Quant Finance 4

Manuel Maurette

Clase 4: Modelo de Black Scholes

UCEMA

Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

- Fórmulas Cerradas / Aproximaciones analíticas
- Modelos de árboles (*lattices*)
- Modelos de Ecuaciones Diferenciales
- Montecarlo
- Ad-hoc

Variación de Crecimiento

Definición

Definamos la *variación de crecimiento* en el precio de un activo:

$$Y = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_m}{S_0} \right)$$

donde S_m es el precio de la acción a tiempo T y S_0 el inicial.

Comentario

Si se trata de un bono libre de riesgo con interés r, $Y = r$.

Comentario

Notemos también que Y depende de m y que:

$$\frac{S_m}{S_0} = \frac{S_m S_{m-1} \ldots S_1}{S_{m-1} S_{m-2} \ldots S_0}$$

Esperanza de la variación de crecimiento

Podemos entonces escribir la variación de crecimiento como:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)$$

También, por cómo construimos el modelo, tenemos que

$$S_j = S_{j-1}H_j \Rightarrow \frac{S_j}{S_{j-1}} = H_j \qquad (1 \leq j \leq m)$$

con

$$H_j = \begin{cases} \mathfrak{u} \text{ con probabilidad } p \\ \mathfrak{d} \text{ con probabilidad } (1-p) \end{cases}, \mathbb{E}(\ln(H_j)) = p\ln(\mathfrak{u}) + (1-p)\ln(\mathfrak{d})$$

Como las H_j son independientes, la esperanza separa la suma:

$$\mu = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\ln(H_j)\right) = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left(\ln(H_j)\right)$$

Varianza de la variación de crecimiento

Además están idénticamente distribuidas:

$$\mu = \frac{1}{T} m[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)]$$

Finalmente, como $T = m\delta t$, $\frac{1}{T}m = \frac{1}{\delta t}$, queda:

$$\mu = \frac{1}{\delta t}[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)] = \mathbb{E}(Y)$$

Calculemos ahora la varianza de Y.

$$Var(Y) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln(H_j)\right) = \frac{1}{T^2} m Var(H_1)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\left[(\ln^2(\mathfrak{u})p + \ln^2(\mathfrak{d})(1-p)) - (\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p))^2\right]$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\ln^2\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}}\right) p(1-p)$$

El paso al límite del Árbol Binomial (1/4)

Ahora que conocemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$, estudiemos ahora la variación de crecimiento esperada nuevamente. Reemplazando estos en la ecuación para la esperanza de la variación de crecimiento estudiada anteriormente:

$$E(Y) = \mu = r + \frac{\rho}{\sqrt{\delta t}}(p - (1-p)) - \frac{1}{\delta t} \ln \left[p e^{\rho\sqrt{\delta t}} + (1-p) e^{-\rho\sqrt{\delta t}} \right]$$

Comentario

μ depende de la elección de ρ, sin embargo, el efecto de ρ disminuye al refinar el árbol, es decir cuando $\delta t \to 0$.
De hecho, usando que $2p - 1 = \pm\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}$ obtenemos:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}((2p-1)\rho^3\sqrt{\delta t})$$

El paso al límite del Árbol Binomial (2/4)

Lo que dice que, en el límite, cuando $\delta t \ll T$ tenemos:

$$\mu \approx r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Recordemos que la variación de crecimiento es suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln H_j$$

Ajustando los parámetros y sabiendo que tomamos $\delta t \ll T$, tenemos la esperanza y la varianza de Y:

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad , \qquad Var(Y) = \frac{\sigma^2}{T}$$

El paso al límite del Árbol Binomial (3/4)

Podemos afirmar, por el **Teorema Central del Límite** que, cuando $\delta t \longrightarrow 0$, es decir $m \longrightarrow \infty$, Y tiende en distribución a una variable aleatoria Normal con media $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{T}$:

$$Y \longrightarrow^{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

Recordemos cómo definimos a Y:

$$Y = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_m}{S_0}\right)$$

Si operamos un poco con este resultado:

$$e^Y = \left(\frac{S_m}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{TY} = \frac{S_m}{S_0} \Rightarrow S_m = S_0 e^{TY}$$

donde Y tiende a una distribución Normal $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T}\right)$.

