Quant Finance 3

Manuel Maurette

Clase 3: Modelo Binomial

UCEMA

No arbitraje

- Un resultado que vamos a usar mucho es el siguiente:

Si NO existen posibilidades de arbitraje, entonces:

  - Si dos portafolios (A y B) valen lo mismo a vencimiento, es decir, tienen el mismo *payoff*.
  - Entonces A y B valen lo mismo en toda la vida de los activos.

- Matemáticamente:

$$P_A(T) = P_B(T) \rightarrow P_A(t) = P_B(t), \text{para todo } t$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (1/2)

- Suponiendo conocido el precio de una Opción *call* Europea, veamos un **argumento de no arbitraje** para deducir el precio de un *put* Europeo (mismo *underlying*, *strike* y *maturity*)
- Sean los siguientes dos portafolios:
  - Portafolio A: Una CALL más $Ke^{-r(T-t)}$ unidades de dinero
  - Portafolio B: Una PUT mas una unidad del activa subyacente
- Veamos el **valor de los portafolios** a tiempo final:

$$P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$$

$$P_B(T) = \max(K - S(T), 0) + S(T) = \max(K, S(T))$$

- Es decir, sus payoffs son idénticos: $P_A(T) = P_B(T)$
- El valor de los portafolios entonces tienen que ser idénticos en todo tiempo desde inicio hasta expiración.

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (2/2)

- En particular, **deben valer lo mismo al inicio**. Veamos cuanto valen al inicio:
    - $P_A(0) = C(0) + Ke^{-rT}$
    - $P_B(0) = P(0) + S(0)$

- Igualándolos, dado que **por no arbitraje deberían ser idénticos**:

$$P_A(0) = C(0) + Ke^{-rT} = P(0) + S(0) = P_B\ (0)$$

$$C(0) - P(0) = S(0) - Ke^{-rT}$$

- Esta relación es conocida como la **paridad *Put-Call***. Notar que es válida para todo momento de la vida de las opciones:

$$C(t) - P(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

Relaciones entre Europeas y Americanas (1/2)

Dado que las opciones americanas tienen más *opcionalidad*… *derecho*, intuitivamente tenemos las siguientes dos relaciones:

$$c \leq C$$

$$y$$

$$p \leq P$$

Lo que NO es intuitivo, es que en el caso de las *call* que no paguen dividendos, también se puede ver que:

$$c \geq C$$

Es decir, NUNCA es óptimo ejercer la opción antes de vencimiento.

Con lo cual, $c = C$, y el precio de las dos opciones es igual

Call americano sin dividendos (1/2)

Veamos esto último:

"NUNCA es óptimo ejercer la *call* americana antes de vencimiento"

Ya vimos (Cotas Inferiores) que $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$, como $C \geq c$:

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Asumiendo $r > 0$, lo anterior dice que siempre que $T > 0,$:

$$rT > 0 \rightarrow -rT < 0 \rightarrow e^{-rT} < 1 \rightarrow -e^{-rT} > -1 \rightarrow -Ke^{-rT} > -K$$

$$C > S_0 - K$$

Put americano sin dividendos

- El valor de ejercicio de una opción de venta es $K - S(T)$. En una opción put europea
- Este valor no puede capturarse hasta el vencimiento.
- Antes del vencimiento, el valor de la opción de venta europea será una función del valor presente de lo que este ejercicio genera: $e^{-r(T-t)}(K - S(t))$.
- El *put* americano da acceso inmediato en cualquier momento a $K - \ S$, a través del ejercicio.
- En ciertas circunstancias, especialmente en los posiciones muy Deep ITM, con el tiempo restante hasta la expiración, este diferencial en las condiciones de ejercicio puede dar al *put* americano un valor extra sobre el *put* europea correspondiente, incluso en ausencia de dividendos.

Otras relaciones *PutCall*

- Americanas que no pagan dividendos:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

- Europeas que pagan dividendos:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

- Americanas que pagan dividendos:

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Otras relaciones *PutCall* - Binarias

