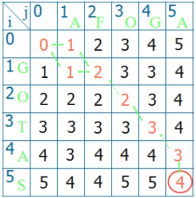
Programação Dinâmica

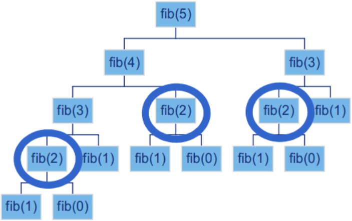
Pedro Ribeiro

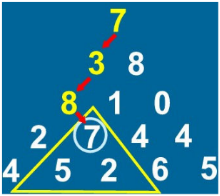
DCC/FCUP

2014/2015



i \ j	0	1 A	2 F	3 O	4 G	5 A
0	0	1	2	3	4	5
1 G	1	1	2	3	3	4
2 O	2	2	2	2	3	4
3 T	3	3	3	3	3	4
4 A	4	3	4	4	4	3
5 S	5	4	4	5	5	4





Números de Fibonacci

Sequência de números muito famosa definida por Leonardo Fibonacci

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

Números de Fibonacci

$F(0) = 0$
$F(1) = 1$
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Números de Fibonacci

- Como implementar?
- Implementação directa a partir da definição:

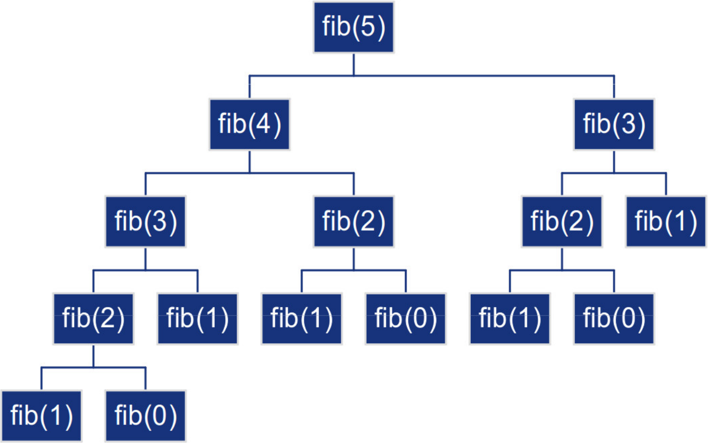
Fibonacci (a partir da definição)

fib(n):
  Se $n = 0$ ou $n = 1$ **então**
    retorna n
  Senão
    retorna $\text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$

- Pontos negativos desta implementação?

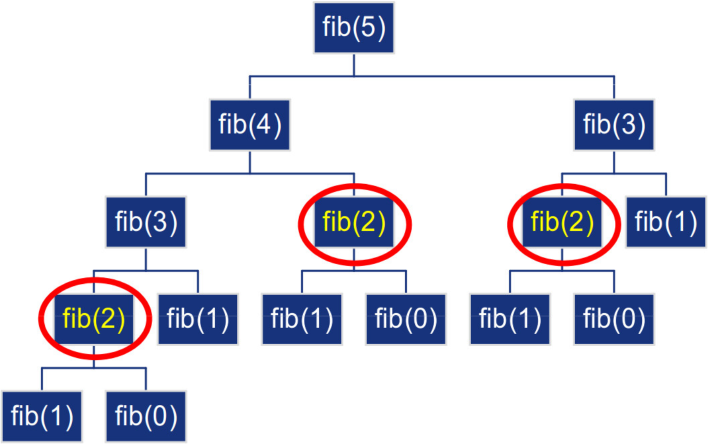
Números de Fibonacci

- Cálculo de **fib(**5**)**:



Números de Fibonacci

- Cálculo de **fib(5)**:



Por exemplo fib(2) é chamado 3 vezes!

