
η = 0.1379 – большой эффект.

2. $$f = \frac{s_{\overline{X}}}{\sqrt{MS_W}}$$

f = 0.1 – маленький эффект
f = 0.25 – средний эффект
f = 0.4 – большой эффект

SS_B - межгрупповая сумма квадратов

SS_T - общая сумма квадратов

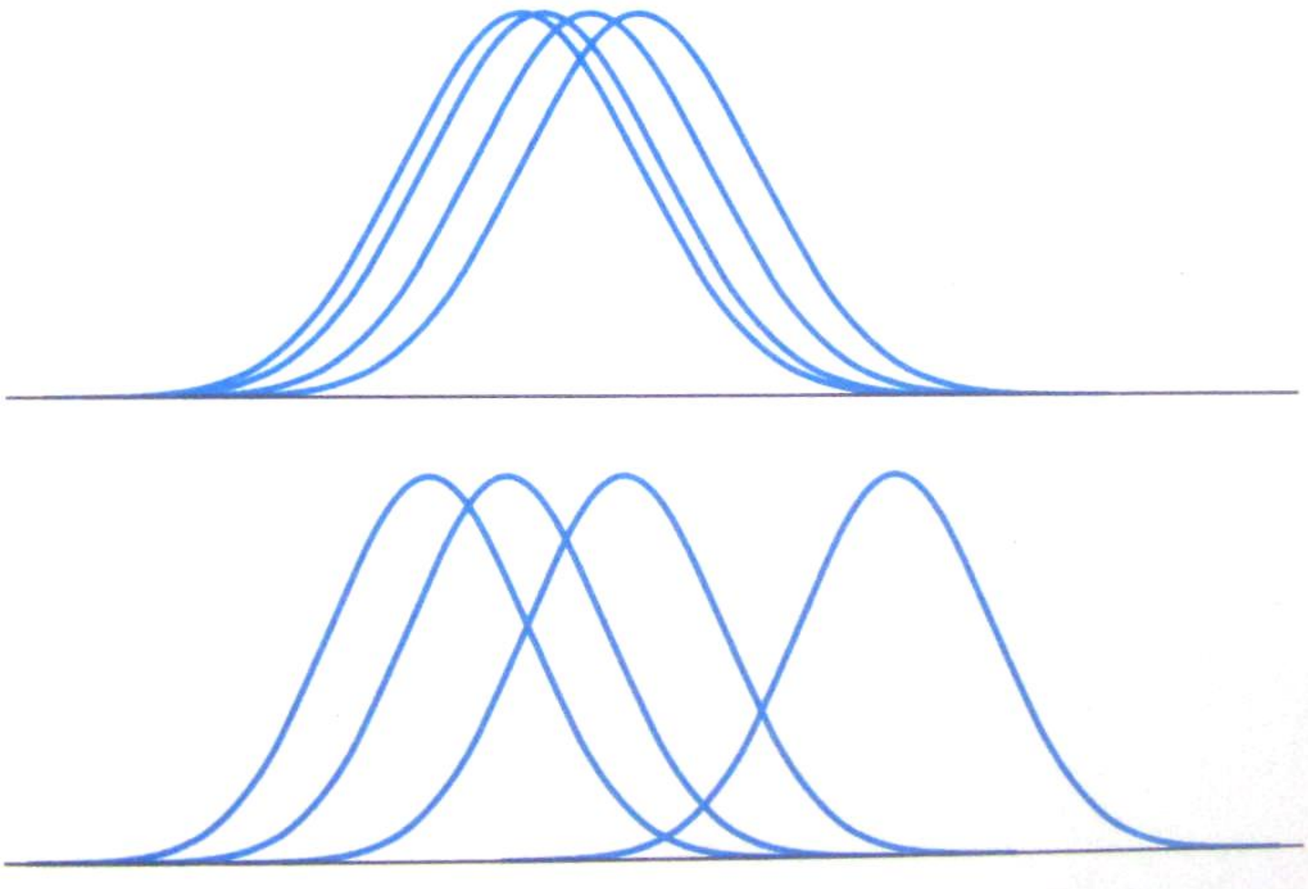
S_x – стандартное отклонение

MS_W - средний квадрат отклонений внутри групп

