Productos de Renta Fija y Tasas de Interés

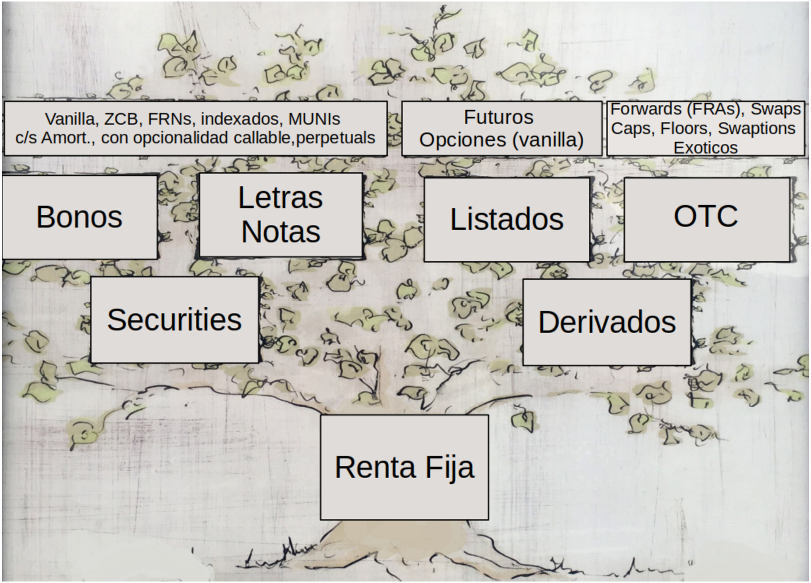
Hernán Reisin

QUANt UCEMA 2020

2020, Buenos Aires

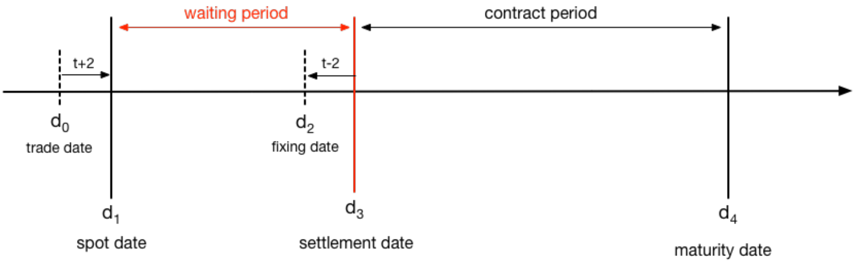
Derivados lineales de Tasa e Interés

Derivados de Tasa



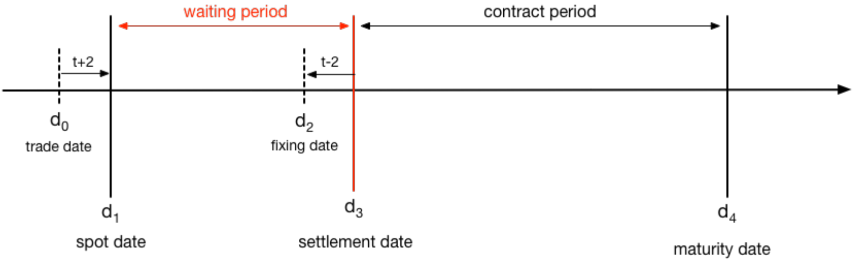
Forward Rate Agreement (FRA)

- Es un contrato por diferencias entre dos partes referenciado a una tasa de interés estocástica F. El acuerdo es OTC pero se enmarca en un *acuerdo maestro* (e.g. ISDA "master agreement").
- Propósito. "X"sabe que en el futuro $(t = d_3)$ deberá tomar un préstamo por un nocional N a tasa variable r y honrarlo en $t = d_4$. Para cubrirse del riesgo de tasa pacta hoy $(t = d_0)$, pagar en $t = d_3$ la tasa *fija* r_{fra} sobre el nocional N a cambio de recibir ese mismo día la tasa variable sobre la que precisará el préstamo $F(d_3; d_4)$. Esto le permite a "X" adquirir cobertura a fluctuaciones de tasa a cambio de pagar una tasa fija y conocida de antemano: r_{fra}.



https://www.iotafinance.com/en/Article-Forward-rate-agreements-FRAs.html

Forward Rate Agreement (FRA)



- El comprador del FRA es el pagador de la tasa fija. El día de liquidación

$$\text{pagará: } D^{d_3}(d_4) N\, r_{fra}\, \tau_{act/360}(d_3, d_4),$$
$$\text{recibirá: } D^{d_3}(d_4)\, N\, F(d_3 - 2; d_4)\, \tau_{act/360}(d_3, d_4)$$

- El FRA es liquidado *upfront* y en efectivo con un único pago neto el día de settlement

$$V_{FRA}(t = d_3) = D^{d_3}(d_4) N \left[F(d_3 - 2; d_4) - r_{fra}\right] \tau_{act/360}(d_3, d_4)$$

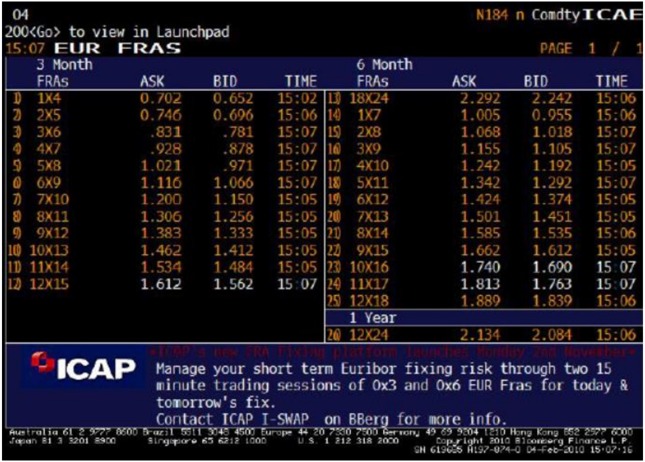
- La tasa FRA es contractual pero estará cerca del forward rate prevalente al momento del acuerdo

$$r_{fra} = F({\color{red}d_0}; d_3 - 2, d_4) \tag{1}$$

Forward Rate Agreement quoting

Los FRAs son instrumentos líquidos en muchas monedas.

