

Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 1 : Trigonométrie

Julian Tugaut

Jeudi 12 Septembre 2013

- 1 Un peu de vocabulaire
 - Fonction périodique
 - Fonction bijective
- 2 Cercle trigonométrique
 - Cercle trigonométrique
 - Quelques définitions
- 3 Étude des fonctions trigonométriques
 - Fonctions sinus et arcsinus
 - Fonctions cosinus et arccosinus
 - Fonctions tangente et arctangente
- 4 Formules trigonométriques
 - Formules de bases
 - Formules d'addition
 - Formules de duplication
 - Formules de linéarisation
 - Formules de factorisation
- 5 Angles remarquables

Plan

- 1 Un peu de vocabulaire
 - Fonction périodique
 - Fonction bijective
- 2 Cercle trigonométrique
- 3 Étude des fonctions trigonométriques
- 4 Formules trigonométriques
- 5 Angles remarquables

Fonction périodique

Une fonction f sur \mathbb{R} est T -périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

Fonction périodique

Une fonction f sur \mathbb{R} est T -périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

On dit aussi que f est périodique de période T .

Fonction périodique

Une fonction f sur \mathbb{R} est T -périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

On dit aussi que f est périodique de période T .

Exemples

La fonction cosinus est 2π -périodique.

Fonction bijective

Soit un intervalle I de \mathbb{R} .

Soit f une fonction de I vers un ensemble E .

La fonction f est dite bijective de I dans E si et seulement si

- f est surjective : $\forall y \in E, \exists x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est injective : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Fonction bijective

Soit un intervalle I de \mathbb{R} .

Soit f une fonction de I vers un ensemble E .

La fonction f est dite bijective de I dans E si et seulement si

- f est surjective : $\forall y \in E, \exists x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est injective : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ est une bijection de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ mais **elle n'est pas une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+** .

Plan

- 1 Un peu de vocabulaire
- 2 Cercle trigonométrique
 - Cercle trigonométrique
 - Quelques définitions
- 3 Étude des fonctions trigonométriques
- 4 Formules trigonométriques
- 5 Angles remarquables

Cercle trigonométrique

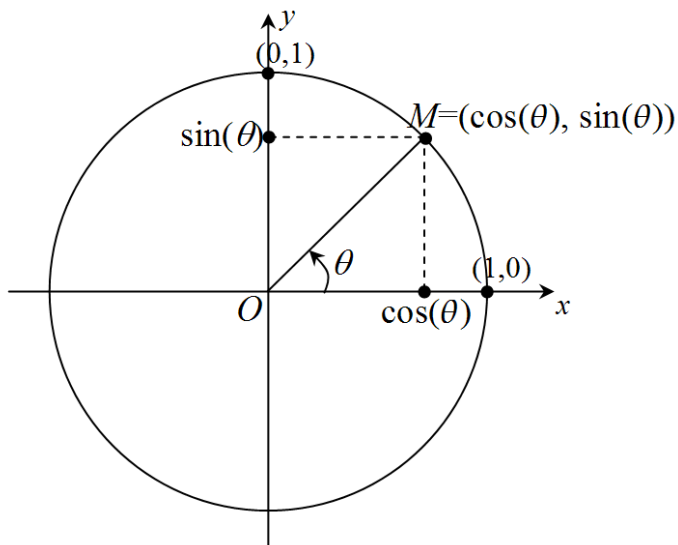


Figure : Cercle de centre O et de rayon 1

Quelques définitions

Radians

Un angle de θ radians intercepte sur le cercle unité un arc de longueur θ . 360 degrés valent 2π radians.

Quelques définitions

Radians

Un angle de θ radians intercepte sur le cercle unité un arc de longueur θ . 360 degrés valent 2π radians.

On note $M(\theta)$ le point d'intersection entre le cercle trigonométrique et la demi-droite issue de O et d'angle θ avec l'axe des abscisses.

Quelques définitions

Radians

Un angle de θ radians intercepte sur le cercle unité un arc de longueur θ . **360 degrés valent 2π radians.**

On note $M(\theta)$ le point d'intersection entre le cercle trigonométrique et la demi-droite issue de O et d'angle θ avec l'axe des abscisses.

Cosinus et sinus.

Le **cosinus** de l'angle θ correspond à l'**abscisse** du point $M(\theta)$.

Le **sinus** de l'angle θ correspond à l'**ordonnée** du point $M(\theta)$.

Quelques définitions 2

Les coordonnées du point $M(\theta)$

On a : $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta)\vec{u}_0 + \sin(\theta)\vec{v}_0 =: \vec{u}_\theta$.

Quelques définitions 2

Les coordonnées du point $M(\theta)$

On a : $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta)\vec{u}_0 + \sin(\theta)\vec{v}_0 =: \vec{u}_\theta$.