Нет однозначных рекомендаций как считать размер эффекта для ANOVA

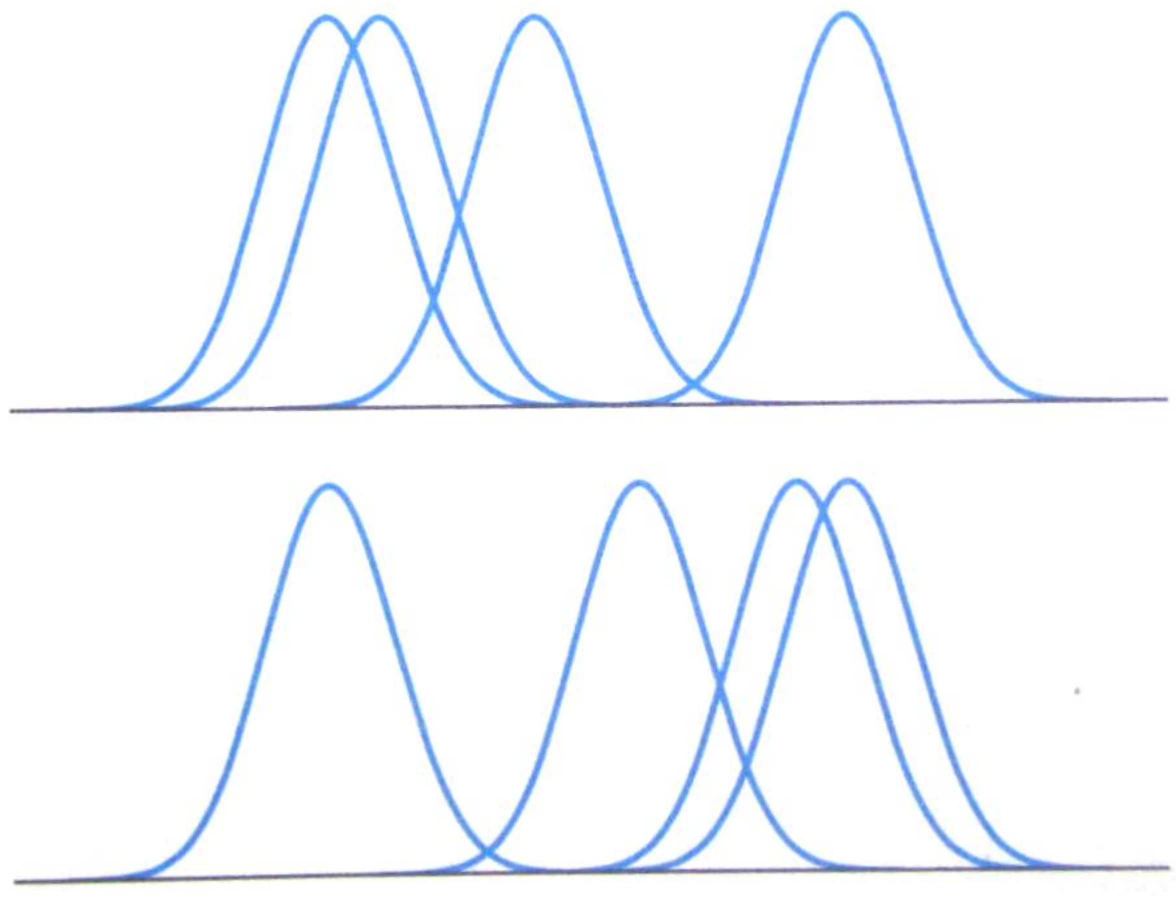
ANOVA

В каком случае значение F-статистики будет больше?



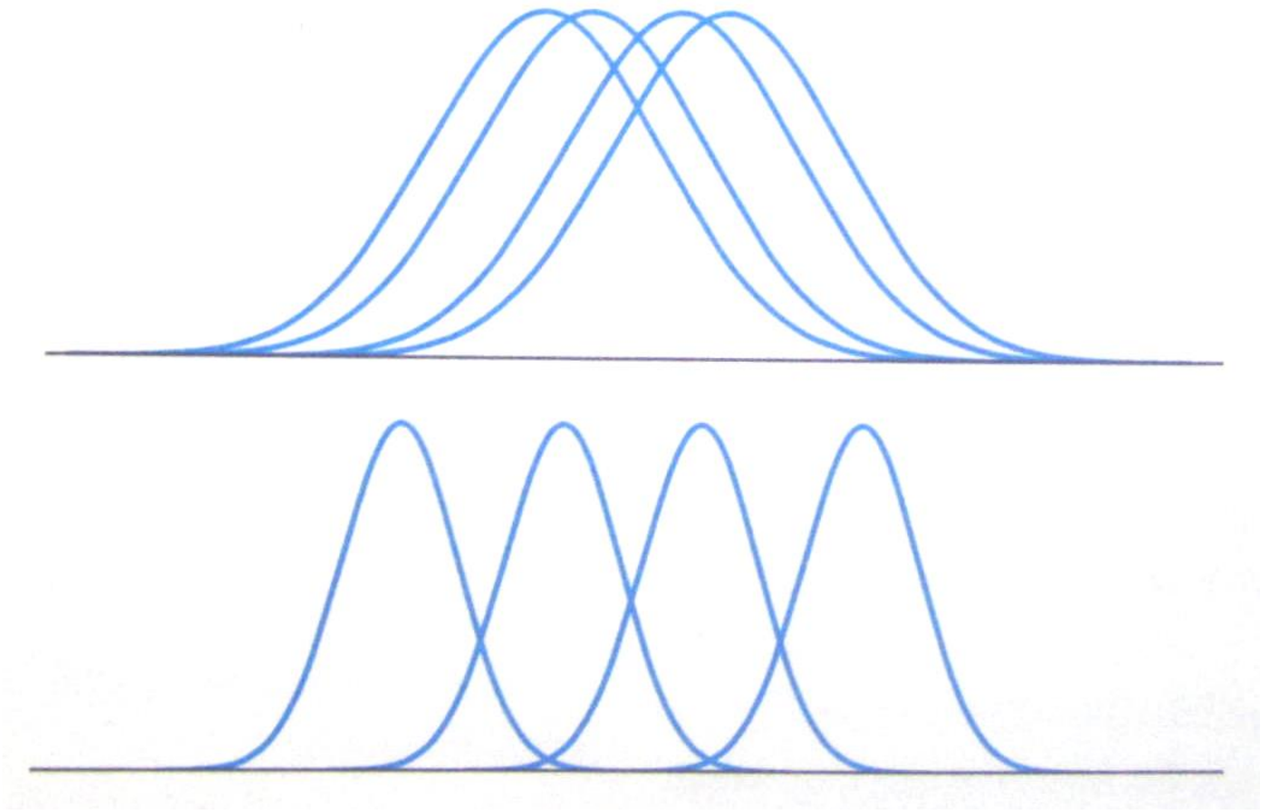
ANOVA

В каком случае значение F-статистики будет больше?



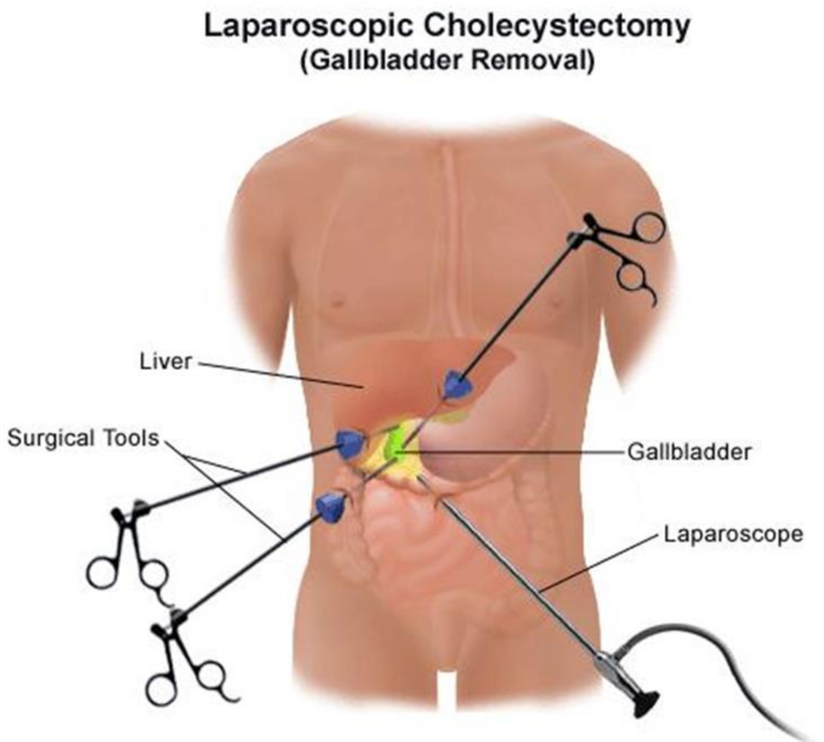
ANOVA

В каком случае значение F-статистики будет больше?



