高考数学一轮知识点复习讲义

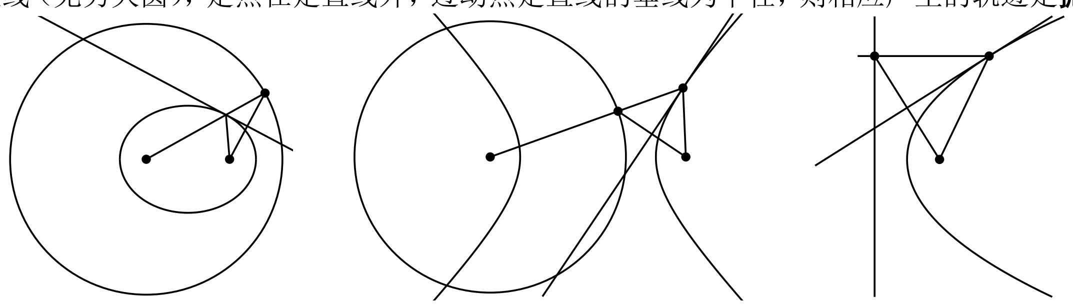
板块八：圆锥曲线

圆锥曲线的常见性质

1．圆锥曲线的定义：

【例 1】椭圆定义的演绎：圆 $x^2+y^2=a^2 \xrightarrow{\text{伸缩}}$ 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，令 $b^2=a^2-c^2$，可得 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$（**第一定义**）或 $\dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\dfrac{a^2}{c}-x}=\dfrac{c}{a}=e$（**第二定义**）.

【例 2】平面内，定圆上一动点与圆内一定点所连线段的中垂线与其半径的交点的轨迹是**椭圆**；定圆上一动点与圆外一定点所连线段的中垂线与其半径的交点的轨迹是**双曲线**；类似地，将定圆推广为直线（无穷大圆），定点在定直线外，过动点定直线的垂线为半径，则相应产生的轨迹是**抛物线**.



【例 3】圆的一些性质向圆锥曲线的演绎：

（Ⅰ）圆的直径所对的圆周角为直角可以推广为：对于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上关于原点对称的两点 $P_1(x_0,y_0),P_2(-x_0,-y_0)$，椭圆上任意一点 M（异于点 P_1,P_2）满足 $k_{MP_1}\cdot k_{MP_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$；在双曲线中类似的结论为 $k_{MP_1}\cdot k_{MP_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$.（假定斜率存在）

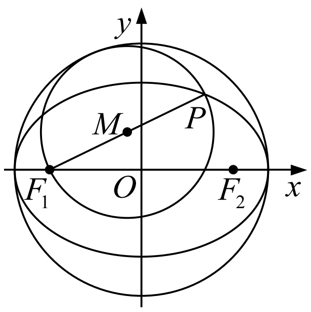
（Ⅱ）圆的垂径定理可以推广为：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的弦 AB 及其中点 M 满足 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$；双曲线中类似的结论为 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\dfrac{b^2}{a^2}$.（假定斜率存在）

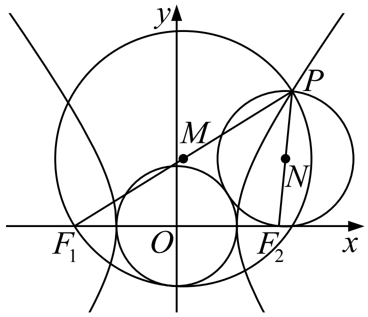
（Ⅲ）圆的切线定理可以推广为：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线 l 满足 $k_l\cdot k_{OP}=-\dfrac{b^2}{a^2}$；双曲线中类似的结论为 $k_l\cdot k_{OP}=\dfrac{b^2}{a^2}$.（假定斜率存在）

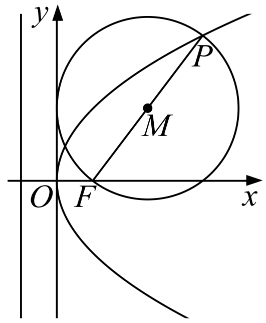
（Ⅳ）圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$；抛物线 $y^2=2px$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$.