El paso al límite del Árbol Binomial (4/4)

Desarrollando en el límite la variable Y y reemplazando S_T por S_m como S a tiempo T, nos queda:

$$S_T = S_0 e^{T\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}Z+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comentario

Notar que el análisis previo puede hacerse para cualquier $t \in (0, T]$, con lo cual el precio del activo subyacente a tiempo t tiene distribución *log-normal*, y se escribe:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comentario

Este será el modelo para el activo cuando estudiemos el caso continuo

Camino a Black-Scholes (1/2)

Ahora sea un derivado V del tipo europeo con función de payoff $F(S)$ como vimos en repetidas ocasiones podemos decir que

$$V = e^{-rT}\mathbb{E}(F(S_m))$$

Usando la distribución del activo, por el Teorema Central del Límite (hay que pedirle al payoff que sea linealmente creciente) se tiene:

$$\lim_{\delta t \to 0} V = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T})e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

Donde $S = S_0$ es el precio inicial del activo y se usó explícitamente la

función de distribución de la normal en el cálculo de la esperanza

Camino a Black-Scholes (2/2)

Apliquemos el resultado anterior a una call europea. Supongamos una tasa de interés r, una volatilidad σ, un tiempo de expiración T y un strike price K. La aproximación log-normal resulta:

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \max\left(Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0\right) e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - Ke^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

En dónde $-d_2$ es el z tal que $e^{\sigma\sqrt{T}z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T} = K$, es decir, a partir de cuando deja de ser nulo el integrando. Se puede obtener explícitamente:

$$-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Fórmula de Black-Scholes

Haciendo el cambio de variables $u = z - \sigma\sqrt{T}$ en la primera integral y, usando propiedades de la normal obtenemos:

$$C = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Que podemos escribirla como la **fórmula de Black-Scholes**:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

en donde:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Algoritmo BS

```
opcion_europea_bs
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo de Black Scholes
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
Outputs
    - precio_BS: float - Precio del contrato
```

Un modelo de dinámica continua (1/2)

A partir de ahora pasaremos de modelos en los cuales los activos pueden tomar distintos valores en $0 = t_0 < t_1 < \cdots < \ t_N = T$ a modelos el los cuales pueden tomar distintos valores para cualquier valor $t \in [0, T]$. Es decir, modelos continuos.

Supongamos que a tiempo t el precio de un activo es $S(t)$, consideremos un lapso dt en el que el precio varía a $S(t) \ + \ dS(t)$.

Definición

En una inversión S, la tasa de retorno sobre un período $[t, t \ + dt]$ se define como:

$$ret \ = \ \frac{S(t \ + \ dt) - S(t)}{S(t)} = \frac{dS(t)}{S(t)}$$

Un modelo de dinámica continua (2/2)

Ahora surge la pregunta: ¿Cómo se puede modelar el retorno?:

Gran problema de finanzas! Consenso:

- Una parte **determinística**, que da una contribución de μdt
- Una parte **estocástica**. Cambios aleatorios del activo, factores externos, noticias inesperadas: $\sigma\Phi$, con Φ con distribución normal

¿Por qué usaremos este modelo? – Standard de la industria

Basta ver series históricas de precios de acciones para convencernos de que tiene sentido tomar este modelo

Dinámica de un activo

Usaremos el siguiente modelo:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)\Phi(t)$$

Llamaremos :

- **deriva** -*drift* a μ
- **volatilidad** a σ
- Φ es un componente estocático - en particular, Normal

La idea de este módulo es estudiar esta dinámica para modelar el precio de un activo y así poder valuar derivados.

Comentario

La notación que comenzaremos a usar es la siguiente:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

En donde $W(t)$ es un Movimiento Browniano.

