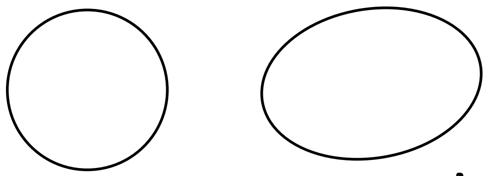
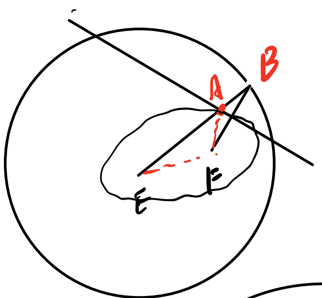
专题：圆锥曲线的秘密



圆：$x^2+y^2=a^2$　　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

椭圆第一定义：$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

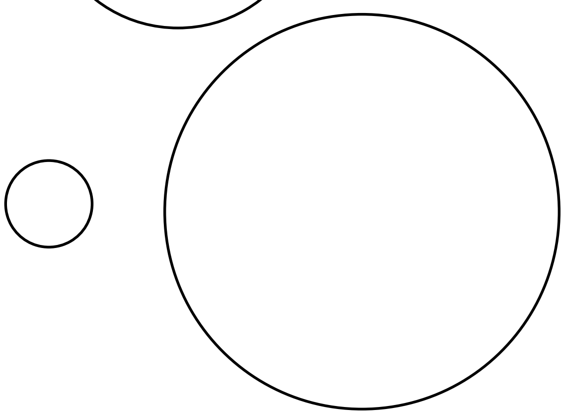
直观演绎：



A的轨迹便是椭圆

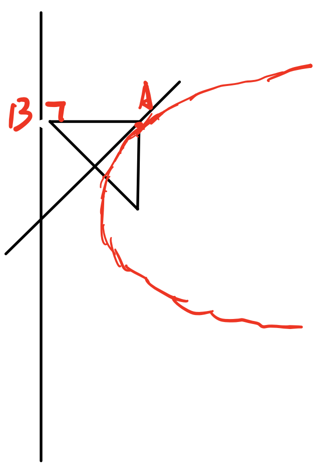
$AE+AF=r$（半径）

如何将椭圆第一定义向圆锥曲线演绎？



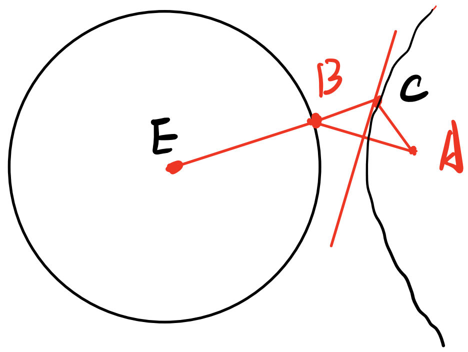
圆放大到无穷
近似看作直线
（微积分思想）

如果我们将生成椭圆的定圆推广为直线（无穷大圆）



生成了圆锥曲线中的抛物线

那又该如何定义双曲线？



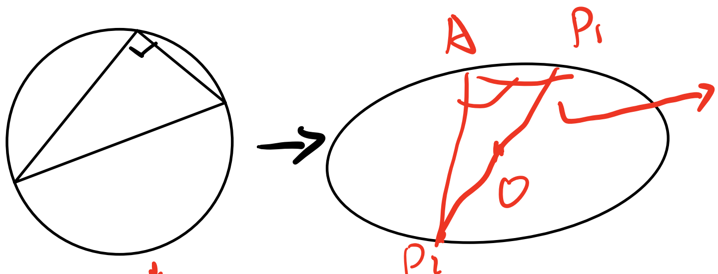
由圆内一定点 → 圆外一定点

CE−CB = r（半径）定值

↓

构成了双曲线

圆的一些性质向圆锥曲线的推广



角度！

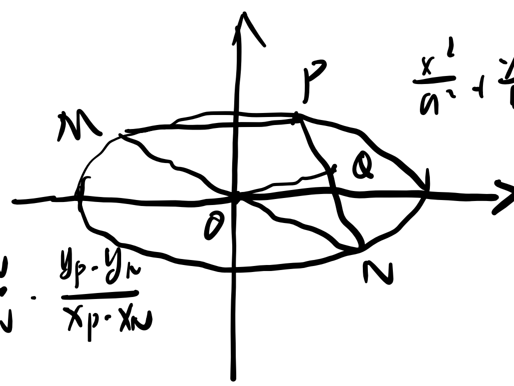
推广到椭圆里

$k_{P_1A}\cdot k_{P_1B}$ = 定值 $\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)$