Quotes al 15.07.16


04 N184 n Comdty ICAE

200<Go> to view in Launchpad

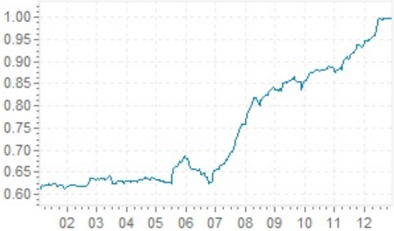
15:07 EUR FRAS PAGE 1 / 1

	3 Month FRAs	ASK	BID	TIME		6 Month FRAs	ASK	BID	TIME
1)	1X4	0.702	0.652	15:02	13)	18X24	2.292	2.242	15:06
2)	2X5	0.746	0.696	15:06	14)	1X7	1.005	0.955	15:06
3)	3X6	.831	.781	15:07	15)	2X8	1.068	1.018	15:07
4)	4X7	.928	.878	15:07	16)	3X9	1.155	1.105	15:07
5)	5X8	1.021	.971	15:07	17)	4X10	1.242	1.192	15:05
6)	6X9	1.116	1.066	15:07	18)	5X11	1.342	1.292	15:07
7)	7X10	1.200	1.150	15:05	19)	6X12	1.424	1.374	15:05
8)	8X11	1.306	1.256	15:05	20)	7X13	1.501	1.451	15:05
9)	9X12	1.383	1.333	15:05	21)	8X14	1.585	1.535	15:06
10)	10X13	1.462	1.412	15:05	22)	9X15	1.662	1.612	15:05
11)	11X14	1.534	1.484	15:05	23)	10X16	1.740	1.690	15:07
12)	12X15	1.612	1.562	15:07	24)	11X17	1.813	1.763	15:07
					25)	12X18	1.889	1.839	15:06
						1 Year			
					26)	12X24	2.134	2.084	15:06

Un FRA listado como $S \times T$ indica que la tasa se vuelve efectiva S-meses en el futuro ($t_0 + S$ es el *settlement date*) y culmina en T meses cubriendo un período de (T-S) meses.

Forward Rate Agreement quoting

LIBOR 3m (2016)



LIBOR 6m (2016)

https://es.global-rates.com/tipos-de-interes/libor/dolar-usa/2016.aspx

Ejemplo. [EUR 1x4 - 0.652 % / 0.702 %]. Indica que para entrar en un "payer" FRA que comienza en 1 mes por 3 meses hay que pagar una tasa fija (FRA rate) de 0.702 % (p.a.) a cambio de recibir la tasa flotante de 3 meses.

Futuros de Bonos

Son contratos a futuro de tasas de interés, e.g. futuros de bonos del Tesoro o contratos de Eurodolar.

En el caso de Futuros de bonos del Tesoro, el *delivery* puede ser cualquier bono soberano que al primer día del mes de *delivery* expire dentro de 15y a 25y

Los bonos entregables son *casi* fungibles. . . quien está *short* en el contrato puede elegir entre muchos posibles bonos, dentro de una variedad de cupón y tiempos de expiración. Si es racional va a elegir el *cheapest-to-deliver*.

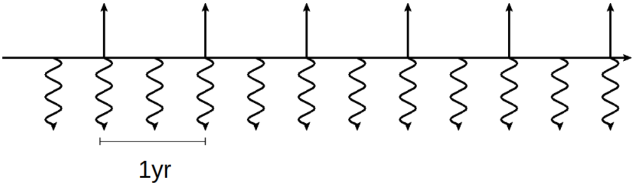
El contrato más usual son los futuros de Eurodolar a 3-meses. Un Eurodolar es un dolar depositado en un banco fuera de USA y la tasa de interés es la tasa de préstamo de Eurodólares entre bancos (símil LIBOR). Estos futuros se usan para cubrir el interés que se puede recibir en un período futuro de 3-meses.

Table 6.1 Futures quotes for a selection of CME Group contracts on interest rates on May 14, 2013.

	Open	*High*	*Low*	*Prior settlement*	*Last trade*	*Change*	*Volume*
Ultra T-Bond, $100,000							
June 2013	158-08	158-31	156-31	158-08	157-00	−1-08	45,040
Sept. 2013	157-12	157-15	155-16	156-24	155-18	−1-06	176
Treasury Bonds, $100,000							
June 2013	144-22	145-04	143-26	144-20	143-28	−0-24	346,878
Sept. 2013	143-28	144-08	142-30	143-24	142-31	−0-25	2,455

Interest Rate Swaps

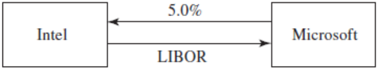
- Un IRS es un contrato que especifica el intercambio de flujos futuros de fondos determinados por tasas de interés (fijas o flotantes) sobre un valor principal (N). El principal no es intercambiado.
- Existe una enorme variedad de IRSs: Fix *vs*. Fix, Fix *vs*. Float, Float *vs*. Float (basis swaps). Ejemplo de un "Receiver" Fix *vs*. Float swap, con pagos anuales en la pata fija y pagos semestrales para la pata flotante.

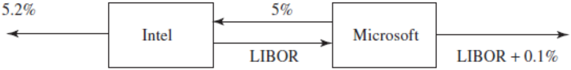
  Se puede pensar este tipo de swap como un conjunto de FRAs, o sintetizarlo como una posición short en un Floating Rate Note y long en un bono de cupón fijo.
- Cada pata del swap tiene definida su propia periodicidad de pago, convenciones de ajuste de calendario y la tasa con la cual se calcula el pago. Pago upfront o *in arrears*, *payer* o *receiver* the fix rate.

IRS - Ejemplo Fix *vs.* Float

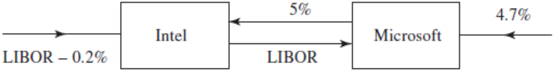
- Microsoft paga una tasa 5 % p.a. sobre un principal N, Intel paga tasa flotante de 6-m LIBOR



- Se puede usar para transformar exposiciones



- Se puede usar para transformar activos

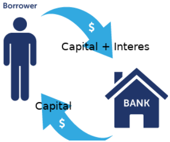


IRS - Ejemplo Fix *vs.* Float

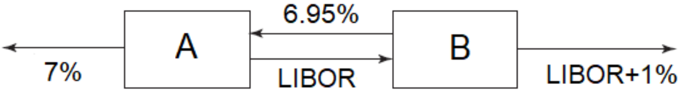
- Se puede usar por ventaja comparativa. Las compañías tienen distintos riesgos crediticios y por lo tanto pagan distintas tasas ante préstamos

Table 14.1 Borrowing rates for companies A and B.

	Fixed	Floating
A	7%	six-month LIBOR + 30 bps
B	8.2%	six-month LIBOR + 100 bps



- **A** quiere tomar un préstamo que devuelve a tasa flotante, **B** quiere tomar un prestamo que devuelve a tasa fija. El costo total es: $L + 30bps + 8{,}2\,\% = L + 8{,}5\,\%$
- Si, en cambio, **A** toma el préstamo que devuelve a tasa fija y **B** toma el prestamo que devuelve flotante



El costo total es: $L + 100bps + 7\,\% = L + 8\,\%$, pero además el costo neto para **A** es $L + 5bps$ y para **B** es $7{,}95\,\%$

Intermediario Financiero

¿Cuán factible sería que esas dos compañías, con esos requerimientos tan específicos tuvieran conocimiento de las necesidades da la otra empresa y llegaran a un acuerdo?

