

# 第一讲：参考系

参考系：用作描述运动的参考物体或物体组

## 一、关联速度

运动的描述是相对的。在不同参考系中考察同一质点的速度、加速度的关系如何？

相互平动参考系的变换：“绝对”=“相对”+“牵连”，对位移、速度和加速度都成立

对同一质点：

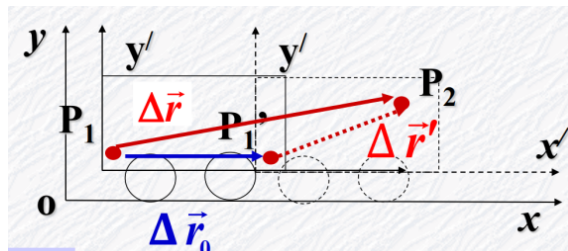
地面：质点由  $P_1 \rightarrow P_2$   $\Delta \vec{r}$

车：质点由  $P'_1 \rightarrow P'_2$   $\Delta \vec{r}'$  车对地位移  $\Delta \vec{r}_0$

易知  $\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{r}'$

对时间求导可得： $\Delta \vec{v}_{Ps} = \Delta \vec{v}_{Ps'} + \Delta \vec{v}_{s's}$

进一步可得： $\Delta \vec{a}_{Ps} = \Delta \vec{a}_{Ps'} + \Delta \vec{a}_{s's}$



## 二、惯性系和非惯性系

牛顿运动定律只在惯性系中成立，在非惯性系中，牛顿运动定律不能直接使用，**惯性力**的引入则能让牛顿运动定律作为一种普遍的动力学方法在非惯性系中得到应用。

惯性力：非惯性系中的附加力，大小为系统的加速度与对象质量的乘积，方向与系统加速度方向相反。

### 2.1 加速平动参考系

平动加速参考系  $S'$ ，相对于惯性系  $S$  加速度为  $\mathbf{a}_0$

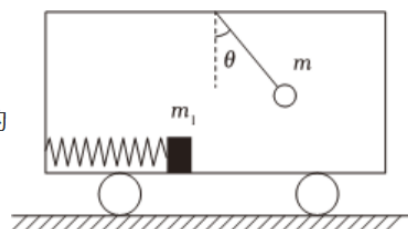
在参考系  $S$  中一质量为  $m$  的物体满足  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

其中  $\mathbf{F}$  为物体受到的合外力， $\mathbf{a}$  满足  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$

在  $S'$  中有  $\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}_0) = m\mathbf{a}'$

其中  $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}_0$  为惯性力，形式上仍满足牛顿第二运动定律

1. （2023春·蓝田县期末）在水平地面上运动的小车车厢底部有一质量为  $m_1$  的木块，木块和车厢通过一根水平轻弹簧相连接，弹簧的劲度系数为  $k$ ，在车厢的顶部用一根细线悬挂一质量为  $m$  的小球。某段时间内发现细线与竖直方向的夹角为  $\theta$ ，在这段时间内木块与车厢保持相对静止，弹簧的形变量为  $x$ ，如图所示。不计木块与车厢底部的摩擦力，则在这段时间内（ ）



- A. 小车一定向左做加速运动
- B. 弹簧可能处于压缩状态
- C. 小车的加速度方向向左，大小为  $a = \frac{g}{\tan \theta}$
- D. 弹簧的形变量为  $x = \frac{m_1 g}{k} \tan \theta$

### 2.2 转动参考系

离心力，科里奥利力

重力是地球引力和惯性离心力的合力（这句话并不准确，只用于辅助理解转动参考系下惯性力的大小方向，惯性离心力是虚构的，应以力的实际构成来看待）

## 三、质心系

### 3.1 质心定义

在坐标系中，设系统由多个质点构成，记系统质心的位矢为  $\vec{r}_c$ ，记质心坐标为  $(x_c, y_c, \dots)$ ，记质心速度为  $\vec{v}_c$ 。满足：

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} \\ x_c &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} \\ \vec{v}_c &= \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M}\end{aligned}$$