直角在代数里的解释：$k_1\cdot k_2=-1$

证明：$k_{PM}\cdot k_{PN}$ 为定值

证：　Q为PN中点

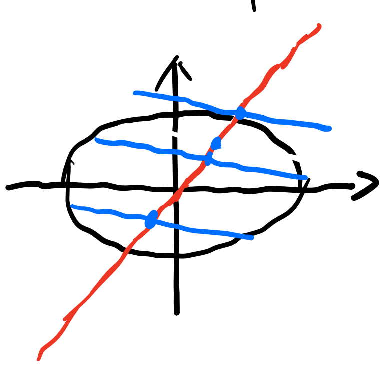


$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$k_{PM}\cdot k_{PN}=k_{OQ}\cdot k_{QN}$$

$$=\frac{y_Q-0}{x_Q-0}\cdot\frac{y_P-y_N}{x_P-x_N}=\frac{y_P+y_N}{x_P+x_N}\cdot\frac{y_P-y_N}{x_P-x_N}$$

$$=\frac{y_P^2-y_N^2}{x_P^2-x_N^2}=-\frac{b^2}{a^2}$$



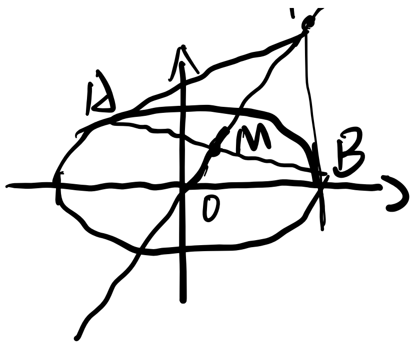
共线问题

切点、中点、原点

条件：弦（切线）平行

P.

拓：



OP为过原点的一条直线

PA、PB为椭圆切线

连接AB与OP交于M

试证：M为AB中点

分析：若M为AB中点，$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$

假设 $k_{OP}=k$　OP：$y=kx$　$P(x_0,y_0)$

$A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$

l_{PA}：$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$　l_{PB}：$\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$

联立，韦达 Th　求解复杂

OP：$y=kx$

$A(x_1,y_1)$

$B(x_2,y_2)$

椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

l_{PA}：$\begin{cases}\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\\ y=kx\end{cases}$

$\frac{b^2}{y_1}\left(1-\frac{x_1x}{a^2}\right)=kx$

$\Rightarrow \frac{b^2}{y_1}=\left(\frac{x_1b^2}{y_1a^2}+k\right)x$

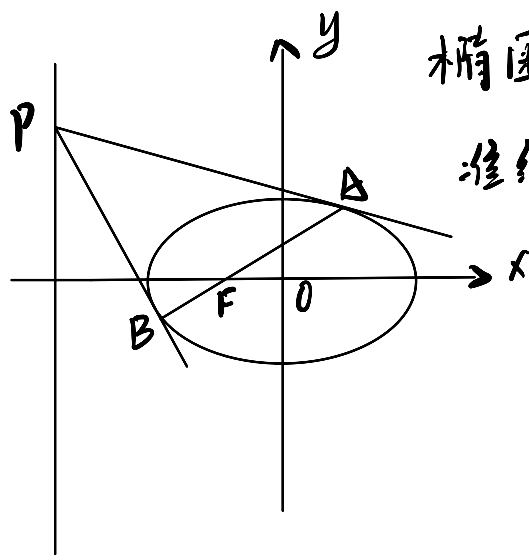
同理 l_{PB} 联立：$\frac{b^2}{y_2}=\left(\frac{x_2b^2}{y_2a^2}+k\right)x$

$\Leftrightarrow$ 证明：$\frac{a^2b^2y_1}{y_1(x_1b^2+ky_1a^2)}=\frac{a^2b^2y_2}{y_2(x_2b^2+ky_2a^2)}$

