taller 1 metodos

Alejandro Ospina 2241586

August 2025

1 1.1.6

1.1 Ejercicio 3

Los vértices de un triángulo ABC tienen como vectores posición a, b y c, respectivamente, y relativos a un origen común O. Demuestre que el vector posición g del centroide G del triángulo viene dado por:

$$g = \frac{1}{3}(a + b + c) \tag{1}$$

demostrando llegamos a que:

$$g = \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} \tag{2}$$

tomamos las tres mitades porque el baricentro puede verse como el promedio de los puntos medios de los lados (o bien como la intersección de medianas que divide en razón 2:1)

$$g = \frac{1}{6}(2a + 2b + 2c) \tag{3}$$

$$g = \frac{2}{6}(a + b + c) \tag{4}$$

$$\boxed{g = \frac{1}{3}(a + b + c)} \tag{5}$$

2 1.4.3

2.1 Ejercicio 3

De acuerdo con la sección 1.4.3, consideremos un vector **v** cuyas componentes en el sistema no primado son v^j y en el sistema primado son $v^{i'}$. La transformación entre sistemas de referencia se describe mediante:

$$v^{i'} = A^{i'}_{\ j}\, v^j \qquad \text{y} \qquad v^k = \tilde{A}^{\ k}_{i'}\, v^{i'},$$

donde $A^{i'}_{\ j}$ es la matriz de cambio de base y $\tilde{A}^{\ k}_{i'}$ su inversa. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda se obtiene:

$$v^k = \tilde{A}^{\ k}_{i'} \left(A^{i'}_{\ j} v^j \right) = \left(\tilde{A}^{\ k}_{i'} A^{i'}_{\ j} \right) v^j.$$

Como esta igualdad debe cumplirse para **todo** vector v^j, se deduce que:

$$\boxed{\tilde{A}^{\ k}_{i'} A^{i'}_{\ j} = \delta^k_j},$$

que es la condición de ortogonalidad de la matriz de transformación (equivalente a $A^{-1}A = I$). Si reordenamos los índices:

$$\boxed{A^{i'}_{\ k}\, \tilde{A}^{\ j}_{i'} = \delta^j_k}.$$

Caso especial: cosenos directores

Si la base primada se obtiene por rotación ortogonal de la base original, los elementos de $A^{i'}_{\ j}$ representan los cosenos directores:

$$A^{i'}_{\ j} = \cos(\theta_{i'}, e_j),$$

donde $\theta_{i'}$ es el ángulo entre el eje i' y el eje j. Para un vector unitario **u** con componentes

$$\mathbf{u} = \cos(\alpha)\, \mathbf{i} + \cos(\beta)\, \mathbf{j} + \cos(\gamma)\, \mathbf{k},$$

la condición de normalización $\|\mathbf{u}\| = 1$ implica:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

Por lo tanto, como caso particular de la relación matricial, los cosenos directores cumplen:

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1}.$$

2.2 Ejercicio 4

Considere el radio vector posición

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuáles casos las componentes de $\mathbf{r}$ transforman como verdaderas componentes de vectores.

Cada transformación dada se puede expresar mediante una matriz T que actúa sobre el vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Para que las nuevas componentes sean **verdaderas** componentes del mismo vector tras un cambio de sistema de referencia rígido (rotación, o rotación más reflexión), la matriz debe ser **ortogonal**:

$$T^T T = I$$

y, si solo aceptamos rotaciones propias, además:

$$\det T = +1.$$

Si permitimos también reflexiones, basta con $\det T = \pm 1$.

Análisis de cada caso

1. $(x, y) \mapsto (-y, x)$ Matriz:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificación: $T_1^T T_1 = I$, $\det T_1 = 1$. $\Rightarrow$ Rotación de $+90^\circ$. **Sí** transforma las componentes como verdaderas componentes de un vector (rotación propia).

2. $(x, y) \mapsto (x, -y)$ Matriz:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificación: $T_2^T T_2 = I$, $\det T_2 = -1$. $\Rightarrow$ Reflexión respecto al eje x. Preserva longitudes pero invierte orientación. Si $\det = +1$ (solo rotaciones) $\Rightarrow$ **No**. Si se aceptan reflexiones $\Rightarrow$ **Sí**.

3. $(x, y) \mapsto (x - y,\ x + y)$ Matriz:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$T_3^T T_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I, \quad \det T_3 = 2.$$

$\Rightarrow$ No es ortogonal, no preserva longitudes. **No** corresponde a una transformación de componentes de vector por rotación/reflexión.

4. $(x, y) \mapsto (x + y,\ x - y)$ Matriz:

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$T_4^T T_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I, \quad \det T_4 = -2.$$

$\Rightarrow$ Tampoco es ortogonal ni preserva longitudes. **No** corresponde a transformación de componentes de vector por rotación/reflexión.

3 1.5.7

3.1 Ejercicios 2a, 2d y 2f

(2a) Sea $\varphi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares. En notación de índices, la componente i del gradiente es:

$$[\nabla(\varphi\psi)]_i = \partial_i(\varphi\psi).$$

Aplicando la regla del producto de Leibniz:

$$\partial_i(\varphi\psi) = \varphi\,\partial_i\psi + \psi\,\partial_i\varphi.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\nabla(\varphi\psi) = \varphi\,\nabla\psi + \psi\,\nabla\varphi.}$$

(2d) Para la divergencia del rotacional:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = \partial_i\left(\varepsilon_{ijk}\,\partial_j a_k\right) = \varepsilon_{ijk}\,\partial_i\partial_j a_k.$$

Como $\partial_i\partial_j$ es simétrica en i, j y ε_{ijk} es antisimétrica en i, j, el producto se anula:

$$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0.}$$

Respecto a $\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{a})$: dado que $\nabla\cdot\mathbf{a}$ es un escalar, su rotacional no está definido en el cálculo vectorial estándar.