Пример 2

В условиях клинической больницы было решено провести исследование по **оценке влияния возраста на длительность госпитализации после <u>лапароскопической холецистэктомии</u>**. Для удобства показа вычислений берем «малую выборку».



Лапароскопическая холецистэктомия (называемая также эндоскопическая холецистэктомия, или лапароскопия желчного пузыря) — это хирургическое вмешательство по **удалению желчного пузыря**, которое является наиболее эффективным методом лечения желчнокаменной болезни. Операция является малотравматичной, проводится эндоскопически, т.е. без больших разрезов. По статистике холецистэктомия — самая распространенная в мире лапароскопическая операция.

9 пациентов были разделены на 3 группы в зависимости от возраста:

Таблица

Длительность госпитализации после лапароскопической холецистэктомии в зависимости от возраста, дни

Группа №1 Младше 45 лет	Группа №2 45-55 лет	Группа №3 Старше 55 лет
3	5	7
1	3	6
2	4	5
$\bar{x}=2$	$\bar{x}=4$	$\bar{x}=6$

Нужно сделать выводы о влиянии возраста на длительность госпитализации после лапароскопической холецистэктомии

1. Постановка нулевой гипотезы

H_0 указывает на отсутствие различий между группами, иными словами все группы по возрасту относятся к одной генеральной совокупности и соответственно средние равны друг другу

$$\mu 1 = \mu 2 = \mu 3$$

Альтернативная гипотеза выдвигает предположение, что длительность госпитализации зависит от возраста и средние в этих группах на самом деле не равны

$$\mu 1 \neq \mu 2 \neq \mu 3$$

Группа №1 Младше 45 лет	Группа №2 45-55 лет	Группа №3 Старше 55 лет
3	5	7
1	3	6
2	4	5
$\bar{x}=2$	$\bar{x}=4$	$\bar{x}=6$

2. Найдем общую сумму квадратов

Для этого нам нужно знать общую среднюю по всем выборкам, найдем ее:

$\bar{x}= (2+4+6)/3=4$

$\mathbf{SS_T} = (3-4)^2 + (1-4)^2 + (2-4)^2 +(5-4)^2 +(3-4)^2 + (4-4)^2 + (7-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 = 30$

3. Найдем сумму квадратов внутри групп

последовательно вычитая из каждого значения в группе групповую среднюю:

$\mathbf{SS_W} = (3-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2 + (5-6)^2 =$

$2+2+2 = 6$

Sum of squares within groups

Группа №1 Младше 45 лет	Группа №2 45-55 лет	Группа №3 Старше 55 лет
3	5	7
1	3	6
2	4	5
$\bar{x}=2$	$\bar{x}=4$	$\bar{x}=6$

4. *Найдем межгрупповую сумму квадратов*

Для этого нам необходимо найти квадрат отклонения каждой из выборочных средних относительно общей средней:

$\mathbf{SS}_{\boldsymbol{B}} = 3(2-4)^2+3(4-4)^2+3(6-4)^2=24$

Sum of squares between groups

5. *Найдем значение критерия Фишера,*

исходя из **средних квадратов отклонений** внутри групп (MS_W) и между ними (MS_B) и соответствующих **степеней свободы**:

$df_B = m - 1 = 3-1 = 2$

$df_W = n - m = 9 - 3 = 6$

$$\boxed{F = \frac{MS_B}{MS_W}}$$

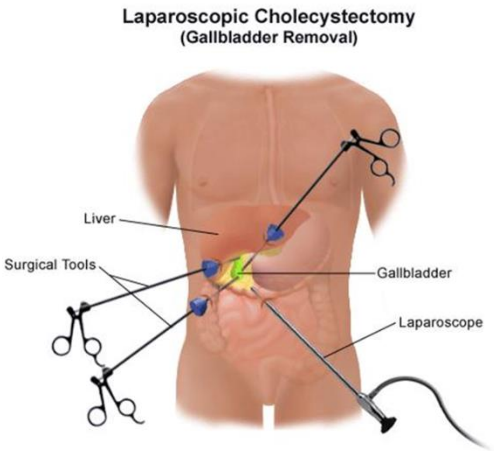
$$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{df_W}$$

m – число групп

n – количество наблюдений в каждой из групп

Группа №1 Младше 45 лет	Группа №2 45-55 лет	Группа №3 Старше 55 лет
3	5	7
1	3	6
2	4	5
$\bar{x}=2$	$\bar{x}=4$	$\bar{x}=6$



F = 12, Fкрит. = 5,1 при **уровне значимости** **α = 0,05**
F > Fкрит.

