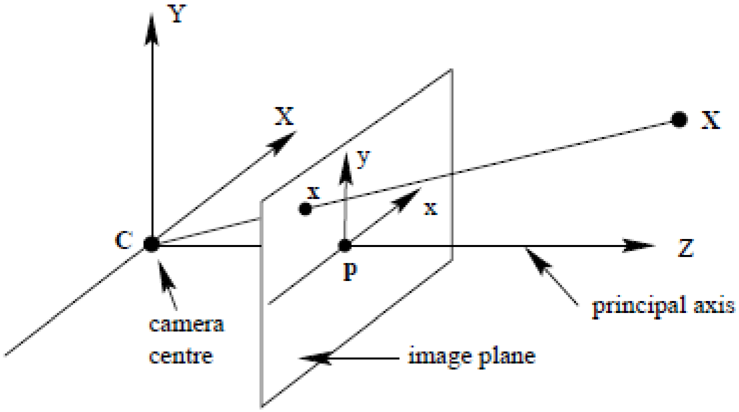
Create New Map Point

1. Camera Center

1.1 Camera Parameter



x → X를 카메라에 projection 시켰을 때의 픽셀 좌표를 말한다.

x와 X에 대한 관계를 다음과 같이 정의할 수 있다

$$\mathrm{x} = \mathrm{PX}$$

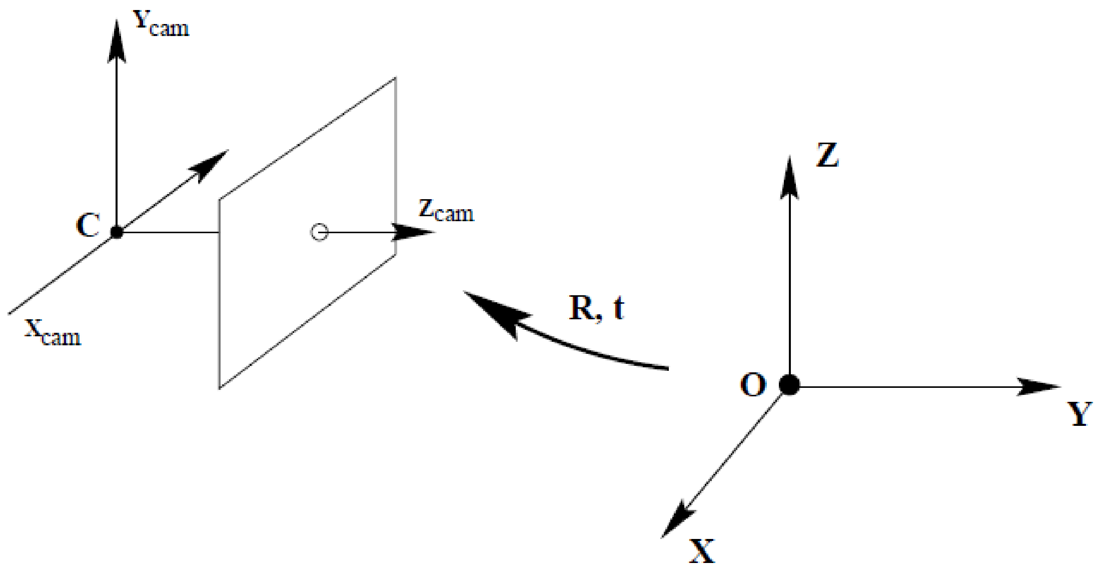
$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f\mathrm{X} + \mathrm{Z}p_x \\ f\mathrm{Y} + \mathrm{Z}p_y \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & p_x & 0 \\ & f & p_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{K}[\mathrm{I} \mid 0]\mathrm{X}_{\mathrm{cam}}.$$

$Xcam \rightarrow$ Camera coordinate 기준으로 한 X의 좌표

1.2 World coordinate와 Camera coordinate의 관계



$\tilde{X}$와 $\tilde{X}cam$는 같은 위치를 각각 World Coordinate와 Camera Coordinate에서 바라본 좌표값이며 $\tilde{C}$는 Camera center이다. (위의 물결표시는 inhomogeneous임을 나타냄) 이들의 관계를 식으로 나타내면

$$\tilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{cam}} = \mathrm{R}(\tilde{\mathrm{X}} - \tilde{\mathrm{C}}),$$

이고 이를 homogeneous로 나타내면

$$\mathrm{X}_{\mathrm{cam}} = \begin{bmatrix} \mathrm{R} & -\mathrm{R}\tilde{\mathrm{C}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{R} & -\mathrm{R}\tilde{\mathrm{C}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{X}$$

$$\mathbf{x} = \mathrm{KR}[\mathrm{I} \mid -\widetilde{\mathrm{C}}]\mathbf{X}$$

이다.

