Problème de la brachistochrone

Global Maths Club, research group [1]

Août 2024

Le problème de la brachistochrone, posé par Johann Bernoulli en 1696, est l'un des défis les plus célèbres de l'histoire des mathématiques. Il consiste à déterminer la courbe qu'une bille doit suivre pour descendre d'un point A à un point B sous l'effet de la gravité, en un temps minimal, en partant du repos. Ce problème est apparu au cœur d'une révolution mathématique, avec des figures emblématiques telles qu'Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz menant les avancées de l'époque.
La solution au problème de la brachistochrone est une cycloïde, une courbe générée par un point fixe sur la circonférence d'un cercle roulant sans glisser le long d'une ligne droite. Dans ce document, nous examinons en détail le problème de la brachistochrone en utilisant le calcul variationnel. Nous rappelons les résultats établis qui identifient la cycloïde comme la trajectoire optimale pour résoudre le problème classique de Bernoulli. Nous traitons ensuite les cas où la vitesse initiale de la bille n'est pas nulle, en présentant les trajectoires optimales en fonction des différentes valeurs de cette vitesse initiale. Enfin, nous abordons les effets des frottements dans ce contexte, en montrant comment ils influencent la trajectoire optimale.

Influence de la vitesse initiale

Dans cette section, nous considérons une bille lancée avec une vitesse initiale v_0 depuis un point A, comme illustré à la Figure 1. Nous négligeons les frottements dans ce cas et cherchons à déterminer le chemin de temps minimal permettant à la bille de se déplacer du point A vers un point B. L'objectif principal est d'examiner comment l'ajout de la vitesse initiale dans la formulation classique du problème de la brachistochrone, où la vitesse initiale est supposée nulle, influence la trajectoire optimale.
Dans la suite, nous noterons par g la constante de gravité. Nous supposerons que notre repère est orthogonal, avec pour origine A et orienté dans le sens du mouvement de la bille.

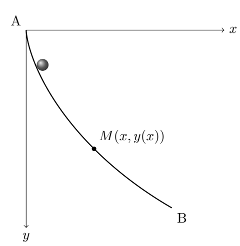

Figure 1

La conservation de l'énergie mécanique entre le point A et un point M de coordonnées (x, y) fournit:

$$v^2 - v_0^2 = 2gy \quad \text{de sorte que} \quad v = \sqrt{2gy + v_0^2}. \tag{1}$$

Si ds représente l'élément de longueur (abscisse curviligne) sur la trajectoire de la bille, alors on a:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{et} \quad dt = \frac{ds}{v},$$

de sorte que

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx. \tag{2}$$

Le temps nécessaire pour aller du point A au point B est donnée par $\int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}$.
En combinant avec les équations 1 et 2, on obtient:

$$\int_A^B dt = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)+v_0^2}}\ dx.$$

Nous introduisons les expressions

$$T(y) := \int_0^{x_B} F(x,y,y')\ dx \quad \text{avec} \quad F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)+v_0^2}}. \tag{3}$$

La fonctionnelle T représente le temps total de parcours le long de la trajectoire y. On veut donc minimiser cette fonctionnelle pour déterminer la trajectoire optimale entre le point A et le point B. De [1], les extrema de T satisfont l'équation de Beltrami, qui s'écrit sous la forme

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c, \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy+v_0^2}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

de sorte que nous obtenons

$$2gyy'^2 + v_0^2y'^2 = c_1 - 2gy,$$

où $c_1 := 1/c^2 - v_0^2 \geq 0$ et $y \leq c_1/2g$. L'expression de y' en fonction de y fournit

$$y'^2 = \frac{c_1-2gy}{2gy+v_0^2},$$

de sorte que

$$x = \int \sqrt{\frac{2gy+v_0^2}{c_1-2gy}}\, dy.$$

On fait le changement de variable $y = \frac{1}{2g}\cdot\left(c_1\sin^2(\theta) - v_0^2\cos^2(\theta)\right)$ avec $\arcsin(v_0|c|) < \theta < \pi/2$, de sorte que

$$x = \frac{1}{c^2g}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + c_2\right)$$

où c_2 est une constante.
Puisque la courbe passe par le point A, on a que $c_2 = \frac{1}{2}\left(|c|v_0\sqrt{1-(cv_0)^2} - \arcsin(|c|v_0)\right)$ de sorte que

$$x = \frac{1}{2c^2g}\left(\theta + |c|v_0\sqrt{1-(cv_0)^2} - \arcsin(|c|v_0) - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right), \tag{4}$$

$$y = -\frac{1}{2c^2g}\left(\frac{\cos(2\theta)}{2} + c^2v_0^2 - \frac{1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \arcsin(v_0|c|) < \theta < \pi/2. \tag{5}$$

La valeur de la constante c est à déterminer de sorte que la trajectoire passe par le point B.
Nous supposons que le point B a pour coordonnées $\left(\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right), \frac{v_0^2}{2g}\right)$, de sorte que $c^2 = \frac{1}{2v_0^2}$, et le système d'équations solution devient :

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(\theta + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right),$$

$$y = -\frac{v_0^2}{2g}\cos(2\theta) \quad \text{avec} \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Une représentation graphique de cette dernière est donnée par la figure 3 pour les valeurs de v_0 égales à 1 et 2.

