Productos de Renta Fija y Tasas de Interés

Hernán Reisin

QUANt UCEMA 2020
2020, Buenos Aires

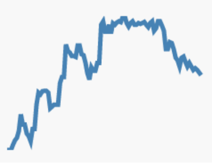
Estimación de la Term-Structure

Repaso ¿qué era la T-S?

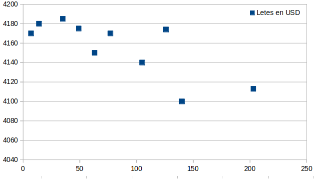
LETES EN USD | LETES EN PESOS

ESPECIE	PLAZO	ULT. OPERADO
U13S9	Inmediata	$ 4.150,00
U15N9	Inmediata	$ 4.174,00
U16G9	Inmediata	$ 4.185,00
U19L9	Inmediata	$ 4.170,00
U25O9	Inmediata	$ 4.140,00
U26L9	Inmediata	$ 4.180,00
U27S9	Inmediata	$ 4.170,00
U29N9	Inmediata	$ 4.100,00

$t \to P(t,T)$ para U13S9, T=13/9/2019



$T \to P(t,T)$ Term-structure de precios LETES en USD al 12 Julio 2019



- $t \to P(t,T)$ es un proceso estocástico, el precio futuro de un bono es incierto.
- $T \to P(t,T)$ es la *term-structure* de precios de ZCBs. Es una curva "suave" en maturity T. Se denomina también como **curva de descuento**

Term structure

- Una *term-structure* (estructura temporal) es una función que relaciona cierta variable financiera a su *maturity*. Por ejemplo la term-structure de precios de ZCB o curva de descuento[1]
$$T \longrightarrow P_{ZCB}(t;T)$$
- La term-structure de tasas de interés es un objecto de alta dimensionalidad y no es directamente observable
$$T_i \longrightarrow R(t;T_i)$$
- Precisamos la curva zero para poder descontar flujos futuros, ergo valuación

$$P(t,T) = NPV(\$1 \text{ pagado en t=T})$$

$$\pi(t) = P(t,T_1)c_1 + P(t,T_2)c_2 + \ldots + {\color{red}P(t,T_i)}c_i + \ldots + P(t,T_n)c_n$$

- Para valuar caps y swaptions se puede modelar la T-S de tasas de interés para un conjunto de plazos. Sin embargo para derivados más exóticos cuyos cash flows no coincidan con el conjunto de plazos modelados es preciso interpolar la T-S.

[1] Post crisis 2008 se descuenta a la OIS

Term structure

- En contextos teóricos se supone que la term-structure es válida para un contínuo de plazos T, e.g. la curva zero o la curva forward

$$
\begin{aligned}
T &\longrightarrow R(t;T), \\
T &\longrightarrow f(t;T) = \lim_{\epsilon \to 0} F(t;T;T+\epsilon)
\end{aligned}
$$

- Esto es una aproximación de la realidad que posee solo un conjunto finito de contizaciones.
- Veremos métodos exactos sobre los puntos de mercado, y estimaciones que capturen la información de mercado pero resulten en curvas suaves (estimación paramétrica).

Bootstrapping

Bootstrapping

- Es un método de extracción iterativo para ajustar a la term-structure del mercado.
- Es la estimación de la T-S más usada en los desks de trading.
- Se utilizan datos de mercado de varios instrumentos que permiten cubrir un rango amplio del espacio de tenors.
- El objetivo es obtener la curva zero $T \longrightarrow P(t_0; T)$ a partir de cotizaciones de mercado.

Bootstrapping - caso sencillo

Table 4.3 Data for bootstrap method.

Bond principal (*$*)	*Time to maturity* (*years*)	*Annual coupon** (*$*)	*Bond price* (*$*)
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6

* Half the stated coupon is assumed to be paid every 6 months.

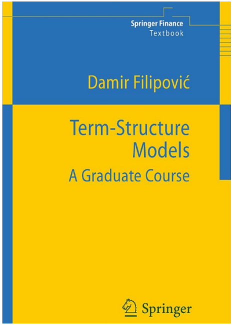
- La tasa contínua a 3 meses se obtiene de $97{,}5 = 100\exp(-r_{3m} \times 0{,}25) \longrightarrow r_{3m} = 10{,}127\,\%$
- La tasa contínua a 6 meses se obtiene de $94{,}9 = 100\exp(-r_{6m} \times 0{,}50) \longrightarrow r_{6m} = 10{,}469\,\%$
- La tasa contínua a 6 meses se obtiene de $90{,}0 = 100\exp(-r_{1y} \times 1{,}0) \longrightarrow r_{1y} = 10{,}536\,\%$
- El bono que expira a los $T = 1{,}5y$ tiene los siguientes pagos: $4 a los 6m, $4 al 1y, $104 a 1.5y
  $96 = 4\exp(-r_{6m} \times 0{,}5) + 4\exp(-r_{1y} \times 1{,}0) + 104\exp(-r_{1,5y} \times 1{,}5) \longrightarrow$ $r_{1,5y} = 10{,}681\,\%$ es la única consistente con las tasas a 6m y a 1y.
- Iterativamente se resuelven las tasas cero implícitas a partir de bonos con cupones.

Bootstrapping

El objetivo es obtener la curva zero $T \longrightarrow P(t_0; T)$ a partir de cotizaciones de mercado.

LIBOR (%)		Futuros		Swaps (%)	
O/N	0.49	20 Mar 1996	99.34	2y	1.14
1s	0.5	19 Jun 1996	99.25	3y	1.60
1m	0.53	18 Set 1996	99.10	4y	2.04
2m	0.55	18 Dic 1996	98.90	5y	2.43
3m	0.56			7y	3.01
				10y	3.36

Cuadro: Datos de ¥ al 9 de Enero 1996



La curva de Tasa Swap

> a swap can be decomposed into a portfolio of bonds (as we see shortly) and so its value is not open to question if we are given the yield curve. However, in practice the calculation goes the other way. The swaps market is so liquid, at so many maturities, that it is the prices of swaps that drive the prices of bonds. The fixed leg of a **par swap** (having no value) is determined by the market.