또한 $\tilde{X}cam$ 좌표는 $\tilde{X}$가 Rotation과 Translation을 했다는 관점으로 생각할 수 있다.

$$\widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{cam}} = \mathrm{R}\widetilde{\mathrm{X}} + \mathbf{t}$$

따라서, 바로 위의 식

$$\widetilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{cam}} = \mathrm{R}(\widetilde{\mathrm{X}} - \widetilde{\mathrm{C}}),$$

과 비교해보면

$$\mathbf{t} = -\mathrm{R}\widetilde{\mathrm{C}}.$$

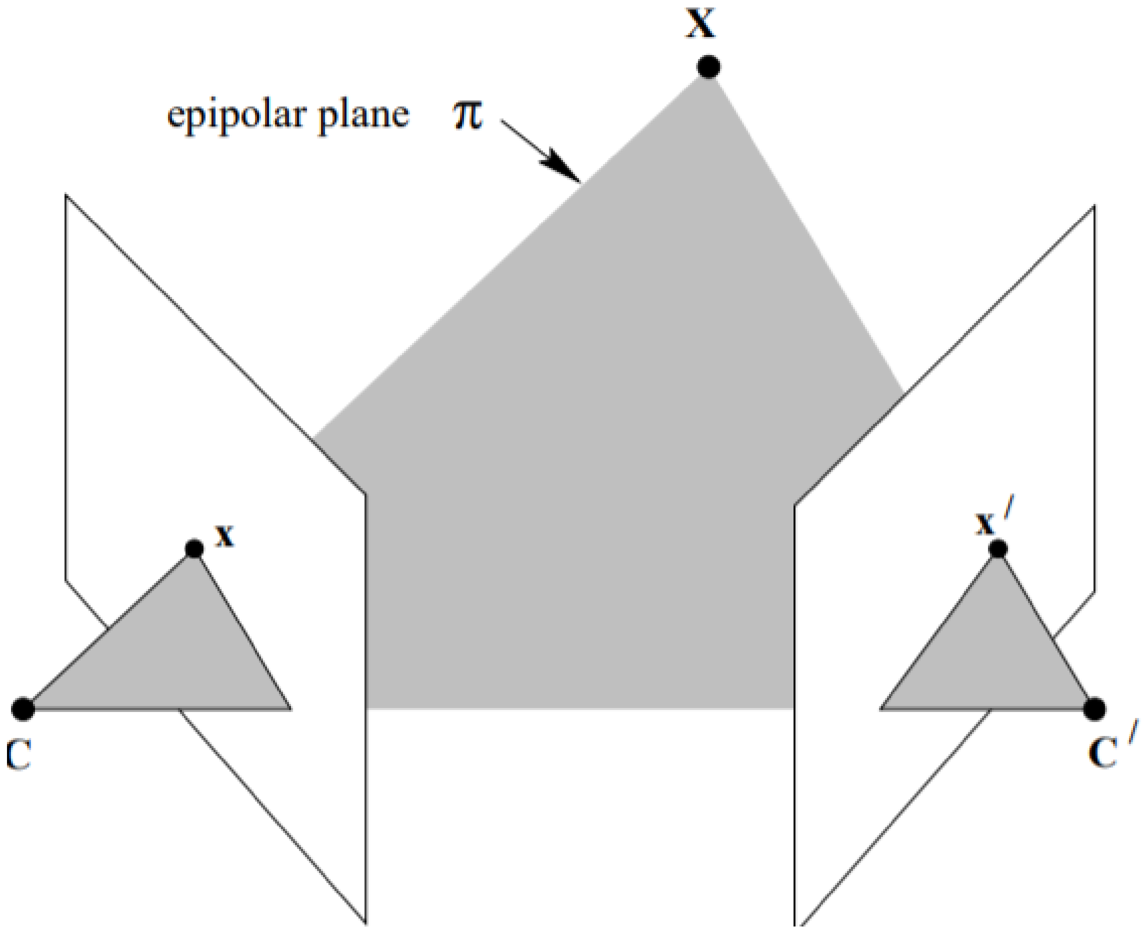
관계를 알 수 있고 $-R$을 넘겨주면 Camera Center $\tilde{C}$를 구할 수 있게된다.