2．圆锥曲线的焦半径、焦点弦：

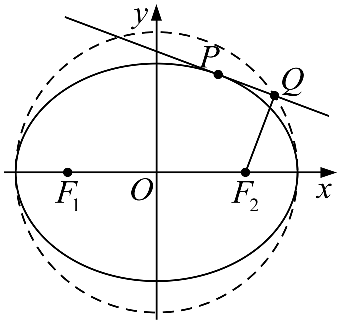
【例 1】椭圆中，以焦半径为直径的圆与长轴为直径的圆相切；双曲线中，以焦半径为直径的圆与实轴为直径的圆相切；抛物线中，以焦半径为直径的圆与顶点处的切线（无穷大圆）相切.

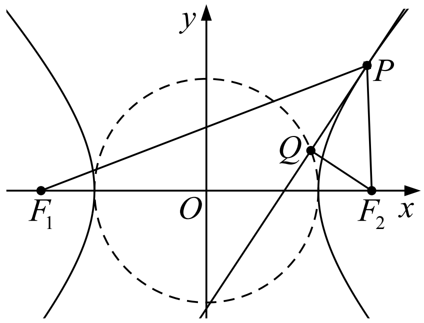


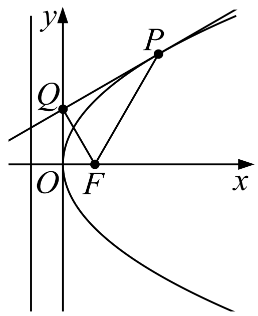




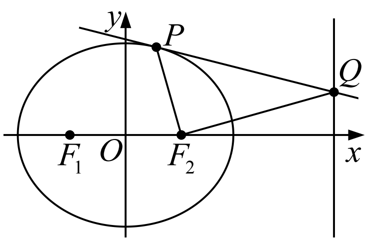
【例 2】椭圆、双曲线的焦点在切线上射影的轨迹是以原点为圆心，半径长为a的圆；抛物线的焦点在切线上射影的轨迹是顶点处的切线（无穷大圆）.

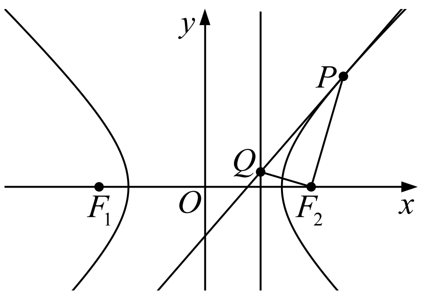


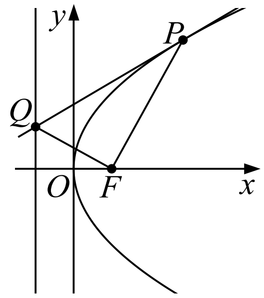




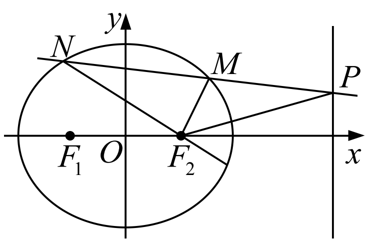
【例 3】过圆锥曲线的准线上一点向原曲线作切线，则相应焦点与该点及切点的连线互相垂直.

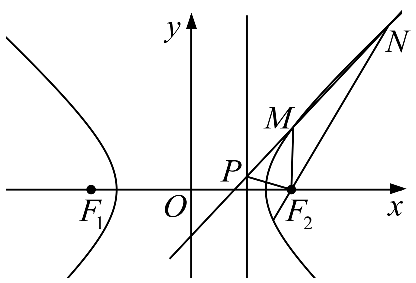


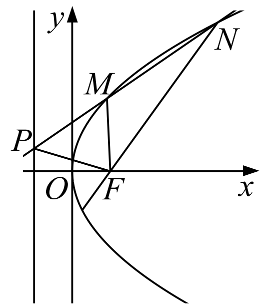




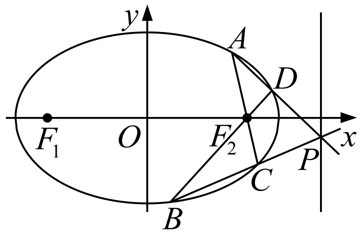
【例 4】过圆锥曲线准线上的一点作原曲线的割线，则相应焦点与该点的连线平分焦点相对于割线两交点张角的外角.