Números de Fibonacci

- Como **melhorar**?
  - Começar do zero e manter sempre em memória os dois últimos números da sequência

Fibonacci (versão iterativa mais eficiente)

fib(n):
  Se $n = 0$ ou $n = 1$ **então**
    retorna n
  Senão
    $f_1 \leftarrow 1$
    $f_2 \leftarrow 0$
    Para $i \leftarrow 2$ **até** n **fazer**
      $f \leftarrow f_1 + f_2$
      $f_2 \leftarrow f_1$
      $f_1 \leftarrow f$
    retorna f

Números de Fibonacci

- **Conceitos** a reter:
  - Divisão de um problema em **subproblemas do mesmo tipo**
  - Calcular o mesmo subproblema **apenas uma vez**

- **Será que estas ideias podem também ser usadas em problemas mais "complicados"?**

Pirâmide de Números

- Problema "clássico" das **Olimpíadas Internacionais de Informática de 1994**
- Calcular o **caminho**, que começa no topo da pirâmide e acaba na base, com **maior soma**. Em cada passo podemos ir diagonalmente para baixo e para a esquerda ou para baixo e para a direita.

```
        7
      3   8
    8   1   0
  2   7   4   4
4   5   2   6   5
```

Pirâmide de Números

- Dois possíveis caminhos:

7	7
3 8	3 8
8 1 0	8 1 0
2 7 4 4	2 7 4 4
4 5 2 6 5	4 5 2 6 5
Soma = 21	Soma = 30

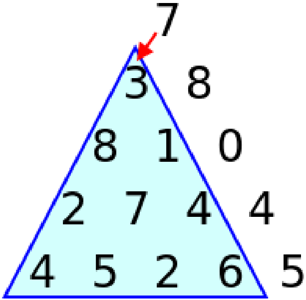
- **Restrições:** todos os números são inteiros entre 0 e 99 e o número de linhas do triângulo é no máximo 100.

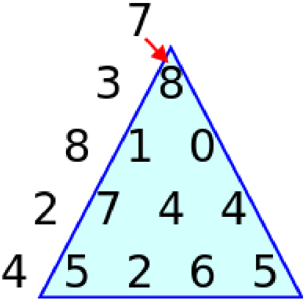
Pirâmide de Números

- Como resolver o problema?
- Ideia: **Pesquisa Exaustiva** (*aka* "Força Bruta")
  - Avaliar todos os caminhos possíveis e ver qual o melhor.
- Mas quanto tempo demora isto? Quantos caminhos existem?
- Análise da **complexidade temporal**:
  - Em cada linha podemos tomar **duas decisões**: esquerda ou direita
  - Seja n a altura da pirâmide. Um caminho são... $n - 1$ decisões!
  - Existem então 2^{n-1} caminhos diferentes
  - Um programa para calcular todos os caminhos tem portanto complexidade $\mathbf{O(2^n)}$: exponencial!
  - $2^{99} \sim 6.34 \times 10^{29}$ (633825300114114700748351602688)

Pirâmide de Números

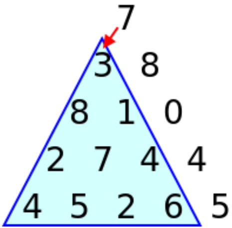
- Quando estamos no topo da pirâmide, temos **duas decisões possíveis** (esquerda ou direita):

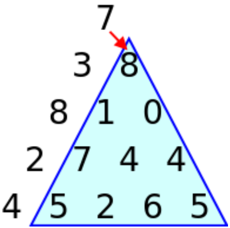




- Em cada um dos casos temos de ter em conta **todas os caminhos das respectivas subpirâmides**.

Pirâmide de Números





- Mas o que nos interessa saber sobre estas subpirâmides?
- **Apenas interessa o valor da sua melhor rota interna (que é um instância mais pequena do mesmo problema)!**
- Para o exemplo, a solução é 7 mais o máximo entre o valor do melhor caminho de cada uma das subpirâmides

Pirâmide de Números

- Então este problema pode ser resolvido **recursivamente**
  - Seja **P[i][j]** o *j*-ésimo número da *i*-ésima linha
  - Seja **Max(i, j)** o melhor que conseguimos a partir da posição i, j

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	7				
2	3	8			
3	8	1	0		
4	2	7	4	4	
5	4	5	2	6	5

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

Pirâmide de Números

Pirâmide de Números (a partir da definição recursiva)