Делаем вывод о наличии статистически значимых отличий между группами: так как <u>наше значение F больше критического значения при заданном количестве наблюдений и количестве групп</u>

Возраст влияет на длительность госпитализации после холецистэктомии

Как найти **критическое = табличное** значение критерия F Фишера для сравнения ?

$$F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

в таблице найти значение на пересечении числа степеней свободы для межгрупповой дисперсии и внутригрупповой дисперсии

$df_{BG} = m - 1 = 3\text{-}1 = \mathbf{2}$

$df_{WG} = n - m = 9 - 3 = \mathbf{6}$

Значения критерия *F* Фишера при уровне значимости $\alpha = 0.05$
(число степеней свободы указано для дисперсии знаменателя – в строке, для дисперсии числителя – в столбце)

df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	254
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.4
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.9	8.9	8.8	8.8	8.7	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	6.1	6.0	6.0	5.9	5.9	5.8	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.9	4.8	4.8	4.7	4.6	4.6	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.7	4.5	4.4	4.3	4.2	4.2	4.1	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7
7	5.6	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.3	3.2	3.2	3.1	3.0
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.2	3.1	3.0	2.9	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	3.1	3.1	3.0	3.0	2.9	2.8	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	3.0	3.0	2.9	2.9	2.7	2.7	2.6	2.4
12	4.7	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.9	2.8	2.8	2.6	2.5	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.5	2.5	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.7	2.6	2.5	2.5	2.3	2.3	2.2	2.0
17	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0
18	4.4	3.5	3.2	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.2	2.2	2.1	1.9
20	4.3	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.8
21	4.3	3.5	3.1	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.8
22	4.3	3.4	3.0	2.8	2.7	2.5	2.5	2.4	2.3	2.3	2.1	2.1	2.0	1.8
23	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.1	2.0	1.9	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.7
28	4.2	3.3	2.9	2.7	2.6	2.4	2.4	2.3	2.2	2.2	2.0	2.0	1.9	1.6
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.0	1.9	1.8	1.6
40	4.1	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	1.9	1.8	1.7	1.5
60	4.0	3.1	2.8	2.5	2.4	2.2	2.2	2.1	2.0	2.0	1.8	1.7	1.6	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.7	1.7	1.6	1.2
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.0

One-way ANOVA: assumptions (рекомендации и требования к выборкам)

1. Выборки должны быть случайными
2. Размеры выборок должны различаться как можно меньше (с увеличением разницы в размерах между выборками мощность теста резко падает);
3. Соответствие нормальному распределению
4. Равенство дисперсий в выборках
5. В выборках не должно быть очевидных аутлаеров (они сильно влияют на дисперсии)
6. Желательно, чтобы размер выборок был ≥ 10

N.B. Небольшое отклонение от какого-нибудь из требований компенсируется соблюдением остальных.

Как повысить мощность ANOVA:

1. Увеличить размер выборок;
2. Уменьшить число групп;
3. Уменьшить внутригрупповую изменчивость.

Как и для двухвыборочного t-критерия, для ANOVA можно перед проведением эксперимента рассчитать:

✓размеры выборок для заданных мощности и размера эффекта;
✓мощность для выборок данного размера с конкретным размером эффекта.

ANOVA

На всякий случай:
Возможно провести one-way ANOVA в случае, если у нас в руках есть только средние значения, показатели разброса (SD, SE, s^2) и размер выборок (например, из какой-нибудь статьи)

Поскольку для каждой группы $s^2 = SD^2 = n(SE)^2$, для k групп

$$\boxed{SS_w = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2}$$

$$\boxed{df_W = n_G - k}$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{df_W}$$

$$\boxed{SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{X}_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{X}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

$$\boxed{df_B = k\text{-}1}$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$$

$$\boxed{F = \frac{MS_B}{MS_W}}$$

ANOVA post hoc tests

Сложная «омнибусная» гипотеза АНОВЫ:

$$\boxed{H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \ldots = \mu_k}$$

Похожа на стрельбу из дробовика: не нужно особенно точно целиться, НО непонятно, какая дробинка попала в какую мишень!

<u>Какая же из отдельных гипотез не верна?</u>

Ответить поможет апостериорный (post hoc) тест!

ANOVA post hoc tests

Если у нас 3 и более групп:

1. Сначала сравнить ВСЕ группы между собой с помощью ANOVA
2. Если различия есть, использовать методы множественного сравнения (группы сравнивают попарно, но вводят поправки)
3. Если различий нет, мы НЕ ИМЕЕМ ПРАВА ПРЕДПРИНИМАТЬ ДАЛЬНЕЙШИЙ АНАЛИЗ!

Двухвыборочный t-критерий для сравнения групп попарно после проведения ANOVA тоже не годится!

Например, если мы сравним две крайние группы, это уже будут не случайные выборки из генеральной совокупности, и α уже будет не 0.05!

ANOVA post hoc tests

Поправка Бонферрони (*Bonferroni correction* для небольших k)

если мы хотим обеспечить уровень значимости α, то в каждом из k сравнений (т-тестов) нужно принять уровень значимости α/k

Простейшая поправка, но очень грубая!

Не работает при большом числе групп – с увеличением их числа очень сильно падает мощность теста.

Сегодня почти не используется, её даже не включают в современные учебники.

Behavioral Ecology Vol. 15 No. 6: 1044–1045
doi:10.1093/beheco/arh107
Advance Access publication on June 30, 2004

A farewell to Bonferroni: the problems of low statistical power and publication bias

Shinichi Nakagawa
Department of Animal and Plant Sciences, University of Sheffield, Sheffield S10 2TN, United Kingdom

associated with the standard Bonferroni procedure is a substantial reduction in the statistical power of rejecting an incorrect H_o in each test (e.g., Holm, 1979; Perneger, 1998; Rice, 1989). The sequential Bonferroni procedure also incurs reduction in power, but to a lesser extent (which is the reason that the sequential procedure is used in preference by some researchers; Moran, 2003). Thus, both procedures exacerbate the existing problem of low power, identified by Jennions and

ANOVA post hoc tests

Тест Тьюки (Tukey HSD test)

Наиболее распространённый и рекомендуемый в литературе тест (Hurlburt, 2006; Zar, 2010).
Рекомендуется для близких по размеру групп.
Проверяет только ПАРНЫЕ (но не комплексные) гипотезы.

$$
\begin{aligned}
H_{01} &: \mu_1 = \mu_2 \\
H_{02} &: \mu_1 = \mu_4 \\
H_{03} &: \mu_1 = \mu_3 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

?

ANOVA post hoc tests

Другие апостериорные тесты

1. Критерий Ньюмена-Кейлса (*Newman-Keuls test*) - наименее строгий. Все средние упорядочивают по возрастанию и вычисляют критерий; начинают от сравнения наибольшего с наименьшим.
2. Критерий Шеффе (Scheffe test) – проверяет не только парные гипотезы, но и комплексные.
3. Критерий Даннетта (*Dunnett test*) – используется для сравнения нескольких групп с контрольной группой. Размер контрольной группы рекомендуется делать больше, чем размеры остальных групп в $\sqrt{k-1}$ раз.