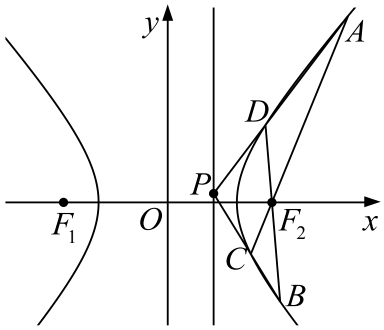


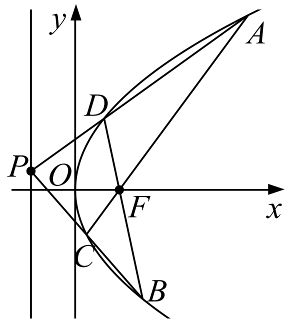




【例 5】圆锥曲线的任意两焦点弦端点所在直线交点的轨迹是准线.







【例 6】椭圆、抛物线的焦点弦的两个焦半径倒数之和为定值：$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{ep}$；

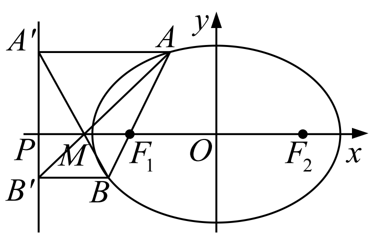
双曲线的焦点弦的两个焦半径倒数之和或之差为定值：$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{ep}$（$A,B$ 在同支），$\left|\dfrac{1}{|AF|}-\dfrac{1}{|BF|}\right|=\dfrac{2}{ep}$（$A,B$ 在异支）.

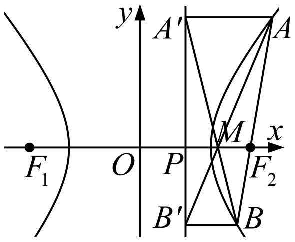
【例 7】（Ⅰ）圆锥曲线的焦点弦长为$\dfrac{2ep}{|1-e^2\cos^2\theta|}$；

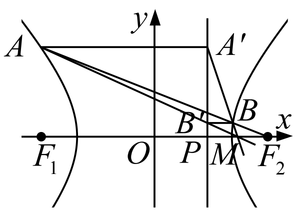
（Ⅱ）圆锥曲线互相垂直的焦点弦长的倒数之和为定值$\dfrac{|2-e^2|}{2ep}$.

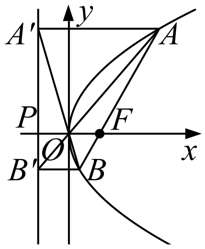
【例 8】圆锥曲线焦点弦的中垂线与长轴（或实轴、或抛物线对称轴）的交点到焦点的距离与焦点弦长之比是定值$\dfrac{e}{2}$.

【例 9】圆锥曲线的焦点弦端点在相应准线上投影与另一端点的交叉连线交于定点，且此定点平分该焦点所对应的焦准距线段.