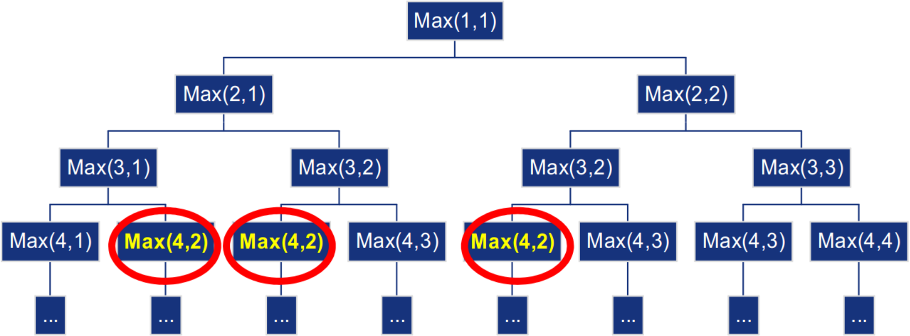
Max(i, j):
  Se $i = n$ **então**
    retorna $P[i][j]$
  Senão
    retorna $P[i][j]$ + **máximo** (Max$(i+1, j)$, Max$(i+1, j+1)$)

- Para resolver o problema basta chamar... **Max(1,1)**

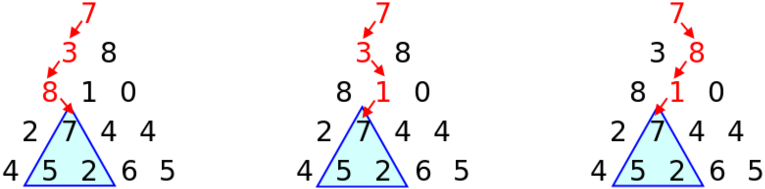
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	7				
2	3	8			
3	8	1	0		
4	2	7	4	4	
5	4	5	2	6	5

Pirâmide de Números

- Continuamos com **crescimento exponencial**!



- Estamos a avaliar o mesmo subproblema várias vezes...



Pirâmide de Números

- Temos de **reaproveitar** o que já calculamos
  - Só calcular uma vez o mesmo subproblema

- Ideia: criar uma **tabela** com o valor obtido para cada subproblema
  - Matriz **M**[**i**][**j**]

- Será que existe uma **ordem para preencher a tabela** de modo a que quando precisamos de um valor já o temos?

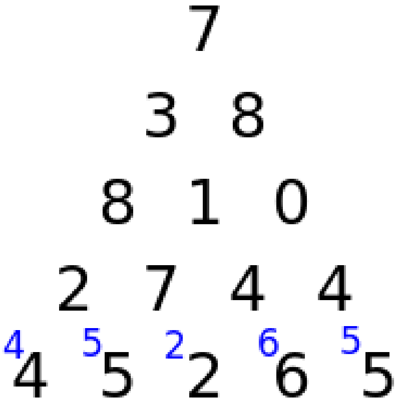
Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

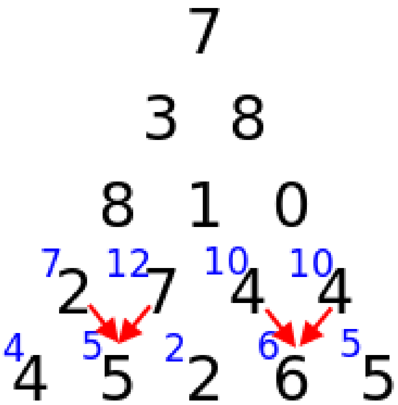
Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



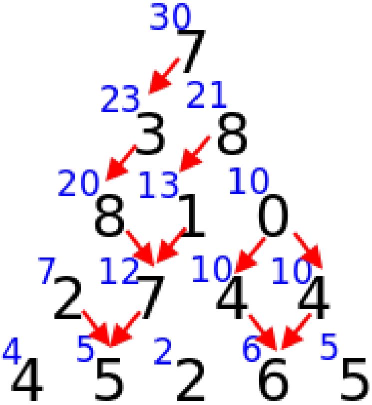
Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



Pirâmide de Números

- Tendo em conta a maneira como preenchemos a tabela, até podemos aproveitar **P[i][j]**:

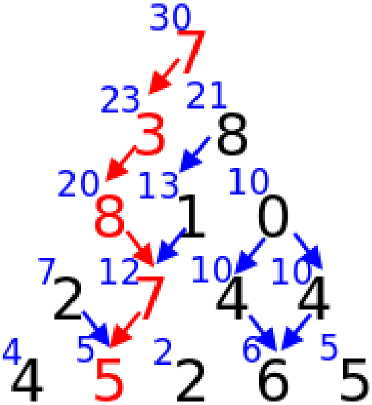
Pirâmide de Números (solução polinomial)