Movimiento Browniano

La notación que comenzaremos a usar es la siguiente:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

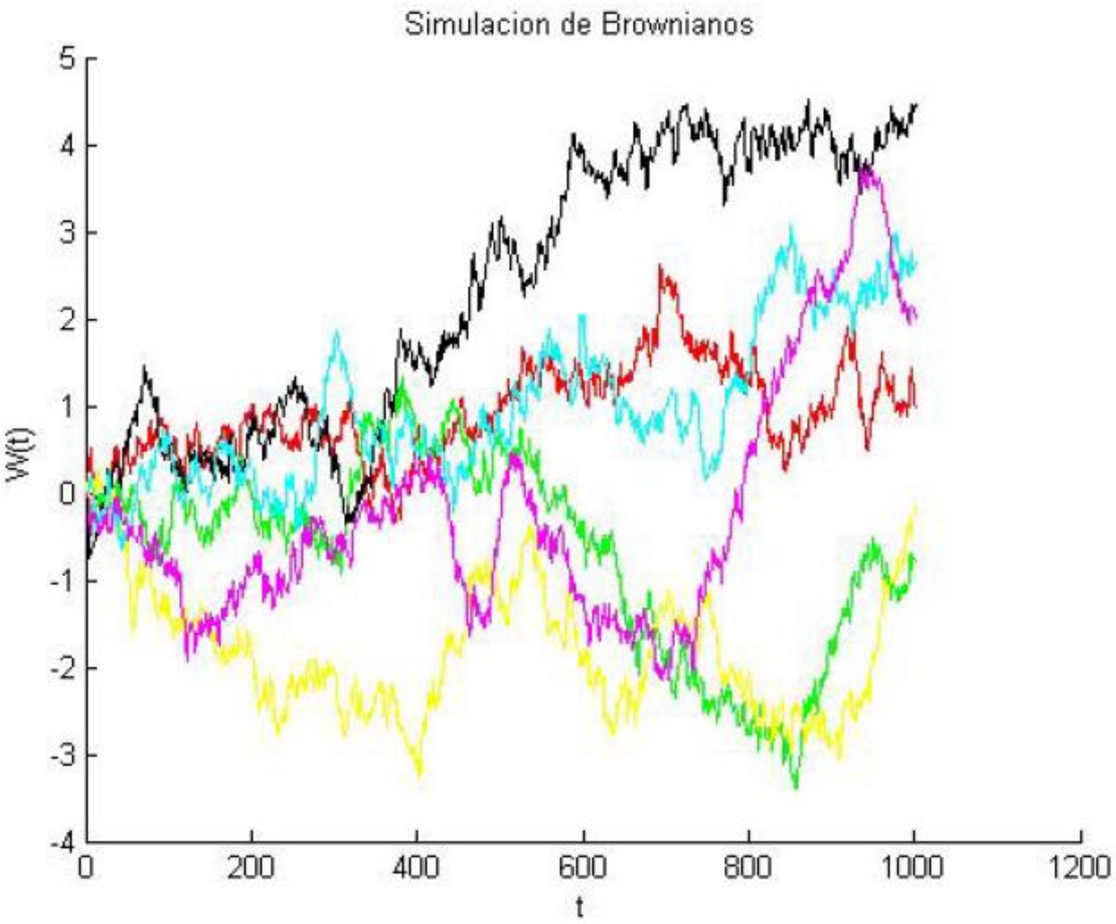
Con

$$dW(t) = W(t + dt) - W(t) \sim N(0, dt)$$

La anterior dinámica se denomina un Browniano Geométrico. En donde $W(t)$ es un **Movimiento Browniano**.

El movimiento Browniano es un objeto matemático que vamos a estudiar en el transcurso de estas clases.

Simulaciones de un Movimiento Browniano



Movimiento Browniano – historia (1/3)

- **1828** - El botánico **Robert Brown** reporta que granos de polen suspendidos en una cierta sustancia vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable.

- **1900** – El matemático **Louis Bachelier** publica su tesis doctoral Teoría de la especulación, en la que utiliza el movimiento browniano para modelar activos financieros, aunque su uso es poco riguroso.

