Quant Finance 2

Manuel Maurette

Clase 2: Opciones

Programa de Finanzas Cuantitativas QUANt

UNIVERSIDAD DEL CEMA MCMLXXVIII
UCEMA

Opciones

Definición

Una **opción** es un contrato que le da al dueño el **derecho**, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el **activo subyacente** por un precio determinado, llamado también **precio de ejercicio** en un tiempo en el futuro, llamada la **fecha de expiración**. Una opción ***call*** da al dueño el derecho a comprar y una ***put***, el derecho a vender.

Jerga en ingles – lenguaje en el que encontrarán la mayoría de la bib.:

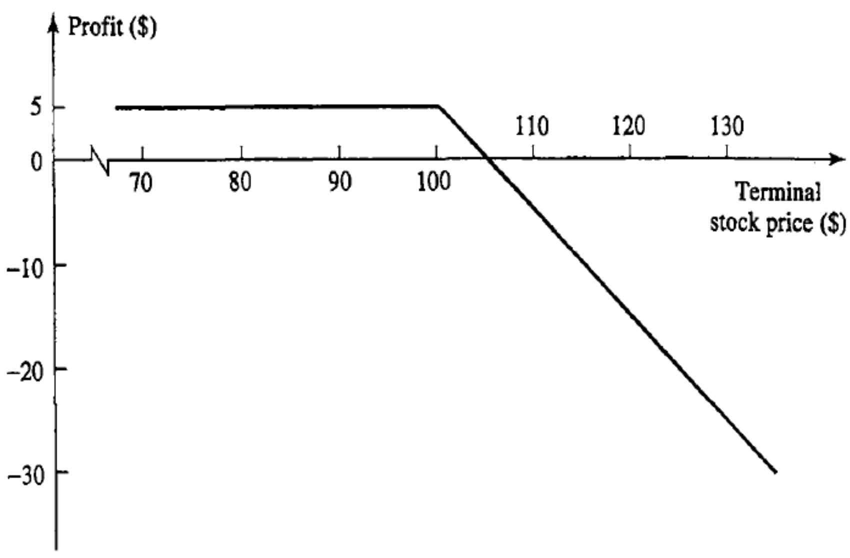
- Activo subyacente – *Underlying asset*
- Precio de ejercicio – *Strike Price*
- Fecha de expiración – *Expiry/Maturity*

Posiciones de una opción (1/2)

Para cada contrato de opciones hay dos patas:

- Posición ***LONG***: Compro la opción
- Posición ***SHORT***: Vendo o *escribo* la opción

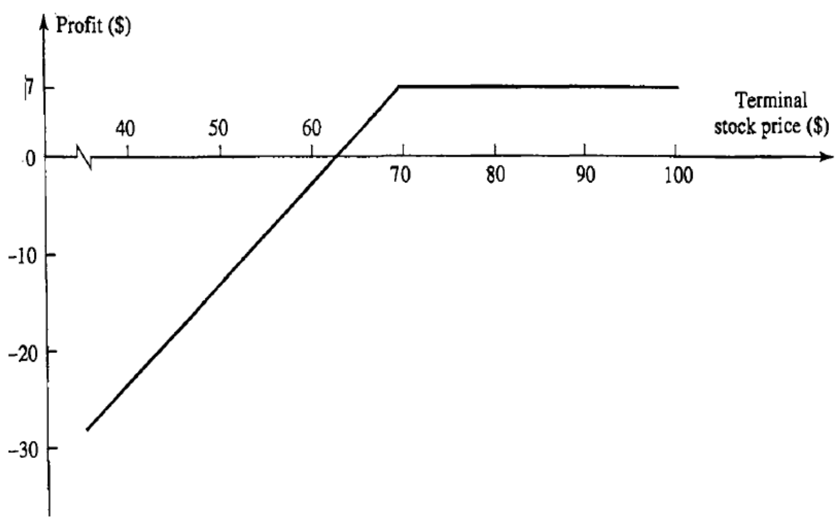
Por ejemplo, el que escribió la opción recibe dinero *up-front*, pero tiene **potenciales riesgos**. Veamos el grafico de la ganancia del vendedor de la opción (escritor) con respecto al precio final del activo subyacente:



Ganancia luego de escribir una opción europea *call* .
Precio de la opción = 5$
Precio de ejercicio = 100$
El escritor del *call* podría estar *long* el activo y se necesitaría cubrir ante una bajada del mismo

Posiciones de una opción (2/2)

El escritor de una *put* Europea, en cambio también recibe dinero *up-front*, pero tiene potenciales riesgos (de diferente naturaleza que el escritor del *call*). Veamos el grafico de la **ganancia del vendedor de la *put*** (escritor) con respecto al precio final del activo



Ganancia luego de escribir una opción europea *put*.