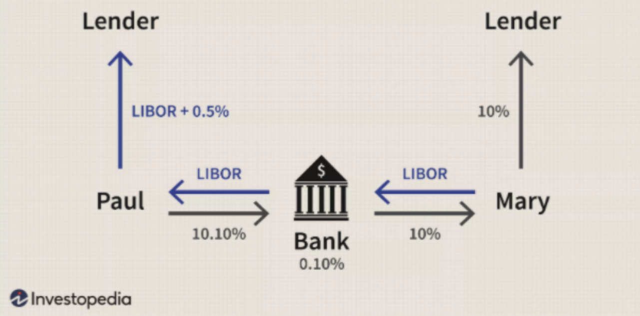


Image by Julie Bang © Investopedia 2019

La institución financiera conecta las puntas del contrato, y transfiere riesgos entre las contrapartes. Es decir, no tiene exposición neta, excepto que... alguna de las contrapartes del contrato incurre en un default.
Si ambas partes honran el contrato... el intermediario se asegura 10bp sobre el nocinal $$$ al netear posiciones opuestas.
En ausencia de una contraparte los *Market Makers* toman posición sobre alguna de las patas del swap.

Interest Rate Swaps: Valuación

Supongamos que la pata flotante indexa sobre la tasa forward $L(T_{i-1}, T_i)$ que es *fixed* en T_{i-1} donde $\mathbf{T} : \{T_0, T_1, ..., T_n\}$ es el schedule de la pata flotante. Análogamente la pata fija paga los días $\mathbf{S} : \{S_0, S_1, ..., S_m\}$ indexando sobre una tasa de interes fija K.

El valor presente de un IRS se calcula como la suma de los flujos de fondo futuros descontados

$$\Pi_{IRS}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{S}) = \underbrace{N \sum_{i=1}^{n_x} P(t; T_i) L(t; T_{i-1}, T_i) \tau_x(T_{i-1}, T_i)}_{IRS_{float}(t;\mathbf{T},\mathbf{L})}$$

$$- \underbrace{N \sum_{k=1}^{m} P(t; S_k) K \tau_K(S_{k-1}, S_k)}_{IRS^x_{fix}(t;\mathbf{S}) = NKA_c(t;\mathbf{S})}$$

Interest Rate Swaps: Valuación

Por convención entrar a un swap al momento de su constitución no tiene costo para las contrapartes

$$0 = IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}) - NK \underbrace{\sum_{k=1}^{m} P(t; S_k)\tau_K(S_{k-1}, S_k)}_{A_c(t;\mathbf{S})}$$

lo que se consigue ajustando el valor de la tasa fija K_x en forma acorde

$$K|_{\Pi_{IRS(t_0)}=0} \equiv R^*(t_0) = \left. \frac{IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L})}{NA_c(t; \mathbf{S})} \right|_{t=t_0}$$

este valor de tasa fija se conoce como **par swap rate**, la tasa que hace nulo el swap en inception. El factor en el denominador se conoce como **Annuity** y solo depende del calendario de pago

$$A_c(t; \mathbf{S}) = \sum_{k=1}^{n} P(t; S_k)\tau_K(S_{k-1}, S_k)$$

Con estas definiciones el valor presente de un IRS se puede reexpresar para cualquier tiempo según

$$\Pi_{IRS}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{S}) = IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}) - N\, R^*(t_0)\, A_c(t; \mathbf{S}) \tag{2}$$

Interest Rate Swaps: Valuación

El valor de la tasa fija K_x en forma acorde

$$K\Big|_{\Pi_{IRS(t_0)}=0} \equiv R^*(t_0) = \left.\frac{IRS_{float}(t;\mathbf{T},\mathbf{L})}{NA_c(t;\mathbf{S})}\right|_{t=t_0}$$

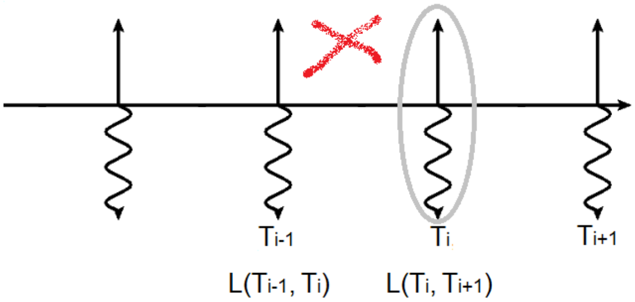
este valor de tasa fija se conoce como **par swap rate**. Los Market Makers ofrecen quotes en torno al swap rate

Table 7.3 Bid and offer fixed rates in the swap market and swap rates (percent per annum).

Maturity (years)	*Bid*	*Offer*	*Swap rate*
2	6.03	6.06	6.045
3	6.21	6.24	6.225
4	6.35	6.39	6.370
5	6.47	6.51	6.490
7	6.65	6.68	6.665
10	6.83	6.87	6.850

La ganancia del MM proviene del *spread* sobre el *par rate*, no sobre una posición especulativa (riesgo direccional).

Interest Rate Swaps: vanilla *vs. in arrears*



La diferencia es cuándo ocurre el fixing de la tasa flotante

En los swaps vanilla la tasa flotante se conoce al principio de cada período

$$P(t; T_i)L(t; T_{i-1}, T_i)\tau_x(T_{i-1}, T_i)$$

En un swap *in arrears* la tasa flotante se fija al final de cada período

$$P(t; T_i)L(t; T_i, T_{i+1})\tau_x(T_{i-1}, T_i)$$

Interest Rate Swaps: Valuación de ongoing swap

El precio (a tiempo $t = t_1 \geq t_0$) de un IR swap que comenzó a $t = t_0$ puede calcularse con facilidad a partir del par rate existente al momento de la valuación y del par rate al compienzo del swap. Esto se consigue tomando posición en otro swap a $t = t_1$ que compense la posición inicial (short y long).

$$\Pi_{IRS}(t) = IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}) - N\, R^*(t_0)\, A_c(t; \mathbf{S}) \tag{3}$$

El IRS fixed a $t = t_1$ tiene un par swap rate:

$$K|_{\Pi_{IRS(t_1)}=0} \equiv R^*(t_1) = \left. \frac{IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L})}{NA_c(t; \mathbf{S})} \right|_{t=t_1}$$

De modo que este nuevo swap puede escribirse como

$$0 = IRS_{float}(t_1; \mathbf{T}, \mathbf{L}) - N\, R^*(t_1)\, A_c(t_1; \mathbf{S}) \tag{4}$$

Restando las expresiones (3) and (4):

$$\Pi_{IRS}(t_1; t_0) = N\left[R^*(t_1) - R^*(t_0)\right] A_c(t_1; \mathbf{S})$$

que es válida para cualquier tiempo, generalizando :

$$\boxed{\Pi_{IRS}(t; t_0) = N\left[R^*(t) - R^*(t_0)\right] A_c(t; \mathbf{S}).} \tag{5}$$