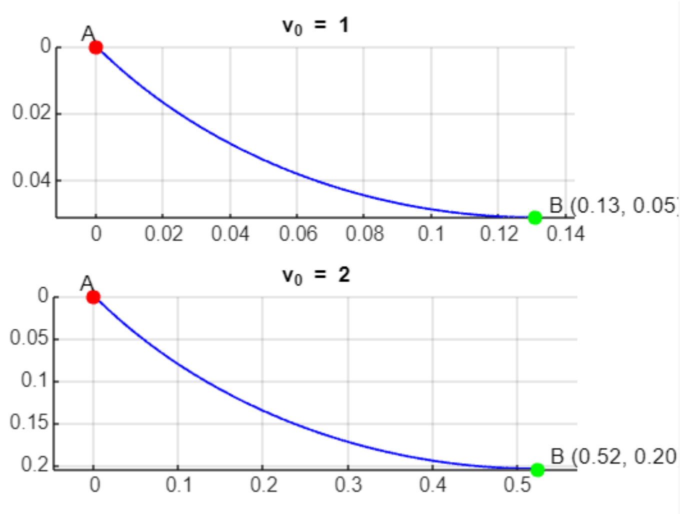

Figure 2: Représentation graphique pour les valeurs de v_0 égales à 1 et 2.

Dans le cas particulier où $v_0 = 0$, le système d'équations (4) et (5) conduit aux équations d'une cycloïde représentée à la figure 3 et donnée par le système :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4gc^2}\,(2\theta - \sin(2\theta)) \\ y = \dfrac{1}{4gc^2}\,(1 - \cos(2\theta)) \quad \text{avec} \quad 0 < t < \pi/2. \end{cases} \tag{6}$$

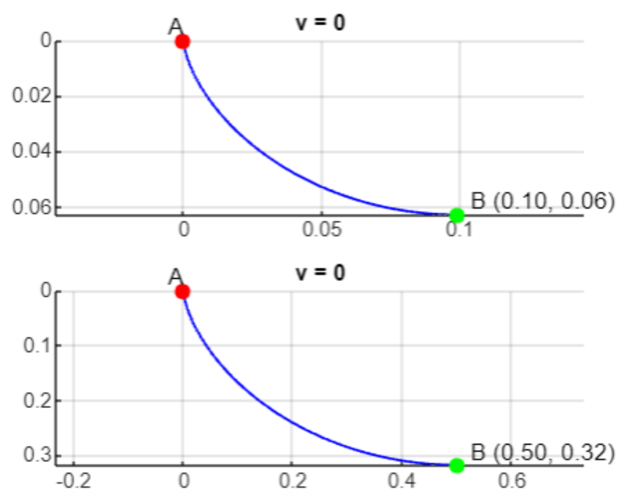

Figure 3: Représentation graphique pour la valeur de $v_0 = 0$.

Lorsque la vitesse initiale est supposée non nulle, la trajectoire optimale diffère de celle d'une cycloïde, présentant une pente légèrement moins prononcée au cours des premières secondes du parcours de la balle. Cette observation est cohérente avec le raisonnement physique, car lorsque la vitesse initiale est nulle, la bille nécessite une pente plus accentuée pour acquérir la vitesse nécessaire pour l'optimisation de son parcours.

1 Impact des forces de frottement

Dans cette section, nous nous intéressons à la formulation classique du problème du brachistochrone (en supposant que la vitesse de départ de la bille est nulle) à laquelle nous décidons d'ajouter la force de résistance de la surface. Nous considérons cette force comme la composante représentative de toutes les forces de frottement qui s'appliquent au système, y compris les irrégularités de la trajectoire et la résistance de l'air s'il y en a. Nous supposons que la bille n'est soumise à aucune autre force motrice ou force pouvant favoriser son mouvement, ce qui inclut la potentielle accélération que pourrait causer l'air. Dans la suite, nous restons dans la configuration de la Figure 1, incluant les forces de frottement. Nous notons par μ et f respectivement le coefficient et la force de frottement liés au système.
Nous définissons sur chaque point de la trajectoire un repère de Frenet :

$$\mathbf{t} = \frac{dx(s)}{ds}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy(s)}{ds}\hat{\mathbf{y}},$$
$$\mathbf{n} = -\frac{dy(s)}{ds}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dx(s)}{ds}\hat{\mathbf{y}},$$

de sorte que la composante tangentielle de la force de gravité est donnée par $mg\dfrac{dy}{ds}$ et celle de la force de frottement par $-\mu mg\dfrac{dx}{ds}$.
La conservation de l'énergie n'étant plus applicable, nous optons pour l'application de la seconde loi de Newton, qui fournit

$$m\frac{dv}{dt} = mg\frac{dy}{ds} - \mu mg\frac{dx}{ds}.$$

De plus,

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(v^2\right),$$

de sorte que :

$$v = \sqrt{2g(y-\mu x)}.$$

Cette dernière équation montre que la vitesse de la bille dépend non seulement de la trajectoire y, comme dans le problème classique du brachistochrone, mais aussi de la composante horizontale x. Cela indique que la présence de frottement modifie la trajectoire optimale de la bille, réduisant son énergie cinétique et augmentant ainsi le temps nécessaire pour atteindre le bas de la trajectoire.
Soient

$$G(y) := \int_A^B F(x,y,y')\,dx \quad \text{et} \quad F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-\mu x)}}.$$

Les extrema de la fonctionnelle G satisfont l'équation d'Euler-Lagrange [1]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

de sorte que

$$\frac{2y''}{1+y'^2} = -\frac{y'\mu + 1}{\sqrt{(y-\mu x)^2}}.$$

La trajectoire à temps minimal est donc différente de la cycloïde. Cette observation n'est pas triviale car, intuitivement, si la cycloïde représente le chemin le plus court en temps, on pourrait s'attendre à ce que ce chemin reste inchangé même en présence de forces de frottement.

References

[1] [1] Leopold Alexander Pars. *An Introduction to the Calculus of Variations.* Courier Corporation, 2013.

[1]Patrick Nyadjo, Aneva Tsafack, Sthyve Tatho, Romaric Cheuteu, Laura Nyaffi, Wilfried Wopiwo