- **1905** – El físico **Albert Einstein** publica un trabajo que contribuye a explicar el movimiento como múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Tal explicación se basa en la teoría cinética molecular de la materia.

Movimiento Browniano – historia (2/3)

- **1923** – El matemático **Norbert Wiener** formaliza matemáticamente el movimiento browniano, siendo el primero en dar una construcción formal del mismo.

- **1943** - **Itô** desarrolla el calculo estocástico y la teoría de integrales estocasticas

- **1965** - **Samuelson** agrega un ingrediente al modelo de Bachelier y propone que son en realidad los retornos de los activos, y no sus precios, los que siguen un movimiento browniano con drift

Movimiento Browniano – historia (3/3)

- **1973** - **Black y Scholes** publican su trabajo sobre opciones, en el que asumiendo el modelo de Samuelson y ausencia de oportunidades de arbitraje, llegan a una formula cerrada para el precio de estos contratos. Junto con **Merton**, completan el marco conceptual vigente.

- **1990 – Hull y White** usan el movimiento browniano para modelar el *short rate*. Es hoy la piedra fundamental del modelado de derivados de tasa

- **1997** – **Scholes y Merton** reciben el nobel de Economía

De acá en más... mucha Teoría...

Para formalizar este modelo deberemos *arremangarnos y encisuarnos un poco las manos* en la teoría de probabilidad moderna.

- Estamos a tiempo 0
- Un contrato finaliza a tiempo T
- Necesitamos tomar decisiones en $0 \leq t \leq T$

La información a tiempo t es **aleatoria**:

- ω es una posible evolución del mercado.
- Ω es el conjunto de todas las posibles evoluciones del mercado. El espacio muestral.

Espacios de Probabilidad - Variables Aleatorias

Un rato de formalismo, recuerden que soy matemático.

Definición

Una terna $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ se llama un *espacio de probabilidad* si Ω es un conjunto cualquiera, $\mathcal{U}$ una σ-álgebra de conjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad en $\mathcal{U}$.

Definición

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se llama una *variable aleatoria n-dimensional* si para todo $B \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{U}$$

se dice también que X es $\mathcal{U}$-medible.

Ejemplos

Ejemplo

- Tirar una moneda n veces y observar las secuencias de caras y secas.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = c, s \quad i = 1, \dots, n\}$$

Definimos X=número de caras obtenidas, o bien:

$$X(\omega) = \#\{w_i = c, \quad i = 1, \dots, n\}$$

- Elegir un punto al azar en el intervalo $[0,1]$, elevarlo al cuadrado y sumarle π. Tenemos entonces:

$$\Omega = [0,1] \qquad X(\omega) = \omega^2 + \pi$$

Función de distribución

Las variables aleatorias tienen asociada una importante función:

Definición

Dada una variable aleatoria X, se llama *función de distribución* a la función F_X o simplemente F definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Definición

Una variable aleatoria es *discreta* si toma un número a lo sumo numerable de valores, es decir, existe un conjunto a lo sumo numerable $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\Omega) \subset \{x_1, x_2, \ldots\}$. En este caso se define la *función de probabilidad puntual* p_X como

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 1, 2, \ldots$$

Función de distribución

Definición

Una variable aleatoria es *(absolutamente) continua* si existe una función $f_X \geq 0$ llamada *función de densidad de probabilidad* tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Está claro que no todas las variables aleatorias son o discretas o continuas, pero se puede demostrar que cualquiera es una suma de una continua y una discreta (otro cantar)

Comentario

En lenguaje de Teoría de la medida, la función de distribución se puede definir como:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X < x)$$

Esperanza

Definición

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}$$

Si el proceso es discreto:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Si el proceso es continuo:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) dx$$

Esperanza Condicional

Definición (Esperanza Condicional)

Sea $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria y $\mathcal{H}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. La **esperanza condicional** de X dado $\mathcal{H}$ es la función $\mathcal{H}-$medible $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ que satisface:

$$\int_H \mathbb{E}[X|\mathcal{H}](\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_H X(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \qquad \forall\, H \in \mathcal{H}$$