Precio de la opción = 7$
Precio de ejercicio = 70$

El escritor del *put* podría estar SHORT el activo y se necesitaría cubrir ante una subida del mismo

Payoffs (1/3)

Hay **4 posiciones** básicas con opciones:

- *Long* en un *call*
- *Long en un put*
- *Short en un call*
- *Short en un put*

Pensemos por un momento **por que** un inversor tomaría alguna de las posiciones anteriores

Payoffs (2/3)

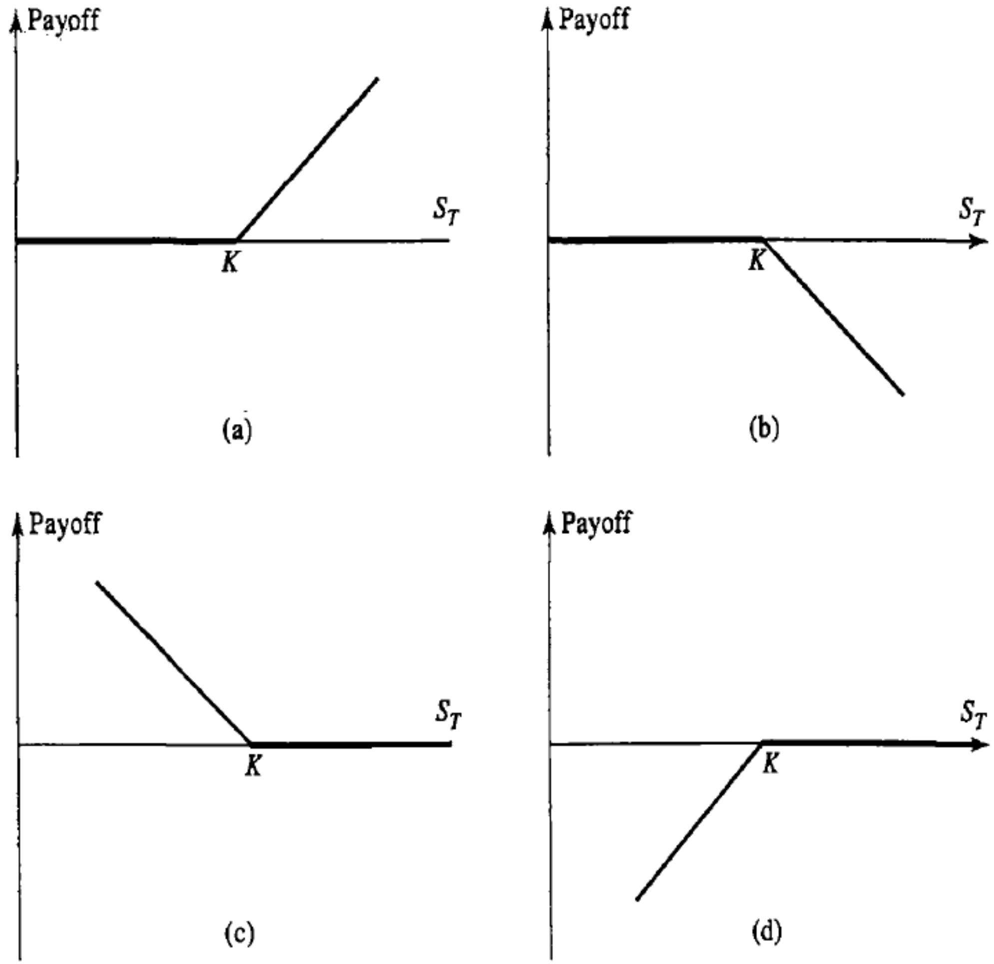
Veamos el *payoff* de cada una de estas posiciones:

- *Long* en un *CALL*: $\max(S(T) - K, 0)$
- *Long* en un *PUT*: $\max(K - S(T), 0)$
- *Short* en un *CALL*: $-\max(S(T) - K, 0)$
- *Short* en un *PUT*: $-\max(K - S(T), 0)$

Veamos los **gráficos de los 4 *payoffs***

Payoffs (3/3)

Veamos el *payoff* de cada una de estas posiciones:



a) *Long CALL*

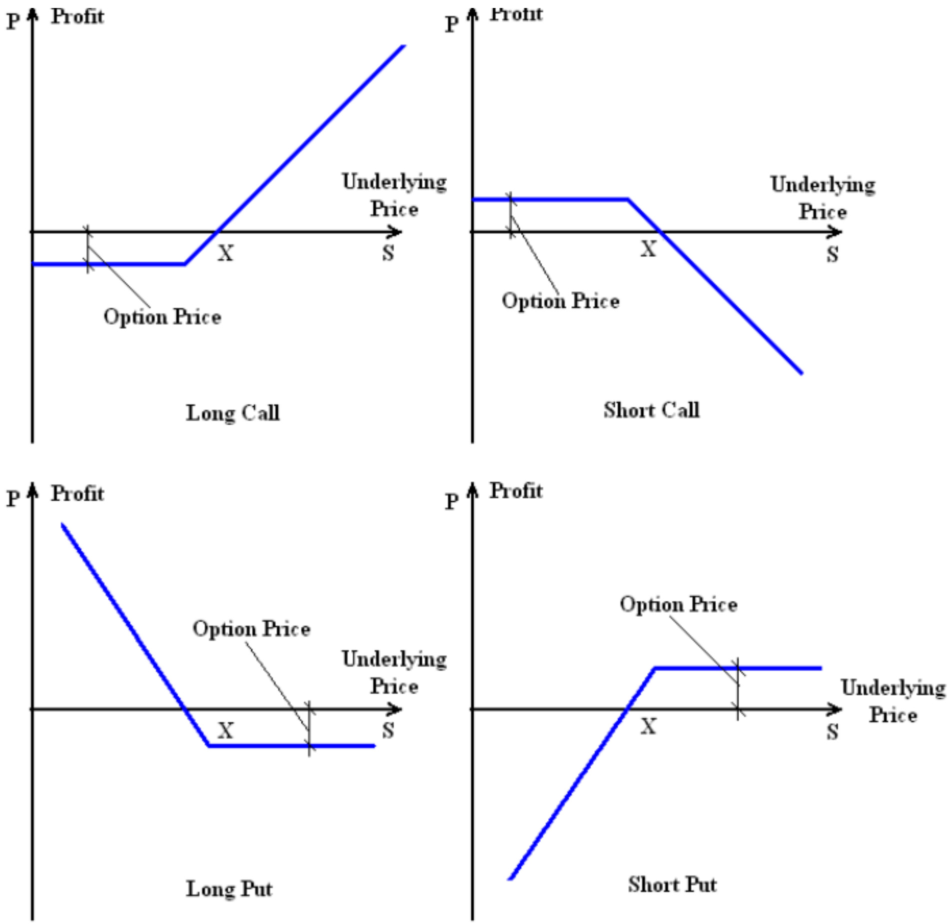
b) *Short CALL*

c) *Long PUT*

d) *Short PUT*

PnL

Veamos por ultimo el ***Profit & Loss*** de cada una de estas posiciones:



a) Long CALL

b) Short CALL

c) Long PUT

d) Short PUT

Valor Intrínseco de una Opción

- El **valor intrínseco (*VI*)** de una opción es la diferencia entre el precio del activo subyacente en el mercado y el precio de ejercicio
- El VI es siempre positivo. Si la diferencia entre precios es negativa, el VI es 0
- Al vencimiento, el VI es el valor de la opción (*payoff*)

- Ej: Para un *call long*: $VI_C(t) = S(t) - K$

- Ej: Para un *put long*: $VI_P(t) = K - S(t)$

- Se habla también de **valor temporal** de la opción:

$$Prima \ = \ Valor\ intrínseco \ + \ Valor\ Temporal$$

Grado de dinero *Moneyness* de una opción

El ***moneyness*** es una medida del grado en que un derivado financiero es probable que tenga un valor positivo en su fecha de expiración:

- En el dinero – *At the money* (***ATM***): si su precio de ejercicio (*strike price*), es el *mismo* que el precio del subyacente sobre el que la opción está basada
- Fuera del dinero – *Out of the money* (***OTM***): si no tiene valor intrínseco; Ej: una opción *call* para la que el precio del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio de la opción.
- Dentro del dinero – *In the money* (***ITM***): si tiene valor intrínseco; Ej: una opción *call* para la que el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio de la opción.

Cuando compramos opciones

- El tiempo empieza a ser el enemigo

- Pérdida acotada por la prima (precio) que pagamos la opción

- Ganancias **ilimitadas** en el caso del *call*

- Ganancias **limitadas** en el caso del *put*

Precio de una Opción

El precio de mercado de una opción liquida negociada en un Exchange antes de expiración está determinado, como cualquier otro activo líquido, por **oferta y demanda.**

Cuando las opciones no son líquidas. Por ejemplo opciones muy OTM o muy ITM (*Deep* ITM, *Deep* OTM), el precio suele derivar de un **modelo**. Clave en los mercados OTC.

La teoría formal detrás de la valuación de derivados se baja en la **ausencia de arbitraje**. Será crucial tenerlo en cuenta siempre.

Vamos a dedicarle una buena parte del curso a estudiar modelos de precios de prima de Opciones

El precio de una Opción NO depende de:

- Tasa de crecimiento esperada del precio de la acción (μ)
- Aversión al riesgo de los inversores
- Comparación de rendimiento contra otros activos (β)

El precio de una opción será unívocamente determinado por la ausencia de arbitraje.

El precio de una Opción SI depende de

- Precio *spot* (S)
- Precio de ejercicio (K)
- Tiempo a Expiración (T) (*Time to Maturity*)
- Volatilidad (σ)
- Tasa de interés libre de riesgo (r) (*Risk-free IR*)
- Dividendos (q)