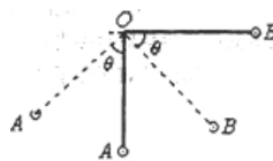
### 3.2 质心运动定理

记质点系的总动量为  $\vec{p}$ , 总质量  $m = \sum_{i=1}^n m_i$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c \\ \vec{F} dt &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt = d\vec{p} = d(m \vec{v}_c) \\ \Rightarrow \vec{F} &= m \vec{a}_c\end{aligned}$$

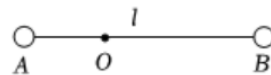
质心的运动和把全部外力、全部质量集中于该处时的质点的运动相同; 若合外力为零, 质点系动量守恒和质心匀速运动等价。

1. (2011·重庆模拟) 一直角轻杆两边等长。两端分别固定质量为  $m_1$  的小球A和质量为  $m_2$  的小球B, 质量关系为  $m_2 = \sqrt{3}m_1$ , 轻杆能绕水平转轴O在竖直面内转动, 现使OB水平, 如图所示, 两小球从静止开始运动, 经过一段时间轻杆转过  $\theta$  角。不计转轴摩擦和空气阻力, 两小球可视为质点, 下列说法正确的是 ( )



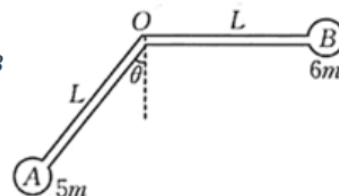
- A.  $\theta$ 角最大可达到  $150^\circ$
- B. 当  $\theta=90^\circ$  时, 两小球速度最大
- C. 当  $\theta=30^\circ$  时, 两小球速度最大
- D. 当  $\theta=60^\circ$  时, 两小球速度最大

2. (2023春·铜鼓县校级期末) 如图所示, 长为  $l$  的轻质杆, 两端分别固定着A球和B球, A球的质量为  $m$ , B球的质量为  $3m$ , 杆绕O点在竖直面内转动, 轴O光滑, O点与球A的距离为  $\frac{l}{3}$ , 到B球的距离  $\frac{2l}{3}$ , 现让杆从水平位置静止释放, 重力加速度为  $g$ , 则当杆摆到竖直位置时 ( )



- A. A球的速度大小为  $\sqrt{\frac{10}{39}gl}$
- B. B球的速度大小为  $\sqrt{\frac{10}{39}gl}$
- C. 杆对A球施以大小为  $\frac{34mg}{39}$ , 方向向上的支持力
- D. B球的动能大小为  $\frac{20}{13}mgl$

3. (2023·辽宁模拟) 如图所示, 可绕固定转轴 $O$ 在竖直平面内无摩擦转动的刚性轻质支架两端分别固定质量为 $5m$ 、 $6m$ 的小球 $A$ 、 $B$ , 支架两条边的长度均为 $L$ , 用手将 $B$ 球托起至与转轴 $O$ 等高, 此时连接 $A$ 球的细杆与竖直方向的夹角为 $\theta$ ,  $\sin\theta=0.6$ , 重力加速度大小为 $g$ , 现突然松手, 两小球在摆动的过程中, 下列说法正确的是 ( )



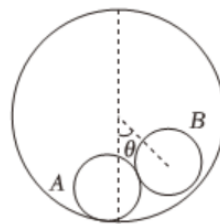
A.  $A$ 球与转轴 $O$ 等高时的动能为 $\frac{3}{11}mgL$

B.  $B$ 球下降的最大高度为 $\frac{24}{25}L$

C.  $A$ 球的最大动能为 $\frac{6}{11}mgL$

D.  $B$ 球的最大动能为 $\frac{6}{11}mgL$

1. (2023春·辽宁期末) 如图所示, 半径为 $3R$ 的光滑大圆管固定在水平面上, 把两个半径均为 $R$ 的均质圆管 $A$ 、 $B$ 放置在大圆管内, 平衡时圆管 $B$ 的圆心与大圆管圆心的连线与竖直线的夹角为 $\theta$ , 已知 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则 $A$ 、 $B$ 两圆管的质量之比为 ( )