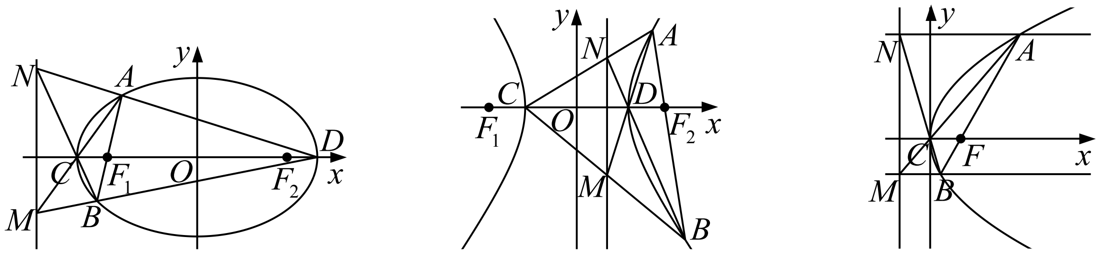




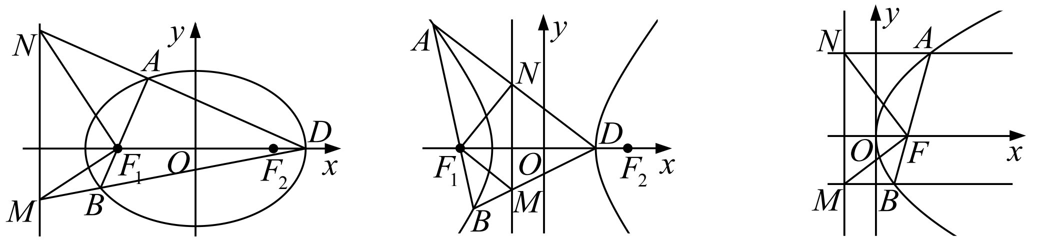




【例 10】圆锥曲线焦点弦端点 A,B 与顶点 C,D 连线与相应准线的交点 N,M，则 A,C,M、B,C,N 分别三点共线（抛物线的 D 点在无穷远处）.



【例 11】圆锥曲线焦点弦端点 A,B 与另一顶点 D（抛物线的 D 点在无穷远处）连线与相应准线的交点 N,M，则 N,M 与相应焦点的连线互相垂直.



3．椭圆、双曲线的焦点三角形：

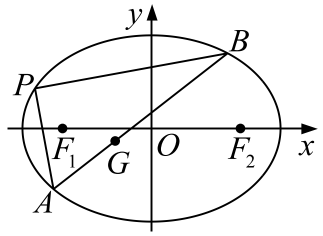
【例 1】（Ⅰ）椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点三角形面积 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$；

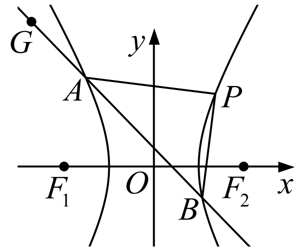
（Ⅱ）双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的焦点三角形面积 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$.

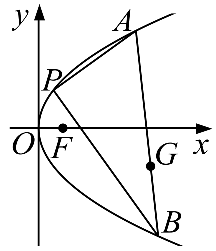
【例 2】（Ⅰ）双曲线的焦点三角形中，内切圆与焦点所在直线相切于双曲线的顶点；
（Ⅱ）椭圆的焦点三角形中，以焦点为顶点的角的旁切圆与焦点所在直线相切于椭圆的顶点.

4．圆锥曲线的定点、定值问题：

【例 1】过圆锥曲线上一点 $P(x_0,y_0)$ 作弦 PA,PB 满足 $PA\perp PB$，则弦 AB 必过定点 G．其中椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 对应的定点 $G(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0)$，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$ 对应的 $G(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x_0,-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}y_0)$，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 对应的 $G(x_0+2p,-y_0)$．

