QUANT FINANCE 7

JUAN I. SANCHEZ VIETTO

CLASE 7: GRIEGAS Y PNL

Programa de Finanzas Cuantitativas QUANt

UCEMA

BIBLIO

- GRIEGAS: CAPITULO 17 DEL HULL (7ma edición)
- PNL: pnlexplained.com

GRIEGAS

- SON LAS DERIVADAS DEL PRECIO RESPECTO A VARIABLES DEL MERCADO (O CUALQUIER PARÁMETRO DEL QUE DEPENDA EL PRECIO)

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} \quad , \quad x_i: \text{ variable de mercado.}$$

- LAS MAS RELEVANTES TIENEN NOMBRES DEFINIDOS:

Para un call: $\underset{(\text{delta})}{\Delta} = \frac{\partial C}{\partial S}$, $\underset{(\text{theta})}{\Theta} = \frac{\partial C}{\partial \tau}$, $\underset{(\text{vega})}{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$, $\underset{(\text{gamma})}{\Gamma} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$

$$\underset{(\text{rho})}{\rho} = \frac{\partial C}{\partial r} \quad , \quad \ldots$$

GRIEGAS

- MIDEN LA SENSIBILIDAD DEL PRECIO CUANDO SE MUEVE UN PARÁMETRO MIENTRAS SE DEJAN TODOS LOS DEMÁS CONSTANTES: (incluido el tiempo)

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{C(S+\epsilon, t, T, K, \sigma, r) - C(S, t, T, K, \sigma, r)}{\epsilon}$$

obs: EXISTEN TAMBIÉN DERIVADAS CRUZADAS DONDE 2 Ó MÁS PARÁMETROS VARÍAN MIENTRAS LOS DEMÁS SON CTES. ej: $\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma}$

GRIEGAS

VEAMOS LAS GRIEGAS DE BLACK-SCHOLES.

- DELTA: $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ SENSIBILIDAD RESPECTO AL PRECIO SPOT S

$$\Delta = N(d_+) \quad , \quad d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(S/K\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$C = N(d_+)\,S - Ke^{-r(T-t)}N(d_-)$$

$$\Rightarrow \quad C = \Delta \cdot S - Ke^{-r(T-t)}N(d_-)$$

GRIEGAS

VEAMOS LAS GRIEGAS DE BLACK-SCHOLES:

- DELTA: $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ SENSIBILIDAD RESPECTO AL PRECIO SPOT S

$$\Delta = N(d_+) \quad , \quad d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(S/K\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$C = N(d_+)\,S - Ke^{-r(T-t)}N(d_-)$$

$$\Rightarrow \quad C = \Delta . S - Ke^{-r(T-t)}N(d_-)$$

$$C = \Delta S + \cdots$$

$\hookrightarrow$ PARA REPLICAR C NECESITAMOS Δ UNIDADES DE S.

GRIEGAS

- <u>call</u>: $0 < \Delta < 1 \quad \forall t < T$.

  NO NECESITAMOS MÁS QUE UN STOCK PARA REPLICAR UN CALL.

- <u>put</u>: $-1 < \Delta < 0$

  NO NECESITAMOS MÁS QUE -1 STOCK PARA REPLICAR UN CALL.

- LA MAYOR VARIACIÓN DE DELTA SE DA ATM

  (RECORDAR PARA $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$)

GRIEGAS

- **THETA:** SENSIBILIDAD RESPECTO AL PASO DEL TIEMPO.

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{SN'(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_-)$$

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{SN'(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_-)$$

- PARA UN CALL $\Theta < 0$, EL VALOR DEL CALL DISMINUYE CON EL TIEMPO (RECORDAR QUE S (Y TODO LO DEMÁS) ES CONSTANTE.

$$C = \underbrace{\text{VALOR INTRINSECO}}_{(S-K)} + \underbrace{\text{VALOR TIEMPO}}_{\text{DECAE CON EL TIEMPO}}$$

GRIEGAS

- <u>GAMMA</u>: MIDE LA VARIACIÓN DE Δ CUANDO CAMBIA S.
    - SI GAMMA ES CHICO Δ VARIA POCO Y NO NECESITO REBALANCEAR $C \sim \Delta S + R$
    - SI GAMMA ES GRANDE NECESITO REBALANCEAR CON MAYOR FRECUENCIA.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T-t}}$$

GRIEGAS

- **VEGA**: SENSIBILIDAD RESPECTO A LA VOLATILIDAD

$$V = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)$$

- **RHO**: SENSIBILIDAD RESPECTO A LA TASA DE INTERES

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = K(T-t)\,e^{-r(T-t)}\,N(d_2)$$

GRIEGAS

EN GENERAL:

MERCADO	1º ORDEN	2º ORDEN VOL. . . . .
EQUITY	STOCK DELTA	STOCK VEGA
INTEREST RATE	IR DELTA	IR VEGA
FX	FX DELTA	FX VEGA
⋮	⋮	⋮

DELTA - HEDGING:

C: CALL

H: HEDGE

S: Stock

BS ó Market.

$$C = C(S_t, t) \longrightarrow C(t) = C(S(t), t) \quad \forall t.$$

$$t: \quad t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N = T \qquad t_{i+1} - t_i = \Delta t$$

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i \Delta t + \sigma S_i \, dW_i$$

$$\hookrightarrow N(0,1)\sqrt{\Delta t}$$

$$C(t) \longrightarrow C(t_i) = C_i$$

$$h(t) \longrightarrow h(t_i) = h_i$$

$$C(t) = \Delta(t) S(t) + R \quad , \quad \Delta: \ \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_M$$

x SIMPLICIDAD

M: número de rebalanceos.