IRS quoting

15:08 EUR SWAPS vs. 6M EURIBOR PAGE 1 / 2

	TERM	Bid Size (MM)	Danske Bank Pays	Danske Bank Receives	Ask Size (MM)	Change	Time
1)	1 Year	100	1.185	1.222	100	-.022	15:08
2)	2 Year	250	1.644	1.659	250	-.036	15:08
3)	3 Year	200	2.011	2.026	200	-.036	15:06
4)	4 Year	175	2.313	2.325	175	-.037	15:07
5)	5 Year	150	2.572	2.582	150	-.038	15:08
6)	6 Year	150	2.797	2.807	150	-.036	15:08
7)	7 Year	100	2.989	3.000	100	-.034	15:08
8)	8 Year	100	3.148	3.157	100	-.033	15:08
9)	9 Year	100	3.278	3.287	100	-.034	15:08
10)	10 Year	100	3.390	3.399	100	-.033	15:08
11)	11 Year	100	3.488	3.498	100	-.032	15:08
12)	12 Year	100	3.572	3.584	100	-.032	15:08
13)	13 Year	100	3.642	3.654	100	-.032	15:08
14)	15 Year	75	3.747	3.759	75	-.032	15:08
15)	20 Year	50	3.865	3.880	50	-.034	15:08

Contact: Matthew Cross Tel: 45 3334 1016 *Page forward for more*
EUR Swaps Annual 30/360 vs 6M EURIBOR
TALK TO TRADER DIRECT: {MSG JACOB CHRES JORGENSEN<GO>}
TALK TO TRADER DIRECT: {MSG MARTIN RIEDEL<GO>}

Danske Markets

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000
SN 619695 H197-874-0 04-Feb-2010 15:08:21

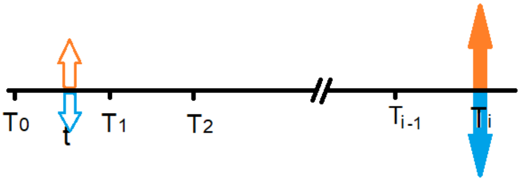
Simplificación de la pata flotante

$$IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}) = N \sum_{i=1}^{n} P(t; T_i) L(t; T_{i-1}, T_i) \tau_x(T_{i-1}, T_i)$$

El valor nominal de cada flujo es (forward rate??)

$$c_i = L(t; T_{i-1}, T_i) \tau_x(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

¿Cuál es el valor presente de estos flujos futuros?



1. El valor presente de -\$1 pagado en T_i es $-P(t, T_i)$.
2. El valor presente de $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ pagado en T_i, hoy es $P(t, T_{i-1})$

Simplificación de la pata flotante

¿Cuál es el valor presente de estos flujos futuros?

1. El valor presente de -\$1 pagado en T_i es $-P(t, T_i)$.
2. El valor presente de $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ pagado en T_i, hoy es $P(t, T_{i-1})$
   2.1 $P(t, T_{i-1})$ hoy valdrá \$1 en T_{i-1}
   2.2 $P(T_{i-1}, T_i)$ en T_{i-1} valdrá \$1 en T_i, entonces
   2.3 $\$1 = P(T_{i-1}, T_i)/P(T_{i-1}, T_i)$ en T_{i-1} valdrá $\$1/P(T_{i-1}, T_i)$ en T_i

$$c_i = P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)$$

y por lo tanto (usamos también que $t < T_1$)

$$IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L}) = N \sum_{i=1}^{n} P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) = N[P(t, T_0) - P(t, T_n)]$$

El swap rate resulta

$$R^*(t_0) = \frac{N[P(t, T_0) - P(t, T_n)]}{NA_c(t; \mathbf{S})} = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{k=1}^{n} P(t; S_k)\tau_K(S_{k-1}, S_k)}$$

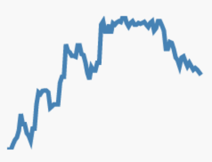
Estimación de la Term-Structure

Repaso ¿qué era la T-S?

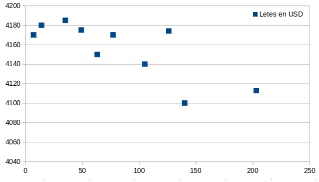
LETES EN USD | LETES EN PESOS

ESPECIE	PLAZO	ULT. OPERADO
U13S9	Inmediata	$ 4.150,00
U15N9	Inmediata	$ 4.174,00
U16G9	Inmediata	$ 4.185,00
U19L9	Inmediata	$ 4.170,00
U25O9	Inmediata	$ 4.140,00
U26L9	Inmediata	$ 4.180,00
U27S9	Inmediata	$ 4.170,00
U29N9	Inmediata	$ 4.100,00

$t \to P(t, T)$ para U13S9, T=13/9/2019



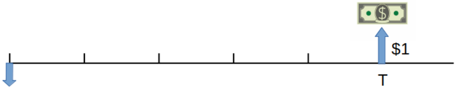
$T \to P(t, T)$ Term-structure de precios LETES en USD al 12 Julio 2019



- $t \to P(t, T)$ es un proceso estocástico, el precio futuro de un bono es incierto.
- $T \to P(t, T)$ es la *term-structure* de precios de ZCBs. Es una curva "suave" en maturity T. Se denomina también como **curva de descuento**

Term structure

- Una *term-structure* (estructura temporal) es una función que relaciona cierta variable financiera a su *maturity*. Por ejemplo la term-structure de precios de ZCB o curva de descuento[1]
$$T \longrightarrow P_{ZCB}(t; T)$$
- La term-structure de tasas de interés es un objecto de alta dimensionalidad y no es directamente observable
$$T_i \longrightarrow R(t; T_i)$$
- Precisamos la curva zero para poder descontar flujos futuros, ergo valuación



$$P(t, T) = NPV(\$1 \text{ pagado en t=T})$$

$$\pi(t) = P(t, T_1)c_1 + P(t, T_2)c_2 + \ldots + \color{red}{P(t, T_i)}c_i + \ldots + P(t, T_n)c_n$$

- Para valuar caps y swaptions se puede modelar la T-S de tasas de interés para un conjunto de plazos. Sin embargo para derivados más exóticos cuyos cash flows no coincidan con el conjunto de plazos modelados es preciso interpolar la T-S.

[1] Post crisis 2008 se descuenta a la OIS

Term structure

- En contextos teóricos se supone que la term-structure es válida para un contínuo de plazos T, e.g. la curva zero o la curva forward

$$
\begin{aligned}
T &\longrightarrow R(t; T), \\
T &\longrightarrow f(t; T) = \lim_{\epsilon \to 0} F(t; T; T + \epsilon)
\end{aligned}
$$

- Esto es una aproximación de la realidad que posee solo un conjunto finito de contizaciones.
- Veremos métodos exactos sobre los puntos de mercado, y estimaciones que capturen la información de mercado pero resulten en curvas suaves (estimación paramétrica).

Bootstrapping

Bootstrapping

- Es un método de extracción iterativo para ajustar a la term-structure del mercado.
- Es la estimación de la T-S más usada en los desks de trading.
- Se utilizan datos de mercado de varios instrumentos que permiten cubrir un rango amplio del espacio de tenors.
- El objetivo es obtener la curva zero $T \longrightarrow P(t_0; T)$ a partir de cotizaciones de mercado.

Bootstrapping - caso sencillo

Table 4.3 Data for bootstrap method.

Bond principal (\$)	*Time to maturity* (*years*)	*Annual coupon** (\$)	*Bond price* (\$)
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6

* Half the stated coupon is assumed to be paid every 6 months.