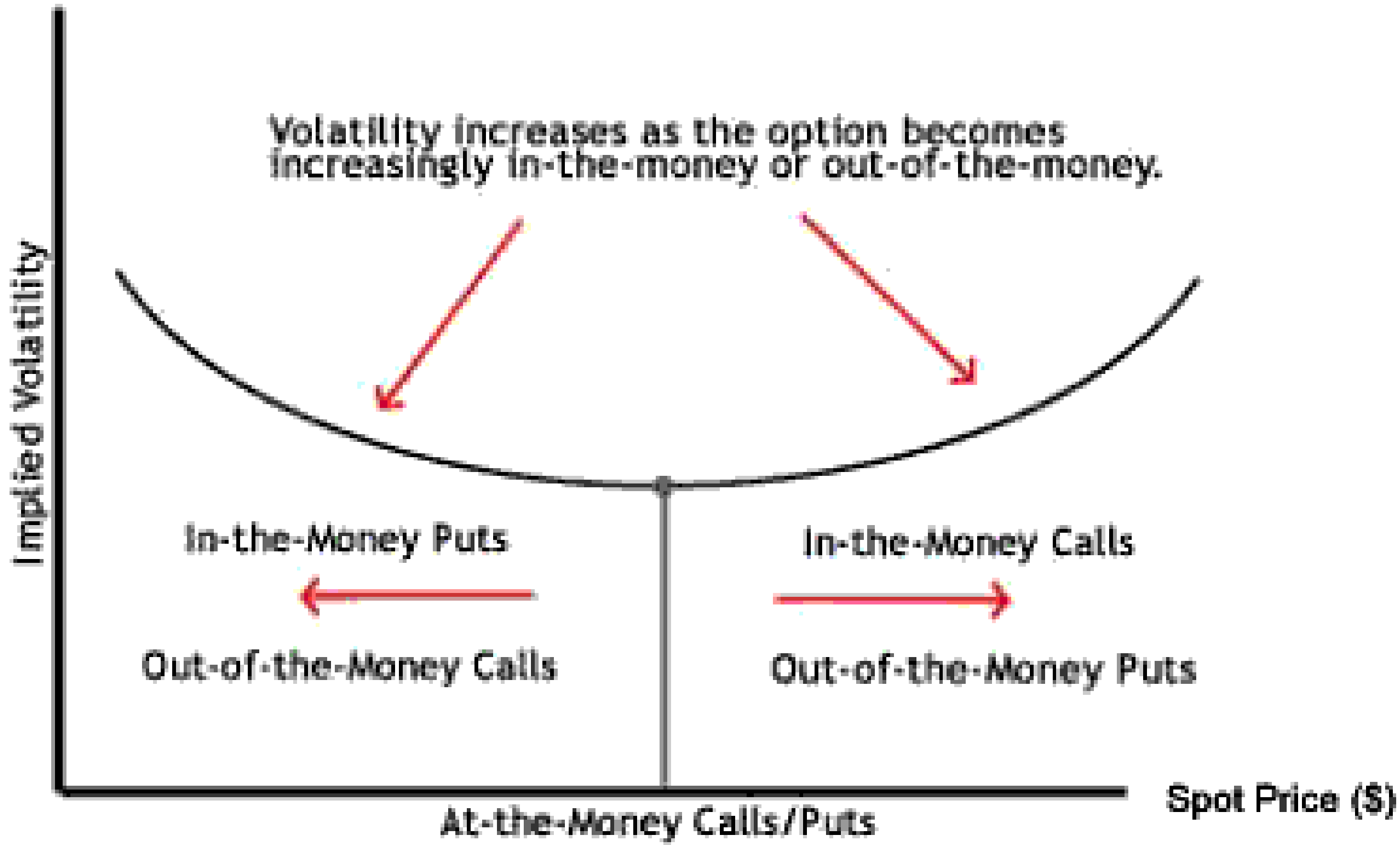
Sensibilidad del precio respecto a los parámetros

Opciones *Vanilla* Europeas		
Variable	*Call*	*Put*
S	$+$	$-$
K	$-$	$+$
T	?	?
σ	$+$	$+$
r	$+$	$-$
q	$-$	$+$