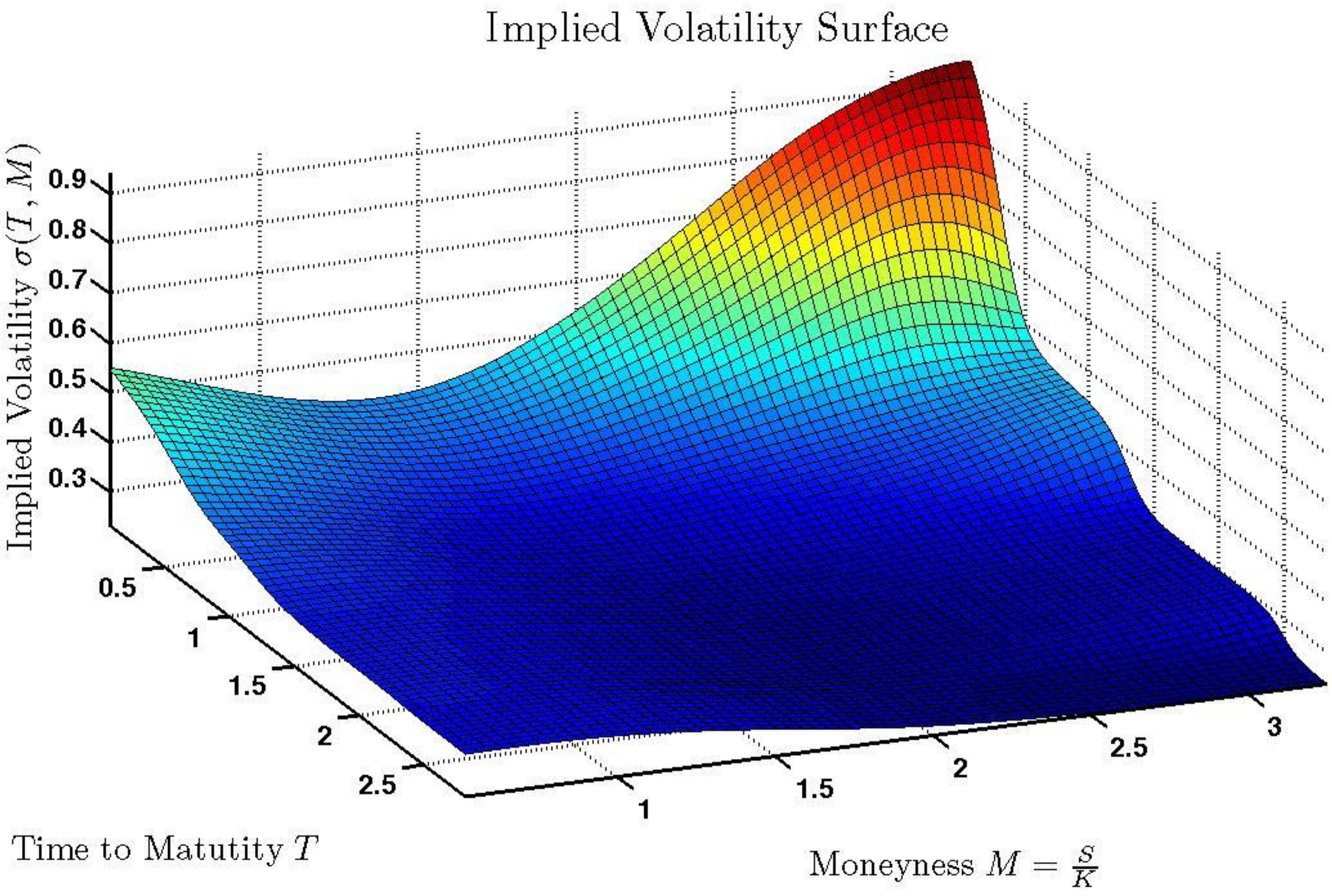
- Opciones Binarias-Digitales:

Una opción Binaria-Digital funciona de manera similar a una opción europea pero con los siguiente *payoff:*

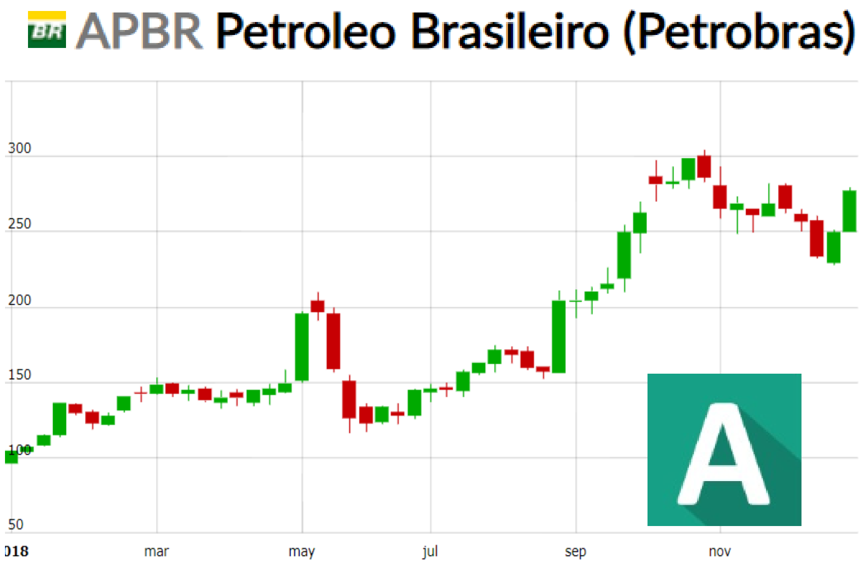
$$CD_L\,(T) = I_{\{S(T)>K\}}$$
$$PD_L\,(T) = I_{\{S(T)<K\}}$$

Encontrar una relación de *PutCall* para este tipo de opciones

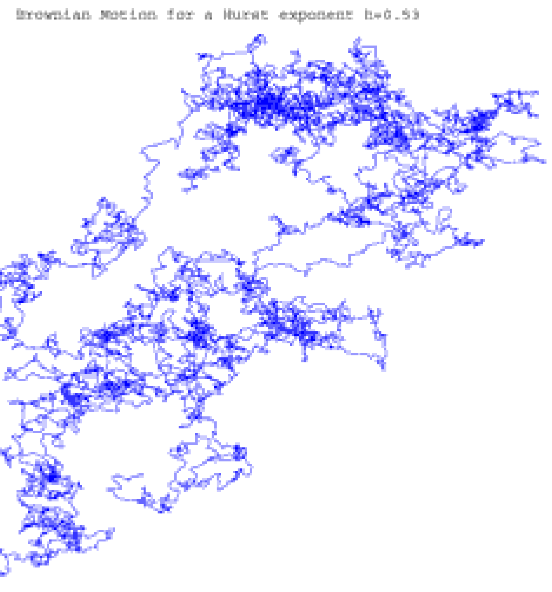
Superficie de volatilidad



¿Cómo se comportan los activos financieros?



¿En dónde mas se ven estos comportamientos?



1828 El botánico ***Robert Brown*** reporta que granos de polen suspendidos en una cierta sustancia vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable.