Calcular():
  Para $i \leftarrow n - 1$ **até** 1 **fazer**
    Para $j \leftarrow 1$ **até** i **fazer**
      $P[i][j] \leftarrow P[i][j] +$ **máximo** $(P[i+1][j], P[i+1][j+1])$

- Com isto a solução fica em... **P[1][1]**
- Agora o tempo necessário para resolver o problema já só cresce polinomialmente ($\mathbf{O(n^2)}$) e já temos uma solução admissível para o problema ($99^2 = 9801$)

Pirâmide de Números

- E se fosse necessário saber a constituição do melhor caminho?
  Basta usar a tabela já calculada!



Pirâmide de Números

Para resolver o problema da pirâmide de números usamos...

Programação Dinâmica (PD)

Programação Dinâmica

Programação Dinâmica

Uma **técnica algorítmica**, normalmente usada em **problemas de optimização**, que é baseada em guardar os resultados de subproblemas em vez de os recalcular.

- **Técnica algorítmica:** método geral para resolver problemas que têm algumas características em comum
- **Problema de Optimização:** encontrar a "melhor" solução entre todas as soluções possíveis, segundo um determinado critério (função objectivo). Geralmente descobrir um máximo ou mínimo.

Clássica troca de **espaço** por **tempo**

Programação Dinâmica

Quais são então as **características** que um problema deve apresentar para poder ser resolvido com PD?

- Subestrutura ótima
- Subproblemas coincidentes

Programação Dinâmica - Características

Subestrutura Ótima

Quando a solução óptima de um problema contém nela própria soluções óptimas para subproblemas do mesmo tipo

Exemplo

No problema da pirâmides de números, a solução óptima contém nela própria os melhores percursos de subpirâmides, ou seja, soluções óptimas de subproblemas

- Se um problema apresenta esta característica, diz-se que respeita o **princípio da optimalidade**.

Programação Dinâmica - Características

Cuidado!

Nem sempre um problema tem subestrutura ótima!

Exemplo sem subestrutura ótima

Imagine que no problema da pirâmide de números o objectivo é encontrar o caminho que maximize o resto da divisão inteira entre 10 e a soma dos valores desse caminho

```
    1              1
  5   5          5   5
5   4   5      5   4   5
```

A solução ótima ($1 \rightarrow 5 \rightarrow 5$) não contém a solução ótima da subpirâmide assinalada ($5 \rightarrow 4$)

Programação Dinâmica - Características

Subproblemas Coincidentes

Quando um espaço de subproblemas é "pequeno", isto é, não são muitos os subproblemas a resolver pois muitos deles são exactamente iguais uns aos outros.

Exemplo

No problema das pirâmides, para um determinada instância do problema, existem apenas $n + (n-1) + ... + 1 < n^2$ subproblemas (crescem polinomialmente) pois, como já vimos, muitos subproblemas que aparecem são coincidentes

Programação Dinâmica - Características

Cuidado!

Também esta característica nem sempre acontece.

- Mesmo com subproblemas coincidentes são muitos subproblemas a resolver
  ou
- Não existem subproblemas coincidentes.

Exemplo

No MergeSort, cada chamada recursiva é feita a um subproblema novo, diferente de todos os outros.

Programação Dinâmica - Metodologia

- Se um problema apresenta estas **duas características**, temos uma boa pista de que a PD se pode aplicar.
- Que **passos** seguir então para resolver um problema com PD?

Guia para resolver com PD

1. **Caracterizar** a solução óptima do problema
2. **Definir recursivamente** a solução óptima, em função de soluções óptimas de subproblemas
3. **Calcular** as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente" ou com "memoization"
4. **Reconstruir** a solução ótima, baseada nos cálculos efectuados (opcional - apenas se for necessário)

Programação Dinâmica - Metodologia

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- **Compreender** bem o problema
- Verificar se um algoritmo que verifique todas as soluções à **"força bruta"** não é suficiente
- Tentar **generalizar o problema** (é preciso prática para perceber como generalizar da maneira correcta)
- Procurar **dividir o problema** em subproblemas do mesmo tipo
- Verificar se o problema obedece ao **princípio de optimalidade**
- Verificar se existem **subproblemas coincidentes**