Comentario

La esperanza condicional es entonces, tomando la medida $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$$

Radon-Nikodym

La derivada anterior proviene de:

Teorema (Radon-Nikodym - version Proba)

Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$*, una medida* σ*-finita* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *y una medida con signo* σ*-finita* $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua con respecto a* $\mathbb{P}$*, entonces existe una única función medible* f *sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *que satisface:*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f \, d\mathbb{Q} \text{ para todo } A \in \mathcal{F}$$

A f *se la denomina la derivada de Radon-Nikodym:*

$$f = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$$

Procesos Estocásticos

Definición

Una colección $X_t = X(t) = X_{t>0} = \{X(t) : t > 0\}$ de variables aleatorias se llama un *proceso estocástico*

Ejemplo

Consideremos una partícula en el origen de la recta. Cada segundo se mueve una unidad a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad. Es decir, pasa del estado (x, t) a $(x+1, t+1)$ o al $(x-1, t+1)$. Este es un ejemplo de un *paseo al azar*. El espacio sería:

$$\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) : w_i \in \{-n, -(n-1), ..., 0, ...(n-1), n\}\}$$

Podemos definir por ejemplo el proceso X_n, discreto, como el número de veces que la partícula vuelve al origen a tiempo t:

$$X_n = \#\{i : w_i = 0\}$$

Algunos Procesos Importantes

- **Procesos de Markov** Suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov:

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A|X_s)$$

- **Martingalas** El valor promedio del proceso en un tiempo futuro es el valor del proceso en su último momento observado. Esto es, se trata de una ley de movimiento aleatorio que es equilibrada o simétrica, pues en promedio el sistema no cambia del último momento observado.

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, \qquad t > s$$

  F_s es el conjunto de toda la información hasta tiempo s. Se llama también **filtración**.

El Movimiento Browniano cumplirá estas dos propiedades.

Movimiento Browniano - Propiamente Dicho

Definición

Un Movimiento Browniano (o proceso de Wiener) $W(t)$ es un proceso estocástico tal que:

- $W(0) = 0$
- $W(t)$ es continuo - Las trayectorias son continuas.
- Para cualquier colección de instantes $s < t < u < v$, las variables $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes.
- Para cualquier colección de instantes $s < t$, la variable $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

Comentario

Se puede probar la existencia de un Movimiento Browniano.

Algunas Propiedades

Sea $W(t)$ un M.B.:

- $\mathbb{E}(X(t)) = 0$, $Var(X(t)) = t$, $\mathbb{E}((W(t) - W(s))^2) = t - s$
- $Cov(W(t), W(s)) = \min(s, t)$
- $W(t)$ es de Markov y Gausiano
- $W(t)$ es Martingala
- $W(t)^2 - t$ es Martingala
- Para todo u, $e^{uW(t) - u^2 t/2}$ es Martingala.

Browniano Geométrico

Como vimos más temprano, el modelo que usaremos para un activo será el de Browniano Geométrico:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Se puede probar (Fórmula de Ito) que el MBG sigue:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** sirven para modelar a la dinámica de una trayectoria suave. Por ejemplo:

$$\frac{df(t)}{dt} = rf(t), \qquad f(0) = f_0$$
$$df(t) = rf(t)dt, \qquad f(0) = f_0$$

Solución: $f(t) = f_0 e^{rt}$

¿Que pasa ahora, si lo que queremos modelar tiene un componente estocástico?

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Ejemplo de **Ecuación Diferencia Estocástica**:

$$dR(t) = \sigma dW(t), R(0) \ = R_0$$

En donde $dW(t)$ representara $W(t \ + \ dt) - W(t) \sim \ N(0, dt)$.