2. Fundamental Matrix

X를 Camera Center가 각각 C, C'인 Frame1, Frame2로 Projection된 좌표를 x, x'라고 하자

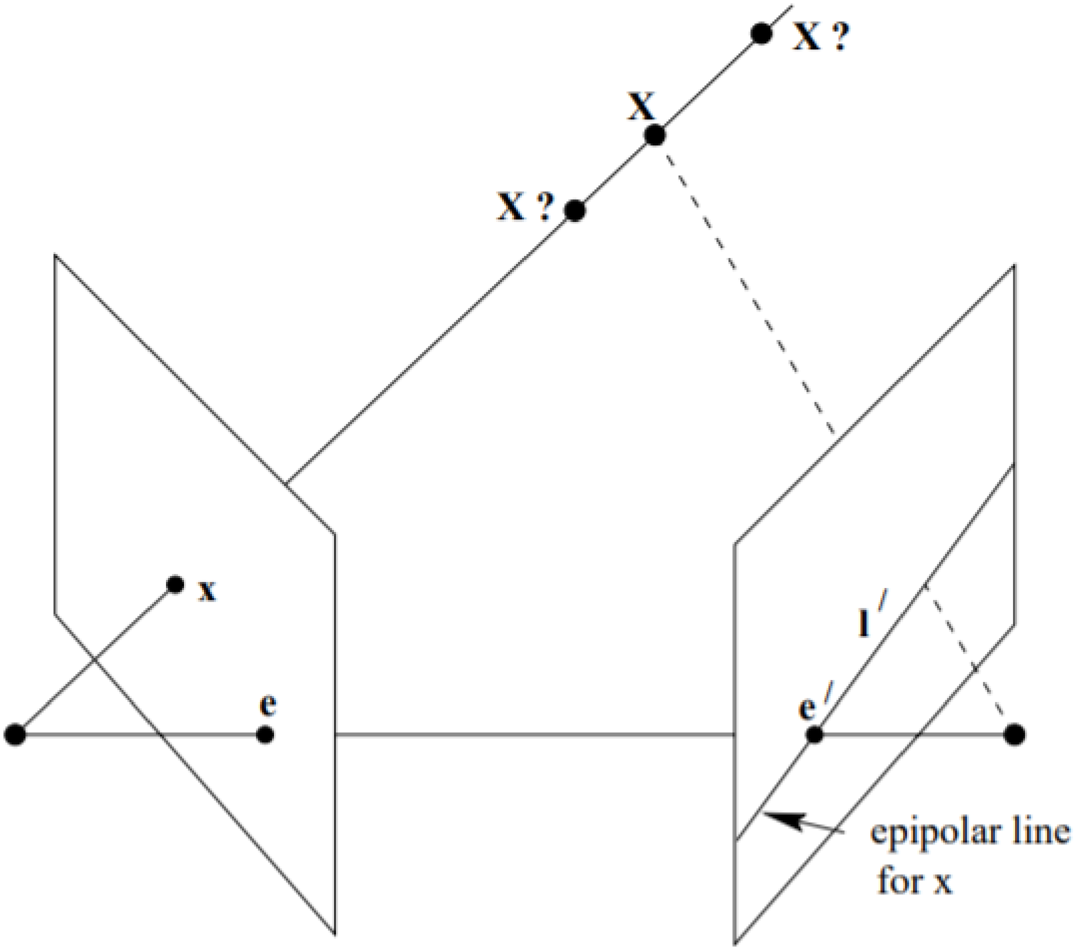
그러면 C로부터 x를 지나는 Ray와 C'로부터 x'를 지나는 Ray 가 X에서 만나며

이로 인해 epipolar plane π를 형성하게 되는데, 이는 한 평면에 C, C', x, x', X가 존재한다는 의미이다.