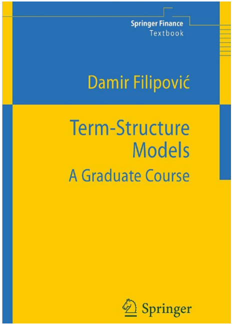
- La tasa contínua a 3 meses se obtiene de $97{,}5 = 100 \exp(-r_{3m} \times 0{,}25) \longrightarrow r_{3m} = 10{,}127\,\%$
- La tasa contínua a 6 meses se obtiene de $94{,}9 = 100 \exp(-r_{6m} \times 0{,}50) \longrightarrow r_{6m} = 10{,}469\,\%$
- La tasa contínua a 6 meses se obtiene de $90{,}0 = 100 \exp(-r_{1y} \times 1{,}0) \longrightarrow r_{1y} = 10{,}536\,\%$
- El bono que expira a los $T = 1{,}5y$ tiene los siguientes pagos: \$4 a los 6m, \$4 al 1y, \$104 a 1.5y
  $96 = 4 \exp(-r_{6m} \times 0{,}5) + 4 \exp(-r_{1y} \times 1{,}0) + 104 \exp(-r_{1{,}5y} \times 1{,}5) \longrightarrow$
  $r_{1{,}5y} = 10{,}681\,\%$ es la única consistente con las tasas a 6m y a 1y.
- Iterativamente se resuelven las tasas cero implícitas a partir de bonos con cupones.

Bootstrapping

El objetivo es obtener la curva zero $T \longrightarrow P(t_0; T)$ a partir de cotizaciones de mercado.

LIBOR (%)		Futuros		Swaps (%)	
O/N	0.49	20 Mar 1996	99.34	2y	1.14
1s	0.5	19 Jun 1996	99.25	3y	1.60
1m	0.53	18 Set 1996	99.10	4y	2.04
2m	0.55	18 Dic 1996	98.90	5y	2.43
3m	0.56			7y	3.01
				10y	3.36

Cuadro: Datos de ¥ al 9 de Enero 1996



La curva de Tasa Swap

a swap can be decomposed into a portfolio of bonds (as we see shortly) and so its value is not open to question if we are given the yield curve. However, in practice the calculation goes the other way. The swaps market is so liquid, at so many maturities, that it is the prices of swaps that drive the prices of bonds. The fixed leg of a **par swap** (having no value) is determined by the market.

Wilmott

Par Swap Rate

Al entrar a un swap éste vale 0 que resultaba de fijar la tasa de la pata fija...

$$K\big|_{\Pi_{IRS(t_0)}=0} \equiv R^*(t_0) = \left.\frac{IRS_{float}(t; \mathbf{T}, \mathbf{L})}{NA_c(t; \mathbf{S})}\right|_{t=t_0}$$

La curva swap es la T-S bootstrapeada de los par swap rates

$$T \longrightarrow S(t;T), \qquad (\text{no es } T \to R^*(t;T))$$

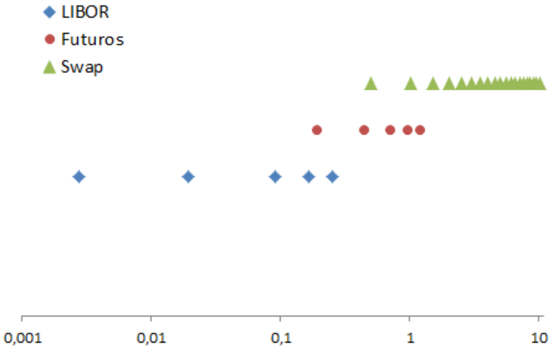
La diferencia entre la curva swap y la yield curve es el swap spread

$$T \longrightarrow S(t;T) - y(t,T),$$

Bootstrapping

LIBOR (%)		Futuros		Swaps (%)	
O/N	0.49	20 Mar 1996	99.34	2y	1.14
1s	0.5	19 Jun 1996	99.25	3y	1.60
1m	0.53	18 Set 1996	99.10	4y	2.04
2m	0.55	18 Dic 1996	98.90	5y	2.43
3m	0.56			7y	3.01
				10y	3.36

Cuadro: Datos de ¥ al 9 de Enero 1996



Notación: $\{S_i\}$ maturities de tasas LIBOR; $\{T_i\}$ maturities de futuros; $\{U_i\}$ maturities de swaps.

Bootstrapping

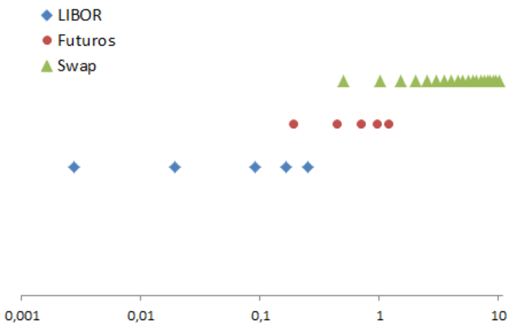
1. Las tasas LIBOR son tasas spot de composición simple, por lo tanto la del ZCB es inmediata (a menos de un ajuste de dcc)

$$P(t_0, T_i) = \frac{1}{1 + \tau_{[act/360](t_0, T_i)} F(t_0; T_i)}$$

2. Los precios de los Futuros se reportan
$$V_{Fut}(t_0, T_i) = 100 \left[1 - F_F(t_0; T_i, T_{i+1})\right]$$
donde la tasa Futuros F_F puede tratarse como una tasa forward de composición simple (hay una diferencia no trivial)
$$F_F(t_0; T_i, T_{i+1}) \approx F(t_0; T_i, T_{i+1})$$
Con esta relación los valores de los ZCBs se consiguen en forma recursiva a partir de
$$P(t_0, T_{i+1}) = \frac{P(t_0, T_i)}{1 + \tau_{(T_i, T_{i+1})} F_F(t_0; T_i, T_{i+1})}$$

Bootstrapping

La búsqueda por recursividad requiere conocer el primer elemento de la sucesión: $P(t_0, T_1)$.



Se utilizan los valores ya obtenidos a partir de LIBOR para interpolar $P(t_0, T_1)$. En la linea de maturities $S_4 < T_1 < S_5$, por lo tanto se puede interpolar geométricamente

$$P(t_0, T_1) = P(t_0, S_4)^{\frac{\tau(T_1, S_5)}{\tau(S_4, S_5)}} P(t_0, S_5)^{\frac{\tau(S_4, T_1)}{\tau(S_4, S_5)}}$$

Bootstrapping

3. En el caso de los swaps, los datos de mercado proveen *par swap rates* de 6 swaps a distinto plazo con vencimientos en 2y, 3y, 4y, 5y, 7y, y 10y.

   Todos estos swaps tiene el mismo spot 1 Enero 1996, y pagan semi-anual. Por lo tanto existen 20 fechas de pago entre todos los swaps contemplados.

   Por cada uno de estos pagos es posible encontrar el correspondiente ZCB asociado.

