Tarea 4 Demostraciones

Sean X y Y variables aleatorias $\wedge$ $c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Se cumplen las siguientes propiedades

i) $E(c) = c$. • Considerando $E[H(x)] = \sum_x H(x) f(x)$

Demos:

$$E[c] = \sum_x c f(x)$$
$$= c \sum_x f(x)$$
$$= c$$

ii) $E[cX] = c E[X]$.

Demos:

1. $E[cX] = \sum_x cx f(x)$ • Por definición.
2. $= c \sum_x x f(x)$ • Prop. Σ en constantes.
3. $= c\,E[X]$ • Por def. siendo $H(x) = X$

iii) $E[a + bX + cY] = a + bE[X] + cE[Y]$.

Demos:

1. $E[a + bx + cY] = \sum_x (a + bx + cy) \cdot f(x)$ • por def. de $E[H(x)]$
2. $= \sum_x a f(x) + \sum_x bx f(x) + \sum_x cy \cdot f(x)$ • Prop. de Σ en 1.
3. $= a \sum_x f(x) + b \sum x f(x) + c \sum_x y f(x)$ • Prop de Σ y $\sum_x f(x) = 1$ en 2.
4. $= a + b\,E[X] + c\,E[Y]$ • definición de $E[H(x)]$ en 3.

iv) $\mathcal{E}[XY] = \mathcal{E}[X] \cdot \mathcal{E}[Y]$

Demos.

1. $\mathcal{E}[X] \cdot \mathcal{E}[Y] = \sum_x x f(x) \cdot \sum_x y \cdot f(x)$ ○ Conmutación de $\sum$

2. $= \sum_x \left(x f(x) \cdot \sum_x y f(x) \right)$ ○ Distribución de $\underline{\sum_x f(x)}$ en 1

3. $= \sum_x \left(\sum_x x \cdot y f(x) \right) f(x)$ ○ Distribución de $\underline{x}$ en 2

4. $= \sum_x \mathcal{E}[x \cdot y] f(x)$ ○ def. de $\mathcal{E}[H(x)]$, $\underline{H(x) = x \cdot y}$

5. $= \mathcal{E}[x \cdot y] \sum_x f(x)^{1}$ ○ Como $\mathcal{E}[x \cdot y]$ es $\underline{cte}$.

6. $= \mathcal{E}[x \cdot y]$ ○ $\underline{\sum f(x) = 1}$