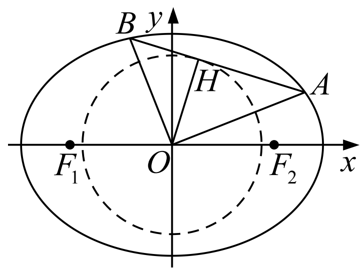


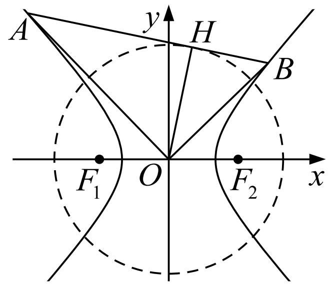




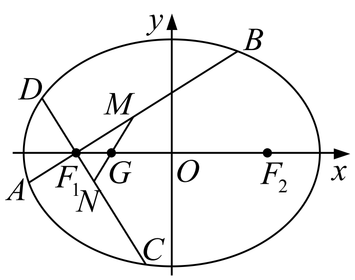
特别地，当点 P 为圆锥曲线顶点时，定点 G 在圆锥曲线的对称轴上；此时将条件 $PA\perp PB$ 改为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值，则弦 AB 仍然过圆锥曲线对称轴上的某个定点．

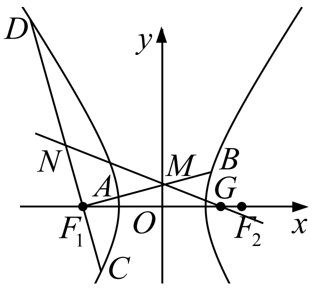
【例 2】直角三角形的直角顶点在中心，斜边端点在椭圆（双曲线）上，则斜边上的高为定值．

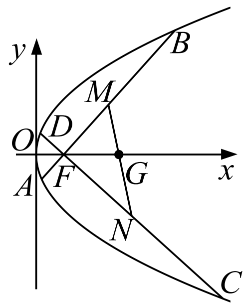




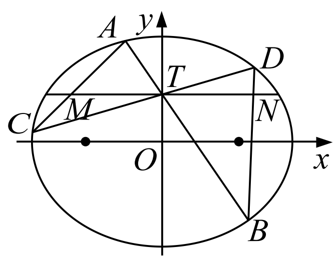
【例 3】圆锥曲线中互相垂直的焦点弦中点连线必过定点．

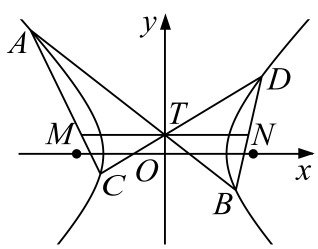


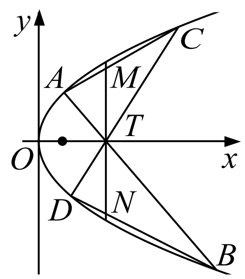




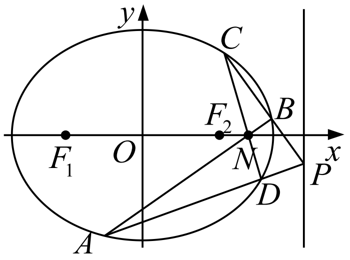
【例 4】过圆锥曲线对称轴上一点 T 任作两弦 AB,CD，过 T 作垂直于对称轴的直线与 AC,BD 交于点 M,N，则 T 为 MN 中点．

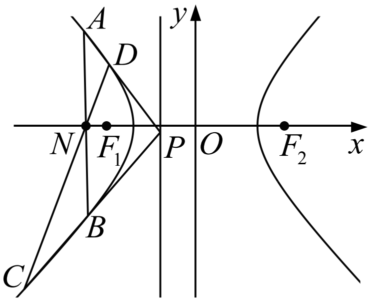


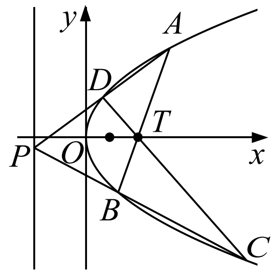




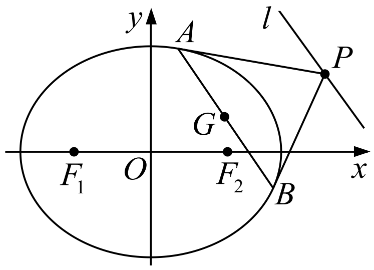
【例 5】过圆锥曲线焦点所在对称轴上一点N任作两弦AB,CD，则AD,CB的交点P在定直线上.