Nuestro modelo de precio de un activo cumple la siguiente EDE:

$$dS(t) = \ \mu S(t)dt \ + \sigma S(t)dW(t), \qquad S(0) = S_0$$

Para resolver EDO la herramienta clave era el **cálculo diferencial**

Calculo Diferencial

Si $f(x)$ es una función dos veces derivable de una variable:

- $f(x+\varepsilon) - f(x) = df(x) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \cdots$

Si $f(t,x)$ es una función dos veces derivable de dos variable:

- $df(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dt^2}dt^2 + \frac{d^2f}{dxdt}dtdx + \cdots$

$$df(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \cdots$$

Obs: Los tres puntos suelen ser términos tan chiquitos como uno quiera. Incluso:

- $dx^2 \sim dt^2 \sim dxdt \sim 0$

La idea es ahora extender esto a las funciones estocásticas

Variación Cuadrática

Definición

Dada f una función, se define su **variación cuadrática** en $[0, t]$, como el siguiente límite:

$$[f, f](t) = \lim_{\|\Pi\|} \sum_{i=0}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2$$

en donde Π es una partición del $[0, t]$,
$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = t$.

Comentario

Si f es derivable con derivada acotada, $[f, f](t) = 0$.

Teorema

$$[W, W](t) = t \ \sim \ dW^2 = dt$$

$dW^2 = dt$

Recordemos la aproximación de segundo orden en dos variables para una $f(t, S)$ [derivada total]:

$$df = f_t dt + f_S dS + f_{tt} dt^2 + 2 f_{tS} dt dS + f_{SS} dS^2 + \mathcal{O}(dt^3, dS^3, dt dS^2, dt^2 dS)$$

Ustedes reiteradas veces habrán cortado antes:

$$df = f_t dt + f_S dS,$$

suponiendo $dt^2 = dt dS = dS^2 = 0$. **Suele tener sentido** Pero nosotros tenemos que $dS^2 = \mathcal{O}(dt)$ y no es despreciable!

Cálculo Estocástico

Se quiere una fórmula para diferenciar fórmulas de la forma $f(W(t))$ con W un Brownaino.

Teorema (Fórmula de Ito)

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt$$

Si ahora tengo $f = f(S(t), t)$:

$$df(t) = f_S dW(t) + f_t dt + \frac{1}{2} f_{SS} dt$$

Finalmente, veamos como cuaja todo esto en Finanzas.

Modelo de Black Scholes Merton

Recordar: Una opción *call* europea sobre un activo es un contrato que le da el derecho a una de las partes a comprar dicho activo a un precio acordado y en una fecha estipulada.

Notación:

- S:= precio del activo.
- K:= precio de ejercicio.
- T:= tiempo de expiración (vencimiento)
- μ, σ := deriva (tendencia) y volatilidad del activo
- $C(S;\ t)$:= valor de la opción.

Recordemos además el *payoff*:

$$C(S(T), T) = \max(S(T) - K, 0)$$

Supuestos de Black Scholes (1/2)

Estos son los supuestos que nos van a permitir derivar la formula de Black Scholes Merton

1. El precio del activo sigue un movimiento Browniano geométrico con μ, y σ constantes.

2. Es permitido la compra en corto (*short selling*) del activo.

3. No hay presencia de costos de transacción y todos los activos son perfectamente divisibles.

Supuestos de Black Scholes (2/2)

4. El activo no paga dividendos en la vida del derivado

5. **No hay oportunidades de arbitraje**.

6. El trading de activos de realiza de manera continua

7. La tasa de interés libre de riesgo r es continua y es la misma para todo tiempo (constante).

Notar que cada una de los supuestos es discutible (algunos directamente falsos en el mediano plazo)

Estrategia de replicación (1/2)

Contamos con los siguientes productos a disposición

- activo S
- opción C
- dinero B – *moneymarket*

Idea – Idéntica a cuando trabajamos con el binomial:

Replicar con S y C a B.
Es decir, armarse un portfolio libre de riesgo. Sea:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \textit{ short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \textit{ long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

Estrategia de replicacion (2/2)