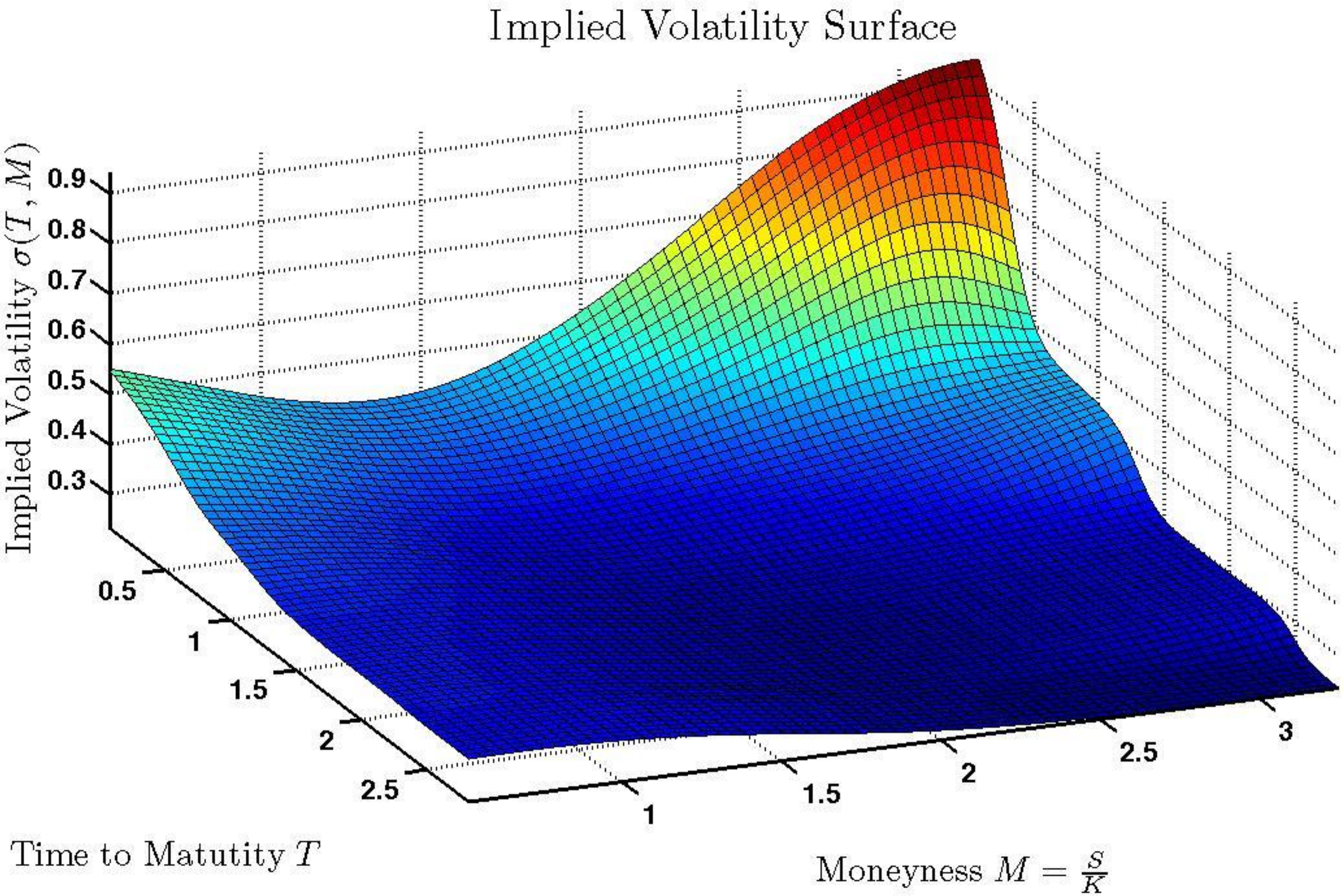
Volatilidad implícita

- La visión del mercado de lo que podría pasar con el precio de un activo en el futuro.
- Se considera usualmente como un ***proxy*** al riesgo de mercado
- Es un **factor determinante** a la hora de buscar el precio de una opción
- **No es lo mismo que la volatilidad histórica** – volatilidad realizada o volatilidad estadística
- Para cada K y T vamos a tener **distintas volatilidades** $\sigma(K,T)$

Sonrisa de volatilidad



Superficie de volatilidad



Volatilidad Implícita (cont)

Por definición, la volatilidad implícita es aquella que al ponerla en un modelo de precio, se obtiene el precio de mercado.

Es decir, suponiendo que tengo un modelo de precio de opciones:

$$\mathrm{V}(S_0, K, T, \sigma, r, q)$$

Si obvervo un precio V_M de mercado para una tupla (S_0, K, T, r, q), que son los parámetros 'conocidos' de una opción, entonces $\sigma_i$será la σ tal que se cumpla:

$$\mathrm{V}(S_0, K, T, \sigma_i, r, q) = V_M$$

Esto no es mas que una ecuación (no lineal)

Volatilidad Implícita (cont)

Obtener volatilidades implícitas requerirá de lo siguiente:

- Elegir un modelo de precios de opciones (Black Scholes por ejemplo)

- Determinar los valores r y q ya sea con algún modelo o con evidencia empírica

- Elegir un método numérico para resolver la ecuación (método de bisección por ejemplo)

Opciones Americanas

- Una opción americana se define *casi* exactamente igual que una opción europea, con la diferencia que puede ser ejercida en cualquier momento de la vida de la opción.

- Notar que las denominaciones *americana* y *europea* nada tienen que ver con el origen de los activos. Es una nomenclatura para referirse al modo posible de ejercicio.

- Existen otras formas de ejercicio. Una bastante usada en el mundo de IR son las opciones de tipo bermuda, algo como un intermedio entre europeas y americanas – con fechas fijas en las que se puede ejercer.

Sensibilidad del precio respecto a los parámetros

	Europeas		Americanas	
Variable	C	P	C	P
S	+	−	+	−
K	−	+	−	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	−	+	−
q	−	+	−	+

Cotas importantes en opciones - notación

- Usaremos la siguiente notación (Hull)

  - S_0 := Precio actual del activo
  - S_T := Precio del activo a tiempo *T*
  - K := Precio de ejercicio
  - T := Tiempo de expiración
  - r := Tasa libre de riesgo
  - C := Precio de una *call* americana
  - P := Precio de una *put* americana
  - c := Precio de una *call* europea
  - p := Precio de una *put* europea

Cotas superiores (1/2)

No importa que pase, una opción *call* nunca puede valer más que el precio del activo subyacente

$$c \leq S_0; C \leq S_0$$

Si esto no sucediera, un arbitrador podría comprar una unidad del activo y vender una unidad de la opción y hacer ganancia sin riesgo.

Cotas superiores (2/2)

De la misma manera, una opción *put* nunca puede valer más que el precio de ejercicio

$$p \leq K; P \leq K$$

Para *put* europeas, a tiempo final la opción tampoco puede valer más que el ejercicio, trayendo el tiempo al origen obtenemos:

$$p \leq Ke^{-rT}$$

Cotas inferiores (1/2)

Una opción *call* europea que no paga dividendos, tiene la siguiente cota inferior:

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Construyamos dos portafolios:

Portafolio A: Una opción *call* europea y Ke^{-rT} unidades de dinero

Portafolio B: Una unidad del activo *S*

Veamos los *payoffs*:

$P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$, $P_B(T) = S(T)$

Con lo cual se tiene que $P_A(T) \geq P_B(T)$ lo que implica que la relación es cierta en todo tiempo, en particular al origen: $P_A(0) \geq P_B(0)$:

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

Cotas inferiores (2/2)

Una opción *put* europea que no paga dividendos, tiene la siguiente cota inferior:

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Construyamos dos portafolios:

Portafolio C: Una opción *put* europea y una unidad del activo *S*

Portafolio D: Ke^{-rT} unidades de dinero

Veamos los *payoffs*:

$P_{\mathrm{C}}(\mathrm{T}) = \max(K - S(T), 0) + S(T) = \max(S(T), K)$, $P_D(T) = K$

Con lo cual se tiene que $P_C(T) \geq P_D(T)$, entonces la relación es cierta en todo tiempo, en particular en 0: $P_C(0) \geq P_D(0)$:

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

No arbitraje

- Un resultado que vamos a usar mucho es el siguiente:

Si NO existen posibilidades de arbitraje, entonces:

  - Si dos portafolios (A y B) valen lo mismo a vencimiento, es decir, tienen el mismo *payoff*.
  - Entonces A y B valen lo mismo en toda la vida de los activos.

- Matemáticamente:

$$P_A(T) = P_B(T) \rightarrow P_A(t) = P_B(t), \text{para todo } t$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (1/2)

- Suponiendo conocido el precio de una Opción *call* Europea, veamos un **argumento de no arbitraje** para deducir el precio de un *put* Europeo (mismo *underlying*, *strike* y *maturity*)
- Sean los siguientes dos portafolios:
  - Portafolio A: Una CALL más $Ke^{-r(T-t)}$ unidades de dinero
  - Portafolio B: Una PUT mas una unidad del activa subyacente
- Veamos el **valor de los portafolios** a tiempo final:

> $P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$
>
> $P_B(T) = \max(K - S(T), 0) + S(T) = \max(K, S(T))$

- Es decir, sus payoffs son idénticos: $P_A(T) = P_B(T)$
- El valor de los portafolios entonces tienen que ser idénticos en todo tiempo desde inicio hasta expiración.

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (2/2)

- En particular, **deben valer lo mismo al inicio**. Veamos cuanto valen al inicio:
    - $P_A(0) = C(0) + Ke^{-rT}$
    - $P_B(0) = P(0) + S(0)$
- Igualándolos, dado que **por no arbitraje deberían ser idénticos**:

$$P_A(0) = C(0) + Ke^{-rT} = P(0) + S(0) = P_B(0)$$

$$C(0) - P(0) = S(0) - Ke^{-rT}$$

- Esta relación es conocida como la **paridad *Put-Call***. Notar que es válida para todo momento de la vida de las opciones:

$$C(t) - P(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

Relaciones entre Europeas y Americanas (1/2)

Dado que las opciones americanas tienen más *opcionalidad*… *derecho*, intuitivamente tenemos las siguientes dos relaciones:

$$c \leq C$$

$$y$$

$$p \leq P$$

Lo que NO es intuitivo, es que en el caso de las *call* que no paguen dividendos, también se puede ver que:

$$c \geq C$$

Es decir, NUNCA es óptimo ejercer la opción antes de vencimiento.

Con lo cual, $c = C$, y el precio de las dos opciones es igual

Call americano sin dividendos (1/2)

Veamos esto último:

"NUNCA es óptimo ejercer la *call* americana antes de vencimiento"

Ya vimos (Cotas Inferiores) que $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$, como $C \geq c$:

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Asumiendo $r > 0$, lo anterior dice que siempre que $T > 0,$:

$$rT > 0 \rightarrow -rT < 0 \rightarrow e^{-rT} < 1 \rightarrow -e^{-rT} > -1 \rightarrow -Ke^{-rT} > -K$$

$$C > S_0 - K$$

Put americano sin dividendos

- El valor de ejercicio de una opción de venta es $K - S(T)$. En una opción put europea
- Este valor no puede capturarse hasta el vencimiento.
- Antes del vencimiento, el valor de la opción de venta europea será una función del valor presente de lo que este ejercicio genera: $e^{-r(T-t)}(K - S(t))$.
- El *put* americano da acceso inmediato en cualquier momento a $K - \ S$, a través del ejercicio.
- En ciertas circunstancias, especialmente en los posiciones muy Deep ITM, con el tiempo restante hasta la expiración, este diferencial en las condiciones de ejercicio puede dar al *put* americano un valor extra sobre el *put* europea correspondiente, incluso en ausencia de dividendos.

Otras relaciones *PutCall*

- Americanas que no pagan dividendos:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

- Europeas que pagan dividendos:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

- Americanas que pagan dividendos:

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Otras relaciones *PutCall* - Binarias

- Opciones Binarias-Digitales:

Una opción Binaria-Digital funciona de manera similar a una opción europea pero con los siguiente *payoff:*

$$CD_L\ (T) = I_{\{S(T)>K\}}$$
$$PD_L\ (T) = I_{\{S(T)<K\}}$$

Encontrar una relación de *PutCall* para este tipo de opciones

Opciones Exóticas (y no tanto) (1/2)

- Ejercicio:
  - Europea – Solo en tiempo de ejercicio
  - Bermuda – En tiempos predefinidos
  - Americana – En cualquier momento