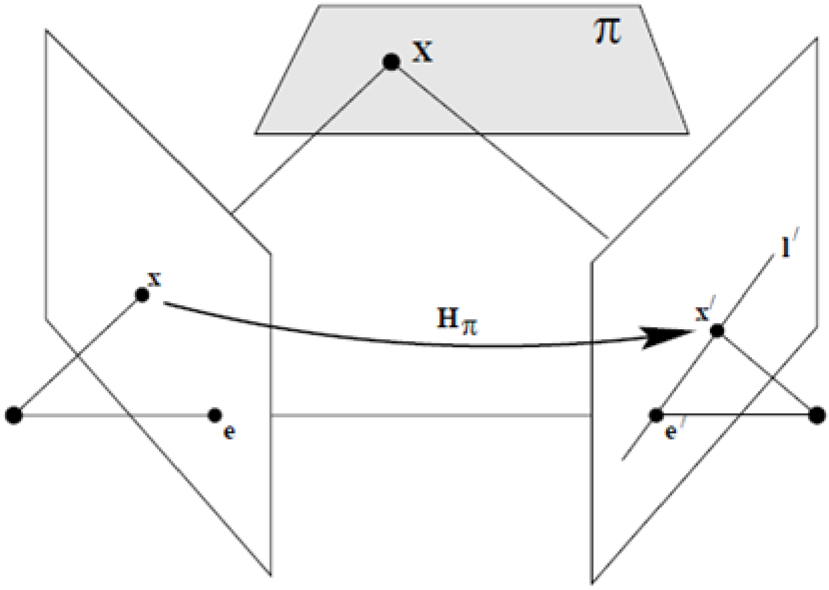
epipolar plane π와 Frame 2의 intersection은 line이 된다. 우리는 이를 epipolar line l'이라고 하는데

여기서 알 수 있는 것은 x'는 직선 l'위에 어딘가에 존재할 수밖에 없다는 것이다. (같은 평면에 있어야 하므로)



x에 대응되는 l'를 구하기 위해 x와 l'의 관계를 구해보자.

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{l}'$$



Frame1과 Frame2 위에 존재하는 x와 x'는 2D→2D mapping (Homography)의 관점으로도 볼 수 있으므로 아래와 같은 관계를 정의할 수 있다.

$$\mathrm{x}' = \mathrm{H}_\pi \mathrm{x}$$

l'는 두 점 e'와 x'를 지나는 직선이므로 다음과 같다.

$$\mathrm{l}' = \mathrm{e}' \times \mathrm{x}' = [\mathrm{e}']_\times \mathrm{x}'$$

($[e']_\times$는 skew-symmetric matrix)

따라서,

$$\mathrm{l}' = [\mathrm{e}']_\times \mathrm{H}_\pi \mathrm{x}$$

가 된다.

이제 e'와 H_π를 구해보자

X와 x의 관계는 1.1에서 다음과 같았다.

$$\mathrm{P}\mathbf{X} \ = \ \mathbf{x}.$$

여기서 우리는 X부터 시작하여 C로 끝나는 선분의 식을 얻을 수 있다

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathrm{P}^{+}\mathbf{x} + \lambda\mathbf{C}$$

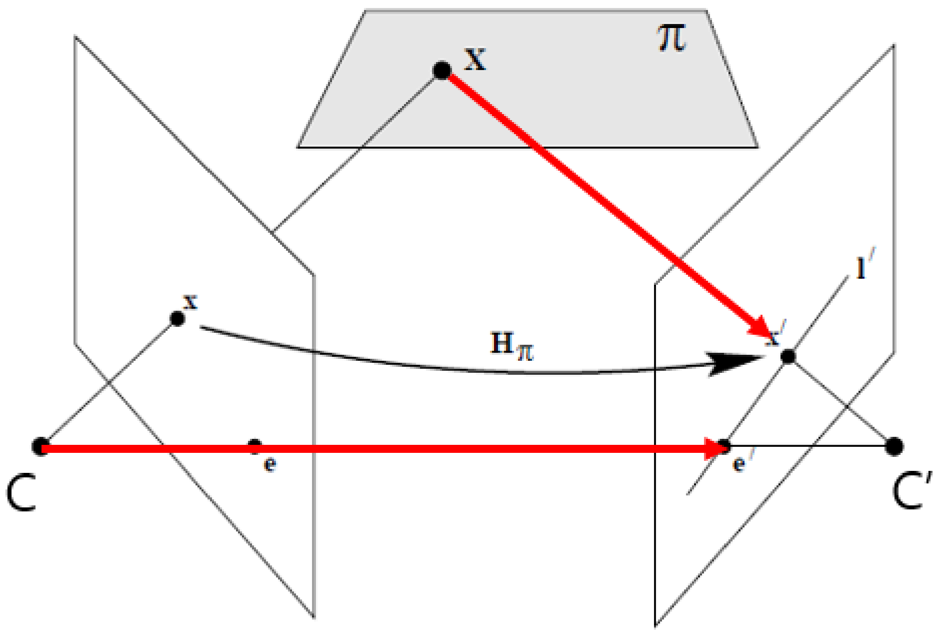
λ는 scale 값이며 $\lambda = 0$일때 점 X를 나타내며 $\lambda = \infty$일때 점 C를 나타낸다 ($PC = 0$ 이라 정의)