Movimiento Browniano

- 1900 ***Louis Bachelier*** publica su tesis doctoral en matemáticas: Teoría de la especulación, en la que utiliza el movimiento browniano para modelar activos financieros.
- 1905 ***Albert Einstein*** explica el movimiento browniano como múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen.
- 1923 ***Norbert Wiener*** formaliza matemáticamente el movimiento browniano.
- 1973 El matemático ***Fisher Black*** y el economista ***Myron Scholes*** publican su trabajo sobre precios de opciones, y junto con el economista ***Robert Merton***, logran dar una formula cerrada para el precio justo de estos contratos.
- 1997 Ganaron el premio NOBEL de economía

De aquí…matemáticos y físicos en Finanzas

- **80s-90s**: grandes entidades financieras Bancos, fondos de inversión, y otras buscan a los mejores promedios de las mejores universidades - Época de Oro *Quant*
- **2000s**: Se estandariza la industria, todos los equipos tienen matemáticos. Surge el poder de las computadoras. Nuevos instrumentos complejos – CRISIS económica mundial 2007-2009
- **2010s**: Se dirigen todos los esfuerzos a el manejo de riesgo, para evitar que vuelva a pasar. Sigue creciendo la interacción con la computación. Todo *quant* necesita saber programar.
- **Hoy**: Camino natural en el mundo pasar por matemática para terminar en finanzas. La informatización es plena. Casi que igual de importante saber informática-programación que matemática. Nuevas carreras Ingeniero Financiero, Finanzas Matemáticas, etc

Ej. de modelo para el precio de una opción

Precio = $\mathbf{C}(\mathbf{S}, \mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma})$

- $\boldsymbol{S}$ = Precio del activo hoy
- $\mathbf{K}$ = Precio determinado
- $\mathbf{T}$ = Tiempo de expiración del contrato
- $\boldsymbol{r}$ = *Tasa de descuento***
- $\boldsymbol{\sigma}$ = *Volatilidad del activo***

Teorema (Fórmula de Black-Scholes)

Bajo ciertas hipótesis, el precio de una opción de compra es la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S, T) = (S - K)^+$$

Esta rama de las matemáticas aplicadas se denomina **Finanzas Cuantitativas (*Quant Finance*)**

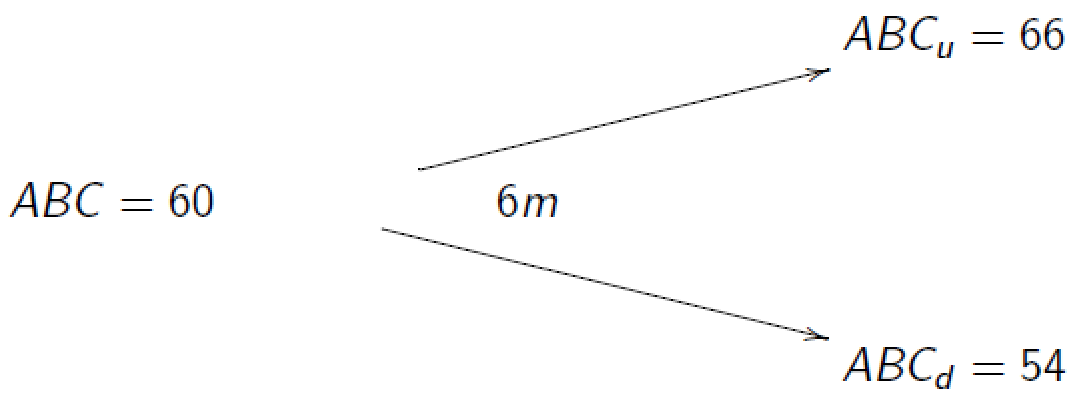
Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

- Fórmulas Cerradas / Aproximaciones analíticas
- Modelos de árboles (*lattices*)
- Modelos de Ecuaciones Diferenciales
- Montecarlo
- Ad-hoc

Modelo Binomial de un paso (1/3)

Veamos nuestro **primer modelo** para la valuación de un derivado financiero.

Ejemplo: Sea el activo *ABC* (acción de la compañía *ABC*), valuada hoy en 60$, supongamos un mundo en el que el activo en 6 meses, solo puede tomar dos precios, 66$ o 54$ (subir o bajar 10 %). Supongamos que se puede pedir prestado/prestar dinero a una tasa del 6% anual (tasa libre de riesgo). Queremos ponerle **precio a la opción *cABC62***. La opción CALL, con strike de 62$, que vence en 6 meses.



Modelo Binomial de un paso (2/3)

Notar que en un modelo de esta naturaleza, un activo de *moneymarket* se comportaría de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
B\frac{1}{1+r} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & B
\end{tikzcd}$$

O equivalentemente

$$\begin{tikzcd}
 & (1+r)B \\
B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (1+r)B
\end{tikzcd}$$

Es decir, en cualquier caso obtengo el mismo resultado. NO hay presencia de riesgo, de aleatoriedad.

Modelo Binomial de un paso (3/3)

Veamos como se comportaría el precio del CALL a expiración:

$$cABC62_u = \text{máx}(66 - 62, 0) = 4$$

$$cABC62 = ?? \qquad 6m$$

$$cABC62_d = \text{máx}(54 - 62, 0) = 0$$

Comentario

Se puede probar que la ausencia de arbitraje equivale a:

$$S_d < S(1 + r) < S_u$$

En este ejemplo:

$$S_d = 54 < 60(1 + 0{,}06) = 61{,}8 < S_u = 66$$

Estrategia de replicación (1/3)

Contamos con los siguientes activos a disposición

- Activo S
- Opción C
- Dinero (prestar o pedir prestado) B – *moneymarket*

La idea es **replicar a B con S y C**. Recordar que B es libre de riesgo

Sea:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \textit{ short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \textit{ long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

Comentario

Para que el porftolio sea libre de riesgo, necesitamos que se comporte como el moneymarket, en particular $\Pi_d = \Pi_u$