Programação Dinâmica - Metodologia

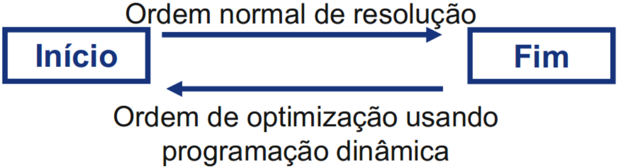
2) Definir recursivamente a solução óptima, em função de soluções óptimas de subproblemas

- **Definir recursivamente o valor da solução óptima**, com rigor e exactidão, a partir de subproblemas mais pequenos do mesmo tipo
- Imaginar sempre que os **valores das soluções óptimas já estão disponíveis** quando precisamos deles
- Não é necessário codificar. Basta definir **matematicamente** a recursão.

Programação Dinâmica - Metodologia

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

- **Descobrir a ordem** em que os subproblemas são precisos, a partir dos subproblemas mais pequenos até chegar ao problema global (**"bottom-up"**) e codificar, usando uma tabela.
- Normalmente esta **ordem é inversa** à ordem normal da função recursiva que resolve o problema



Programação Dinâmica - Metodologia

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "memoization"

- Existe uma técnica, conhecida como **"memoization"**, que permite resolver o problema pela ordem normal (**"top-down"**).
- Usar a **função recursiva** obtida directamente a partir da definição da solução e ir mantendo uma tabela com os resultados dos subproblemas.
- Quando queremos **aceder a um valor** pela primeira vez temos de calculá-lo e a partir daí basta ver qual é o resultado já calculado.

Programação Dinâmica - Metodologia

4) Reconstruir a solução ótima, baseada nos cálculos efectuados

- Pode (ou não) ser requisito do problema
- Duas alternativas:
  - **Directamente** a partir da tabela dos sub-problemas
  - **Nova tabela** que guarda as decisões em cada etapa
- Não necessitando de saber qual a melhor solução, podemos por vezes poupar espaço

Subsequência Crescente

- Dada uma sequência de números:

7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2

- Descobrir qual a maior **subsequência crescente** (não necessariamente contígua)

7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2 (Tamanho 2)
7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2 (Tamanho 3)
7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2 (Tamanho 4)

Subsequência Crescente

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- Seja **n** o tamanho da sequência e **num[i]** o *i*-ésimo número
- "Força bruta", quantas opções? **Exponencial!** *(binomial theorem)*
- Generalizar e resolver com subproblemas iguais:
  - Seja **best(i)** o valor da melhor subsequência a partir da *i*-ésima posição
  - **Caso base:** a melhor subsequência a começar da última posição tem tamanho... 1!
  - **Caso geral:** para um dado i, podemos seguir para todos os números entre $i+1$ e n, desde que sejam... maiores
    - Para esses números, basta-nos saber o melhor a partir daí! **(princípio da otimalidade)**
    - O melhor a partir de uma posição é necessário para calcular todas as posições de índice inferior! **(subproblemas coincidentes)**

Subsequência Crescente

2) Definir recursivamente a solução óptima, em função de soluções óptimas de subproblemas

- **n** - tamanho da sequência
- **num[i]** - número na posição i
- **best(i)** - melhor subsequência a partir da posição i

Solução recursiva para Subsequência Crescente

$\text{best}(n) = 1$
$\text{best}(i) = 1 + \textbf{máximo}\{\text{best}(j)\text{: } i < j \leq n, num[j] > num[i]\}$
para $1 \leq i < n$

Subsequência Crescente

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

- Seja **best[]** a tabela para guardar os valores de best()

Subsequência crescente (solução polinomial)

Calcular():
  $best[n] \leftarrow 1$
  Para $i \leftarrow n-1$ **até** 1 **fazer**
    $best[i] \leftarrow 1$
    Para $j \leftarrow i+1$ **até** n **fazer**
      Se $num[j] > num[i]$ **e** $1 + best[j] > best[i]$ **então**
        $best[i] \leftarrow 1 + best[j]$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
num[i]	7	6	10	3	4	1	8	9	5	2
best[i]	**3**	**3**	**1**	**4**	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**