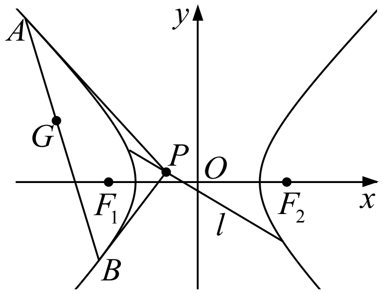


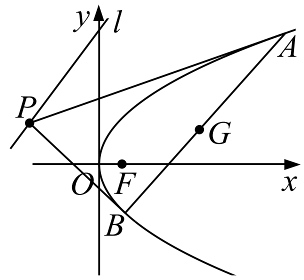




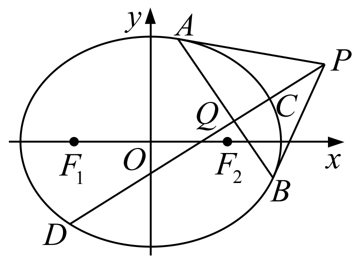
【例 6】（Ⅰ）过圆锥曲线内（焦点所在区域）一点作弦，则弦两端点处切线的交点在定直线上；（Ⅱ）过圆锥曲线外一直线上的动点向圆锥曲线引两切线，则切点弦过定点.

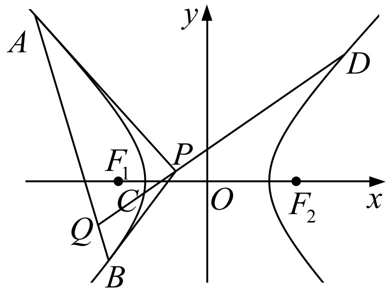


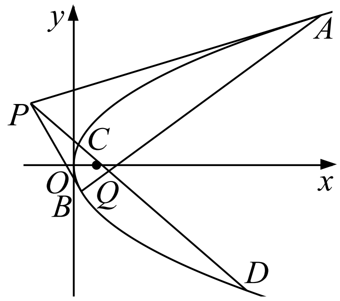


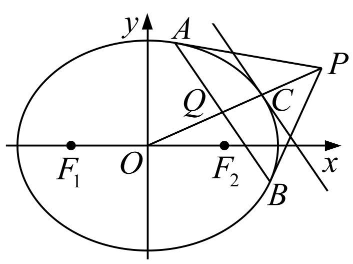


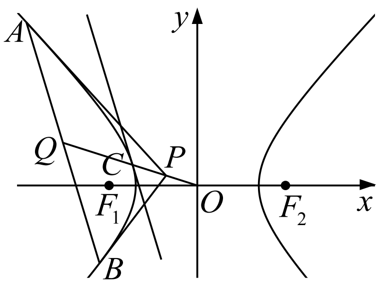
【例 7】过圆锥曲线外一点P作直线与圆锥曲线交于点C,D，与其对应的切点弦AB交于点Q. 则有$\dfrac{1}{|PC|}+\dfrac{1}{|PD|}=\dfrac{2}{|PQ|}$，$|PC|\cdot|QD|=|PD|\cdot|QC|$. 特别地，对于椭圆、双曲线，若该直线经过对称中心O，则$|OP|\cdot|OQ|=|OC|^2$，且点C处曲线的切线平行于切点弦AB.