Égalité importante

Théorème de Pythagore : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Quelques définitions 2

Les coordonnées du point $M(\theta)$

On a : $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta)\vec{u}_0 + \sin(\theta)\vec{v}_0 =: \vec{u}_\theta$.

Égalité importante

Théorème de Pythagore : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Tangente

La tangente de l'angle θ est le rapport du sinus sur le cosinus :

$$\tan(\theta) := \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{si} \quad \cos(\theta) \neq 0.$$

Plan

- 1 Un peu de vocabulaire
- 2 Cercle trigonométrique
- 3 Étude des fonctions trigonométriques
 - Fonctions sinus et arcsinus
 - Fonctions cosinus et arccosinus
 - Fonctions tangente et arctangente
- 4 Formules trigonométriques
- 5 Angles remarquables

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} .

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} .
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} .
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- La fonction sinus est 2π -périodique.

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} .
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- La fonction sinus est 2π -périodique.

Bijection

La fonction sinus n'est pas bijective de \mathbb{R} dans $[-1; 1]$.
Mais, elle réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1; 1]$.
On peut alors définir sa fonction réciproque,

$$\begin{aligned}\arcsin : [-1; 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin(x).\end{aligned}$$

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\sin(\arcsin(x)) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.

Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
 $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\sin(\arcsin(x)) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.

Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
 $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Remarque : $\arcsin(\sin(x)) = x + 2k\pi$, où k dépend de x .

Représentations graphiques

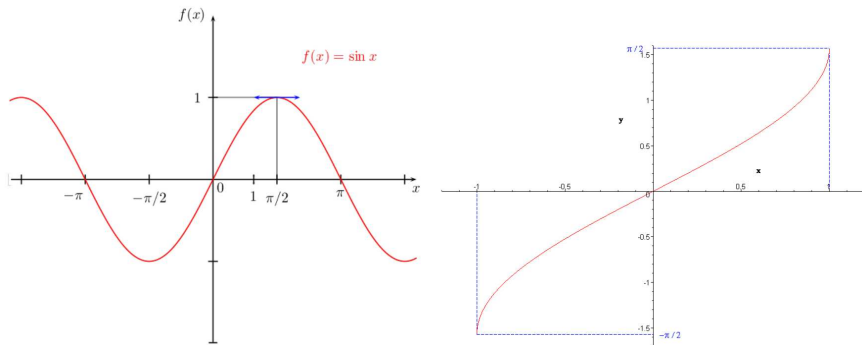


Figure : Graphes des fonctions sinus (à gauche) et arcsinus (à droite).

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} .

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} .
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} .
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- La fonction cosinus est 2π -périodique.

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} .
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- La fonction cosinus est 2π -périodique.

Bijection

La fonction cosinus n'est pas bijective de \mathbb{R} dans $[-1; 1]$. Mais, elle réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$.

On peut alors définir sa fonction réciproque,

$$\begin{aligned}\arccos : \quad [-1; 1] &\rightarrow [0; \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) .\end{aligned}$$

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in [0; \pi]$.

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in [0; \pi]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos(x) = \frac{\pi}{6}$. Et, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.

Mais, si $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
 $\arccos(\cos(x)) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq x$.

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in [0; \pi]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos(x) = \frac{\pi}{6}$. Et, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.

Mais, si $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
 $\arccos(\cos(x)) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq x$.

Remarque : $\arccos(\cos(x)) = x + 2k\pi$, où k dépend de x .

Représentations graphiques

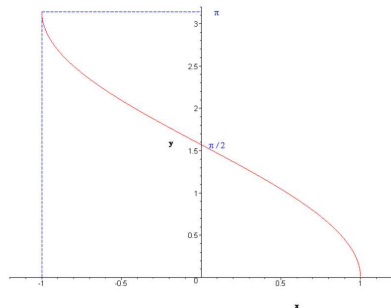
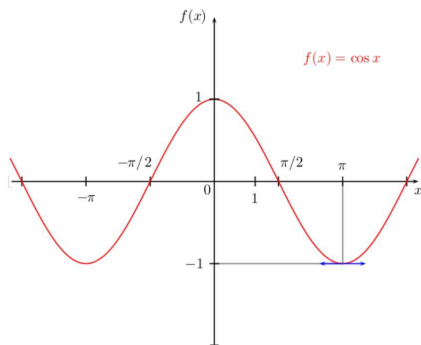


Figure : Graphes des fonctions cosinus (à gauche) et arccosinus (à droite).

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle ouvert $] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle ouvert $] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
- La fonction tangente est π -périodique.

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle ouvert $] -\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.
- La fonction tangente est π -périodique.