여기서 X는

$$\mathrm{P}^{+}\mathbf{x} \ (\mathrm{at} \ \lambda \ = \ 0).$$

로 나타낼 수 있다.

두 점 X와 C를 Frame2로 projection 한 점이 각각 x',e'이며 다음과 같이 정리할 수 있다.



$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}' = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{l}' = (\mathtt{P}'\mathbf{C}) \times (\mathtt{P}'\mathtt{P}^+\mathbf{x})$$

$$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}']_\times (\mathtt{P}'\mathtt{P}^+)\mathbf{x} = \mathtt{F}\mathbf{x}.$$

이로써 Fundamental matrix F를 정의할 수 있다.

ex)

만약 다음과 같은 조건이 주어진다면

$$\mathtt{P} = \mathtt{K}[\mathtt{I} \mid \mathbf{0}] \qquad \mathtt{P}' = \mathtt{K}'[\mathtt{R} \mid \mathbf{t}].$$

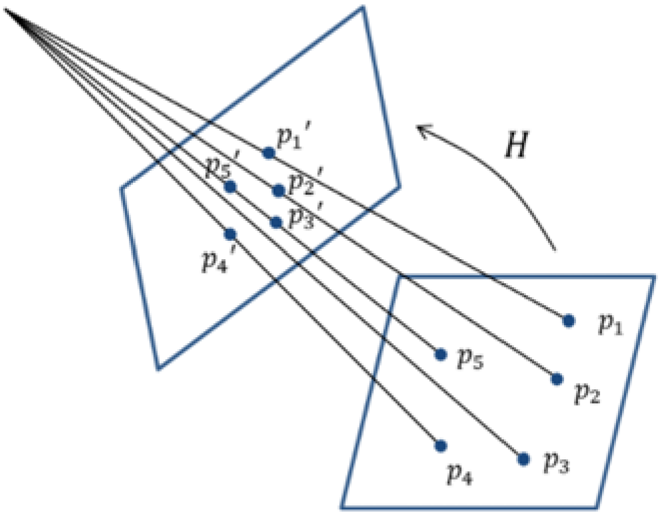
$$\mathtt{P}^+ = \begin{bmatrix} \mathtt{K}^{-1} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamental Matrix F는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathtt{F} &= [\mathtt{P}'\mathbf{C}]_\times \mathtt{P}'\mathtt{P}^+ \\ &= [\mathtt{K}'\mathbf{t}]_\times \mathtt{K}'\mathtt{R}\mathtt{K}^{-1} = \mathtt{K}'^{-\mathsf{T}}[\mathbf{t}]_\times \mathtt{R}\mathtt{K}^{-1} = \mathtt{K}'^{-\mathsf{T}}\mathtt{R}[\mathtt{R}^\mathsf{T}\mathbf{t}]_\times \mathtt{K}^{-1} = \mathtt{K}'^{-\mathsf{T}}\mathtt{R}\mathtt{K}^\mathsf{T}[\mathtt{K}\mathtt{R}^\mathsf{T}\mathbf{t}]_\times \end{aligned}$$

3. Linear Triangulation Method

3.1 DLT(Direct Linear Transformation)



https://darkpgmr.tistory.com/153

한 평면을 다른 평면에 투영(projection)시켰을 때 투영된 대응점들 사이에는 일정한 변환관계가 성립하는데 이 변환관계를 호모그래피(Homography)라 부른다.

(출처: 다크프로그래머 블로그)

이러한 변환관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}_i' = \mathrm{H}\mathbf{x}_i$$

행렬 H의 각 행을 하나로 묶어서 행렬 h를 재정의 할 수 있다.