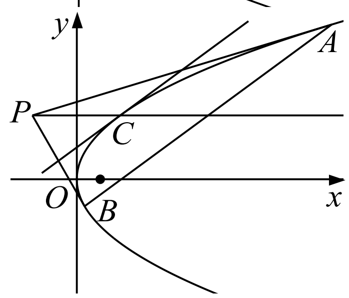




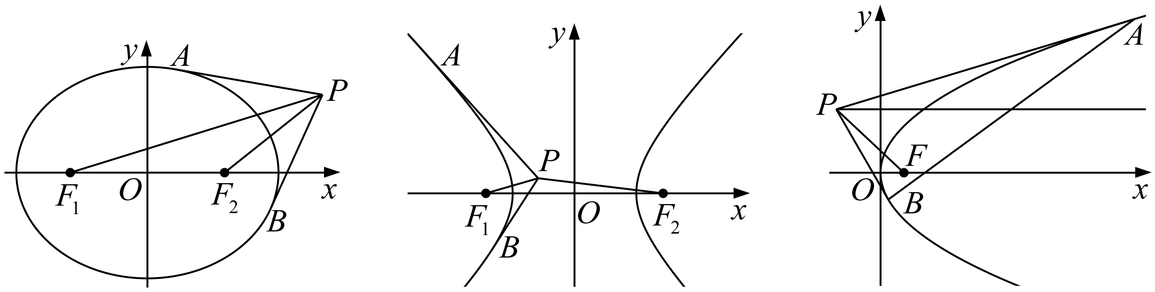




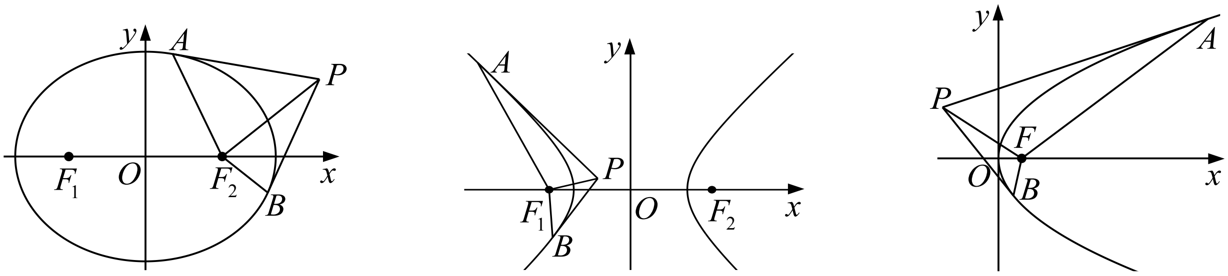




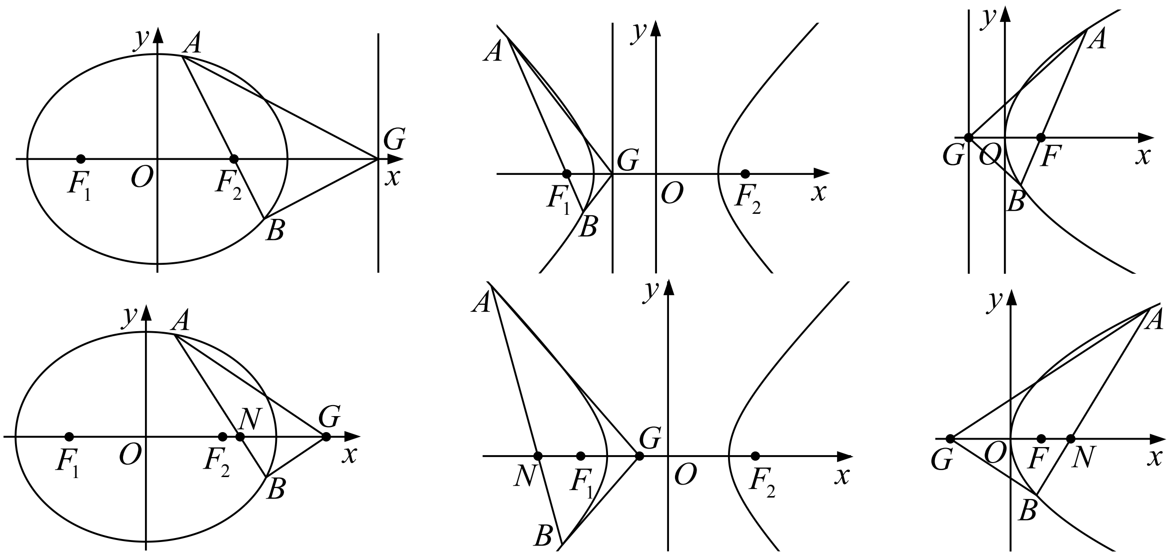
【例 8】过圆锥曲线外一点作圆锥曲线两切线与焦点连线所成角相等（抛物线的另一焦点可看作无穷远处）.