$\Leftrightarrow x_1b^2+ky_1a^2=x_2b^2+ky_2a^2$

$\Leftrightarrow ka^2(y_1-y_2)=b^2(x_2-x_1)$

$\Leftrightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$



椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

准线：$x=-\frac{a^2}{c}$ 任意一点 P

过 P 作椭圆切线 PA. PB

求证：AB 与左焦点 $F(-c,0)$

证：$P(-\frac{a^2}{c},m)$

l_{PB}: $\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1 \xrightarrow{代入P} -\frac{x_2}{c}+\frac{my_2}{b^2}=1$

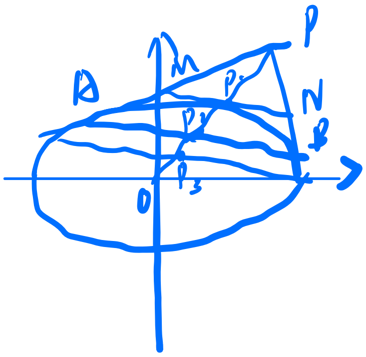
l_{PA}: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \xrightarrow{代入P} -\frac{x_1}{c}+\frac{my_1}{b^2}=1$

$\therefore$ A.B 在直线：$-\frac{x}{c}+\frac{my}{b^2}=1$ 上

$\downarrow$

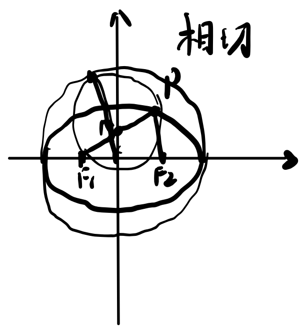
恒过 $(-c,0)$

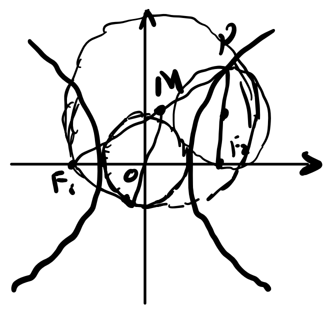
拓：$PF\perp AB$（自证）

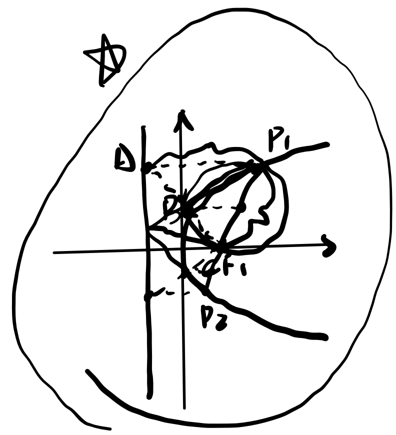


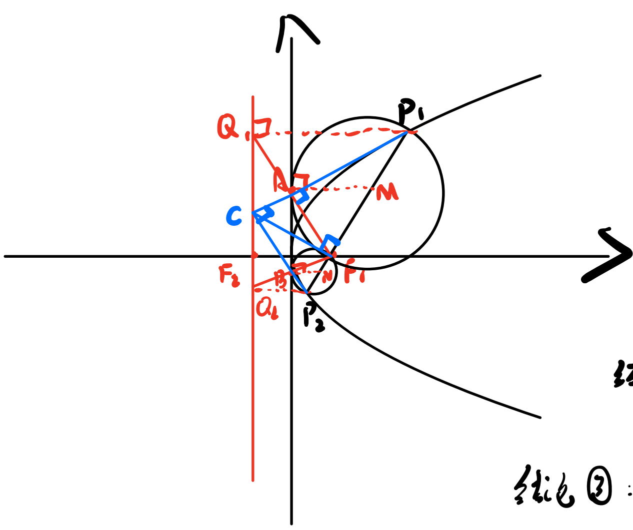
试证: P_1为 MN中点

圆锥曲线的焦半径、焦点弦









P_1P_2 为过 F_1 的弦

M, N 为 P_1F_1, P_2F_2 中点

结论①:

以 P_1F_1 为直径, M为中点的圆与y轴相切

A, B 为切点

P_1Q_1, P_2Q_2 ⊥ y轴

结论②: Q_1, A, F_1 共线

Q_2, B, F_1 共线

结论③: $P_1A\perp Q_1F_1$ $P_2B\perp Q_2F_1$

另: CP_1, CP_2 与抛物线相切

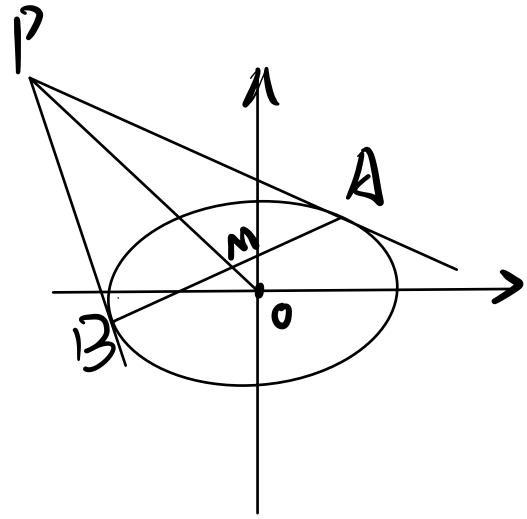
结论④: P_1A, P_2B 交于准线上一点C

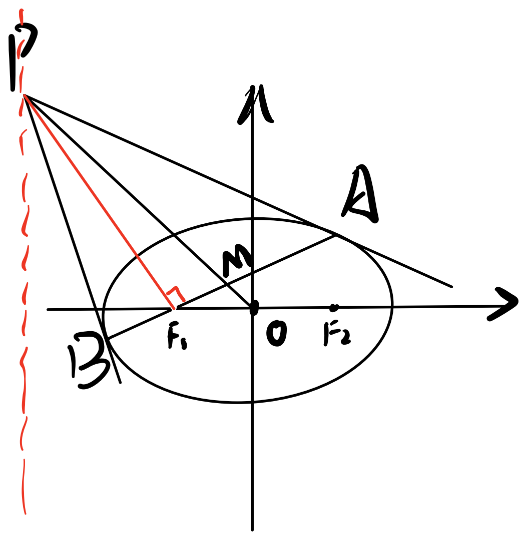
结论⑤: $Q_1F_1\perp Q_2F_1$

结论⑥: C为 Q_1Q_2 中点

结论⑦: $CF_1\perp P_1P_2$

例：如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，P是直线 $x=-4$ 上一点，过点P作椭圆C的两条切线PA，PB，直线AB与OP交于点M，则 $\sin\angle PMB$ 最小值为___





$x=-4$ 为准线，$\rightarrow$ AB 恒过 F_1

PO与AB相交于M $\rightarrow$ M为AB中点

☆ $PF_1 \perp AB$

$\sin\angle PMB = \frac{|PF_1|}{|PM|}$ 只需求 $|PF_1|$ $|PM|$ 即可

设 $P(-4,m)$ $|PF_1| = \sqrt{(4-1)^2+m^2} = \sqrt{m^2+9}$

$PA: \frac{x_1 x}{4} + \frac{y_1 y}{3} = 1$

$PB: \frac{x_2 x}{4} + \frac{y_2 y}{3} = 1$

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{y_1 m}{3} = 1 \\ -x_2 + \frac{y_2 m}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow AB: -x + \frac{ym}{3} = 1$$

$OP: y = -\frac{m}{4}x$

$\Rightarrow M: \left(-\frac{12}{12+m^2}, \frac{3m}{12+m^2}\right)$

$$|PM| = \sqrt{\left(\frac{12}{12+m^2} - 4\right)^2 + \left(m - \frac{3m}{12+m^2}\right)^2}$$

$$= \frac{(9+m^2)\sqrt{16+m^2}}{12+m^2}$$

$$\sin\angle PMB = \frac{|PF_1|}{|PM|} = \frac{12+m^2}{\sqrt{(9+m^2)(16+m^2)}}$$

$$= \frac{12+t}{\sqrt{(9+t)(16+t)}} = \frac{a}{\sqrt{(a-3)(a+4)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a} - \frac{12}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-12b^2+b+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-12\left(b-\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{49}{48}}}$$

$$\geq \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$m = \pm 2\sqrt{3}$ 取等