Subsequência Crescente

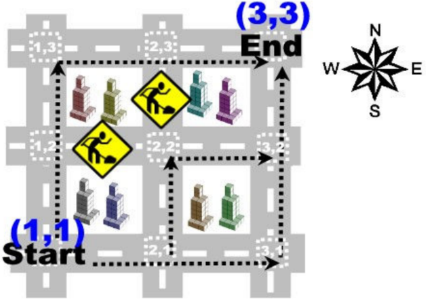
4) Reconstruir a solução ótima

- Vamos exemplificar com uma tabela auxiliar que guarda as decisões
- Seja **next[i]** uma próxima posição para obter o melhor a partir da posição *i* (`'X'` se é a última posição).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
num[i]	7	6	10	3	4	1	8	9	5	2
best[i]	**3**	**3**	**1**	**4**	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**
next[i]	**7**	**7**	**X**	**5**	**7**	**7**	**8**	**X**	**X**	**X**

Obras na Estrada

- Este problema saiu na **MIUP'2004** (Maratona Inter-Universitária de Programação)
- Imagine um "quadriculado" de ruas em que:
  - Algumas estrada têm obras
  - Só se pode andar para norte e para este
  - Máximo tamanho do quadriculado: 30×30

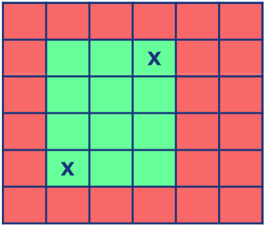


De quantas maneiras diferentes se pode ir de (x_1, y_1) para (x_2, y_2)

Obras na Estrada

1) Caracterizar a solução óptima do problema

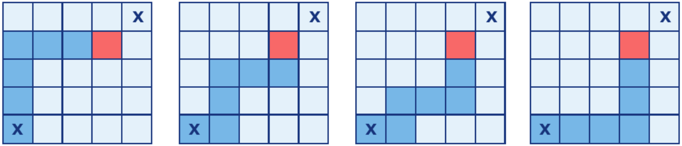
- "Força bruta", quantas opções?
  $N = 30$, existem $\sim 3 \times 10^{16}$ caminhos
- Para ir (x_1, y_1) para (x_2, y_2) pode ignorar-se tudo o que está "fora" desse rectângulo.



Obras na Estrada

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- **Número de maneiras** a partir de uma posição é igual a:
  número de maneiras desde a posição a norte
  $+$
  número de maneiras desde a posição a este
- **Subproblema igual** com solução não dependente do problema "maior" (equivalente a **princípio da optimalidade**)
- Existem muitos **subproblemas coincidentes**!



Obras na Estrada

2) Definir recursivamente a solução óptima

- **L** - número de linhas
- **C** - número de colunas
- **count(i,j)** - número de maneiras a partir da posição (i, j)
- **obra(i,j,D)** - valor booleano (V/F) indicando se existe obra a impedir deslocação de (i, j) na direcção D (NORTE ou ESTE)

Solução recursiva para Obras na Estrada

o correto é :
i = L
j = C

$\text{count}(L, C) = 1$

$\text{count}(i, j) = \text{valor\_norte}(i, j) + \text{valor\_este}(i, j)$

para $(i, j) \neq (L, C)$ onde:

$$valor\_norte(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = L \text{ ou } obra(i,j,NORTE) \\ count(i+1,j) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$valor\_este(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = C \text{ ou } obra(i,j,ESTE) \\ count(i,j+1) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obras na Estrada

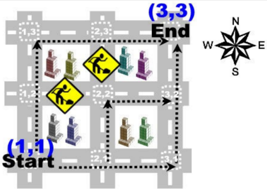
3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

Obras na Estrada (solução polinomial)

Calcular():
  Inicializar *count*[][][] com zeros
  $count[L][C] \leftarrow 1$
  Para $i \leftarrow L$ **até** 1 **fazer**
    Para $j \leftarrow C$ **até** 1 **fazer**
      Se $i < L$ **e** não($obra(i, j, NORTE)$) **então**
        $count[i][j] \leftarrow count[i][j] + count[i+1][j]$
      Se $j < C$ **e** não($obra(i, j, ESTE)$) **então**
        $count[i][j] \leftarrow count[i][j] + count[i][j+1]$

count[][]

1	1	1
1	1	1
3	2	1



Jogo de Pedras

- Existem *n* pedras numa mesa
- Em cada jogada retira-se **1**, **3** ou **8** pedras
  (generalizável para qualquer número de peças)
- **Quem retirar as últimas pedras ganha o jogo!**

Dado o número de pedras, o jogador que começa a jogar pode garantidamente ganhar?