Estrategia de replicación (2/2)

Haciendo algunas cuentas:

1. Hallar Δ tal que $\Pi_u = \Pi_d$ (libre de riesgo). Notar que

$$\Pi_u = \Delta S_u - C_u = \Delta 66 - 4$$

$$\Pi_d = \Delta S_d - C_d = \Delta 54 - 0$$

$$\Delta = \frac{4-0}{66-54} = \frac{1}{3}$$

Estrategia de replicación (2/3)

2 Ahora $\Pi = \frac{1}{3}S - C \Rightarrow \Pi(6m) = 18$. Pero es libre de riesgo:

$$\Pi(0) = \frac{1}{(1 + \frac{0{,}06}{2})}\Pi(6m) = \frac{1}{(1 + \frac{0{,}06}{2})}18$$

Con lo cual, $\Pi(0) = 17{,}47$
Obs, no es igual, aproximo con dos decimales

3 Despejo el valor del call $C(0) = 2{,}52$

Obs: Los valores son aproximados

Algunas conclusiones

Diferencias entre invertir en S y en C: Supongamos que disponemos de 6000$ para invertir.

Podamos haber comprado:

- 100 acciones de ABC - precio 60.
- 2376 opciones de cABC62 - precio 2.52.

Analicemos los dos posibles escenarios:

1. Si la acción sube a 66$:
   - ABC = 66$ => 600$ de ganancia (10 %)
   - cABC62 = 4$ => (4 – 2.52) x 2376 = 3506.33$ de ganancia (58 %)

2. Si la acción baja a 54$:
   - ABC = 66 => 600$ de perdida (10 %)
   - cABC62 = 0 => 6000$ de perdida (100 %)

Otro ejemplo para fijar ideas-Arbitraje (1/3)

Ejemplo

Supongamos un activo que tiene un valor de 10\$ (S_0) a tiempo inicial y en un año ($T = 1$) puede o bien subir a 12 ($1{,}2\, S_0$) o bien bajar a 9 ($0{,}9\, S_0$) y una tasa libre de riesgo de r. Sea una opcion call C sobre S con strike $K = 11$ a un año.

Veamos que pasara si la tasa fuera alta y no se cumpliera la relación:

$$d < 1 + r < u, \qquad i.e. \qquad 0{,}9 < 1 + r < 1{,}2$$

Veamos por ejemplo que pasaría si $r = 0.3$, es decir una tasa que no cumpliría con la relación de no arbitraje.

Otro ejemplo para fijar ideas-Arbitraje (2/3)

Podríamos entonces generar el portafolio:

- 13 unidades *long* de dinero (pedir prestado) *moneymarket*
- 1 unidad *short* del activo

$$\Pi = 13B - 1S$$

Notar que al inicio, el **portafolio vale 0**

$$\Pi(0) = 13\frac{1}{1+0{,}3} - 10$$

Otro ejemplo para fijar ideas-Arbitraje (3/3)

Recordemos que en nuestro modelo, el activo puede moverse o bien a 12 o bien a 9 a tiempo final $T = 1$. Veamos cual sería el valor en ambos casos:

- Si el activo baja a 9: $\Pi_d(T) = 13 - 9 = 4 > 0$
- Si el activo sube a 12: $\Pi_u(T) = 13 - 12 = 1 > 0$

Se trata entonces de portafolio de arbitraje. Me sale 0 al inicio y tiene valor positivo en todos los casos en el futuro.

Free Lunch!

Otro ejemplo para fijar ideas - Precio(1/3)

Sigamos con este ejemplo pero fijando una tasa libre de riesgo que cumpla las cotas de no arbitraje, por ejemplo: $r = 0.1$. Calculemos el precio de un *call* usando la **estrategia de replicación**. Vuelvo a generar un portafolio con el objetivo de que sea libre de riesgo, es decir, que replique el *moneymarket*:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \text{ } \textit{short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \text{ } \textit{long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

Comentario

Para que el porftolio sea libre de riesgo, necesitamos que se comporte como el moneymarket, en particular $\Pi_d = \Pi_u$

Otro ejemplo para fijar ideas - Precio(2/3)

Veamos cual sería el valor en ambos casos:

- Si el activo sube a 12: $\Pi_u = \Delta S_u - 1C_u = 12\Delta - 1$
- Si el activo baja a 9: $\Pi_d = \Delta S_d - 1C_d = 9\Delta - 0$
- Un portafolio libre de riesgo cumple que vale siempre lo mismo **lo mismo en $T = 1$** (determinístico) :

$$12\Delta - 1 = 9\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{1}{3}$$

$$\Pi = \tfrac{1}{3}S - C,\ \Pi(T) = 3$$

- Con lo cual:

Otro ejemplo para fijar ideas - Precio(3/3)

- Por un lado dado que se trata de un **portafolio libre de riesgo**:

$$\Pi(0) = \frac{1}{1+r}\Pi(T) = \frac{30}{11}$$

- Por otro lado, por construcción del portafolio

$$\Pi(0) = \frac{1}{3}S(0) - C(0)$$

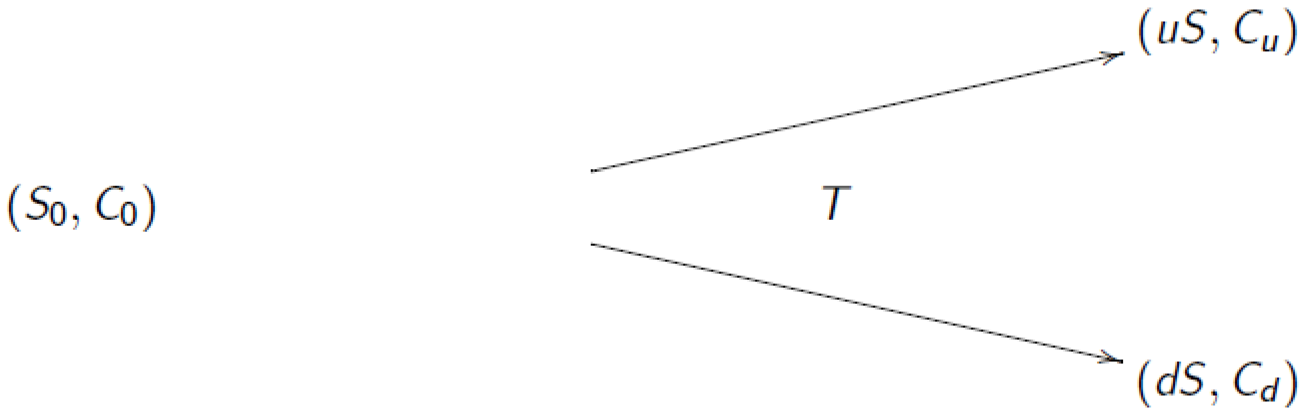
- Despejando, $C(0) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{30}{11} = \dfrac{20}{33} = 0.6060\ldots$

Modelo Binomial de un paso – caso general

Sea el activo S, valuado hoy en S_0, supongamos un mundo en el que el activo en un tiempo T, solo puede tomar dos precios:

$$Su = uS \text{ o } Sd = dS.$$

Supongamos que se puede pedir prestado/prestar dinero a una tasa del $r\%$ anual (tasa libre de riesgo). Queremos ponerle **precio a la opción C**. La opción *call*, con *strike* de K, que vence en tiempo T.



Condición de no arbitraje (1/3)

Veamos que en este caso: Hay ausencia de arbitraje **siempre y cuando** se cumpla la condición

$$0 < d < 1 + r < u$$

Prueba

Supongamos que lo anterior NO sucede. Es decir, no se cumple alguna de las dos desigualdades (asumimos siempre valido que todos son mayores a 0).

Por ejemplo **supongamos** por un momento que $u > d > 1 + r$

La idea es construirnos un portafolio que genere arbitraje

Condición de no arbitraje (2/3)

Sea el portafolio

$$\Pi = 1S - S_0(1+r)B$$

Este portafolio se lee:

- Una unidad del activo *long*
- $S_0(1+r)$unidades de dinero *short* (pido prestado al *moneymarket*)

A tiempo inicial, el portafolio tiene un valor de:

$$\Pi(0) = 1S(0) - S(0)(1+r)\frac{1}{1+r} = 0$$

Condición de no arbitraje (3/3)

En el caso de que el activo **suba**, a tiempo T:

$$\Pi_u(T) = 1uS(0) - S(0)(1+r) = S(0)(u-(1+r)) > 0$$

En el caso de que el activo **baje**, a tiempo T:

$$\Pi_d(T) = 1dS(0) - S(0)(1+r) = S(0)(d-(1+r)) > 0$$

En resumen: Empezamos con un portafolio Π con valor inicial 0 y en ambos casos (todas las posibilidades posibles en nuestro modelo), el portafolio tiene valor positivo. Eso implica la **presencia de arbitraje**!

Del mismo modo si se supone $d < u < 1+r$

Portafolio replicador

Siguiendo con el caso general, recordemos que buscamos el precio de del *call* C (es decir, C_0) Armemos el portfolio con una opción short y unidades del activo *long*:

$$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ acciones long} \\ 1 \text{ opción short} \end{cases}$$

Se puede ver (sin mucho trabajo) que resulta $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ El valor esperado (comentario):

$$\Pi_d(T) = \Pi_u(T) = \mathbb{E}(\Pi(T)) = \Pi(1+r) \Rightarrow \Pi(0) = \frac{1}{(1+r)}\Pi_u$$

entonces:

$$\Delta S - C = \frac{1}{(1+r)}(\Delta S_u - C_u)$$

Despejando… (1/2)

Despejando C, nos queda:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u\right)$$

Reemplazando Δ:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S_u + C_u\right)$$

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u\frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} + C_d\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d}\right)$$

Despejando... (2/2)

Se puede escribir entonces al valor del *call* como:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u q + C_d(1-q)\right) \text{ con } q = \frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d}$$

En este modelo recordar que $S_u = uS_0$ y $S_d = dS_0$, con lo cual

$$q = \frac{S_0(1+r) - dS_0}{uS_o - dS_0}$$

dividiendo numerador y denominador por S_0(distinto a 0!):

$$q = \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

Descuento Continuo

Si consideramos una tasa de descuento continua:

$$\begin{tikzcd} & B \\ Be^{-rT} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B \end{tikzcd}$$

Las únicas modificaciones del análisis son:

- Condición de no arbitraje: $0 < d < e^{rT} < u$
- Probabilidad de riesgo neutral: $q = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$
- Valor del *call*:

$$C = e^{-rT}(qC_u + (1-q)C_d)$$

Árbol Binomial

- La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no solo una vez, sino un numero finito m de veces en el intervalo $[0, T]$ cada δt con $T = m\delta t$. Este modelo es:
  - Simple como para trabajar explícitamente
  - Ayuda para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas mas realistas.