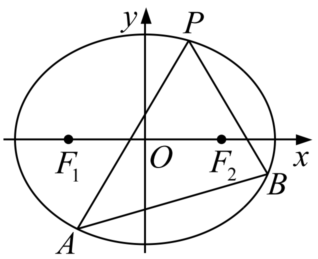
【例 9】过圆锥曲线外一点 P 作圆锥曲线两切线 PA, PB，则 $\angle AFP = \angle BFP$.

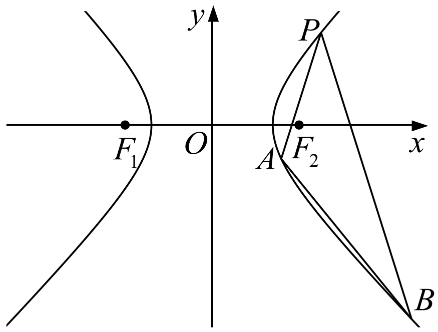


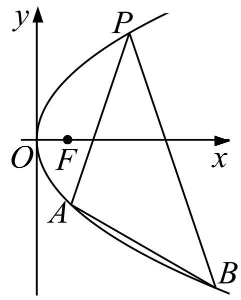
【例 10】圆锥曲线准线与对称轴的交点与焦点弦端点连线所成角被对称轴平分．一般的情形，有：过椭圆长轴上定点 $N(t,0)$ 的任一弦 AB，端点与 $G(\dfrac{a^2}{t},0)$ 所成角被长轴平分；过双曲线实轴上定点 $N(t,0)$ 的任一弦 AB，端点与 $G(\dfrac{a^2}{t},0)$ 所成角被实轴平分；过抛物线对称轴上定点 $N(t,0)$ 的任一弦 AB，端点与 $G(-t,0)$ 所成角被对称轴平分.



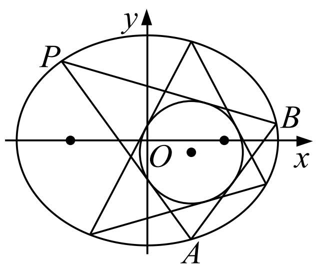
【例 11】过圆锥曲线上一定点倾斜角互补的两直线交曲线于另两交点的连线的倾斜角为定值.

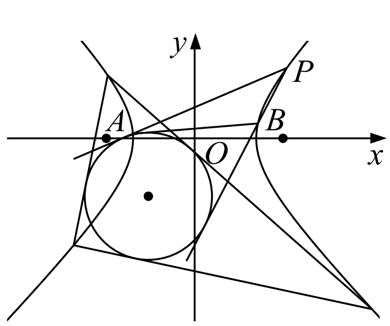


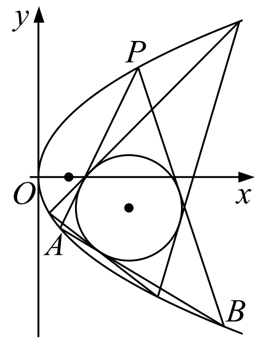




【例 12】过圆锥曲线上任一点引圆锥曲线内接三角形的内切（旁切）圆的切线与圆锥曲线交于另两点，则这另两点的连线必是圆的切线.







5．轨迹问题：

【例 1】（Ⅰ）MN 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中垂直于长轴的动弦，A_1,A_2 为其左右顶点，求直线 A_1N,A_2M 交点 P 的轨迹；

（Ⅱ）MN 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 中垂直于实轴的动弦，A_1,A_2 为其左右顶点，求直线 A_1N,A_2M 交点 P 的轨迹.

【例 2】圆锥曲线的两条正交切线的交点轨迹是圆（抛物线情形为准线，视为无穷大圆）.