Exemplo

15 pedras na mesa: jogador A retira 8
7 pedras na mesa: jogador B retira 3
4 pedras na mesa: jogador A retira 1
3 pedras na mesa: jogador B retira 3
0 pedras na mesa: ganhou jogador B!

Jogo de Pedras

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- "Força bruta", quantos jogos possíveis? $O(3^N)$!
- Como generalizar? Seja **win(i)** um valor booleano (V/F) representando se com *i* pedras conseguimos ganhar **(posição ganhadora)**
  - Claramente $win(1)$, $win(3)$ e $win(8)$ são verdadeiras
  - E para os outros casos?
    - Se a nossa jogada for dar a uma posição ganhadora, então o adversário pode forçar a nossa derrota
    - Então, a nossa posição é ganhadora se conseguirmos chegar a uma posição que não o seja!
    - Caso todas as jogadas forem dar a posições ganhadoras, a nossa posição é perdedora

Jogo de Pedras

2) Definir recursivamente a solução óptima

- **N** - número de pedras
- **win[i]** - valor booleano (V/F) indicando se posição i é ganhadora

Solução recursiva para Obras na Estrada

$\text{win}(0) = \text{falso}$

$$\text{win}(i) = \begin{cases} \text{verdadeiro} & \text{se } (\text{win}[i-1]{=}\text{F}) \text{ ou } (\text{win}[i-3]{=}\text{F}) \text{ ou } (\text{win}[i-8]{=}\text{F}) \\ \text{falso} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq N$

Jogo de Pedras

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

Jogo de Pedras (solução polinomial)

Calcular():
  Para $i \leftarrow 0$ **até** N **fazer**
    Se ($i \geq 1$ **e** win[$i-1$]=falso) **ou**
      ($i \geq 3$ **e** win[$i-3$]=falso) **ou**
      ($i \geq 8$ **e** win[$i-8$]=falso) **então**
        $win[i] \leftarrow verdadeiro$
    Senão
        $win[i] \leftarrow false$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
win[i]	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**

Distância de Edição

- Vamos agora ver um exemplo mais "complexo"

Problem - Distância de Edição

Consideremos duas palavras pal_1 e pal_2. O nosso objectivo é **transformar** pal_1 **em** pal_2 usando apenas três tipos de transformações:

1. Apagar uma letra
2. Introduzir uma nova letra
3. Substituir uma letra por outra

Qual o **mínimo número de transformações** que temos de fazer para transformar uma palavra na outra? Chamamos a esta "medida" **distância de edição (de)**.

Exemplo

Para transformar "gotas" em "afoga" precisamos de 4 transformações:

$$\text{gotas} \xrightarrow{(1)} \text{gota\_} \xrightarrow{(3)} \textbf{f}\text{ota} \xrightarrow{(3)} \text{fo}\textbf{g}\text{a} \xrightarrow{(2)} \textbf{a}\text{foga}$$

Distância de Edição

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- Seja **de(a,b)** a distância de edição entre as palavras *a* e *b*
- Seja **""** uma palavra vazia
- Existem alguns casos simples?
  - Claramente **de("","")** é zero
  - **de("",b)**, para qualquer palavra b? É o tamanho da palavra b (temos de fazer **inserções**)
  - **de(a,"")**, para qualquer palavra a? É o tamanho da palavra a (temos de fazer **remoções**)
- E nos outros casos? Temos de tentar dividir o problema por etapas, onde decidimos de acordo com subproblemas.

Distância de Edição

- Nenhuma das palavras é vazia
- Como podemos igualar o final das duas palavras?
  - Seja l_a a última letra de a e a' o resto da palavra a
  - Seja l_b a última letra de b e b' o resto da palavra b
- Se $l_a = l_b$, então só nos falta descobrir a distância de edição entre a' e b' (instância mais pequena do mesmo problema!)
- Caso contrário, temos três operações possíveis:
  - **Substituir** l_a por l_b. Gastamos 1 transformação e precisamos de saber a distância de edição entre a' e b'.
  - **Apagar** l_a. Gastamos 1 transformação e precisamos de saber a distância de edição entre a' e b.
  - **Inserir** l_b no final de a. Gastamos 1 transformação e precisamos de saber a distância de edição entre a e b'.