Wilmott

Par Swap Rate

Al entrar a un swap éste vale 0 que resultaba de fijar la tasa de la pata fija...

$$K\big|_{\Pi_{IRS(t_0)}=0} \equiv R^*(t_0) = \left.\frac{IRS_{float}(t;\mathbf{T},\mathbf{L})}{NA_c(t;\mathbf{S})}\right|_{t=t_0}$$

La curva swap es la T-S bootstrapeada de los par swap rates

$$T \longrightarrow S(t;T), \qquad \text{(no es } T \rightarrow R^*(t;T))$$

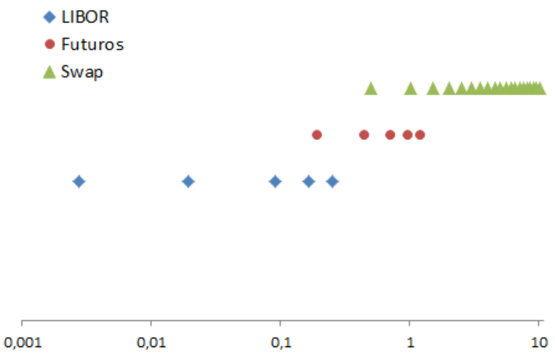
La diferencia entre la curva swap y la yield curve es el swap spread

$$T \longrightarrow S(t;T) - y(t,T),$$

Bootstrapping

LIBOR (%)		Futuros		Swaps (%)	
O/N	0.49	20 Mar 1996	99.34	2y	1.14
1s	0.5	19 Jun 1996	99.25	3y	1.60
1m	0.53	18 Set 1996	99.10	4y	2.04
2m	0.55	18 Dic 1996	98.90	5y	2.43
3m	0.56			7y	3.01
				10y	3.36

Cuadro: Datos de ¥ al 9 de Enero 1996



Notación: $\{S_i\}$ maturities de tasas LIBOR; $\{T_i\}$ maturities de futuros; $\{U_i\}$ maturities de swaps.

Bootstrapping

1. Las tasas LIBOR son tasas spot de composición simple, por lo tanto la del ZCB es inmediata (a menos de un ajuste de dcc)

$$P(t_0, T_i) = \frac{1}{1 + \tau_{[act/360](t_0, T_i)} F(t_0; T_i)}$$

2. Los precios de los Futuros se reportan

$$V_{Fut}(t_0, T_i) = 100\,[1 - F_F(t_0; T_i, T_{i+1})]$$

donde la tasa Futuros F_F puede tratarse como una tasa forward de composición simple (hay una diferencia no trivial)

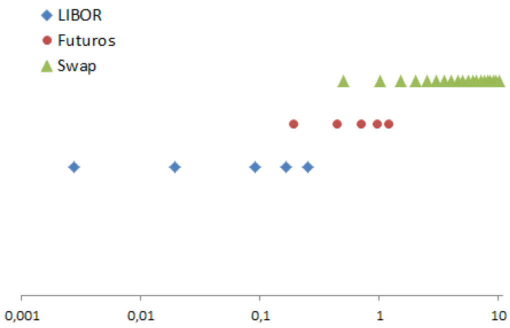
$$F_F(t_0; T_i, T_{i+1}) \approx F(t_0; T_i, T_{i+1})$$

Con esta relación los valores de los ZCBs se consiguen en forma recursiva a partir de

$$P(t_0, T_{i+1}) = \frac{P(t_0, T_i)}{1 + \tau_{(T_i, T_{i+1})} F_F(t_0; T_i, T_{i+1})}$$

Bootstrapping

La búsqueda por recursividad requiere conocer el primer elemento de la sucesión: $P(t_0, T_1)$.



Se utilizan los valores ya obtenidos a partir de LIBOR para interpolar $P(t_0, T_1)$. En la linea de maturities $S_4 < T_1 < S_5$, por lo tanto se puede interpolar geométricamente

$$P(t_0, T_1) = P(t_0, S_4)^{\frac{\tau(T_1, S_5)}{\tau(S_4, S_5)}} P(t_0, S_5)^{\frac{\tau(S_4, T_1)}{\tau(S_4, S_5)}}$$

Bootstrapping

3. En el caso de los swaps, los datos de mercado proveen *par swap rates* de 6 swaps a distinto plazo con vencimientos en 2y, 3y, 4y, 5y, 7y, y 10y.

   Todos estos swaps tiene el mismo spot 1 Enero 1996, y pagan semi-anual. Por lo tanto existen 20 fechas de pago entre todos los swaps contemplados.

   Por cada uno de estos pagos es posible encontrar el correspondiente ZCB asociado.

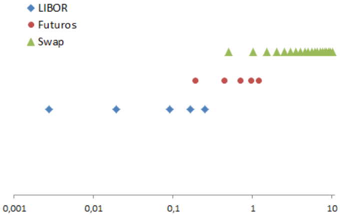
   Al igual que con los Futuros, es posible encontrar por recursión los ZBC. La fórmula del *par rate*

$$R^*(t_0, U_n) = \frac{1 - P(t_0, U_n)}{\sum_{i=1}^{n} \tau_{(U_{i-1}, U_i)} P(t_0, U_i)}$$

   puede despejarse

$$P(t_0, U_n) = \frac{1 - R^*(t_0, U_n) \sum_{i=1}^{n-1} \tau_{(U_{i-1}, U_i)} P(t_0, U_i)}{1 + R^*(t_0, U_n) \tau_{(U_{n-1}, U_n)}}$$

Bootstrapping



Los ZCB interpolables se obtienen del mismo modo que antes: interpolando los ZCB extraidos de los Futuros

$$P(t_0, U_1) = P(t_0, T_2)^{\frac{\tau(U_1, T_5)}{\tau(T_4, T_5)}} P(t_0, T_3)^{\frac{\tau(T_4, UT_1)}{\tau(T_4, T_5)}}$$

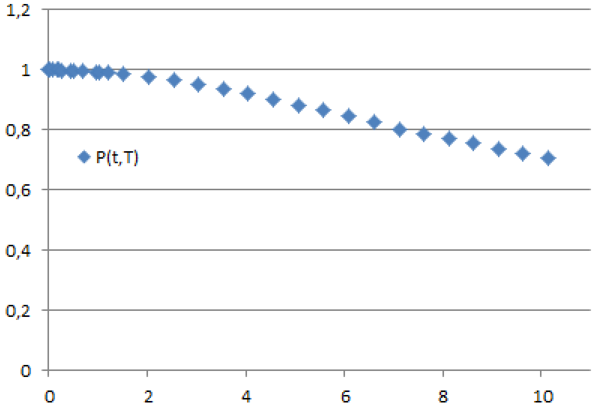
Las incognitas restantes son los par swap rates. Estos se obtienen por interpolación lineal de los valores cotizados en el mercado

$$R^*(t_0, U_j) = R^*(t_0, U_i)\frac{\tau\left(U_j, U_k\right)}{\tau\left(U_i, U_k\right)} + R^*(t_0, U_k)\frac{\tau\left(U_i, U_j\right)}{\tau\left(U_i, U_k\right)}$$

donde $U_i < U_j < U_k$

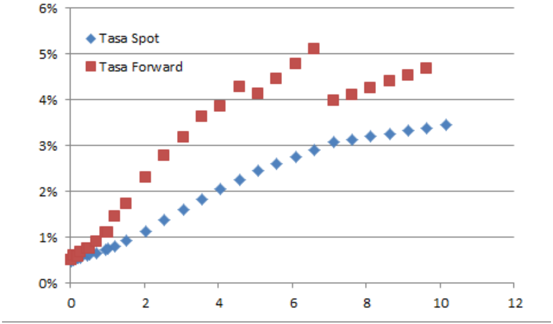
Excel Time

Bootstrap: Conclusiones (I)