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}$$

앞서말한 변환관계식에서 양변에 x_i'를 외적 해주고 정리하면

$$\mathbf{x}'_i = (x'_i, y'_i, w'_i)^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{x}'_i \times \mathtt{H}\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} y'_i \mathbf{h}^{3\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - w'_i \mathbf{h}^{2\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \\ w'_i \mathbf{h}^{1\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - x'_i \mathbf{h}^{3\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \\ x'_i \mathbf{h}^{2\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - y'_i \mathbf{h}^{1\mathsf{T}}\mathbf{x}_i \end{pmatrix}$$

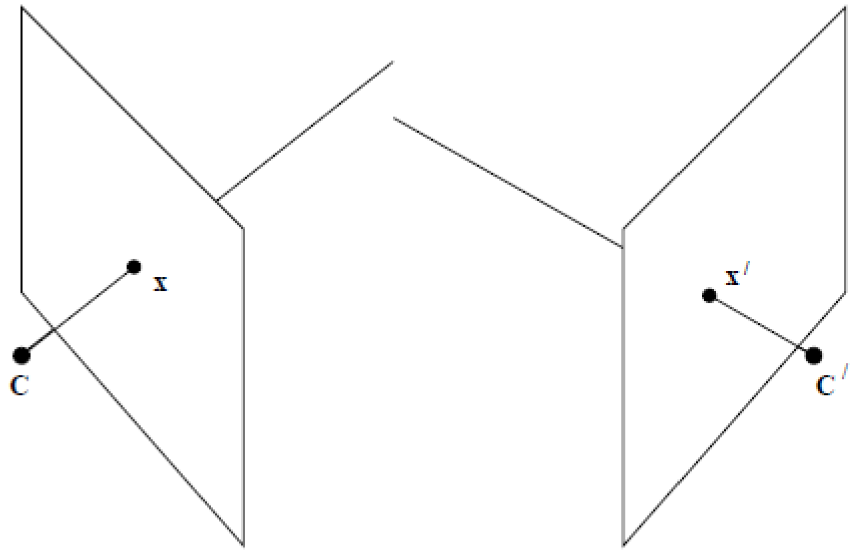
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\mathsf{T} & -w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & y'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \\ w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} & -x'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \\ -y'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & x'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\mathsf{T} & -w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & y'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \\ w'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} & -x'_i\mathbf{x}_i^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathtt{A}_i \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

여기서 $AX = 0$꼴의 식을 얻을 수 있다.

3.2 Linear Triangulation Method



어떠한 matching을 통해 x와 x'가 같은 점을 바라보고 있다고하자

그렇다면 x와 x'가 바라보는 같은 점의 좌표를 어떻게 구할 수 있을까?

여기에 대한 해답중 하나가 Linear Triangulation Method 이다.

두 점 x와 x'는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathrm{x} = \mathrm{PX},\ \mathrm{x}' = \mathrm{P}'\mathrm{X},$$

여기서 특정한 행렬 A를 얻을 수 있다.

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} x\mathbf{p}^{3\top} - \mathbf{p}^{1\top} \\ y\mathbf{p}^{3\top} - \mathbf{p}^{2\top} \\ x'\mathbf{p}'^{3\top} - \mathbf{p}'^{1\top} \\ y'\mathbf{p}'^{3\top} - \mathbf{p}'^{2\top} \end{bmatrix}$$

이 특정한 행렬을 얻는 방법은 3.1에서 말한 DLT(Direct Linear Transformation)로부터 유도될 수 있다.

현재 우리가 구해야 하는 좌표는 X이므로 식은 다음과 같다.

$$\mathtt{A}\mathrm{X} = 0$$

3.3 Least-squares solution

앞서 본 식에 완벽하게 맞는 X를 찾을 수 있으면 좋겠으나, noise같은 문제 때문에 정확한 값을 구할 수는 없고 $AX = 0$ 를 만족시키는 값과 가장 가까운 X를 찾아야 한다.