Бывает так, что в ANOVA нулевая гипотеза отвергается, а пост-хок тесты не обнаруживают различий, так как их мощность ниже. В этом случае необходимо увеличивать размер выборки.

Сложная «омнибусная» гипотеза АНОВЫ:

$$\boxed{H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = ... = \mu_k}$$

Похожа на стрельбу из дробовика: не нужно особенно точно целиться, непонятно, какая дробинка попала в какую мишень – какая из маленьких гипотез не верна.

Что делать, если мы изначально хотим **проверить не все эти гипотезы**? Хотим выстрелить из винтовки в строго определённую мишень?

a priori Tests =
Planned comparisons = анализ контрастов

(вместо ANOVA)

Вся мощность теста направляется на одну гипотезу, остальные игнорируются.

Важно: то, какую гипотезу тестировать, выбирают **ЗАРАНЕЕ**, до проведения какого-либо анализа! В идеале – ещё при постановке исследования.

Частный случай *a priori* теста – двухвыборочный t-критерий Стьюдента.

Процедура тестирования у *a priori* тестов – почти как у t-критерия Стьюдента.

анализ контрастов

Обычно используются для тестирования <u>КОМПЛЕКСНЫХ</u> (а не парных) гипотез.

Dr. J разработал новую диету и собирается протестировать её эффективность. Из 20 добровольцев

группа 1 (n=5) соблюдает новую диету;

группа 2 (n=5) занимается на тренажёре;

группа 3 (n=5) занимается аэробикой;

группа 4 (n=5) бегает по утрам.

анализ контрастов

Зависимая переменная – число грамм, на которое изменилась масса тела добровольцев за 3 месяца.

Можно было бы провести ANOVA затем апостериорный тест, но нас интересует лишь сравнение диеты Dr. J с разными видами физических упражнений.

анализ контрастов

$$H_0 : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3}$$

$$\boxed{H_0 : \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 = 0}$$

«**Контраст**» = «сравнение» (contrast, comparison) – линейная комбинация средних значений.

Другая формулировка H_0: «популяционное сравнение» = 0

анализ контрастов

$$H_0: \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 \neq 0$$

$$\text{Статистика} = \frac{\text{параметр } \textbf{выборки} \text{ – параметр } \textbf{популяции}}{\text{стандартная } \textbf{ошибка} \text{ параметра выборки}}$$

$$\text{Статистика} = \frac{\text{выборочное сравнение - 0}}{\text{стандартная } \textbf{ошибка} \text{ выборочного сравнения}}$$

$$\boxed{t = \frac{C_1\overline{X}_1 + C_2\overline{X}_2 + C_3\overline{X}_3 + C_4\overline{X}_4}{s_{contrast}}}$$

Она имеет t-распределение

анализ контрастов

Ещё один пример:

У нас 4 группы тигров, их кормят: овощами; фруктами; рыбой; мясом.

Вопрос: отличается ли масса тигров, питающихся животной и растительной пищей?

$$H_0 : \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$





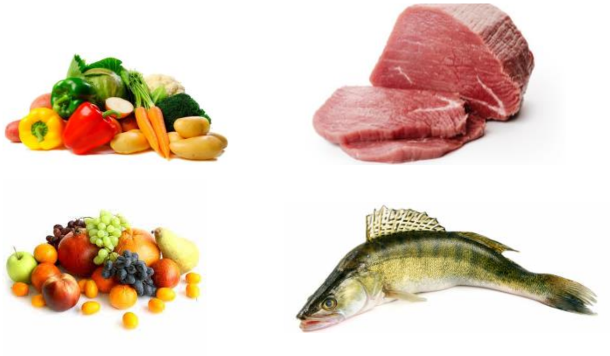



Planned comparisons (анализ контрастов):

МОЩНОСТЬ такого теста существенно ВЫШЕ, чем последовательное использование АНОВЫ и методов множественного сравнения!
Поэтому, если исследователя интересует конкретное сравнение, лучше использовать анализ контрастов.
(и это лучше, чем просто объединить выборки и сравнить т-тестом, так как учитываются различия между группами по одну сторону знака «=»)

Factorial ANOVA

One-way ANOVA:



Одна зависимая переменная, variable (масса тела);
Одна группирующая = фактор (тип пищи).
Одна нулевая гипотеза $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

Что делать, если нужно проанализировать влияние двух (трёх и т.д.) факторов на зависимую переменную?

Factorial ANOVA

Например,
Мы изучаем влияние размножения на массу тела у самок африканских земляных белок разного возраста.
Зависимая переменная – масса тела.
Фактор А – наличие выводка (1. есть; 2. нет)
Фактор В – возраст (1 год, 2 года, 3 года и старше).

Фактора ДВА, наш выбор - two-way ANOVA

Factorial ANOVA

	1 год	2 года	≥3 года
без выводка	440 438 429 502 602	892 868 855 866 932	1575 849 759 1602 1327
с выводком	308 328 326 326 325	737 798,5 876 810 861	1000,5 901 958 1032 883

Получилось a x b = 2 x 3 = 6 групп белок – 6 <u>ячеек</u> (cells) в таблице.

Заметим, что во ВСЕХ ячейках должны выполняться <u>условия</u> соответствия нормальному распределению и равенства дисперсий.

Пусть в каждой ячейке по n наблюдений.

Factorial ANOVA

	1 год	2 года	≥3 года
без выводка	440 438 429 502 602	892 868 855 866 932	1575 849 759 1602 1327
с выводком	308 328 326 326 325	737 798,5 876 810 861	1000,5 901 958 1032 883

Формулируем 3 нулевые гипотезы (и 3 альтернативные):

H_0: наличие выводка не влияет на массу самки ($\mu_{\text{б/выводка}} = \mu_{\text{с выводком}}$)

H_0: возраст самки не влияет на массу самки ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_{\geq 3}$)

H_0: нет взаимодействия между факторами.