- La curva de descuento $P(t, T)$ extraida es suave en apariencia.
- El método es exacto en el sentido que con las tasas obtenidas se reobtienen *exactamente* los mismos precios para los instrumentos utilizados.
- Las curvas obtenidas cubren el mismo espacio de tenors que los instrumentos utilizados para construirlas (e.g. o/n – 10y)

Bootstrap: Conclusiones (II)

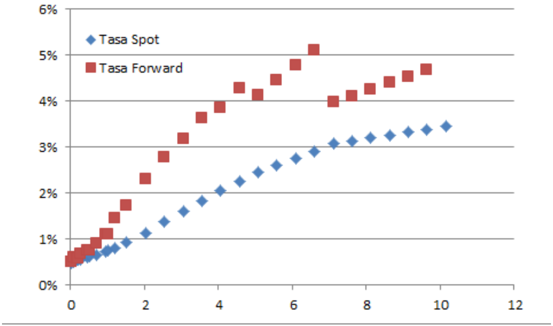


- La tasa spot y la tasa forward pueden obtenerse de la curva zero

$$R(t_0, T_i) = -\frac{\ln P(t_0, T_i)}{\tau\left(t_0, T_i\right)}$$

$$R(t_0, T_i, T_{i+1}) = -\frac{\ln P(t_0, T_{i+1}) - \ln P(t_0, T_i)}{\tau\left(T_i, T_{i+1}\right)}$$

Bootstrap: Conclusiones (III)



- La tasa forward presenta una forma de irregular en la parte larga. La forward bootstrapped es sensible a fluctuaciones de los quotes de mercado.
- La interpolación lineal de los R_{swap} es inapropiada para los forward rates implícitos. Tampoco es válido considerar semejantes la tasa de futuros y la curva forward, pues la última suele ser menor que la primera (ajuste por convexidad, $F = F_F + ajuste$).
- Las tres curvas resultantes de LIBOR, Futuros y Swaps no son consistentes con una única curva subyacente.

Estimación no-paramétrica

Generalidades de los Métodos No-Paramétricos

- Bootstrapping permite construir una term-structure de tasas (curva zero, spot y forward) extrayendo los factores de descuento $P(t;T)$ a partir de precios de mercado $p(t)$.
- En forma general encontrar la term-structure de precios de ZCB se puede formular como

$$\bar{p} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{d} + \bar{\delta} \tag{1}$$

  donde $\bar{p}$ es el vector de precios, $\bar{\bar{C}}$ es la matriz de cash flows, $\bar{d}$ es el vector de factores de descuento y $\bar{\delta}$ es un vector a minimizar.
- La minimización

$$\min_{d \in \mathcal{R}^n} ||\bar{p} - \bar{\bar{C}} \cdot \bar{d}||^2$$

  Suele estar mal definida.

Ejemplo

- Consideremos dos FRNs de maturities 10y y 20y. El primero con pago semestral los 15-Ene y 15-Jul, y el segundo con pagos anuales los 1-Ago

$$
p_1 = N_1 \sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)} D(T_i^{(1)})
$$

$$
p_2 = N_2 \sum_{j=1}^{m} c_j^{(2)} D(T_j^{(2)})
$$

En forma matricial este problema se escribe

$$
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c_1^{(2)} & 0 & 0 & c_1^{(2)} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(x_1) \\ D(x_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{2}
$$

En general la matriz de cash flows es rala y tiene muchísimas más columnas que filas, haciendo de este un sistema un problema indeterminado. Además, el conjunto del agregado de fechas disponibles $\{x_i\} = \{T_i^{(1)}\} \cup \{T_i^{(2)}\}$ es finito y por lo tanto no cubre la totalidad de fechas que podrían requerirse para valuar un instrumento genérico.

Estimación paramétrica
Interpolación y Optimización

Estimación paramétrica de la Term-Structure

Como vimos en los ejemplos de estimación no-paramétrica la valuación de derivados lineales se reduce a evaluar la función $P(t; T)$. Sin embargo siguiendo ese enfoque el número de fechas disponibles resulta acotado y la curva zero puede carecer de suavidad.

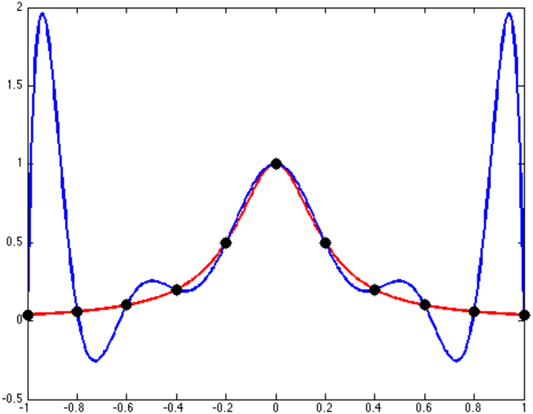
Una solución a estos inconvenientes se puede conseguir mediante la estimación paramétrica, que provee una estimación suave de la term-structure de tasas de interés con un número reducido de parámetros.

Para la estimación pueden usarse distintos tipos de familias.

1. Las familias de funciones lineales (polinomios, polinomios a trozos, Splines).
2. Las familias de funciones polinómicas-exponenciales (Nelson-Siegel, Svensson).

Interpolación

Por construcción las curvas interpolantes deben coincidir con los puntos dados. Pero en el resto del dominio la distancia, oscilaciones y ripples puede ser muy grande (fenómeno de Runge). El resultado es una curva que interpola usando como nodos ("knots") los datos de mercado.