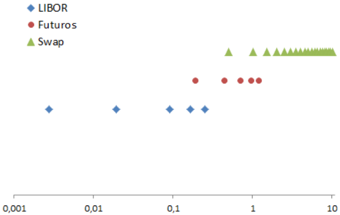
   Al igual que con los Futuros, es posible encontrar por recursión los ZBC. La fórmula del *par rate*

$$R^*(t_0, U_n) = \frac{1 - P(t_0, U_n)}{\sum_{i=1}^{n} \tau_{(U_{i-1}, U_i)} P(t_0, U_i)}$$

   puede despejarse

$$P(t_0, U_n) = \frac{1 - R^*(t_0, U_n) \sum_{i=1}^{n-1} \tau_{(U_{i-1}, U_i)} P(t_0, U_i)}{1 + R^*(t_0, U_n) \tau_{(U_{n-1}, U_n)}}$$

Bootstrapping



Los ZCB interpolables se obtienen del mismo modo que antes: interpolando los ZCB extraidos de los Futuros

$$P(t_0, U_1) = P(t_0, T_2)^{\frac{\tau(U_1, T_5)}{\tau(T_4, T_5)}} P(t_0, T_3)^{\frac{\tau(T_4, UT_1)}{\tau(T_4, T_5)}}$$

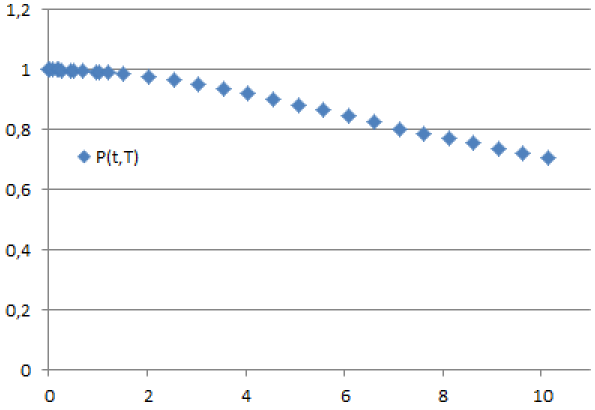
Las incognitas restantes son los par swap rates. Estos se obtienen por interpolación lineal de los valores cotizados en el mercado

$$R^*(t_0, U_j) = R^*(t_0, U_i)\frac{\tau(U_j, U_k)}{\tau(U_i, U_k)} + R^*(t_0, U_k)\frac{\tau(U_i, U_j)}{\tau(U_i, U_k)}$$

donde $U_i < U_j < U_k$

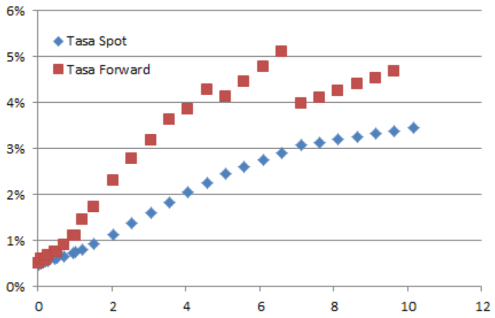
Excel Time

Bootstrap: Conclusiones (I)



- La curva de descuento $P(t, T)$ extraida es suave en apariencia.
- El método es exacto en el sentido que con las tasas obtenidas se reobtienen *exactamente* los mismos precios para los instrumentos utilizados.
- Las curvas obtenidas cubren el mismo espacio de tenors que los instrumentos utilizados para construirlas (e.g. o/n – 10y)

Bootstrap: Conclusiones (II)

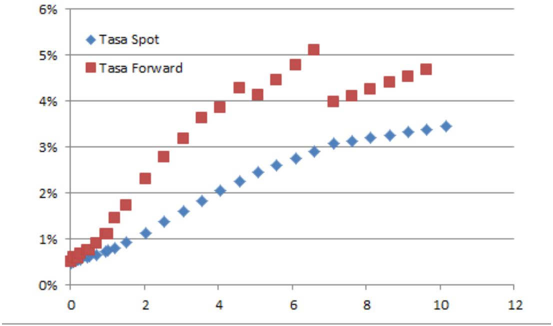


- La tasa spot y la tasa forward pueden obtenerse de la curva zero

$$R(t_0, T_i) = -\frac{\ln P(t_0, T_i)}{\tau\left(t_0, T_i\right)}$$

$$R(t_0, T_i, T_{i+1}) = -\frac{\ln P(t_0, T_{i+1}) - \ln P(t_0, T_i)}{\tau\left(T_i, T_{i+1}\right)}$$

Bootstrap: Conclusiones (III)



- La tasa forward presenta una forma de irregular en la parte larga. La forward bootstrapped es sensible a fluctuaciones de los quotes de mercado.
- La interpolación lineal de los R_{swap} es inapropiada para los forward rates implícitos. Tampoco es válido considerar semejantes la tasa de futuros y la curva forward, pues la última suele ser menor que la primera (ajuste por convexidad, $F = F_F + ajuste$).
- Las tres curvas resultantes de LIBOR, Futuros y Swaps no son consistentes con una única curva subyacente.

Estimación no-paramétrica

Generalidades de los Métodos No-Paramétricos

- Bootstrapping permite construir una term-structure de tasas (curva zero, spot y forward) extrayendo los factores de descuento $P(t;T)$ a partir de precios de mercado $p(t)$.
- En forma general encontrar la term-structure de precios de ZCB se puede formular como
$$\bar{p} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{d} + \bar{\delta} \tag{6}$$
donde $\bar{p}$ es el vector de precios, $\bar{\bar{C}}$ es la matriz de cash flows, $\bar{d}$ es el vector de factores de descuento y $\bar{\delta}$ es un vector a minimizar.
- La minimización
$$\min_{d \in \mathcal{R}^n} ||\bar{p} - \bar{\bar{C}} \cdot \bar{d}||^2$$
Suele estar mal definida.

Ejemplo

- Consideremos dos FRNs de maturities 10y y 20y. El primero con pago semestral los 15-Ene y 15-Jul, y el segundo con pagos anuales los 1-Ago

$$p_1 = N_1 \sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)} D(T_i^{(1)})$$

$$p_2 = N_2 \sum_{j=1}^{m} c_j^{(2)} D(T_j^{(2)})$$

En forma matricial este problema se escribe

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c_1^{(2)} & 0 & 0 & c_1^{(2)} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(x_1) \\ D(x_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{7}$$

En general la matriz de cash flows es rala y tiene muchísimas más columnas que filas, haciendo de este un sistema un problema indeterminado. Además, el conjunto del agregado de fechas disponibles $\{x_i\} = \{T_i^{(1)}\} \cup \{T_i^{(2)}\}$ es finito y por lo tanto no cubre la totalidad de fechas que podrían requerirse para valuar un instrumento genérico.

Estimación paramétrica
Interpolación y Optimización

Estimación paramétrica de la Term-Structure

Como vimos en los ejemplos de estimación no-paramétrica la valuación de derivados lineales se reduce a evaluar la función $P(t; T)$. Sin embargo siguiendo ese enfoque el número de fechas disponibles resulta acotado y la curva zero puede carecer de suavidad.