Factorial ANOVA

$$MS_{factorA} = \frac{SS_{factorA}}{df_{factorA}} = \frac{bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{X}_i - \bar{X}_G)^2}{a-1}$$

$$F_{factorA} = \frac{MS_{factorA}}{MS_{error}}$$

$$MS_{factorB} = \frac{SS_{factorB}}{df_{factorB}} = \frac{an\sum_{j=1}^{b}(\bar{X}_j - \bar{X}_G)^2}{b-1}$$

$$F_{factorB} = \frac{MS_{factorB}}{MS_{error}}$$

$$MS_{error} = \frac{SS_{error}}{df_{error}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\sum_{l=1}^{n}(X_{ijl} - \bar{X}_{ij})^2\right]}{N-ab}$$

Factorial ANOVA

Дисперсия между ячейками не равна сумме изменчивостей между уровнями фактора А и уровнями фактора В. Эта разница определяется взаимодействием факторов:

$$MS_{AB\,interaction} = \frac{SS_{AB\,interaction}}{df_{AB\,interaction}} = \frac{SS_{cells} - SS_{factorA} - SS_{factorB}}{df_{cells} - df_{factorA} - df_{factorB}}$$

$df_{interaction} = df_{factorA} \times df_{factorB}$

$$\boxed{F_{AB\,interaction} = \frac{MS_{AB\,interaction}}{MS_{error}}}$$

$$SS_{cells} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{G})^2 \qquad df_{cells} = ab - 1$$

Factorial ANOVA

То есть, для каждой гипотезы мы рассчитываем своё F-значение и сравниваем его со своим критическим уровнем.

Изменчивость между строками

$$F_{R_{obs}} = \frac{MS_R}{MS_W}$$

MS_{error}, средняя по ячейкам внутригрупповая изменчивость

$$F_{C_{obs}} = \frac{MS_C}{MS_W}$$

Изменчивость между столбцами

$$F_{RC_{obs}} = \frac{MS_{RC}}{MS_W}$$

«взаимодействие» факторов

Достоверное взаимодействие факторов говорит о том, что различия между уровнями одного из факторов неодинаковы для всех уровней другого фактора.

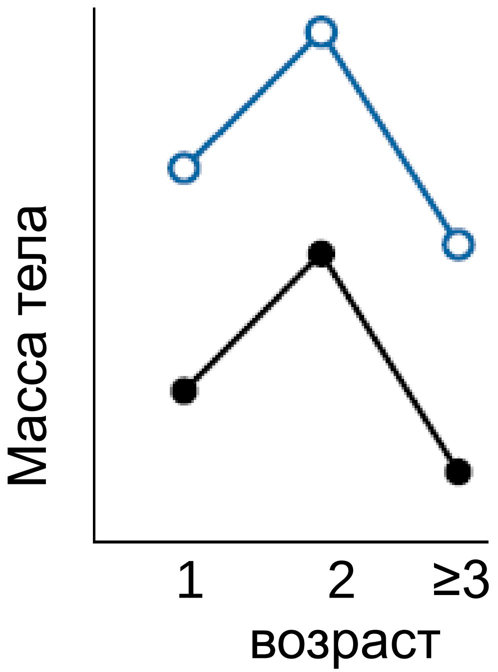
Factorial ANOVA

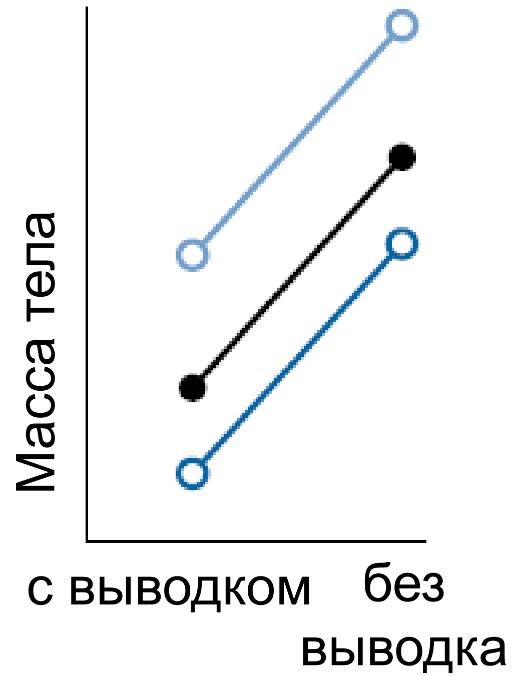
ANOVA table

Source of variation	Sum of squares (SS)	Degrees of freedom (*df*)	Mean square (MS)	*F*
Row	SS_R	$R-1$	SS_R/df_R	MS_R/MS_W
Column	SS_C	$C-1$	SS_C/df_C	MS_C/MS_W
RC interaction	SS_{RC}	$(R-1)(C-1)$	SS_{RC}/df_{RC}	MS_{RC}/MS_W
Within cell	SS_W	$RC(n-1)$	SS_W/df_W	
Total	SS_T	n_G-1		