$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{10} a_j x^j$$

https://math.boisestate.edu/~calhoun/teaching/matlab-tutorials/lab_11/html/lab_11.html

Interpolación a trozos

En lugar de tomar una función para cubrir todo el rango del dominio, se definen funciones a trozos que provean información para los puntos intermedios.

1. Interpolación de la **tasa spot** con una **función escalón** (no es contínua)
2. Interpolación de la **tasa spot** con una **función lineal a trozos** (poligonal contínua)

$$r(T) = a_i + b_i T, \qquad \text{para } T_i < T < T_{i+1}$$
$$r(T) = r_i \frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i} + r_{i+1} \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i}$$

Sin embargo, la tasa forward instantánea no es contínua

$$f(T_i^+) = a_i + 2b_i T_i$$
$$f(T_i^-) = a_{i-1} + 2b_{i-1} T_i$$

Digresión: ¿cómo conectar la forma de la tasa spot con la tasa forward?

Relación entre tasa Forward instantánea y tasa spot

Habíamos definido la **tasa de interés *spot* contínuamente compuesta** para el período $[t, T]$ como el log-retorno del ZCB que vence en T

$$R(t, T) \doteq \frac{\ln P(T, T) - \ln P(t, T)}{T - t} = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

Y la **tasa forward instantánea** como la tasa de un préstamo que empieza en el futuro (a tiempo T) y tiene unda duración infinitesimal

$$f(t; T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

Por lo tanto,

$$f(t; T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}(-R(t, T)(T - t)) = R(t, T) + \frac{dR(t, T)}{dT}(T - t)$$

La relación anterior determina la forma de la curva forward a partir de la forma de la curva Cero

$$f(t; T) = R(t, T) + \frac{dR(t, T)}{dT}(T - t)$$

Interpolación a trozos

3. Interpolación del logaritmo de la **tasa spot** con una **función lineal a trozos**

$$
\begin{aligned}
\ln r(T) &= a_i + b_i T, \qquad \text{para } T_i < T < T_{i+1} \\
r(T) &= \exp(a_i + b_i T), \\
a_i &= \frac{\ln(r_i) T_{i+1} - \ln(r_{i+1}) T_i}{T_{i+1} - T_i} \\
b_i &= \frac{\ln(r_{i+1}) - \ln(r_i)}{T_{i+1} - T_i} \\
f(T) &= \exp(a_i + b_i T) + b_i T \exp(a_i + b_i T),
\end{aligned}
$$

   Una objeción es que esta interpolación no permite tasas negativas. Y nuevamente la curva forward presenta discontinuidades en los nodos

4. Curva forward **constante a trozos**

$$
\begin{aligned}
f(T) &= b_i, \qquad \text{para } T_i < T < T_{i+1} \\
r(T) &= \frac{a_i}{T} + b_i, \\
a_i &= \frac{T_i T_{i+1}(r_i - r_{i+1})}{T_{i+1} - T_i} \\
b_i &= \frac{r_{i+1} T_{i+1} - r_i T_i}{T_{i+1} - T_i}
\end{aligned}
$$

   Muy sensible a la cantidad de nodos.

Spline

Los splines son funciones C^2 en todo el dominio. En particular las splines cúbicas son funciones polinómicas cúbicas a trozos y dos veces diferenciables en todo su domino. Son ampliamente usadas pero esta familia suele resultar en ajustes con irregularidades en el tramo muy corto o largo de la curva.

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i + \sum_{j=1}^{q-1} b_j (x - \xi_j)_+^3$$

La estimación con splines es un tipo de interpolación. Al definir el polinomio a trozos se tiene mayor flexibilidad que usando un único polinomio interpolador y se evitan los problemas asociados con la interpolaciones polinomiales.

Ejemplos de interpolación tomando las curvas del tesoro

U.S. DEPARTMENT OF THE TREASURY

Daily Treasury Yield Curve Rates

Get updates to this content.

XML These data are also available in XML format by clicking on the XML icon.

XSD The schema for the XML is available in XSD format by clicking on the XSD icon.

If you are having trouble viewing the above XML in your browser, click here.

To access interest rate data in the legacy XML format and the corresponding XSD schema, click here.

Select type of Interest Rate Data

Daily Treasury Yield Curve Rates ▾ Go

Select Time Period

Current Month ▾ Go

Date	1 Mo	2 Mo	3 Mo	6 Mo	1 Yr	2 Yr	3 Yr	5 Yr	7 Yr	10 Yr	20 Yr	30 Yr
07/01/19	2.17	2.16	2.21	2.10	1.94	1.78	1.74	1.79	1.90	2.03	2.34	2.55
07/02/19	2.21	2.17	2.20	2.09	1.91	1.77	1.71	1.75	1.85	1.98	2.29	2.51
07/03/19	2.25	2.20	2.21	2.08	1.91	1.77	1.71	1.74	1.83	1.96	2.25	2.47
07/05/19	2.26	2.22	2.23	2.14	1.98	1.87	1.82	1.84	1.93	2.04	2.34	2.54
07/08/19	2.23	2.24	2.26	2.14	1.99	1.88	1.84	1.86	1.94	2.05	2.32	2.53
07/09/19	2.22	2.24	2.26	2.15	2.00	1.92	1.88	1.88	1.96	2.07	2.34	2.54
07/10/19	2.18	2.18	2.20	2.07	1.93	1.82	1.79	1.82	1.93	2.07	2.36	2.57
07/11/19	2.17	2.17	2.17	2.08	1.97	1.85	1.84	1.88	1.99	2.13	2.42	2.65
07/12/19	2.16	2.18	2.14	2.07	1.96	1.84	1.81	1.86	1.98	2.12	2.42	2.64
07/15/19	2.17	2.19	2.16	2.06	1.95	1.83	1.80	1.84	1.96	2.09	2.39	2.61
07/16/19	2.16	2.17	2.15	2.06	2.00	1.87	1.84	1.88	2.00	2.13	2.42	2.63

Tuesday Jul 16, 2019

https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield


inp_array));
-1 < b && a.splice
function use_array(a, b) {
(a, b) {
for (var c = -1, d =
dynamicSort(a) {
d[a] ? -1 : c[a] > d[a]
a.length + 1;
} else {

Coding Time

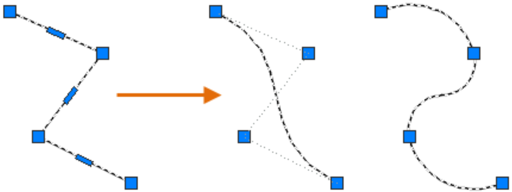
Optimización

Smoothing Splines

Combinan los objetivos de un buen ajuste a los datos y regularidad en la curva extendiendo el criterio de cuadrados mínimos

$$\min_{z} ||\bar{p} - \bar{\bar{C}} \cdot d(\bar{z})||^2$$

para incluir criterios de suavidad de las curvas de rendimiento y forward.