이는 Least-square minimization 문제이며 최적화를 위해 여기서는 SVD를 이용한다

(SVD에 대한 설명 https://angeloyeo.github.io/2019/08/01/SVD.html)

X가 0이면 의미가 없으므로 $\|X\| = 1$ 이라는 제약 조건을 추가해주면 다음과 같은 최적화 문제를 만들 수 있다.

$$Minimize \ \|AX - b\| = \|AX\|$$

$$Subject \ \|X\| = 1$$

$A = UDV^T$ 라고 하면(SVD) 주어진 문제는 $\|UDV^TX\|$를 최소화 해주는 문제로 바뀐다

Norm-preserving 성질 때문에 다음과 같은 두 식을 얻을 수 있다.

$$\|UDV^TX\| = \|DV^TX\| \qquad \|X\| = \|V^TX\|$$

여기서 V^TX를 y로 놓는다면 다음과 같은 최적화 문제를 만들 수 있다.

$$Minimize \ \|Dy\|$$

$$Subject \ \|y\| = 1$$

이 문제에 대한 솔루션은 $y = (0, 0, 0, ..., 1)^T$ 이다.

$y = V^T X$에서 $X = Vy$ 이므로 최종적으로 X는 V의 마지막 열(Column)과 같다는 말이다.

요약하면 다음과 같다

Objective

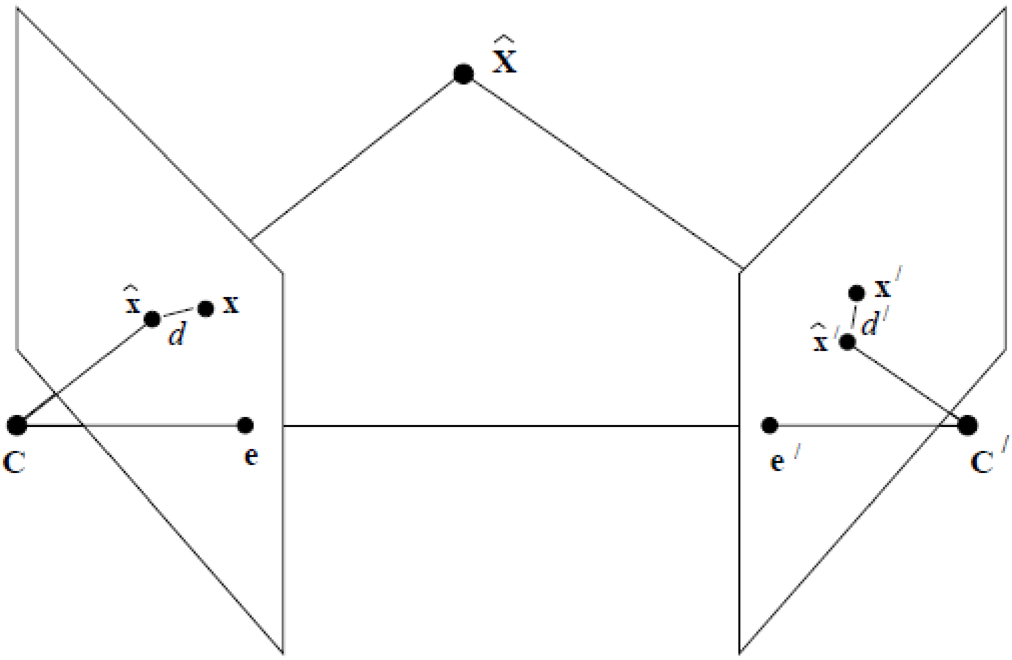
Given a matrix $\mathtt{A}$ with at least as many rows as columns, find $\mathbf{x}$ that minimizes $\|\mathtt{A}\mathbf{x}\|$ subject to $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Solution

$\mathbf{x}$ is the last column of $\mathtt{V}$, where $\mathtt{A} = \mathtt{UDV}^\mathsf{T}$ is the SVD of $\mathtt{A}$.

이로써 X에 대한 값을 구할 수 있게 된다.

3.4 Reprojection Error



바로 이전에 구한 점 X (그림에선 $\hat{X}$)에 대해서 Camera Center가 C, C'인 Frame 1과 Frame 2에 각각 다시 projection 시키면 $\hat{x}$, $\hat{x}'$을 얻을 수 있게 되는데 앞서 매칭된 점 x, x'와 차이가 있다.

x와 $\hat{x}$의 Euclidean distance와 x'와 $\hat{x}'$의 Euclidean distance의 합을 cost function으로 새로 정의해준다.

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})^2 + d(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}')^2$$

ORB SLAM 3 코드 내에서는 이 cost function이 일정 값 이상이면 continue 문을 수행하는 하는 것으로 추정된다.