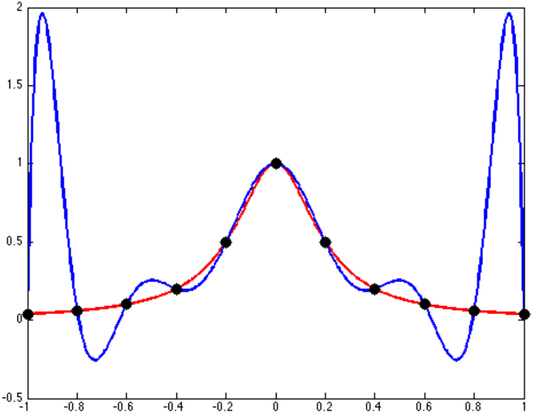
Una solución a estos inconvenientes se puede conseguir mediante la estimación paramétrica, que provee una estimación suave de la term-structure de tasas de interés con un número reducido de parámetros.

Para la estimación pueden usarse distintos tipos de familias.

1. Las familias de funciones lineales (polinomios, polinomios a trozos, Splines).
2. Las familias de funciones polinómicas-exponenciales (Nelson-Siegel, Svensson).

Interpolación

Por construcción las curvas interpolantes deben coincidir con los puntos dados. Pero en el resto del dominio la distancia, oscilaciones y ripples puede ser muy grande (fenómeno de Runge). El resultado es una curva que interpola usando como nodos (“knots”) los datos de mercado.



$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{10} a_j x^j$$

https://math.boisestate.edu/~calhoun/teaching/matlab-tutorials/lab_11/html/lab_11.html

Interpolación a trozos

En lugar de tomar una función para cubrir todo el rango del dominio, se definen funciones a trozos que provean información para los puntos intermedios.

1. Interpolación de la **tasa spot** con una **función escalón** (no es contínua)
2. Interpolación de la **tasa spot** con una **función lineal a trozos** (poligonal contínua)

$$r(T) = a_i + b_i T, \qquad \text{para } T_i < T < T_{i+1}$$
$$r(T) = r_i \frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i} + r_{i+1} \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i}$$

Sin embargo, la tasa forward instantánea no es contínua

$$f(T_i^+) = a_i + 2b_i T_i$$
$$f(T_i^-) = a_{i-1} + 2b_{i-1} T_i$$

Digresión: ¿cómo conectar la forma de la tasa spot con la tasa forward?

Relación entre tasa Forward instantánea y tasa spot

Habíamos definido la **tasa de interés *spot* contínuamente compuesta** para el período $[t, T]$ como el log-retorno del ZCB que vence en T

$$R(t, T) \doteq \frac{\ln P(T, T) - \ln P(t, T)}{T - t} = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

Y la **tasa forward instantánea** como la tasa de un préstamo que empieza en el futuro (a tiempo T) y tiene unda duración infinitesimal

$$f(t; T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

Por lo tanto,

$$f(t; T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}(-R(t, T)(T - t)) = R(t, T) + \frac{dR(t, T)}{dT}(T - t)$$

La relación anterior determina la forma de la curva forward a partir de la forma de la curva Cero

$$f(t; T) = R(t, T) + \frac{dR(t, T)}{dT}(T - t)$$

Interpolación a trozos

3. Interpolación del logaritmo de la **tasa spot** con una **función lineal a trozos**

$$\begin{aligned}
\ln r(T) &= a_i + b_i T, \qquad \text{para } T_i < T < T_{i+1} \\
r(T) &= \exp(a_i + b_i T), \\
a_i &= \frac{\ln(r_i) T_{i+1} - \ln(r_{i+1}) T_i}{T_{i+1} - T_i} \\
b_i &= \frac{\ln(r_{i+1}) - \ln(r_i)}{T_{i+1} - T_i} \\
f(T) &= \exp(a_i + b_i T) + b_i T \exp(a_i + b_i T),
\end{aligned}$$

   Una objeción es que esta interpolación no permite tasas negativas. Y nuevamente la curva forward presenta discontinuidades en los nodos

4. Curva forward **constante a trozos**

$$\begin{aligned}
f(T) &= b_i, \qquad \text{para } T_i < T < T_{i+1} \\
r(T) &= \frac{a_i}{T} + b_i, \\
a_i &= \frac{T_i T_{i+1}(r_i - r_{i+1})}{T_{i+1} - T_i} \\
b_i &= \frac{r_{i+1} T_{i+1} - r_i T_i}{T_{i+1} - T_i}
\end{aligned}$$

   Muy sensible a la cantidad de nodos.

Spline

Los splines son funciones C^2 en todo el dominio. En particular las splines cúbicas son funciones polinómicas cúbicas a trozos y dos veces diferenciables en todo su domino. Son ampliamente usadas pero esta familia suele resultar en ajustes con irregularidades en el tramo muy corto o largo de la curva.

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i + \sum_{j=1}^{q-1} b_j (x - \xi_j)_+^3$$

La estimación con splines es un tipo de interpolación. Al definir el polinomio a trozos se tiene mayor flexibilidad que usando un único polinomio interpolador y se evitan los problemas asociados con la interpolaciones polinomiales.

Ejemplos de interpolación tomando las curvas del tesoro

U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY

Daily Treasury Yield Curve Rates

Get updates to this content.

XML These data are also available in XML format by clicking on the XML icon.

XSD The schema for the XML is available in XSD format by clicking on the XSD icon.

If you are having trouble viewing the above XML in your browser, click here.

To access interest rate data in the legacy XML format and the corresponding XSD schema, click here.

Select type of Interest Rate Data

Daily Treasury Yield Curve Rates ▼ Go

Select Time Period

Current Month ▼ Go

Date	1 Mo	2 Mo	3 Mo	6 Mo	1 Yr	2 Yr	3 Yr	5 Yr	7 Yr	10 Yr	20 Yr	30 Yr
07/01/19	2.17	2.16	2.21	2.10	1.94	1.78	1.74	1.79	1.90	2.03	2.34	2.55
07/02/19	2.21	2.17	2.20	2.09	1.91	1.77	1.71	1.75	1.85	1.98	2.29	2.51
07/03/19	2.25	2.20	2.21	2.08	1.91	1.77	1.71	1.74	1.83	1.96	2.25	2.47
07/05/19	2.26	2.22	2.23	2.14	1.98	1.87	1.82	1.84	1.93	2.04	2.34	2.54
07/08/19	2.23	2.24	2.26	2.14	1.99	1.88	1.84	1.86	1.94	2.05	2.32	2.53
07/09/19	2.22	2.24	2.26	2.15	2.00	1.92	1.88	1.88	1.96	2.07	2.34	2.54
07/10/19	2.18	2.18	2.20	2.07	1.93	1.82	1.79	1.82	1.93	2.07	2.36	2.57
07/11/19	2.17	2.17	2.17	2.08	1.97	1.85	1.84	1.88	1.99	2.13	2.42	2.65
07/12/19	2.16	2.18	2.14	2.07	1.96	1.84	1.81	1.86	1.98	2.12	2.42	2.64
07/15/19	2.17	2.19	2.16	2.06	1.95	1.83	1.80	1.84	1.96	2.09	2.39	2.61
07/16/19	2.16	2.17	2.15	2.06	2.00	1.87	1.84	1.88	2.00	2.13	2.42	2.63