El requerimiento de ajuste se hace sobre la curva forward $f(u)$. En el caso de ZCB con $P(0, T_i) = \exp(-Y_i T_i)$ la minimización se realiza sobre:

$$\min_{f \in H} \left[\int_0^T (f'(u))^2 du + \alpha \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i T_i - \int_0^T f(u) du \right)^2 \right]$$

El parámetro $\alpha \in [0, \infty)$ regula el balance entre suavidad y bondad del ajuste. Esta minimización tiene solución única f que es una spline de segundo orden.

Nelson-Siegel / Svensson

Funciones polinomicas-exponenciales de la forma ($x = T - t$ es el tiempo hasta la madurez)

$$\sigma(x) = p_1(x) \exp(-\alpha_1 x) + \ldots + p_n(x) \exp(-\alpha_n x)$$

donde $p_i(x)$ es un polinomio en x de grado i. En particular, la familia Nelson-Siegel tiene sólo cuatro parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$ y es usada por muchos bancos centrales para ajustar las curvas de tasa **forward instantánea**

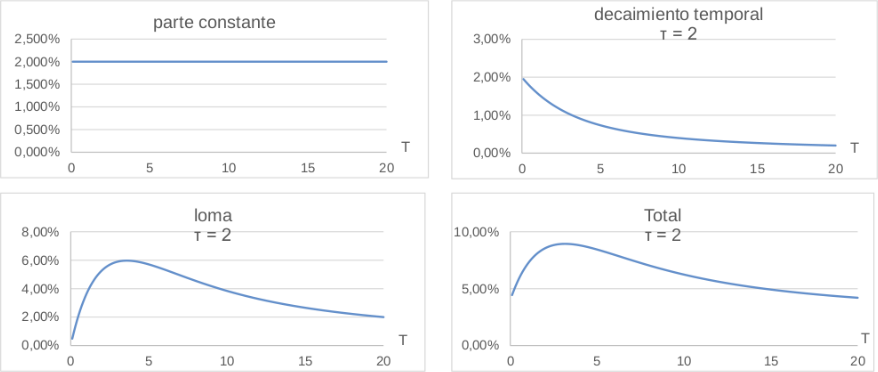
$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T) \exp(-T/\tau_1)$$

Una variante con mayor flexibilidad (dos tiempos de decaimiento) es la curva de Svensson

$$\phi_S(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T) \exp(-T/\tau_1) + \beta_3 T \exp(-T/\tau_2)$$

Nelson-Siegel

$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)\exp(-T/\tau_1)$$



¿Cómo obtenemos la curva de **tasa spot**?

Nelson-Siegel

Usando la relación recién encontrada

$$f(t;T) = R(t,T) + \frac{dR(t,T)}{dT}(T-t)$$

y la curva Nelson-Siegel para la tasa forward

$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)\exp(-T/\tau_1)$$

el posible hallar la tasa spot Nelson-Siegel

$$r_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\,\frac{\tau_1}{T}\,(1 - \exp(-T/\tau_1)) - \beta_2 \exp(-T/\tau_1)$$

Metodologías de Bancos Centrales

Table 1

The term structure of interest rates - estimation details

Central bank	Estimation method	Minimised error	Shortest maturity in estimation	Adjustments for tax distortions	Relevant maturity spectrum
Belgium	Svensson or Nelson-Siegel	Weighted prices	Treasury certificates: > few days Bonds: > one year	No	Couple of days to 16 years
Canada	Merrill Lynch Exponential Spline	Weighted prices	Bills: 1 to 12 months Bonds: > 12 months	Effectively by excluding bonds	3 months to 30 years
Finland	Nelson-Siegel	Weighted prices	≥ 1 day	No	1 to 12 years
France	Svensson or Nelson-Siegel	Weighted prices	Treasury bills: all Treasury Notes: : ≥ 1 month Bonds: : ≥ 1 year	No	Up to 10 years
Germany	Svensson	Yields	> 3 months	No	1 to 10 years
Italy	Nelson-Siegel	Weighted prices	Money market rates: O/N and Libor rates from 1 to 12 months Bonds: > 1 year	No	Up to 30 years Up to 10 years (before February 2002)
Japan	Smoothing splines	Prices	≥ 1 day	Effectively by price adjustments for bills	1 to 10 years
Norway	Svensson	Yields	Money market rates: > 30 days Bonds: > 2 years	No	Up to 10 years
Spain	Svensson Nelson-Siegel (before 1995)	Weighted prices Prices	≥ 1 day ≥ 1 day	Yes No	Up to 10 years Up to 10 years
Sweden	Smoothing splines and Svensson	Yields	≥ 1 day	No	Up to 10 years
Switzerland	Svensson	Yields	Money market rates: ≥ 1 day Bonds: ≥ 1 year	No	1 to 30 years

Table 1 cont

The term structure of interest rates - estimation details

Central bank	Estimation method	Minimised error	Shortest maturity in estimation	Adjustments for tax distortions	Relevant maturity spectrum
United Kingdom[1]	VRP (government nominal) VRP (government real/implied inflation) VRP (bank liability curve)	Yields Yields Yields	1 week (GC repo yield) 1.4 years 1 week	No No No	Up to around 30 years Up to around 30 years Up to around 30 years
United States	Smoothing splines (two curves)	Bills: weighted prices Bonds: prices	– ≥ 30 days	No No	Up to 1 year 1 to 10 years

[1] The United Kingdom used the Svensson method between January 1982 and April 1998.

https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap25.htm


inp_array));
-1 < b && a.splice
function use_array(a, b) {
for (var
(a, b) {
for (var c = -1, d
dynamicSort(a) {
d[a] ? -1 : c[a] > d[a]
a.length + 1;
} else {

Coding Time

Modelos de Tasa de Interés

Modelado de la Tasa de Interés

Con la estimación paramétricas o bootstrapping pudimos reconstruir la curva de descuento para calcular NPVs de flujos futuros, cada uno con su resepectiva tasa $R(t, T_i)$.

Nos permite valuar el derivado en un solo tiempo, hoy. Pero...
¿Cuánto va a valer un bono dentro de 6m? ¿Cómo va a ser la curva de retornos en 1y?