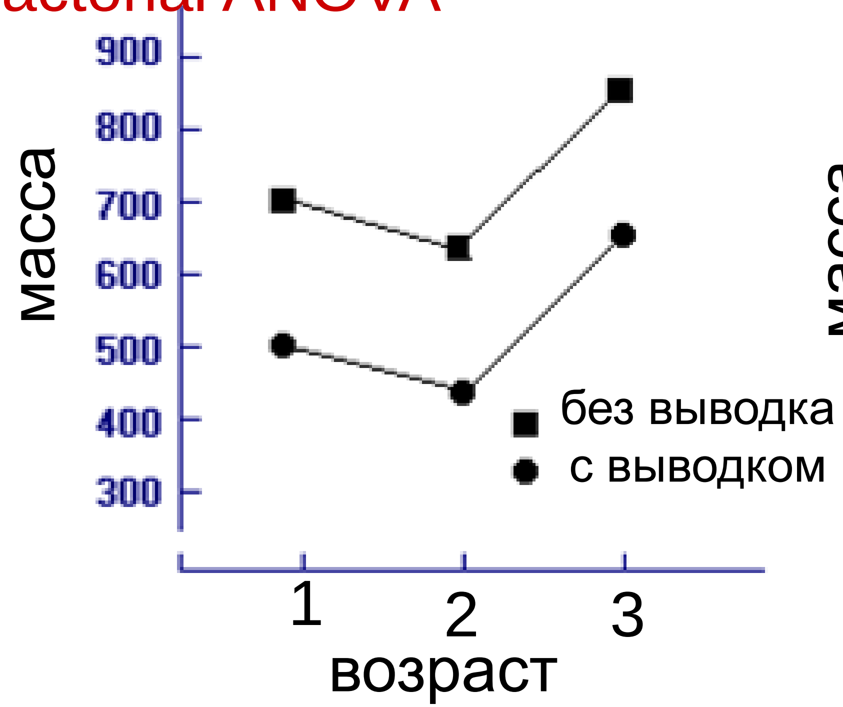
Factorial ANOVA

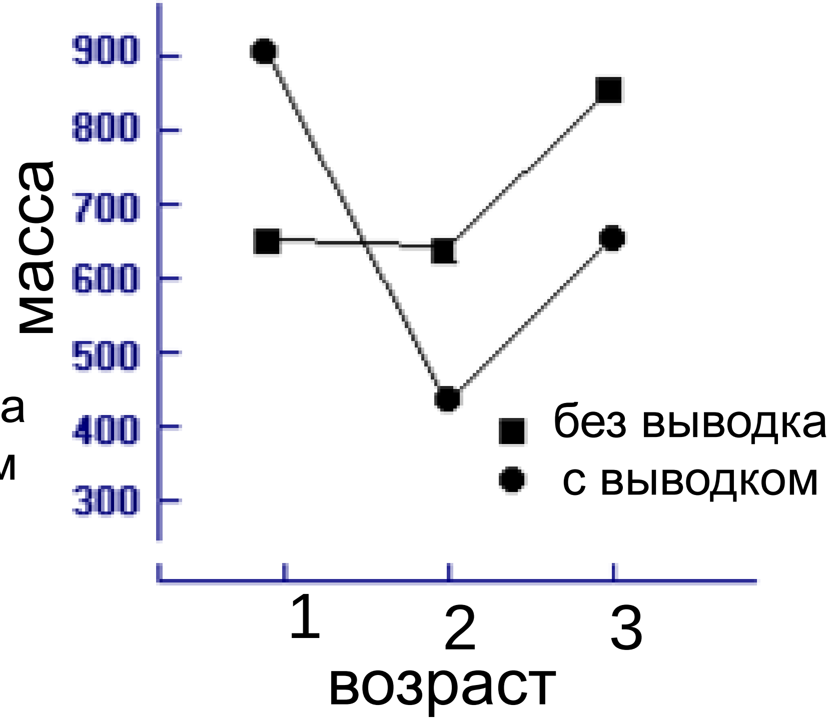
Примерный вид графического представления:





Factorial ANOVA





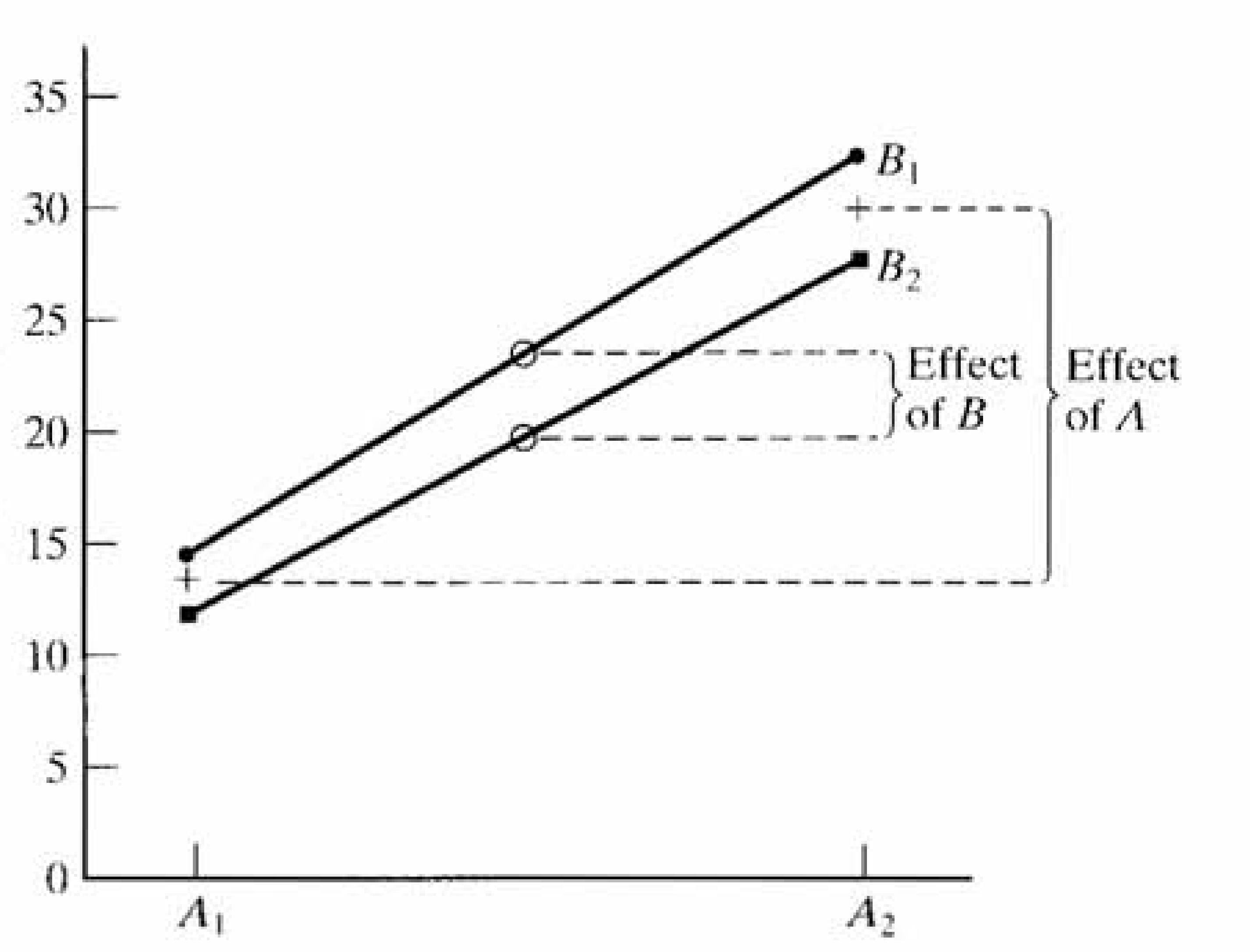
и размножение, и возраст влияют на массу;
взаимодействия факторов НЕТ

возраст влияет на массу,
размножение – нет;
взаимодействие ЕСТЬ

если линии на рисунке ПАРАЛЛЕЛЬНЫ, взаимодействия факторов НЕТ.
если НЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ, взаимодействие ЕСТЬ.