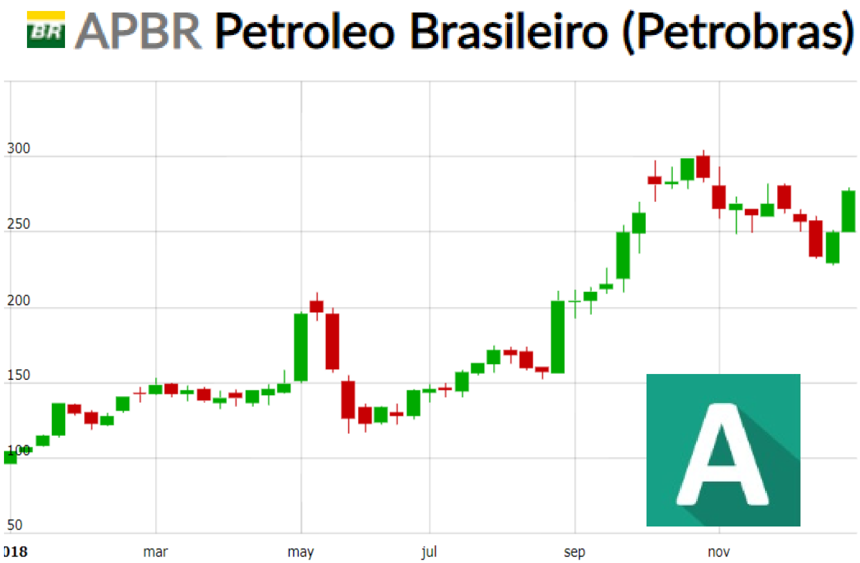
- Dependen del camino:
  - Asiaticas: $Asia_C = \max(\sum w_i S(t_i) - K), 0)$
  - Barreras: Se prenden o apagan cuando S toca valores predeterminados
  - Ventanas: Similares a las barreras pero se activin solo en tiempos determinados

Opciones Exóticas (y no tanto) (2/2)

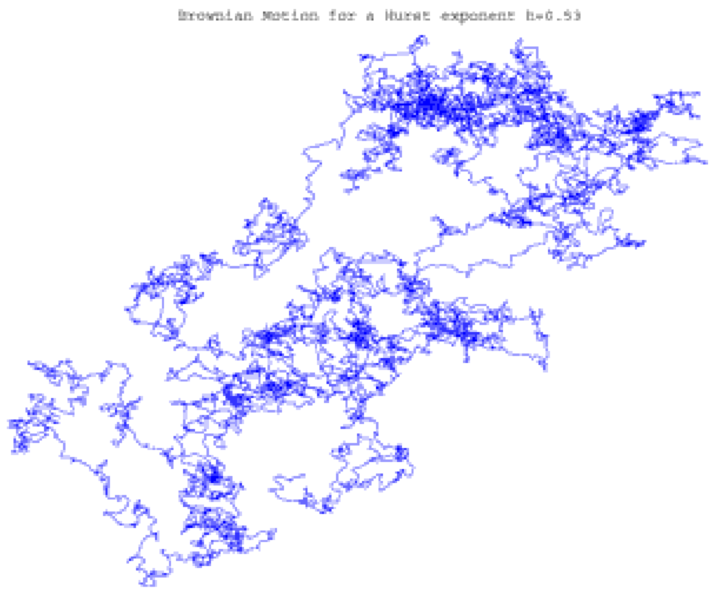
- Baskets: Dependen de mas de un subyacente
- Spread: Dependen de la diferencia entre dos subyacentes

- Opciones sobre otro tipo de subyacente:
  - IRP: en bonos, en futuros de bonos, en swaps (*Swaptions)*
  - Commodities:
  - Indices
  - CDSs

¿Cómo se comportan los activos financieros?



¿En dónde mas se ven estos comportamientos?



1828 El botánico ***Robert Brown*** reporta que granos de polen suspendidos en una cierta sustancia vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable.

Movimiento Browniano

- 1900 ***Louis Bachelier*** publica su tesis doctoral en matemáticas: Teoría de la especulación, en la que utiliza el movimiento browniano para modelar activos financieros.
- 1905 ***Albert Einstein*** explica el movimiento browniano como múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen.
- 1923 ***Norbert Wiener*** formaliza matemáticamente el movimiento browniano.
- 1973 El matemático ***Fisher Black*** y el economista ***Myron Scholes*** publican su trabajo sobre precios de opciones, y junto con el economista ***Robert Merton***, logran dar una formula cerrada para el precio justo de estos contratos.
- 1997 Ganaron el premio NOBEL de economía

De aquí…matemáticos y físicos en Finanzas

- **80s-90s**: grandes entidades financieras Bancos, fondos de inversión, y otras buscan a los mejores promedios de las mejores universidades - Época de Oro *Quant*
- **2000s**: Se estandariza la industria, todos los equipos tienen matemáticos. Surge el poder de las computadoras. Nuevos instrumentos complejos – CRISIS económica mundial 2007-2009
- **2010s**: Se dirigen todos los esfuerzos a el manejo de riesgo, para evitar que vuelva a pasar. Sigue creciendo la interacción con la computación. Todo *quant* necesita saber programar.
- **Hoy**: Camino natural en el mundo pasar por matemática para terminar en finanzas. La informatización es plena. Casi que igual de importante saber informática-programación que matemática. Nuevas carreras Ingeniero Financiero, Finanzas Matemáticas, etc