Los valores futuros de las tasas de interés son inciertos, es razonable modelarlas como variables aleatorias.

Podemos modelar la tasa corta, la tasa forward, las tasas forward instantáneas (e.g. H.J.M.), podemos considerar modelos de un factor, de dos factores (e.g. SABR para las tasas forward) o muchos factores (e.g. L.M.M. para los forward rates)

Modelos de tasa corta

Describen la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea, $r(t)$. La tasa de interés contínuamente compuesta anualizada a la que se presta dinero por un plazo infinitesimal, en el money market.

1. El precio de un ZCB

$$P(t,T) = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

2. Con la familia de T-bonds es posible computar la tasa spot compuesta

$$R(t,T) \doteq -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

o la tasa forward instantánea

$$f(t,T) \doteq -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

Modelos de tasa corta de un factor

Con una única fuente de incertidumbre, la tasa corta spot sigue un proceso de difusión de Itô. Estos modelos llevan a una PDE para el precio de los bonos y otros derivados de tasas

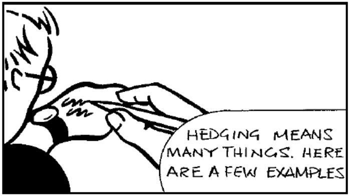
$$dr(t) = u(t, r)dt + w(t, r)dW$$

donde $w(t, r)$ es la volatilidad y dW es un proceso de Wiener (e.g. los incrementos siguen una distribución normal con media cero y varianza dt).

La forma particular de las funciones $u(t, r)$ y $w(t, r)$ da lugar a diferentes modelos (más adelante)

Concentrémonos en la PDE de los derivados de tasa

Risk-Free Portfolio



7.10 A CLASSIFICATION OF HEDGING TYPES

7.10.1 Why Hedge?

'Hedging' in its broadest sense means the reduction of risk by exploiting relationships or correlation between various risky investments (or bets). The concept is used widely in horse racing, other sports betting and, of course, high finance. The reason for hedging is that it can lead to an improved risk/return. In the classical Modern Portfolio Theory framework (Chapter 18), for example, it is usually possible to construct many portfolios having the same expected return but with different variance of returns ('risk'). Clearly, if you have two portfolios with the same expected return the one with the lower risk is the better investment.

Veamos si podemos construir un portfolio libre de riesgo con un derivado sobre un solo subyacente random

$$\Pi(t) = V(t, X) + \text{``}Algo\text{''}$$

donde este "algo" debe ser negociable en el mercado y que nos permita reducir el riesgo del portfolio

Risk-Free Portfolio

El P&L total de la posición sobre el período $[t, t+\delta t]$ es
$$d\Pi(t) = dV(t, X) + d\text{“Algo”}$$

Lema de Itô

El precio del derivado $V(t, X)$ es una función escalar dos veces derivable,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx^2 + \cdots$$

Reemplazando $dx = u(t, x)dt + w(t, x)dW_t$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(u^2 \cancel{dt^2} + 2uw \cancel{dt dW_t} + w^2 (dW_t)^2 \right)$$

En el límite $dt \to 0$, los términos dt^2 y $dt\, dW_t$ tienden a cero más rápido que $(dW)^2$, que es de orden $O(dt)$.

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

Risk-Free Portfolio - repaso de equity

La variación del valor del portfolio es

$$d\Pi(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx + d\text{“Algo”}$$

Esta ecuación contiene un término aleatorio con dependencia explícita en dx.

Ahora especifiquemos en el caso de equity, $x = S$. El activo más sencillo que podríamos considerar para “hedgear” este portfolio es una suma de dinero ... pero dinero cash, o invertido en el money market no tiene los mismos drivers de riesgo que el equity S.

Lo siguente en complejidad que podemos probar es sumar alguna cantidad de equity al portfolio, e.g. “Algo” $= -\Delta S$

$$d\Pi(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS - \Delta dS$$

Si elegimos $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, conseguimos eliminar perfectamente toda dependencia en activos riesgosos de la variación del portfolio

$$d\Pi(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Risk-Free Portfolio - repaso de equity

Este portfolio

$$\Pi(t) = V(t, S) - \frac{\partial V}{\partial S} S$$

tiene una posición long en un derivado sobre un único equity, y está short en $\frac{\partial V}{\partial S}$ unidades en el mismo equity. Esta combinación hace que portfolio esté delta-hedged.

La variación del portfolio es libre de riesgo y por lo tanto su retorno debe crecer a misma tasa que cualquier otro instrumento risk-free, o habría oportunidades de **arbitraje**. Usemos nuevamente r como la tasa risk-free (e.g. del money-market) en el período $[t, t + \delta t]$

$$d\Pi(t) = \Pi \, r \, dt$$

Por lo tanto

$$d\Pi(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = \Pi \, r \, dt$$

que nos da la ecuación diferencial que cumple cualquier derivado sobre un único

equity

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - rS \frac{\partial V}{\partial S}$$

Risk-Free Portfolio - repaso de equity

La ecuación diferencial que cumple cualquier derivado sobre un único equity

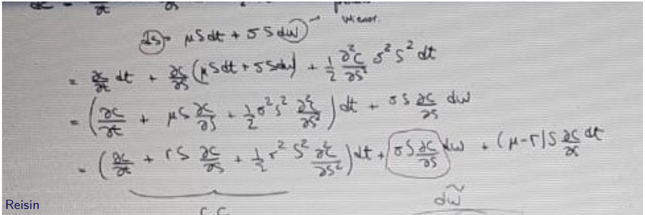
$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

Especificando la dinámica de S como un GBM:

$$dS = \underbrace{\mu S}_{u(t,S)} dt + \underbrace{\sigma S}_{w(t,S)} dS$$

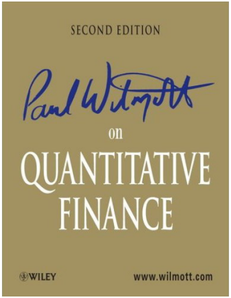
obtenemos la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$



Modelado de Tasas de Interés

"the pricing and hedging of fixed-income products is technically more complicated than the pricing and hedging of equity instruments. One of the reasons for this is that the variable that we will be modeling, the short-term interest rate, is not itself a traded quantity."



PDE Derivados de Tasa - un factor

A diferencia del caso de equity, en derivados de tasa no existe un subyacente negociable para tomar cobertura. El modelado se hace sobre una variable no negociable (la tasa) en tanto que los activos negociables como los bonos, swaps, forwards, etc, son todos derivados.