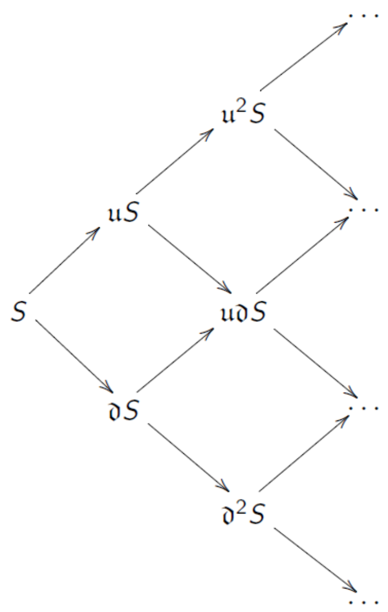
1. Se construye un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este.
2. Se analizar los posibles precios a tiempo T y determinar la probabilidad de riesgo neutral.
3. Yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo.

Notación

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos.

Notación: $S_n^j = S_{\underbrace{uu\ldots u}_{j}\underbrace{dd\ldots d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$

Tomaremos como factor de descuento $e^{-r\delta t}$, es decir un interés continuo. El árbol resulta



Continuemos con el árbol (1/2)

- Luego de m pasos, a tiempo T, el sistema puede tomar **m estados posibles**:

$$S_m^j = S u^j d^{m-j} \qquad 0 \leq j \leq m$$

- La variable aleatoria que representa este comportamiento es la **Binomial**, de aquí el nombre del método. En efecto,

$$\mathbb{P}(S_m(T) = S_m^j(T)) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \qquad 0 \leq j \leq m$$

- Con esta probabilidad, podemos obtener el **valor esperado** de $S(T)$, tomando esperanza:

Continuemos con el árbol (2/2)

$$\mathbb{E}(S(T)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} S \mathfrak{u}^k \mathfrak{d}^{m-k}$$

que no es otra cosa que

$$\mathbb{E}(S(T)) = S(p\mathfrak{u} + (1-p)\mathfrak{d})^m = S(p(\mathfrak{u}-\mathfrak{d}) + \mathfrak{d})^n$$

Si remplazamos $p = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}$, obtenemos:

$$\mathbb{E}(S(T)) = Se^{r\delta t m} = Se^{rT}$$

Que es exactamente lo que queramos que pasara, es decir, se satisface la **relación entre el precio actual y el futuro**.

Probabilidad de Riesgo Neutral

Haciendo un análisis similar al anterior, resulta que:

$$q = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}$$

Notar que q no depende de S, es decir, no depende del precio del activo sino que es **intrínseco al activo**, lo que es mas cercano a la realidad.

Comentario

La condición de no arbitraje para este modelo resulta:

$$0 < \mathfrak{d} < e^{r\delta t} < \mathfrak{u}$$

Que es esto de Riesgo Neutral?

Este concepto de probabilidad de que el activo suba es uno de los conceptos básicos en teoría de valuación:

- No solo con opciones! **Cualquier derivado**
- Es **independiente** al modelo usado. (*model-independent*)

Comentario

El mundo *Riesgo-Neutral* es un mundo en el cual los inversores no tienen ni aversión al riesgo, ni tampoco lo buscan.

Teorema (Teorema Fundamental de la Valuacion de Activos)

El precio de cualquier derivado se puede obtener descontando la esperanza del payoff, bajo la probabilidad de riesgo neutral.

$$V(0) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V(T)]$$

Fórmula recursiva

Como vimos en el ejemplo, surge la siguiente formula recursiva:

$$\begin{cases} C_n^j = e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), & 0 \leq n \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq n \\ C_m^j = (S_m^j - K)^+, \quad 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Conociendo el *Payoff*, **yendo para atrás en el árbol** se pueden conocer todas los valores del derivado, hasta llegar al $C_0^0 = C$.

Esta formula es la base del algoritmo de **Árbol Binomial**

Fórmula recursiva – Caso General

Veamos un método recursivo para valuar cualquier derivado V estilo europeo usando este modelo. Usemos la siguiente notación:

$$V_n^j = V_n(S_n^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

$$V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

Donde $F(S_m^j)$ es el la función de payoff del derivado cuando el valor del activo es S_m^j. Debe verificarse entonces que

$$\begin{cases} V_n = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(V_{n+1}) & 0 \leq n \leq m-1 \\ V_m = F(S_m) \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} V_n^j = e^{-r\delta t}(pV_{n+1}^{j+1} + (1-p)V_{n+1}^j) \qquad 0 \leq n \leq m-1 \qquad 0 \leq j \leq n \\ V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Fórmula cerrada – Caso general

Veamos que se puede llegar a una fórmula cerrada a partir de la recurrencia. Para esto, veamos al precio libre de arbitraje como el descuento esperado del derivado: El tiempo que separa el instante m del n es $(m-n)\delta t$, así que queda.

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)}\mathbb{E}(F(S_m)|S_n = S_n^j)$$

Desarrollando la esperanza condicional, contando todas los posibles casos:

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)}\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)F(S_m^k)$$

Calculemos ahora las $\mathbb{P}$ condicionales $\mathbb{P}(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)$

Fórmula cerrada – Caso general

Esto significa contar el número de caminos que van de S_n^j a S_m^k.

Comentario

Como el precio del subyacente sube siempre con la misma probabilidad, no importa en qué momento lo hace, sino la cantidad de veces (análogamente con las bajas).

En esencia, entonces, la cantidad de caminos es el número de combinaciones de $k-j$ elementos en un conjunto de $m-n$ elementos. (Necesito $k-j$ subas en $m-n$ pasos). Esto no es otra cosa que $\binom{m-n}{k-j}$. La probabilidad buscada es aquella de una variable *multinomial*, cuya función de probabilidad puntual es:

$$\mathbb{P}(S_m = S_m^k | S_n = S_n^j) = \binom{m-n}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{(m-n)-(j-k)}$$

Fórmula cerrada – Caso general

Juntando todo, llegamos a la siguiente fórmula cerrada para V_n^j.