Ej. de modelo para el precio de una opción

Precio = $\mathbf{C(S, K, T, r, \boldsymbol{\sigma})}$

- $\boldsymbol{S}$ = Precio del activo hoy
- $\mathbf{K}$ = Precio determinado
- $\mathbf{T}$ = Tiempo de expiración del contrato
- $\boldsymbol{r}$ = *Tasa de descuento***
- $\boldsymbol{\sigma}$ = *Volatilidad del activo***

Teorema (Fórmula de Black-Scholes)

Bajo ciertas hipótesis, el precio de una opción de compra es la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S, T) = (S - K)^+$$

Esta rama de las matemáticas aplicadas se denomina **Finanzas Cuantitativas (*Quant Finance*)**

Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

- Fórmulas Cerradas / Aproximaciones analíticas
- Modelos de árboles (*lattices*)
- Modelos de Ecuaciones Diferenciales
- Montecarlo
- Ad-hoc

Finanzas Cuantitativas en Argentina

- **Universitario**: Hay gente investigando estos temas, posgrados, maestrías… mucho camino por recorrer

- **Mercado Local**: aun algo reacio, el mercado esta incorporando *quants* en sus equipos de riesgo.

- **Empresas extranjeras** : Mantienen el estándar mundial, buscan gente muy capacitada y formada. Algunos ejemplos:

Obtener los paneles como *dataframes*

- La idea del ejercicio es obtener paneles ‘limpios’ con la información necesaria para poder buscar sensibilidades y generar estrategias

- BYMA (rava) – El lunes pasado

- NYSE (api yahoo) – Hoy

Para el interesado

- Otras formas para obtener lo mismo
- ROFEX?
- Otros paneles?
- Integrarlos?

Panel de GGAL en Yahoo Finances

https://finance.yahoo.com/quote/GGAL/options/

August 21, 2020 | In The Money | Show: **List** | Straddle | Option Lookup

Calls for August 21, 2020

Contract Name	Last Trade Date	Strike	Last Price	Bid	Ask	Change	% Change	Volume	Open Interest	Implied Volatility
GGAL200821C00005000	2020-07-21 12:32PM EDT	5.00	6.30	7.00	7.50	0.00	-	10	3	217.19%
GGAL200821C00007500	2020-07-22 2:19PM EDT	7.50	4.50	4.50	5.10	+0.60	+15.38%	2	27	150.39%
GGAL200821C00010000	2020-07-22 3:00PM EDT	10.00	2.50	2.30	2.60	+0.50	+25.00%	60	1,464	60.94%
GGAL200821C00012500	2020-07-22 3:05PM EDT	12.50	0.96	0.95	1.00	+0.36	+60.00%	430	1,856	73.24%
GGAL200821C00015000	2020-07-22 3:04PM EDT	15.00	0.35	0.25	0.35	+0.15	+75.00%	280	833	75.00%
GGAL200821C00017500	2020-07-21 3:33PM EDT	17.50	0.08	0.05	0.10	0.00	-	10	1,221	75.00%
GGAL200821C00020000	2020-07-07 9:30AM EDT	20.00	0.15	0.00	0.10	0.00	-	-	1	89.06%

Puts for August 21, 2020

Contract Name	Last Trade Date	Strike	Last Price	Bid	Ask	Change	% Change	Volume	Open Interest	Implied Volatility
GGAL200821P00005000	2020-07-13 9:39AM EDT	5.00	0.05	0.00	0.10	0.00	-	1	101	168.75%
GGAL200821P00007500	2020-07-15 3:55PM EDT	7.50	0.10	0.00	0.10	0.00	-	38	257	100.00%
GGAL200821P00010000	2020-07-22 1:39PM EDT	10.00	0.32	0.30	0.35	-0.13	-28.89%	222	3,569	87.50%
GGAL200821P00012500	2020-07-22 2:50PM EDT	12.50	1.25	1.20	1.30	-0.50	-28.57%	161	1,117	80.96%

Panel limpio de un ticker

panel_opciones_GGAL_nyse - DataFrame

Index	Especie	Ticker	Spot	CallPut	Strike	TTM	Last	Moneyness
0	GGAL200821C00005000	GGAL	12.34	C	5	30	6.3	2.468
41	GGAL200821P00005000	GGAL	12.34	P	5	30	0.05	2.468
1	GGAL200821C00007500	GGAL	12.34	C	7.5	30	4.5	1.64533
42	GGAL200821P00007500	GGAL	12.34	P	7.5	30	0.1	1.64533
2	GGAL200821C00010000	GGAL	12.34	C	10	30	2.6	1.234
43	GGAL200821P00010000	GGAL	12.34	P	10	30	0.32	1.234
3	GGAL200821C00012500	GGAL	12.34	C	12.5	30	0.96	0.9872
44	GGAL200821P00012500	GGAL	12.34	P	12.5	30	1.25	0.9872
4	GGAL200821C00015000	GGAL	12.34	C	15	30	0.35	0.822667
5	GGAL200821C00017500	GGAL	12.34	C	17.5	30	0.08	0.705143
6	GGAL200821C00020000	GGAL	12.34	C	20	30	0.15	0.617
45	GGAL200918P00010000	GGAL	12.34	P	10	58	0.62	1.234
7	GGAL200918C00012500	GGAL	12.34	C	12.5	58	1.3	0.9872
8	GGAL201016C00002500	GGAL	12.34	C	2.5	86	6.5	4.936
46	GGAL201016P00002500	GGAL	12.34	P	2.5	86	0.15	4.936