Bijection

La fonction tangente n'est pas bijective de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ dans \mathbb{R} . Mais, elle réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} .

On peut alors définir sa fonction réciproque,

$$\begin{aligned} \arctan : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[\\ x &\mapsto \arctan(x). \end{aligned}$$

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, la formule réciproque $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, la formule réciproque $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Exemples

Si $x = \sqrt{3}$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = x$.

Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + \pi$, $\tan(x) = \sqrt{3}$. Et,
 $\arctan(\tan(x)) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, la formule réciproque $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Exemples

Si $x = \sqrt{3}$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = x$.

Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + \pi$, $\tan(x) = \sqrt{3}$. Et,
 $\arctan(\tan(x)) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Remarque : $\arctan(\tan(x)) = x + k\pi$, où k dépend de x .

Représentations graphiques

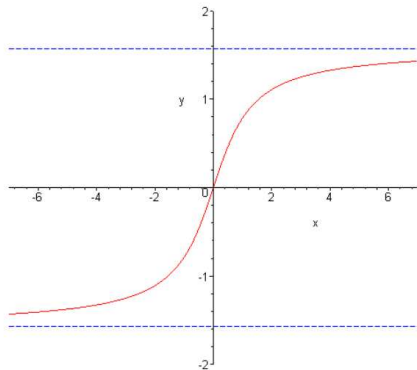
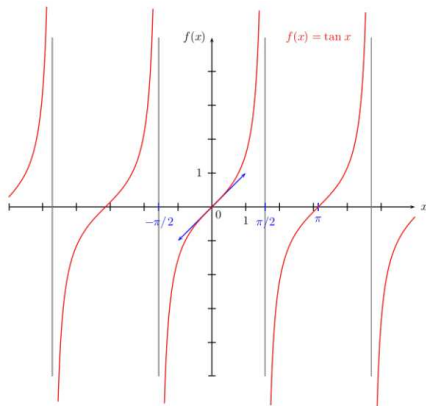


Figure : Graphes des fonctions tangente (à gauche) et arctangente (à droite).

Plan

- 1 Un peu de vocabulaire
- 2 Cercle trigonométrique
- 3 Étude des fonctions trigonométriques
- 4 Formules trigonométriques**
 - Formules de bases
 - Formules d'addition
 - Formules de duplication
 - Formules de linéarisation
 - Formules de factorisation
- 5 Angles remarquables

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.

Les fonctions sinus et tangente sont impaires : $\sin(-x) = -\sin(x)$
et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.

Les fonctions sinus et tangente sont impaires : $\sin(-x) = -\sin(x)$
et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Liens entre sinus et cosinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.

Les fonctions sinus et tangente sont impaires : $\sin(-x) = -\sin(x)$
et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Liens entre sinus et cosinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

On en déduit par ailleurs : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}.$

Formules de bases 2

Symétrie par rapport à la droite ($x = \frac{\pi}{2}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

Formules de bases 2

Symétrie par rapport à la droite ($x = \frac{\pi}{2}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

On en déduit par ailleurs :

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

Formules de bases 2

Symétrie par rapport à la droite ($x = \frac{\pi}{2}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

On en déduit par ailleurs :

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

Autres formules

$$\begin{aligned} \tan(\pi + x) &= \tan(x), \quad \sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin(x), \\ \cos(n\pi + x) &= (-1)^n \cos(x) \quad \text{et} \quad \tan(n\pi + x) = \tan(x). \end{aligned}$$

Formules d'addition

Formules principales

Pour tous les réels x et y , on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x) .$$

Formules d'addition

Formules principales

Pour tous les réels x et y , on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x).$$

Autres formules

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y),$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x),$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}.$$

Formules d'addition

Formules principales

Pour tous les réels x et y , on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x).$$

Autres formules

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y),$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x),$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}.$$

Ces formules se déduisent des précédentes.

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

(en nous servant de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.)

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

(en nous servant de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.)

Duplication du sinus

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

(en nous servant de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.)

Duplication du sinus

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Duplication de la tangente

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Formules de linéarisation

Linéarisation de \cos^2 et de \sin^2

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} .$$

Formules de linéarisation

Linéarisation de \cos^2 et de \sin^2

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2},$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2},$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$$

$$\text{et} \quad \tan^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}.$$

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

Astuce : $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ et $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

Astuce : $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ et $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}, \quad \tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}.$$

$$\text{Astuce : } x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

Plan

- 1 Un peu de vocabulaire
- 2 Cercle trigonométrique
- 3 Étude des fonctions trigonométriques
- 4 Formules trigonométriques
- 5 Angles remarquables

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus					
Cosinus					
Tangente					

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0				1
Cosinus	1				0
Tangente	0				$+\infty$

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
Cosinus	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0
Tangente	0		1		$+\infty$

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$