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)} \sum_{k=j}^{m} \binom{m-n+j}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)} F(S_m^k)$$

En particular, de aquí podemos sacar el valor inicial del derivado:

$$V = V_0^0 = e^{-r\delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} F(S_m^k)$$

Obs: El numero combinatorio $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$ involucre el calculo del factorial $m!$

El calculo del numero factorial es un problema computacional en si mismo (tiene un limite)

El caso de la Call Europea

Consideremos ahora una opción call europea sobre el activo S con strike price K y tiempo de expiración T. Recordar que el payoff en este caso es

$$F(S_m) = \text{máx}\{S_m - K, 0\}$$

que $S_0^0 = S$, y notamos $C = V$. Entonces, usando (**??**), el resultado anterior:

$$C = e^{-r\delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \text{máx}\{S_m^k - K, 0\}$$

$$C = e^{-r\delta tm} \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} (S\mathfrak{u}^k \mathfrak{d}^{m-k} - K)$$

En donde k_0 es el mínimo k tal que $S\mathfrak{u}^k\mathfrak{d}^{m-k} > K$, ya que S_m^k es creciente en k.

Bondades del árbol

Comentario

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo.

Comentario

También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

Comentario

También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

Elección de parámetros para el algoritmo

- Los de siempre:
  - $S =$ precio del subyacente ; T $=$tiempo de expiración
  - $\mathrm{K} =$ precio de ejercicio ; $sigma$ $=$volatilidad
  - r $=$tasa libre de riesgo ; *div* = dividendo
- Modelo CRR (Cox Ross Rubinstein):
  - m $=$número de pasos del árbol
  - $\delta t = T/m$
  - $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$
  - $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$; $d = \frac{1}{u}$
  - $q_{prob} = \frac{e^{(r-div)\delta t} - d}{u-d}$

- Hay muchas otras formas de elección de parámetros. CRR y variantes de este son los más usados en la industria.

Algoritmo árbol CRR

```
opcion_europea_bin
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo del Arbol Binomial (CRR)
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
    - pasos : int - Cantidad de pasos del arbol binomial
Outputs
    - precio_BIN: float - Precio del contrato
```

Ejercicio anticipado - árbol binomial

- El modelo del árbol binomial nos permite muy fácilmente agregar la opcionalidad de ejercicio anticipado (Americanas).

- En cada paso t^*del árbol habrá que decidir entre dos:

  - (A) No ejercer y mantener: $C(t^*)$[el valor Europeo]
  - (B) Ejercer y recibir en ese instante: $(S(t^*) - K)$

- La forma de decisión será simplemente evaluar cual de las posiciones tiene valor más alto

Variación de crecimiento

Definición

Definamos la *variación de crecimiento* en el precio de un activo:

$$Y = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_m}{S_0}\right)$$

donde S_m es el precio de la acción a tiempo T y S_0 el inicial.

Comentario

Si se trata de un bono libre de riesgo con interés r, $Y = r$.

Comentario

Notemos también que Y depende de m y que:

$$\frac{S_m}{S_0} = \frac{S_m S_{m-1} \ldots S_1}{S_{m-1} S_{m-2} \ldots S_0}$$

Esperanza de la variación de crecimiento

Podemos entonces escribir la variación de crecimiento como:

$$Y = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln \left(\frac{S_j}{S_{j-1}} \right)$$

También, por cómo construimos el modelo, tenemos que

$$S_j = S_{j-1} H_j \Rightarrow \frac{S_j}{S_{j-1}} = H_j \qquad (1 \leq j \leq m)$$

con

$$H_j = \begin{cases} \mathfrak{u} \text{ con probabilidad } p \\ \mathfrak{d} \text{ con probabilidad } (1-p) \end{cases}, \mathbb{E}(\ln(H_j)) = p \ln(\mathfrak{u}) + (1-p) \ln(\mathfrak{d})$$

Como las H_j son independientes, la esperanza separa la suma:

$$\mu = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln(H_j) \right) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E} \left(\ln(H_j) \right)$$

Esperanza y Varianza de la Variación de Crecimiento

Además están idénticamente distribuidas:

$$\mu = \frac{1}{T} m[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)]$$

Finalmente, como $T = m\delta t$, $\frac{1}{T}m = \frac{1}{\delta t}$, queda:

$$\mu = \frac{1}{\delta t}[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)] = \mathbb{E}(Y)$$

Calculemos ahora la varianza de Y.

$$Var(Y) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\ln(H_j)\right) = \frac{1}{T^2} m Var(H_1)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\left[(\ln^2(\mathfrak{u})p + \ln^2(\mathfrak{d})(1-p)) - (\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p))^2\right]$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\ln^2\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}}\right)p(1-p)$$

Volatilidad

Definición

La volatilidad σ de un activo es la desviación estándar de la variación de crecimiento del precio anualizada (cuando $T = 1$):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\delta t} \ln^2\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}}\right) p(1-p)}$$

Comentario

Dado un activo, es posible estimar su volatilidad a partir de su historia. Una forma sencilla para aproximar la volatilidad de un activo es calcular el desvio estándar de los retornos (r_i) medios:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - M)^2}{N}}$$

con N la cantidad de observaciones y $M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$

Elección de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$

Dada una volatilidad σ fija, elijamos los parámetros $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$. Para esto hacemos:

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' e^{r\delta t} \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{d}' e^{r\delta t} \end{cases}$$

Recordar que en un período de tiempo δt

$$\mathbb{E}(S) = e^{r\delta t} S$$

Con lo cual:

$$\mathfrak{u}' p + \mathfrak{d}'(1-p) = 1$$

Definimos también un parámetro no negativo ρ haciendo:

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{u}'}{\mathfrak{d}'} = e^{2\rho\sqrt{\delta t}}$$