La única manera de construir un portfolio cubierto es cubriendo un bono con otro bono de distinto vencimiento. Dado que consideramos un solo factor aleatorio, ambos bonos (todos los bonos) dependerán de la misma tasa short.

$$\Pi = V_1(t, r; T_1) - \Delta V_2(t, r; T_2)$$

El cambio en este portfolio es

$$d\Pi = dV_1(t, r; T_1) - \Delta dV_2(t, r; T_2)$$

PDE Derivados de Tasa - un factor

El cambio en este portfolio es

$$d\Pi = dV_1(t, r; T_1) - \Delta dV_2(t, r; T_2)$$

Usemos nuevamente el Lema de Itô para expandir estas variaciones

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial r}dr + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{\partial V_2}{\partial r}dr + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt\right)$$

Es importante notar que como existe un único factor de riesgo para todos los plazos, tenemos un único r la misma volatilidad w.

Una elección apropiada de Δ neutraliza los términos con drivers aleatorios

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r}$$

Obteniendo

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}\right)\right]dt$$

PDE Derivados de Tasa - un factor

Al igual que antes, este portfolio es riskless y por lo tanto su retorno debe crecer a la tasa risk-free $d\Pi = r\Pi dt$

$$\left[\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r}/\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}\right)\right]dt$$
$$= r\left[V_1 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r}/\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)V_2\right]dt$$

Esta ecuación difiere del caso de equity en varios aspectos

- La variable aleatoria no es negociable directamente,
- Es una ecuación con *dos* funciones desconocidas: V_1 y V_2. Esto provino de agregar un segundo derivado V_2 necesario para hedgear el portfolio.

Juntemos todas las dependencias en V_1 y en V_2 a un lado y otro de la igualdad

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2}{\frac{\partial V_2}{\partial r}}$$

El lado izquierdo es una función de T_1 pero no de T_2, viceversa el lado derecho es una función de T_2 pero no de T_1

$$f(t, r, T_1) = g(t, r, T_2) = a(r, t)$$

PDE Derivados de Tasa - un factor

La única manera posible de que valga la igualdad es que ambos lados sean independientes de los vencimientos

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} = a(r,t)$$

En síntesis, el precio del derivado obedece la siguente PDE

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a(t,r)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0}$$

Comparemos con el caso de equity

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

PDE Derivados de Tasa - un factor

Se puede agregar el pago de cupones o amortizaciones

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a(t,r)\frac{\partial V}{\partial r} - rV + K(t,r) = 0$$

Cuando el flujo $K(t,r)$ se paga en tiempos discretos, existe un salto en el precio

$$V(t, t_c^-; T) = V(t, t_c^+; T) + K(r, t_c)$$

Algunos Modelos Estándar

La PDE del derivado lo podemos reescribir sin pérdida de generalidad como

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [u(t,r) - \lambda(t,r)\, w(t,r)] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

La variación de la tasa estocástica en la medida riesgo neutral

$$dr = [u(r,t) - \lambda(r,t) w(r,t)]\, dt + w(t,r) dW^*$$

Por conveniencia podemos considerar sólo algunos modelos que tienen soluciones analíticas (seguimos la notación del Wilmott)

$$dr = [\eta(t) - \gamma(t) r]\, dt + \sqrt{\alpha(t) r + \beta(t)} dW^*$$

El modelo log-normal que usamos para equities no es válido porque permitiría crecimientos o caidas exponenciales de la tasa en el tiempo

Algunos Modelos Estándar - Vasiček

$$dr = (\eta - \gamma r)dt + \sqrt{\beta} dW^*$$

- Es un modelo simple, de parámetros constantes
- Tiene reversión a la media
- Admite tasas negativas, $P(r < 0) > 0$
- Un ZCB tiene solución analítica

$$\begin{aligned} P(t, T) =& e^{A(t;T) - r(t)B(t;T)} \\ B =& \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma(T-t)}\right) \\ A =& \frac{1}{\gamma^2}(B(t;T) - T + t)\left(\eta\gamma - \frac{1}{2}\beta\right) - \frac{\beta B(t;T)^2}{4\gamma} \end{aligned}$$

Algunos Modelos Estándar - CIR

$$dr(t) = (\eta - \gamma r)dt + \sqrt{\alpha r}dW^*$$

- Cox–Ingersoll–Ross, también de parámetros constantes
- Tiene reversión a la media
- Si $\eta > \alpha/2$ la tasa permanece positiva, $P(r < 0) = 0$
- La distribución de probabilidad es más cercana al mercado
- El ZCB también tiene solución analítica

Algunos Modelos Estándar - Ho & Lee

$$dr(t) = \eta(t)dt + c\,dW^*$$

- Tiene desviación constante y término de drift dependiente del tiempo
- El ZCB también tiene solución analítica

$$Z(r,t;T) = e^{A(t:T)-r(T-t)}$$

donde

$$A(t;T) = -\int_t^T \eta(s)(T-s)ds + \frac{1}{6}c^2(T-t)^3$$

- Es el modelo más simple que puede ser ajustado a la yield. Conociendo $\eta(t)$ se pueden conocer toda la curva de descuento. Recíprocamente, conociendo los valores de mercado de los ZCB en algún tiempo t^* es posible calibrar $\eta(t)$

$$A(t;T) = \log\left(\frac{Z_M\left(t^*;T\right)}{Z_M\left(t^*;t\right)}\right) - (T-t)\frac{\partial}{\partial t}\log\left(Z_M\left(t^*;t\right)\right) - \frac{1}{2}c^2\left(t-t^*\right)(T-t)^2$$

Algunos Modelos Estándar - Hull-White

$$dr(t) = [\eta(t) - \gamma r]dt + cdW^*$$

- H&W modifican Vasicěk incorporando dependencia temporal de $\eta(t)$
- El ZCB también tiene solución analítica

$$Z(r, t; T) = e^{A(t:T) - r(T-t)}$$

donde

$$A(t; T) = -\int_t^1 \eta^*(s)B(s; T)ds + \frac{c^2}{2\gamma^2}\left(T - t + \frac{2}{\gamma}e^{-\gamma(T-t)} - \frac{1}{2\gamma}e^{-2\gamma(T-t)} - \frac{3}{2\gamma}\right)$$