(насколько они параллельны, решает ANOVA)

Factorial ANOVA



Как определить на глаз влияние каждого из факторов

Factorial ANOVA

Взаимодействие между факторами ≠ корреляция между факторами!!!

	1 год	2 года	≥3 года
без выводка	900	1200	1500
с 1-м выводком	600	900	1200
с 2-мя выводками	300	600	900

Взаимодействия факторов НЕТ, при этом между ними есть корреляция

	1 год	2 года	≥3 года
без выводка	900	1200	**600**
с 1-м выводком	600	900	1200
с 2-мя выводками	300	600	**1200**

Взаимодействие факторов ЕСТЬ

У старых самок участие в размножении по-другому сказывается на физическом состоянии, чем у молодых

Factorial ANOVA

Частный случай Factorial ANOVA - Main effect ANOVA

1. Мы исследуем действие на выборку ДВУХ (трёх, четырёх) категориальных факторов (independent variables).
2. Зависимая переменная ОДНА.
3. Факторы НЕЗАВИСИМЫ (то есть, мы откуда-то заранее это уже знаем).

Мощность такого теста выше, чем у Factorial ANOVA, но в независимости факторов надо как-то убедиться.

Factorial ANOVA

Если факторов не 2 а много, а зависимая переменная ОДНА, анализ называется
Multiway ANOVA

В этом случае становится много гипотез о взаимодействии факторов (для 3-х факторов 4 гипотезы об их взаимодействии).
Не рекомендуется исследовать действие более 4-х факторов, так как затрудняется интерпретация результатов.

Расчёт статистик в таких сложных случаях производится с использованием принципов регрессионного анализа.

Repeated measures ANOVA

Сравнение связанных групп

Преподаватель решил узнать, как у его студентов продолжительность занятий зависит от дня недели (он поделил время на 15-минутные блоки).

Time blocks (15-minute periods) spent studying

Person	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Person mean
Pat	15	10	8	7	10
Bobby	10	11	4	7	8
Riki	4	9	7	0	5
Jean	10	10	7	1	7
Lynn	4	2	4	2	3
Jo	12	17	9	14	13
Means	9.167	9.833	6.500	5.167	

Repeated measures ANOVA

Представим, что эти группы независимы и проведём ANOVA. Различия между ними недостоверны. Почему?
Из-за большой внутригрупповой изменчивости?

Студенты по усердию **сильно различаются между собой**!\

Как элиминировать межиндивидуальные различия (between-subjects effect)?

Repeated measures ANOVA

Вычесть из каждого измерения среднее значение для каждого студента!

Deviations from person's own mean

Person	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Mean
Pat	5	0	−2	−3	0
Bobby	2	3	−4	−1	0
Riki	−1	4	2	−5	0
Jean	3	3	0	−6	0
Lynn	1	−1	1	−1	0
Jo	−1	4	−4	1	0
Mean	1.500	2.167	−1.167	−2.500	

Вот теперь измерения стали независимы («исправленные»), и дальше можно сравнить их ANOVA

(от обычной ANOVA отличается число степеней свободы внутри измерений – $df_w = (k-1)(n-1)$)

Repeated measures ANOVA

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

H_1: нулевая гипотеза не верна

Обычная ANOVA:

$$F = \frac{\text{оценка дисперсии } \textbf{между группами}}{\text{оценка дисперсии } \textbf{внутри} \text{ групп}} \qquad F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

Repeated measures ANOVA:

$$F = \frac{\text{оценка дисперсии } \textbf{между измерениями}}{\textbf{«ошибка»} \text{ внутри } \textbf{исправленных} \text{ измерений}} \qquad F = \frac{MS_B}{MS_{err}}$$

Изменчивость:

1. Между измерениями;
2. Между особями (получается из средних значений для особей);
3. «ошибка» (внутри «исправленных» измерений) – error, residual

Repeated measures ANOVA

Теперь H_0 будет отвергнута, т.е., преподаватель сможет утверждать, что усердие его учеников зависит от дня недели.

Мощность дисперсионного анализа для повторных измерений выше, чем обыкновенного дисперсионного анализа (в случае связанных выборок).

Repeated measures ANOVA

Другой пример: к тиграм-самцам пришёл новый служитель, а потом – новая уборщица. И возможно, они стали по-другому питаться. Мы хотим узнать, менялась ли их масса.

Мы анализируем влияние служителя на массу тигров-самцов.
Зависимая переменная – масса.
Для каждой особи по 3 измерения (3 столбика в таблице).

Каждый тигр ТРИ раза участвует в наблюдениях.

	ДО	СЛУЖ	УБОР
1 тигр	356 ⟷	363	200
2 тигр	351 ⟷	361	182
3 тигр	353 ⟷	358	193
4 тигр	355 ⟷	356	194
5 тигр	354	359	184
6 тигр	355	355	173

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$F = \frac{\text{оценка дисперсии между измерениями}}{\text{«ошибка»}}$$

Repeated measures ANOVA

Отвергаем H_0:

Масса тигров в среднем достоверно изменялась после прихода нового служителя и новой уборщицы.

изменчивость между особями

eated Measures Analysis of Variance (тигры)

Repeated Measures Analysis of Variance (тигры)
Sigma-restricted parameterization
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	8433647	1	8433647	84,37399	0,000000
Error	3098622	31	99956		
R1	352664	2	176332	87,51863	0,000000
Error	124917	62	2015		

между наблюдениями

«ошибка» - внутри «исправленных» наблюдений

А теперь можно провести апостериорный (post-hoc) тест. И выяснить, кто и как повлиял на массу тигров.