Elección de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$

Usando lo anterior y que p es una probabilidad:

$$p(1-p) = \frac{\sigma^2}{4\rho^2}$$

Esta ecuación tiene sentido sólo cuando $\rho \geq \sigma$. Queda entonces:

$$p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right)$$

Para obtener los valores de $\mathfrak{u}'$ y de $\mathfrak{d}'$ usamos:

$$p = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}, \quad p = \frac{1 - \mathfrak{d}'}{\mathfrak{u}' - \mathfrak{d}'}$$

Elección de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$

Juntando todo, fijado un ρ llegamos a:

$$\mathfrak{u}' = \frac{e^{\rho\sqrt{\delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}, \qquad \mathfrak{d}' = \frac{e^{-\rho\sqrt{\delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}$$

Volviendo para atrás, obtenemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{u} = \frac{e^{\rho\sqrt{\delta t}+r\delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}} \qquad \mathfrak{d} = \frac{e^{-\rho\sqrt{\delta t}+r\delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}$$

Comentario

Dados δt y σ, fijando un ρ, obtenemos distintos modelo consistentes con la teoria. Al cambiar ρ generamos árboles con distintas pendientes para las ramas.

Elecciones comunes

Elecciones más comunes para $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ y para ρ:

1. Simétrica $\rho = \sigma$ Por lo cual $p = \frac{1}{2}$ y, usando lo anterior, los respectivos valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$.
2. $\mathfrak{u} = \frac{1}{\mathfrak{d}}$ Esta elección da como resultado un árbol binomial con una pendiente distinta a la elección anterior.
3. Dado un parámetro ν:

$$\mathfrak{u} = e^{\sigma\sqrt{\delta t}+\nu\delta t}, \qquad \mathfrak{d} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}+\nu\delta t}$$

Una explicación posible de esta elección es que se puede interpretar a ν como un retorno esperado *subjetivo* - asumiendo la probabilidad "subjetiva" $p = \frac{1}{2}$.

El paso al límite

Ahora que conocemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$, estudiemos ahora la variación de crecimiento esperada nuevamente. Reemplazando estos en la ecuación para la esperanza de la variación de crecimiento estudiada anteriormente:

$$E(Y) = \mu = r + \frac{\rho}{\sqrt{\delta t}}(p-(1-p)) - \frac{1}{\delta t}\ln\left[pe^{\rho\sqrt{\delta t}} + (1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}}\right]$$

Comentario

μ depende de la elección de ρ, sin embargo, el efecto de ρ disminuye al refinar el árbol, es decir cuando $\delta t \to 0$.

De hecho, usando que $2p-1 = \pm\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\rho^2}}$ obtenemos:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}((2p-1)\rho^3\sqrt{\delta t})$$

El paso al límite

Lo que dice que, en el límite, cuando $\delta t \ll T$ tenemos:

$$\mu \approx r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Recordemos que la variación de crecimiento es suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln H_j$$

Ajustando los parámetros y sabiendo que tomamos $\delta t \ll T$, tenemos la esperanza y la varianza de Y:

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad , \qquad Var(Y) = \frac{\sigma^2}{T}$$

El paso al límite

Podemos afirmar, por el **Teorema Central del Límite** que, cuando $\delta t \longrightarrow 0$, es decir $m \longrightarrow \infty$, Y tiende en distribución a una variable aleatoria Normal con media $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{T}$:

$$Y \longrightarrow^{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

Recordemos cómo definimos a Y:

$$Y = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_m}{S_0}\right)$$

Si operamos un poco con este resultado:

$$e^Y = \left(\frac{S_m}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{TY} = \frac{S_m}{S_0} \Rightarrow S_m = S_0 e^{TY}$$

donde Y tiende a una distribución Normal $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T}\right)$.

El paso al límite

Desarrollando en el límite la variable Y y reemplazando S_T por S_m como S a tiempo T, nos queda:

$$S_T = S_0 e^{T\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comentario

Notar que el análisis previo puede hacerse para cualquier $t \in (0, T]$, con lo cual el precio del activo subyacente a tiempo t tiene distribución *log-normal*, y se escribe:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comentario

Este será el modelo para el activo cuando estudiemos el caso continuo

Camino a la fórmula de Black Scholes

Ahora sea un derivado V del tipo europeo con función de payoff $F(S)$ como vimos en repetidas ocasiones podemos decir que

$$V = e^{-rT}\mathbb{E}(F(S_m))$$

Usando la distribución del activo, por el Teorema Central del Límite (hay que pedirle al payoff que sea linealmente creciente) se tiene:

$$\lim_{\delta t \to 0} V = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T})e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

Donde $S = S_0$ es el precio inicial del activo y se usó explícitamente

la función de distribución de la normal en el cálculo de la esperanza

La fórmula de Black-Scholes

Apliquemos el resultado anterior a una call europea. Supongamos una tasa de interés r, una volatilidad σ, un tiempo de expiración T y un strike price K. La aproximación log-normal resulta:

$$C = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\left(Se^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0 \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$C = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} Se^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - Ke^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

En dónde $-d_2$ es el z tal que $e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} = K$, es decir, a partir de cuando deja de ser nulo el integrando. Se puede obtener explícitamente:

$$-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

La fórmula de Black-Scholes

Haciendo el cambio de variables $u = z - \sigma\sqrt{T}$ en la primera integral y, usando propiedades de la normal obtenemos:

$$C = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Que podemos escribirla como la **fórmula de Black-Scholes**:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(-d_2)$$

en donde:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Algoritmo BS

```
opcion_europea_bs
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo de Black Scholes
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
Outputs
    - precio_BS: float - Precio del contrato
```