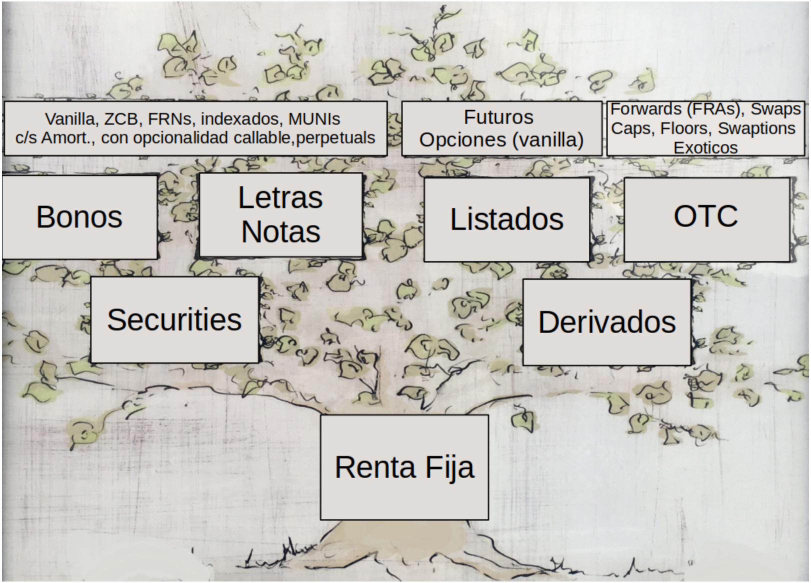
$$B(t; T) = \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma(T-t)}\right)$$

- Este modelo también puede ser ajustado a la yield, tomando

$$A(t; T) = \log\left(\frac{Z_M(t^*; T)}{Z_M(t^*; t)}\right) - B(t; T)\frac{\partial}{\partial t}\log\left(Z_M(t^*; t)\right)$$
$$- \frac{c^2}{4\gamma^3}\left(e^{-\gamma(T-t^*)} - e^{-\gamma(t-t^*)}\right)^2\left(e^{2\gamma(t-t^*)} - 1\right)$$

Derivados no-lineales de Tasa e Interés

Derivados de Tasa



Callable Bonds

Es un bono simple con cupones (fijos o flotantes) pero tiene embebida una opcionalidad que le permite al emisor reclamar el bono a partir de cierta fecha por un precio preacordado en el contrato. Esta opcionalidad que retiene el emisor del bono reduce el valor del bono.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + K_c(t, r) = 0$$

con la condición terminal

$$V(r, T) = 1$$

y saltos discretos a través de los días de pago de cupón

$$V\left(r, t_c^-\right) = V\left(r, t_c^+\right) + K_c$$

Si el bono puede ser reclamado por una suma $C(t)$ entonces debe cumplirse un vínculo sobre el precio del bono

$$V(r, t) \leq C(t)$$

Opciones sobre Bonos

Es idéntico a una opción sobre un stock, pero el subyacente es un bono. La opción tiene un strike E un vencimiento T, y el subyacente es un ZCB con vencimiento $T_B > T$. El precio de la opción require resolver primero el precio del bono

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0$$

con la condición terminal

$$Z(r, t = T_B, T_B) = 1$$

La opción debe cumplir *la misma* ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

pero con su correspondiente condición terminal con la condición terminal

$$V(r, t = T) = max(Z(r, t = T; T_B) - E, 0)$$

Impreciso si queremos resolver dos veces, para el ZCB t para la opción.

Opciones sobre Bonos

En la práctica se usa la fórmula de Black, que supone que el bono sigue un GBM, de modo que la opción puede valuarse sobre el precio forward del bono (F)

$$V(t,r) = e^{-r(T-t)}\left(FN(d_1') - EN(d_2')\right)$$

donde

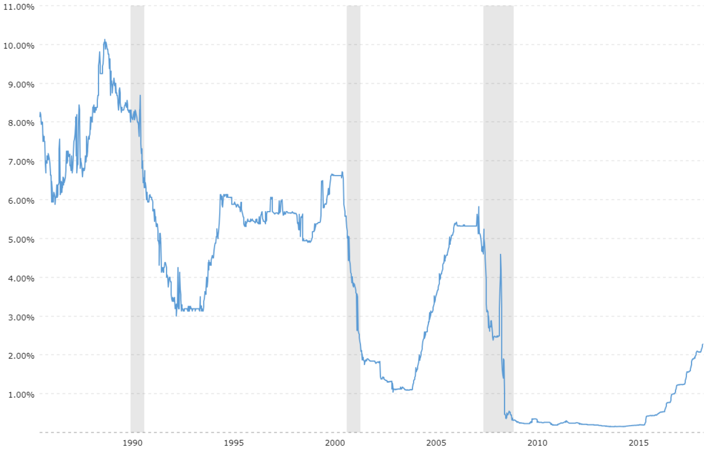
$$d_1' = \frac{\log(F/X) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ and } d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{T-t}$$

Esta metodología puede usarse solo si el vencimiento de la opción es muy anterior al vencimiento del bono, pues el **pull-to-par** conspira fuertemente contra la hipótesis de GBM.

Caps

Un **cap** es un contrato que paga cuando la tasa de referencia supera el strike K :

$$Cap(L, K) = \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, N_i \left(L\left(T_{i-1}, T_i\right) - K\right)^{+}$$



https://www.macrotrends.net/assets/images/large/1-month-libor-rate-historical-chart.png

Caps

$$Cap(L,K)=\sum_{i=1}^{n}P\left(t,T_i\right)N_i\left(L\left(T_{i-1},T_i\right)-K\right)^{+}$$

Un cap es la suma de pequeñas porciones de expresion idéntica, todos con el mismo strike:

$$Cap(L,K)=\sum_{i=1}^{n}Caplet(L,K)$$

Suponiendo que L sigue una distribución lognormal (convención de mercado)

$$\begin{aligned}&Cap^{\mathrm{Black}}P\left(0,T_i,T,N,K,\sigma\right)=\\&\qquad=N\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}P\left(0,T_i\right)N_i\mathbf{Bl}\left(K,F\left(0,T_{i-1},T_i\right),v_i,1\right)\end{aligned}$$

Caps & Floors

Un **cap** es un contrato que paga cuando la tasa de referencia supera el strike E :

$$Cap(L, K) = \sum_{i=1}^{n} P\left(t, T_i\right) N_i \left(L\left(T_{i-1}, T_i\right) - K\right)^+$$

Un **floor** solo paga cuando la tasa de referencia esta por debajo del strike K :

$$Floor(L, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P\left(t, T_i\right) N_i \left(K - L\left(T_{i-1}, T_i\right)\right)^+$$

Relación de paridad:

$$(L_i - K)^+ - (K - L_i)^+ = L_i - K$$

$$Caplet - Flooret = L_i - K$$