

Задачи линейного программирования

Подготовили:

Студенты группы ВИС 31

Домодедов Дмитрий

Литвинов Евгений

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую *двойственной* или сопряженной по отношению к исходной или прямой задаче. Дадим определение двойственной задачи по отношению к *общей задаче линейного программирования*, состоящей, как мы уже знаем, в нахождении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \quad (1)$$

при условиях

[illegible]

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n). \quad (3)$$

Задача, состоящая в нахождении минимального значения функции

$$F^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \quad (4)$$

при условиях

[illegible]

$$y_i \geq 0 \quad [i = \overline{1, k}, k \leq m], \quad (6)$$

называется *двойственной* по отношению к задаче (1) – (3). Задачи (1) – (3) и (4) – (6) образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*. Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи (1) – (3) задается на максимум, а целевая функция двойственной (4) – (6) – на минимум.

2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (2) исходной задачи (1) – (3), и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

в двойственной задаче (4) – (6) получаются друг из друга транспонированием (т. е. заменой строк столбцами, а столбцов – строками).

3. Число переменных в двойственной задаче (4) – (6) равно числу ограничений в системе (2) исходной задачи (1) – (3), а число ограничений в системе (5) двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (4) двойственной задачи (4) – (6) являются свободные члены в системе (2) исходной задачи (1) – (3), а правыми частями в соотношениях системы (5) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (1) исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи (1) – (3) может принимать только лишь положительные значения, то j -е условие в системе (5) двойственной задачи (4) – (6) является неравенством вида “ \leq ”. Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то 1 – соотношение в системе (3) представляет собой уравнение. Аналогичные связи имеют место между ограничениями (2) исходной задачи (1) – (3) и переменными двойственной задачи (4) – (6). Если i – соотношение в системе (2) исходной задачи является неравенством, то i -я переменная двойственной задачи

$$y_j \geq 0$$

В противном случае переменная y_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения (2) прямой задачи и соотношения (5) двойственной задачи являются не \leq “равенствами”, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

Пример 1.

Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad (9)$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0. \quad (11)$$

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений в системе (10), т. е. равно трем. Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений (10), т.е. числа 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи (9) – (11) исследуется на максимум, а система условий (10) содержит только уравнения. Поэтому в двойственной

задаче целевая функция исследуется на минимум, а ее переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи (9) – (11) принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида “?”. Следовательно, для задачи (9) – (11) двойственная задача такова:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3. \end{cases}$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач.

Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней. Исходная задача: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (12)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (13)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14)$$

Двойственная задача: найти минимум функции

$$F^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (15)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (16)$$

Каждая из задач двойственной пары (12) – (14) и (15), (16) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач тем самым находится решение и другой задачи.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 1.

Если X – некоторый план исходной задачи (12) – (14), а Y – произвольный план двойственной задачи (15), (16), то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y , т. е.

$$F(X) \leq F^*(Y).$$

Лемма 2.

Если $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для некоторых планов X^* и Y^* задач (12) – (14) и (15), (16), то X^* – оптимальный план исходной задачи, а Y^* – оптимальный план двойственной задачи.

Теорема 1

(первая теорема двойственности). Если одна из задач двойственной пары (12) – (14) или (15), (16) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е. $F_{\max} = F_{\min}^*$.

Если же целевая функция одной задачи из двойственной пары неограничена (для исходной (12) – (14) – сверху, для двойственной (15), (16) – снизу), то другая задача вообще не имеет планов.

Теорема 9

(вторая теорема двойственности).

План $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ задачи (12) – (14) и план $Y^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*\}$ задачи (15), (16) являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого $j \in \overline{1, n}$ выполняется равенство

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0.$$

Геометрическая интерпретация двойственных задач. Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач. При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев: 1) обе задачи имеют планы; 2) планы имеет только одна задача; 3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

Пример 2.

Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$F = 2x_1 + 7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Решение. Двойственной задачей по отношению к исходной является задача, состоящая в определении минимального значения функции $F^* = 14y_1 + 8y_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 \geq 2, \\ 3y_1 + y_2 \geq 7, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Как в исходной, так и в двойственной задаче число неизвестных равно двум. Следовательно, их решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования.