Tuesday Jul 16, 2019

https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield


inp_array));
-1 < b && a.splice
use_array(a, b) {
(a, b) {
for (var c = -1, d
function dynamicSort(a) {
d[a] ? -1 : c[a] > d[a]
a.length + 1;
} else {

Coding Time

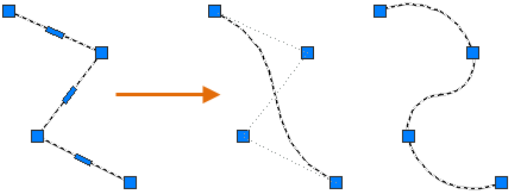
Optimización

Smoothing Splines

Combinan los objetivos de un buen ajuste a los datos y regularidad en la curva extendiendo el criterio de cuadrados mínimos

$$\min_{z} ||\bar{p} - \bar{\bar{C}} \cdot d(\bar{z})||^2$$

para incluir criterios de suavidad de las curvas de rendimiento y forward.



El requerimiento de ajuste se hace sobre la curva forward $f(u)$. En el caso de ZCB con $P(0, T_i) = \exp(-Y_i T_i)$ la minimización se realiza sobre:

$$\min_{f \in H} \left[\int_0^T (f'(u))^2 du + \alpha \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i T_i - \int_0^T f(u) du \right)^2 \right]$$

El parámetro α regula el balance entre suavidad y bondad del ajuste. Esta minimización tiene solución única f que es una spline de segundo orden.

Nelson-Siegel / Svensson

Funciones polinomicas-exponenciales de la forma ($x = T - t$ es el tiempo hasta la madurez)

$$\sigma(x) = p_1(x)\exp(-\alpha_1 x) + \ldots + p_n(x)\exp(-\alpha_n x)$$

donde $p_i(x)$ es un polinomio en x de grado i. En particular, la familia Nelson-Siegel tiene sólo cuatro parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$ y es usada por muchos bancos centrales para ajustar las curvas de tasa **forward instantánea**

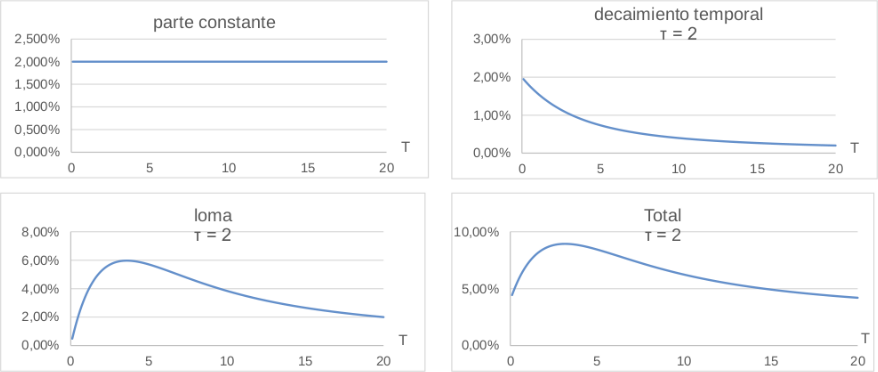
$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)\exp(-T/\tau_1)$$

Una variante con mayor flexibilidad (dos tiempos de decaimiento) es la curva de Svensson

$$\phi_S(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)\exp(-T/\tau_1) + \beta_3 T\exp(-T/\tau_2)$$

Nelson-Siegel

$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)\exp(-T/\tau_1)$$



¿Cómo obtenemos la curva de **tasa spot**?

Nelson-Siegel

Usando la relación recién encontrada

$$f(t;T) = R(t,T) + \frac{dR(t,T)}{dT}(T-t)$$

y la curva Nelson-Siegel para la tasa forward

$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)\exp(-T/\tau_1)$$

el posible hallar la tasa spot Nelson-Siegel

$$r_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\tau_1}{T}\left(1 - \exp(-T/\tau_1)\right) - \beta_2 \exp(-T/\tau_1)$$

Metodologías de Bancos Centrales

Table 1

The term structure of interest rates - estimation details

Central bank	Estimation method	Minimised error	Shortest maturity in estimation	Adjustments for tax distortions	Relevant maturity spectrum
Belgium	Svensson or Nelson-Siegel	Weighted prices	Treasury certificates: > few days Bonds: > one year	No	Couple of days to 16 years
Canada	Merrill Lynch Exponential Spline	Weighted prices	Bills: 1 to 12 months Bonds: > 12 months	Effectively by excluding bonds	3 months to 30 years
Finland	Nelson-Siegel	Weighted prices	≥ 1 day	No	1 to 12 years
France	Svensson or Nelson-Siegel	Weighted prices	Treasury bills: all Treasury Notes: : ≥ 1 month Bonds: : ≥ 1 year	No	Up to 10 years
Germany	Svensson	Yields	> 3 months	No	1 to 10 years
Italy	Nelson-Siegel	Weighted prices	Money market rates: O/N and Libor rates from 1 to 12 months Bonds: > 1 year	No	Up to 30 years Up to 10 years (before February 2002)
Japan	Smoothing splines	Prices	≥ 1 day	Effectively by price adjustments for bills	1 to 10 years
Norway	Svensson	Yields	Money market rates: > 30 days Bonds: > 2 years	No	Up to 10 years
Spain	Svensson	Weighted prices	≥ 1 day	Yes	Up to 10 years
	Nelson-Siegel (before 1995)	Prices	≥ 1 day	No	Up to 10 years
Sweden	Smoothing splines and Svensson	Yields	≥ 1 day	No	Up to 10 years
Switzerland	Svensson	Yields	Money market rates: ≥ 1 day Bonds: ≥ 1 year	No	1 to 30 years

Table 1 cont

The term structure of interest rates - estimation details

Central bank	Estimation method	Minimised error	Shortest maturity in estimation	Adjustments for tax distortions	Relevant maturity spectrum
United Kingdom[1]	VRP (government nominal)	Yields	1 week (GC repo yield)	No	Up to around 30 years
	VRP (government real/implied inflation)	Yields	1.4 years	No	Up to around 30 years
	VRP (bank liability curve)	Yields	1 week	No	Up to around 30 years
United States	Smoothing splines (two curves)	Bills: weighted prices	–	No	Up to 1 year
		Bonds: prices	≥ 30 days	No	1 to 10 years

[1] The United Kingdom used the Svensson method between January 1982 and April 1998.

https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap25.htm


inp_array));
-1 < b && a.splice
use_array(a, b) {
(a, b) { for (var c
for (var c = -1, d
dynamicSort(a) {
d[a] ? -1 : c[a] > d[a]
a.length + 1;
} else {

Coding Time