Veamos lo que sabemos de este portfolio Π

- A tiempo final, su valor es:

$$\Pi(T) = \Delta S(T) - C(T) = \Delta S(T) - (S(T) - K)^+$$

- Busco que Π sea libre de riesgo:

$$\boxed{d\Pi = r\Pi dt} = r\Delta S dt - rC dt$$

- Por otro lado: la dinámica de Π es:

$$d\Pi = \Delta dS - dC = \Delta[\mu S dt + \sigma S dW] - dC$$

El termino dC

Quién es dC? Usando la fórmula de Ito para $C(S(t), t)$:

$$dC = C_S dS + C_t dt + \frac{1}{2}\left(C_{SS} dS^2 + 2C_{tS} dSdt + C_{tt} dt^2\right)$$

Usando que $dS = S\mu dt + S\sigma dW$ y olvidándonos de los términos de menor orden $dtdS$ y dt^2 queda:

$$dC = C_S[S\mu dt + S\sigma dW] + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS}[S\mu dt + S\sigma dW]^2$$

Notar que $[S\mu dt + S\sigma dW]^2 = S^2\sigma^2 dW^2 = S^2\sigma dt$.
Con lo cual tenemos:

$$dC = C_S S\mu dt + C_S S\sigma dW + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} S^2\sigma^2 dt$$

Pero Π era libre de riesgo (1/2)

Tenemos entonces la dinámica de Π:

$$d\Pi = \Delta\mu S dt + \Delta\sigma S dW - C_S S\mu dt + C_S S\sigma dW + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} S^2\sigma^2 dt$$

reordenando los términos resulta:

$$d\Pi = \left(\Delta\mu S - C_t - C_S S\mu - \frac{1}{2} C_{SS} S^2\sigma^2\right) dt + (\Delta\sigma S - \sigma S C_S)\, dW$$

Es en este momento donde recordamos que nuestro porfolio lo construimos para que sea libre de riesgo (no estocástico!).

$$\text{Tomamos } \Delta = C_S = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Recordar el $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ en el caso discreto.

Pero Π era libre de riesgo (2/2)

Juntando ahora las dos expresiones que teníamos para $d\Pi$:

$$d\Pi = r\Pi dt = (r\Delta S - rC)dt = rC_S S dt - rCdt$$

$$d\Pi = \left(-C_t - S^2\sigma^2\frac{1}{2}C_{SS}\right)dt$$

Obtenemos la Ecuación de Black Scholes:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0 \\ C(S,T) = (S-K)^+\end{gathered}}$$

La formula de Black Scholes (1/2)

La anterior Ecuación en Derivadas parciales tiene solución cerrada*:*

Teorema (Fórmula de Black Scholes)

$$C(S,t) = SN(d^+) - Ke^{-r(T-t)}N(d^-)$$

Con:

$$d^+ = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_- = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Y N la función cumulativa de la distribución normal con media 0 y varianza 1 - $N(0,1)$:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

La formula de Black Scholes (2/2)

Comentario (En $t = 0$)

Cuando $t = 0$, se obtiene el valor de la opción a tiempo inicial:

$$C(S) = SN(d^+) - Ke^{-rT} N(d^-)$$

- *Put* Europea que no pague dividendos

$$P = Ke^{-rT} N(-d^-) - S_0 N(-d^+)$$

Black Scholes con pago de dividendos

Es sencillo extender Black Scholes cuando se supone que el pago de dividendos es continuo a una tasa div (aproximación de la realidad)

- *Call* Europea que pague dividendos

$$C_{div} = S_0 e^{-div\,T} N(d_{div}^{+}) - Ke^{-rT} N(d_{div}^{-})$$

- *Put* Europea que pague dividendos

$$P_{div} = Ke^{-rT} N(-d_{div}^{-}) - S_0 e^{-div\,T} N(-d_{div}^{+})$$

- Dónde:

$$d_{div}^{+} = \frac{\ln(S/K) + (r - div + 1/2\,\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_{div}^{-} = d_{div}^{+} - \sigma\sqrt{T}$$

Algoritmo BS

```
opcion_europea_bs
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo de Black Scholes
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
Outputs
    - precio_BS: float - Precio del contrato
```

Apendice

De la Ecuación de Black Scholes a la Formula de Black Scholes, pasando por la Ecuación del Calor