(2f) Partimos de:

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})]_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\left(\varepsilon_{k\ell m}\,\partial_\ell a_m\right).$$

Usando la identidad:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell},$$

tenemos:

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})]_i = \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right)\partial_j\partial_\ell a_m.$$

Primer término:

$$\delta_{i\ell}\delta_{jm}\,\partial_j\partial_\ell a_m = \partial_j\partial_i a_j.$$

Segundo término:

$$-\delta_{im}\delta_{j\ell}\,\partial_j\partial_\ell a_m = -\partial_j\partial_j a_i.$$

Por lo tanto:

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})]_i = \partial_i(\partial_j a_j) - \partial_j\partial_j a_i.$$

En forma vectorial:

$$\boxed{\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}.}$$

3.2 Ejercicio 13

Google Colab ejercicios: colab ejercicios mmf1

4 1.6.5

4.1 Ejercicio 2

Para demostrar las identidades trigonométricas:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha), \quad \sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha),$$

utilizamos la fórmula de De Moivre, es decir:

$$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]^3.$$

Desarrollando el cubo:

$$[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]^3 = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + i\left[3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)\right].$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha),$$

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha).$$

4.2 Ejercicio 5

(5a) $\sqrt{2i}$

$$z = 2i, \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2$$

Soluciones:

$$w_0 = 2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad w_1 = 2^{1/4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Expresadas:

$$\boxed{w_0 = 2^{1/4}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = 2^{-1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}),}$$

$$\boxed{w_1 = 2^{1/4}\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\Big) = -2^{-1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}).}$$

(5b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

$$z = 1 - \sqrt{3}i, \quad |z| = 2, \quad \theta = -\frac{\pi}{3}, \quad n = 2$$

Soluciones:

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi/3}{2} + i\sin\frac{-\pi/3}{2}\right), \quad w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi/3+2\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi/3+2\pi}{2}\right)$$

Expresadas:

$$\boxed{w_0 = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},}$$

$$\boxed{w_1 = \sqrt{2}\,e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(5c) $(-1)^{1/3}$

$$z=-1,\quad |z|=1,\quad \theta=\pi,\quad n=3$$

Soluciones:

$$w_k=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2$$

Expresadas:

$$\boxed{w_0=e^{i\pi/3}=\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2},}\ \boxed{w_1=e^{i\pi}=-1,}\ \boxed{w_2=e^{i5\pi/3}=\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.}$$

(5d) $8^{1/6}$

$$z=8,\quad |z|=8,\quad \theta=0,\quad n=6$$

Soluciones:

$$w_k=8^{1/6}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right)\right],\quad k=0,\dots,5$$

Raíces (seis valores):

$$w_k=8^{1/6}e^{i\frac{2\pi k}{6}}=2^{1/2}e^{i\frac{k\pi}{3}},\qquad k=0,1,\dots,5.$$

(es decir, están en el círculo de radio $\sqrt{2}$ separadas cada $\frac{\pi}{3}$.)

(5f) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

$$z=-8-8\sqrt{3}i,\quad |z|=16,\quad \theta=\frac{4\pi}{3},\quad n=4$$

Soluciones:

$$w_k=2\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right],\quad k=0,1,2,3$$

Expresadas explícitamente:

$$\begin{aligned}
k=0:&\quad w_0=2e^{i\pi/3}=1+i\sqrt{3},\\
k=1:&\quad w_1=2e^{i5\pi/6}=-\sqrt{3}+i,\\
k=2:&\quad w_2=2e^{i4\pi/3}=-1-i\sqrt{3},\\
k=3:&\quad w_3=2e^{i11\pi/6}=\sqrt{3}-i.
\end{aligned}$$

4.3 Ejercicio 6

Recordemos la expresión general (multivaluada) del logaritmo complejo:

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\big(\theta + 2\pi n\big), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

donde θ es un argumento cualquiera de z.

(a) $\operatorname{Log}(-ie)$.
Tomando $z = -ie$. Entonces $|z| = e$ y $\operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Por lo tanto

$$\operatorname{Log}(-ie) = \ln e + i\Big(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = 1 + i\Big(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\Big).$$

En la rama principal ($n = 0$):

$$\boxed{\operatorname{Log}(-ie) = 1 - \tfrac{\pi}{2}i.}$$

(b) $\operatorname{Log}(1 - i)$.
Para $z = 1 - i$ se tiene $|1 - i| = \sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Entonces

$$\operatorname{Log}(1 - i) = \ln\sqrt{2} + i\Big(-\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\Big) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + i\Big(-\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\Big).$$

En la rama principal ($n = 0$):

$$\boxed{\operatorname{Log}(1 - i) = \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{\pi}{4}i.}$$

(c) $\operatorname{Log}(e)$.
Como $e > 0$, $|e| = e$ y $\operatorname{Arg}(e) = 0 + 2\pi n$. Por tanto

$$\boxed{\operatorname{Log}(e) = \ln e + i(0 + 2\pi n) = 1 + 2\pi n\, i.}$$

(d) $\operatorname{Log}(i)$.
Para i se tiene $|i| = 1$ y $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Luego

$$\boxed{\operatorname{Log}(i) = \ln 1 + i\Big(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = i\Big(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = (2n + \tfrac{1}{2})\pi i.}$$