Distância de Edição

2) Definir recursivamente a solução óptima

- $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ - tamanho (comprimento) das palavras a e b
- **a[i]** e **b[i]** - letra na posição i das palavras a e b
- **de(i,j)** - distância de edição entre as palavras formadas pelas primeiras i letras de a e as primeiras j letras de b

Solução recursiva para Distância de Edição

$\text{de}(i, 0) = i$, para $0 \leq i \leq |a|$
$\text{de}(0, j) = j$, para $0 \leq j \leq |b|$

$$\begin{aligned}\text{de}(i,j) = \textbf{mínimo}(&\text{de}(i-1, j-1) + \{0 \text{ se } a[i] = b[j], 1 \text{ se } a[i] \neq b[j]\},\\ &\text{de(i-1, j)} + 1,\\ &\text{de(i, j-1)} + 1)\end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq |a|$ e $1 \leq j \leq |b|$

Distância de Edição

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

Distância de Edição (solução polinomial)

Calcular():

Para $i \leftarrow 0$ **até** $|a|$ **fazer** $de[i][0] \leftarrow i$
Para $j \leftarrow 0$ **até** $|b|$ **fazer** $de[0][j] \leftarrow j$

Para $i \leftarrow 1$ **até** $|a|$ **fazer**
Para $j \leftarrow 1$ **até** $|j|$ **fazer**
Se $(a[i] = b[j])$ **então** $valor \leftarrow 0$
Senão $valor \leftarrow 1$
$de[i][j] =$ **mínimo**($de[i-1][j-1] + value$,
$de[i-1][j] + 1$,
$de[i][j-1] + 1$)

o correto é :
|b|

Distância de Edição

- Vejamos a **tabela** para a distância de edição entre "gotas" e "afoga":

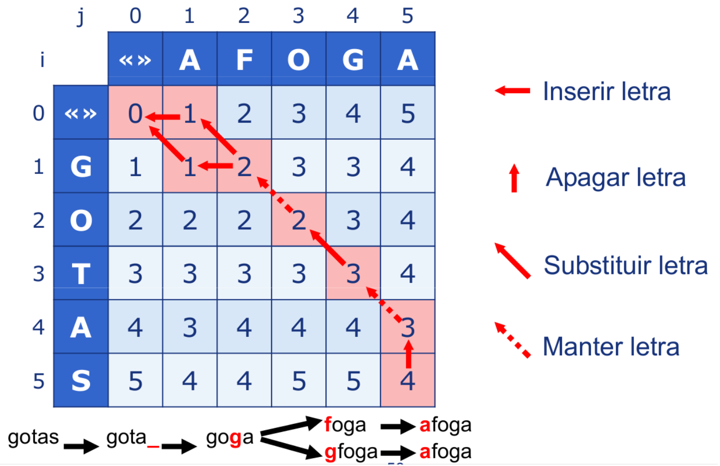
i \ j		0	1	2	3	4	5
		«»	A	F	O	G	A
0	«»	0	1	2	3	4	5
1	G	1	1	2	3	3	4
2	O	2	2	2	2	3	4
3	T	3	3	3	3	3	4
4	A	4	3	4	4	4	3
5	S	5	4	4	5	5	4

$$de(i,0) = i, \text{ para } 0 \leq i \leq |a|$$
$$de(0,j) = j, \text{ para } 0 \leq j \leq |b|$$

$$de(i,j) = \min(de(i-1,j-1) + \{0 \text{ se } a[i]=b[i],\ 1 \text{ se } a[i] \neq b[i]\},\ de(i-1,j)+1,\ de(i,j-1)+1),$$
$$\text{para } 1 \leq i \leq |a| \text{ e } 0 \leq j \leq |b|$$

Distância de Edição

- Se fosse preciso reconstruir a solução:



i \ j	0	1	2	3	4	5
	« »	A	F	O	G	A
0 « »	0	1	2	3	4	5
1 G	1	1	2	3	3	4
2 O	2	2	2	2	3	4
3 T	3	3	3	3	3	4
4 A	4	3	4	4	4	3
5 S	5	4	4	5	5	4