A. 2:1

B. 2:3

C.  $\sqrt{2}:1$

D.  $2:\sqrt{3}$

例: 人船模型

解题模型: 人船模型

1. (2022秋·雁塔区校级期末) 质量为 $M$ 的气球下吊一轻质绳梯, 梯上站着质量为 $m$ 的人。气球以速度 $v_0$ 沿竖直方向匀速上升, 如果人加速向上爬, 当他相对于梯的速度达到 $v$ 时, 以竖直向上为正方向, 气球的速度将变为 ( )

A.  $v_0 - \frac{m}{M}(v - v_0)$

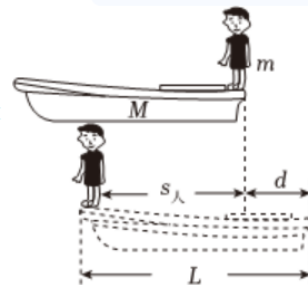
B.  $v_0 - \frac{m}{M+m}v$

C.  $v_0 - \frac{m}{M}v$

D.  $v_0 - \frac{M}{M+m}v$

解题模型: 人船模型

2. (2023春·九龙坡区校级期中) 张洪老师想用卷尺粗略测定码头上自由停泊小船的质量, 他进行了如下操作: 首先他轻轻从船尾上船, 走到船头后停下, 而后轻轻下船, 用卷尺测出船后退的距离 $d$ , 然后用卷尺测出船长 $L$ 。已知他自身的质量为 $m$ , 则渔船的质量为 ( )



A.  $\frac{m(L+d)}{d}$

B.  $\frac{mL}{d}$

C.  $\frac{m(L-d)}{d}$

D.  $\frac{m(L+d)}{L}$

⇒ 质点组的牛顿第二运动定律:

$$\vec{F} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots + m_n\vec{a}_n$$

设质点系由  $m_1, m_2, \dots, m_n$  个质点构成

每个质点加速度为  $\vec{a}_i$ , 受力为  $\vec{F}_i, i = 1, 2, \dots, n$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i内} + \vec{F}_{i外} = m_i \vec{a}_i$$

对所有质点求和有:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i内} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i外} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

由牛顿第三运动定律得:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i内} = 0$$

$$\text{从而 } \vec{F}_{外} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

其中,  $\vec{F}_{外}$  为合外力

故此, 我们有以下结论:

质点系质心运动与在  $\vec{F}_{外}$  作用下质量为  $m$  的质点运动完全相同。

### 3.3 质心系

质心系是固结于质心上的**平动**参考系(一般原点选在质心上)

质心系不一定是惯性系(系统可能受外力)

不论是否为惯性系, 质心系均满足以下规律:

1. 零动量系, 即  $\sum m_i \vec{v}_i \equiv 0$ , 下面提供证明:

$$\text{由 } \vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_c \text{ 与 } \vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \text{ 得:}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_c = 0$$

2. 动能关系:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_k'$$

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m_i (\vec{v}_i + \vec{v}_c) \cdot (\vec{v}_i + \vec{v}_c)] \\ \text{即: } \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_c \end{aligned}$$

$$\text{在质心系中有: } \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' = 0$$

$$\text{从而: } E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 + E_k', \text{ 其中 } E_k' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

应用举例 -> 多星系统

其实, 相对静止的多星系统的公共圆心就是该系统的质心。

下面用反证法对此作一简单证明:

证明之前, 要特别说明一下: 我们大多数时候都是假定多星系统远离其他天体, 并假定系统的公共圆心是静止不动的——即我们选定的参考系为公共圆心。

假定多星系统的公共圆心不在系统质心处, 则质心必定绕公共圆心作匀速圆周运动, 由于系统总动量可以用质心动量来计算因此系统总动量方向将一直变化;

而多星系统实际上是远离其他天体的, 因此系统总动量必须守恒, 即总动量应该始终为零。假设与此不符, 故假设不成立。

**例 2** 如图 7, 一个箱子放在水平地面上, 箱内有一固定的竖直杆, 在杆上套有一个环, 箱和杆的总质量为  $M$ , 环的质量为  $m$ , 若环与杆之间有摩擦, 当环沿杆向下做加速运动, 加速度大小为  $a$  时, 箱对地面的压力为( )