Как видно из рис. 2, максимальное значение целевая функция исходной задачи принимает в точке B . Следовательно, $X^*=(2, 6)$ является оптимальным планом, при котором $F_{\max} = 46$. Минимальное значение целевая функция двойственной задачи принимает в точке E (рис. 2). Значит, $Y^*=(1; 4)$ является оптимальным планом двойственной задачи, при котором $C \subseteq \text{пр}_1 G$. Таким образом, значения целевых функций исходной и двойственной задач при их оптимальных планах равны между собой.

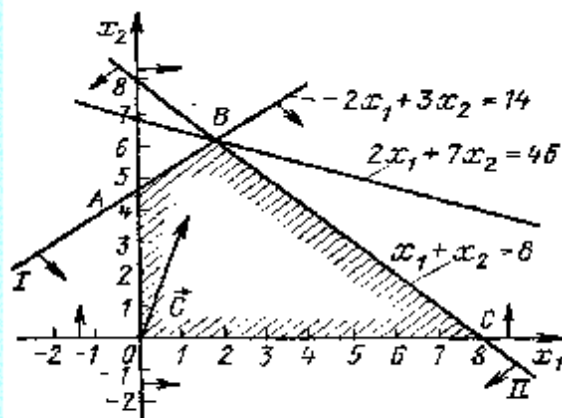


Рис. 1

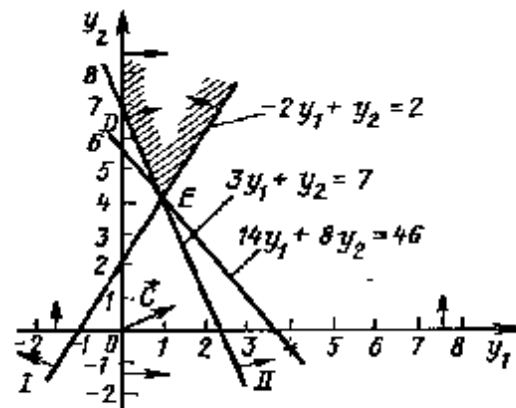


Рис. 2

Из рис. 1 видно, что при всяком плане исходной задачи значение целевой функции не больше 46. Одновременно, как видно из рис. 2, значение целевой функции двойственной задачи при любом ее плане не меньше 46. Таким образом, при любом плане исходной задачи значение целевой функции не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при ее произвольном плане.

Пример 15.

Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F = x_1 + 2x_2 - x_3$ при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

составить двойственную задачу и найти ее решение.

Решение. Двойственная задача по отношению к исходной состоит в нахождении минимума функции $F^* = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3$ при условии

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \geq 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Чтобы найти решение двойственной задачи, сначала находим решение исходной задачи методом искусственного базиса. Оно приведено в таблице 12.

Из последней симплекс-таблицы видно, что двойственная задача имеет решение $y_1^* = \frac{5}{7}; y_2^* = 0; y_3^* = \frac{6}{7}.$

Оптимальные двойственные оценки удовлетворяют всем условиям двойственной задачи. При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи, равное

$$F_{\min}^* = 12 \cdot \left(\frac{5}{7}\right) + 17 \cdot 0 + 4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right) = 12,$$

совпадает с максимальным значением целевой функции исходной задачи.

$$F_{\max}$$

Таблица 12

i	Базис	$C_{\bar{b}}$	P_0	1	2	-1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	p_4	p_5	P_6
1	p_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	p_6	$-M$	4	2	-1	2	0	0	1
4			0	-1	-2	1	0	0	0
5	p_4	0	-4	-2	1	-2	0	0	0
1	P_5	0	14	0	7/2	-1	1	0	1/2
2	p_1	1	15	0	3/2	1	0	1	-1/2
3		2	2	1	-1/2	1	0	0	1/2
4	p_2	0	2	0	-5/2	2	0	0	1/2
1	P_5	1	4	0	1	-2/7	2/7	0	1/7
2	p_1		9	0	0	13/7	-3/7	1	-5/7
3			4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7