Ecuación de Black Scholes

Recordemos la ecuación de Black Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S,T) = (S-K)^+$$

De Black Scholes a la Ec. del Calor (1/3)

Black Scholes se puede tranformar en la Ecuación del Calor:
Cambiando variables:

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K}$$

Llamando $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T\frac{\sigma^2}{2}] \\ v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De Black Scholes a la Ec. del Calor (2/3)

Proponemos por último $v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta r} u(x,\tau)$ con α y β dos parámetros a determinar:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) + ku$$

Se elige α y β para que se anulen u y $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \qquad y \qquad 0 = 2\alpha + (k-1)$$

De Black Scholes a la Ec. del Calor (3/3)

Tenemos entonces una ecuación para u:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con la condición inicial:

$$u(x,0) = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\} = u_0(x)$$

u cumple con la **ecuación del calor**, cuya solución está dada por:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{x-s}{4r}}\, ds$$

Solución de la Ec. del Calor (1/6)

Que es una convolución entre la condición inicial y la solución fundamental de la ecuación del calor, también llamada, *Núcleo de Poisson.*

Evaluemos esta integral haciendo el cambio $x' = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$, $(s = x'\sqrt{2\tau} + x)$ queda entonces:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'} dx'$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x'\sqrt{2\tau}+x)}, 0\} e^{-\frac{1}{2}x'} dx'$$

Solución de la Ec. del Calor (2/6)

Nos deshacemos del máximo:

$$e^{\frac{1}{2}(k+1)s} - e^{\frac{1}{2}(k-1)s} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)s} \geq e^{\frac{1}{2}(k-1)s} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k+1)s \geq \frac{1}{2}(k-1)s \Leftrightarrow s \geq -s$$

Es decir, en nuestro caso, sí y solo sí $s \geq 0$. Por lo cual el integrando no va a ser nulo cuando $x'\sqrt{2\tau} + x \geq 0$, es decir, si $x' \geq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$. La solución queda entonces:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx'$$

Una resta de dos integrales:

$$u(x,\tau) = I_1 - I_2$$

Solución de la Ec. del Calor (3/6)

Calculemos finalmente cada una de estas por separado. Empecemos por I_1 (El cálculo de I_2 será análogo). Primero sacamos del integrando el término que no depende de x' y juntamos las dos exponenciales:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}x'} dx'$$

Completando cuadrado en el exponente tenemos:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}(x'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx'$$

Ahora, sacamos también el término que no depende de x' y llamamos

$$\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

Solución de la Ec. del Calor (4/6)

con lo cual, haciendo el cambio de variable nos queda:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

Llamando

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

resulta:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

En donde $N(\cdot)$ es la función de probabilidad de la distribución Normal:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

Solución de la Ec. del Calor (5/6)

El cálculo de I_2 es idéntico a aquel de I_1, reemplazando $(k+1)$ por $(k-1)$ en todo el análisis. Es decir, resulta:

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

Tenemos entonces una fórmula explícita para $u(x,\tau)$:

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2) \tag{32}$$

Ahora habrá que volver a cambiar las variables para llegar a una expresión para $C(S,t)$. En primer lugar, teníamos que

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}u(x,\tau)$$

Solución de la Ec. del Calor (6/6)

Es decir, nos queda una expresión para $v(x,\tau)$:

$$v(x,\tau) = e^{x} N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2)$$

Ahora usamos que

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K} \qquad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

entonces llegamos a:

$$\frac{C(S,t)}{K} = e^{\ln\left(\frac{S}{K}\right)} N(d_1) - e^{-\frac{r}{\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2)$$

La Fórmula de Black Scholes

Que, arreglándola un poco se transforma en la **fórmula de Black-Scholes**:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{33}$$

Con:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{34}$$

Notar que es la misma fórmula a la que habíamos llegado en (3.6), lo que era de suponer. Además también notar que teniendo como datos la volatilidad σ y la tasa libre de riesgo r, el valor de C queda totalmente determinado:

$$C(S,t) = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds - Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$