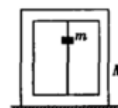


图 7

- A.  $Mg + ma$ 。 B.  $Mg - ma$ 。  
C.  $(M + m)g$ 。 D.  $(M + m)g - ma$ 。

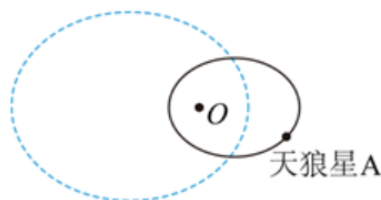
**例 3** 如图 8, 静止在水平面上的三角架的质量为  $M$ , 它中间用两根质量不计的轻弹簧连着一个质量为  $m$  的小球, 当小球上下振动时, 三角架对水平面的压力为零的时刻, 小球的加速度方向与大小是:



图 8

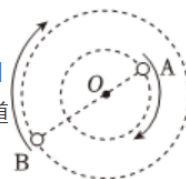
- A. 向上,  $Mg/m$ 。 B. 向上,  $g$ 。  
C. 向下,  $g$ 。 D. 向下,  $(M + m)g/m$ 。

1. (2023·江苏二模) 天文观测发现, 天狼星A与其伴星B是一个双星系统。它们始终绕着O点在两个不同椭圆轨道上运动, 如图所示, 实线为天狼星A的运行轨迹, 虚线为其伴星B的轨迹, 则 ( )



- A. A的运行周期小于B的运行周期
- B. A的质量小于B的质量
- C. A的加速度总是小于B的加速度
- D. A与B绕O点的旋转方向可能相同, 可能相反

2. (2023·河北模拟) “双星”是宇宙中普遍存在的一种天体系统, 这种系统之所以稳定的原因之一一是系统的总动量守恒且总动量为0, 如图所示, A、B两颗恒星构成双星系统, 绕共同的圆心O互相环绕做匀速圆周运动, 距离不变, 角速度相等, 已知A的动量大小为 $p$ , A、B的总质量为 $M$ , A、B轨道半径之比为 $k$ , 则B的动能为 ( )



- A.  $\frac{kp^2}{2(1+k)M}$
- B.  $\frac{(1+k)p^2}{2kM}$
- C.  $\frac{(1-k)p^2}{2kM}$
- D.  $\frac{kp^2}{2(1-k)M}$

【例4】由三颗星体构成的系统, 忽略其它星体对它们的作用, 存在着一种运动形式: 三颗星体在相互之间的万有引力作用下, 分别位于等边三角形的三个顶点上, 绕某一共同的圆心O在三角形所在的平面内做相同角速度的圆周运动(图示为A、B、C三颗星体质量不相同的一般情况)。若A星体质量为 $2m$ 、B、C两星体的质量均为 $m$ , 三角形的边长为 $a$ , 求:

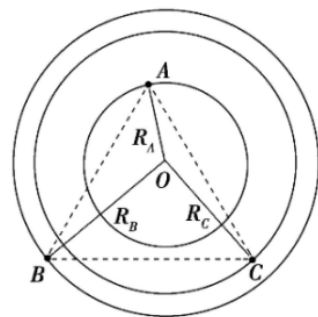
(1) A星体所受合力大小 $F_A$ ;

(2) B星体所受合力大小 $F_B$ ;

(3) C星体的轨道半径 $R_C$ ;

(4) 三星体做圆周运动的周期 $T$ 。

[答案] (1)  $2\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2}$  (2)  $\sqrt{7}G\frac{m^2}{a^2}$  (3)  $\frac{\sqrt{7}}{4}a$  (4)  $\pi\sqrt{\frac{a^3}{6m}}$



应用举例 -> 碰撞过程能量分析

讨论两自由粒子碰撞的动能损失:

$$E_k = E_{ck} + E'_k \Rightarrow \Delta E_k = \Delta E'_k + \Delta E_{ck}$$

由动量守恒得 $v_c$  恒定, 从而 $\Delta E_{ck} = 0$ .

$$\text{则 } \Delta E_k = \Delta E'_k.$$

两种极端: 1)  $\Delta E'_k = 0$  弹性碰撞

2)  $\Delta E'_k = E'_k$  完全非弹性碰撞

最大可利用动能(资用能)等于质心系中系统初动能