TATA24
Gauselimination

Axel Glöckner

September 3, 2023

Definition 0.0.1: Linjära ekvationssystem

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad a_1 \ldots a_n, b \in R$$

Note:-

$$x + 2y - 3z = 17, \qquad \textbf{linjär}$$
$$x^2 + 3 = y, \qquad \textbf{icke linjär}$$

Example 0.0.1 (Gauselimination)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2, & -4/-3 \longrightarrow \text{ekv}_2/\text{ekv}_3 \\ 4x + 6y + 10z = 14 \\ 3x + 4y + 9z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 0 + 2y + 2z = 6, & 1/2 \longrightarrow \text{ekv}_3 \\ 0 + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 0 + y + z = 3 \\ 0 + 0 + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Example 0.0.2 (Gauselimination syntax)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 4 & 9 & 13 \end{pmatrix} \text{-4} \hookleftarrow \text{ and } \text{-3} \hookleftarrow\hookleftarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} 1/2 \hookleftarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Definition 0.0.2: Elementära radoperationer

- Addera en multipel av en rad till en annan.
- Multiplicera en rad med en konstan som är $\neq 0$
- Byta plats på två rader

Definition 0.0.3

Trappstegsmatris, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ leder till $\begin{cases} x + y + 2z & = 2 \\ 0 + y + z & = 3 \\ 0 + 0 + 2z & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -3 \\ y & = 1 \\ z & = 2 \end{cases}$

- De inringade elementen kallas för **Pivotelement**.
- Trappstegsmatris

  Eventuella noll-rader står längst ned.

  Det förta nollskillda elementet i en rad står längre till höger i rader som står länger ned.
- Gauselimination

  Utför elementära radoperationer tills man har en trappsstegasmatris. Detta går **alltid**.

Example 0.0.3 (Gauselimination)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 & = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = -4 \\ x_1 - 3x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Solution:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{-2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \updownarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Som motsvarar $\begin{cases} x_1 - 3x_3 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 & = 2 \\ 0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 3t \\ x_2 & = -2 - 3t \\ x_3 & = t \end{cases} \quad t \in R$ detta kallas för en **parameterlösning.**

Note:-

För lösningsmängden gäller endera av följande,

$Unik - lysning$	$Ogndligtmhngalysningar$	$ingenlysning$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Ett PE i varje kolumn i VL, inget i HL	Kolumner saknar PE i VL inget iHL	PE i HL

Example 0.0.4

Ange antalet lösningar till, $\begin{cases} x - ay = 0, \\ ax - 3ay = 0 \end{cases}$ för alla a $\in$ R

Solution:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ a & -3a & 0 \end{pmatrix} \text{-a} \sim \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & a^2 - 3a & -6a \end{pmatrix}$$

alltså, $a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{oändligt många lösnignar} \\ a = 3 & \text{olösligt} \end{cases}$