M=N:

$$h_0 = C_0 = \Delta_0 S_0 + (C_0 - \Delta_0 S_0) \qquad + (\Delta_1 - \Delta_0) \text{ Stocks}$$

$$h_1 = \Delta_0 S_1 + (h_0 - \Delta_0 S_0) e^{r\Delta t} = \Delta_1 S_1 + (h_1 - \Delta_1 S_1)$$

$$h_2 = \Delta_1 S_2 + (h_1 - \Delta_1 S_1) e^{r\Delta t} = \Delta_2 S_2 + (h_2 - \Delta_2 S_2)$$

$$\vdots$$

$$h_{i+1} = \Delta_i S_{i+1} + (h_i - \Delta_i S_i) e^{r\Delta t}$$

M≠N:

$$h_2 = \Delta_0 S_2 + (h_1 - \Delta_0 S_1) e^{r\Delta t}$$

$$h_2 = \Delta_0 S_2 + \left[\cancel{\Delta_0 S_1} + (h_0 - \Delta_0 S_0) e^{r\Delta t} - \cancel{\Delta_0 S_1} \right) e^{r\Delta t}$$

$$= \Delta_0 S_2 + (h_0 - \Delta_0 S_0) e^{r(2\Delta t)} \quad \checkmark$$

PNL (PROFIT AND LOSS)

$$PNL = \Pi(\text{TODAY'S MKT}) - \Pi(\text{YESTERDAY'S MKT})$$

Π: EL VALOR DE UN INSTRUMENTO Ó PORFOLIO ENTERO.

$$\Pi = P \quad \text{ó} \quad \Pi = \sum_{i=1}^{N} P_i$$

TODAY'S MKT: x_i^t, t

YESTERDAY'S MKT: x_i^{t-1}, $t-1$

PNL

$$P_{NL}^{t} = \Pi(x_1^t, x_2^t, x_3^t, \dots, x_n^t, t) - \Pi(x_1^{t-1}, x_2^{t-1}, \dots, x_n^{t-1}, t)$$

$$P_{NL}^{t} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}(x_1^{t-1}, x_2^{t-1}, \dots, x_n^{t-1}, t-1)\,(x_1^t - x_1^{t-1}) +$$

$$+ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}(x_1^{t-1}, x_2^{t-1}, \dots, x_n^{t-1}, t-1)\,(x_2^t - x_2^{t-1}) +$$

$$+ \dots + \text{términos c/ derivadas de } 2^{\text{da}} \text{ orden}$$

PNL

(t en días

sino $t-(t-1) \rightarrow \frac{1}{365}$)

CALL: $\Pi = C$

$C = C(S, K, t, T, r, \sigma)$

$$PNL^t = \frac{\partial C}{\partial S}\Big|^{t-1}(S^t - S^{t-1}) + \frac{\partial C}{\partial t}\Big|^{t-1}\underbrace{(t-(t-1))}_{=1} + \frac{\partial C}{\partial r}\Big|^{t-1}(r^t - r^{t-1})$$

$$+ \frac{\partial C}{\partial \sigma}\Big|^{t-1}(\sigma^t - \sigma^{t-1}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S^t - S^{t-1})^2 + \cdots$$

PNL

PARA UN MARKET MAKER LA GANANCIA ESTÁ EN

BID | "PRECIO" (COSTO DE HEDGING) | ASK

A ESTE TRADER NO LE INTERESAN PREDICCIONES DEL MERCADO.

SOLO LE INTERESA QUE C SEA EL COSTO DE HEDGING.

EL MM COMPRA UNA CALL A $C - \text{Fee} = C - \frac{\text{Ask} - \text{Bid}}{2}$

VENDE UNA CALL A $C + \text{fee} = C + \frac{\text{Ask} - \text{Bid}}{2}$

PNL

¿CÓMO SE ASEGURA QUE SU HEDGING SEA CORRECTO?

$$PNL^t \simeq 0 \quad \forall t \quad ó \quad |PNL^t| < \text{tolerancia}$$

$$PNL^t = \frac{\partial \pi}{\partial x_1}\Big|^{t-1} (x_1^t - x_1^{t-1}) + \ldots + \frac{\partial \pi}{\partial x_N}\Big|^{t-1} (x_N^t - x_N^{t-1})$$

$$+ \ldots \text{ términos de orden superior.}$$

$$PNL^t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial \pi}{\partial x_N} = 0.$$

$$\forall x_1^t, x_2^t, \ldots, x_N^t$$

$$y \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad y \quad \text{etc.}$$

PNL

- EN LA REALIDAD ESTO ES IMPRACTICABLE

  $\Rightarrow$ SOLO SE ANULAN LAS GRIEGAS QUE MÁS IMPACTO TIENEN !

- DELTA-HEDGING: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial S} = 0$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} P_i \longrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial S} = 0}$$

$$\Pi = \sum_i n_i^c C_i + \sum_i n_i^P P_i + n^S S$$

$$\boxed{\sum_i n_i^c \frac{\partial C_i}{\partial S} + \sum_i n_i^P \frac{\partial P_i}{\partial S} + n^S = 0}$$

PNL

- PORTFOLIO DELTA Y GAMMA - NEUTRAL :

$$\sum n_i^c \frac{\partial C_i}{\partial S} + \sum n_i^p \frac{\partial P_i}{\partial S} + n^s = 0$$

$$\sum n_i^c \frac{\partial^2 C_i}{\partial S^2} + \sum n_i^p \frac{\partial^2 P_i}{\partial S^2} = 0$$

- Ej: $\Pi = C(K_1, T_1) - P(K_2, T_2) + n^s S$

Δ- NEUTRAL: $N(d_+(K_1,T_1)) - \left(N(d_+(K_2,T_2)) - 1\right) + n^s = 0$

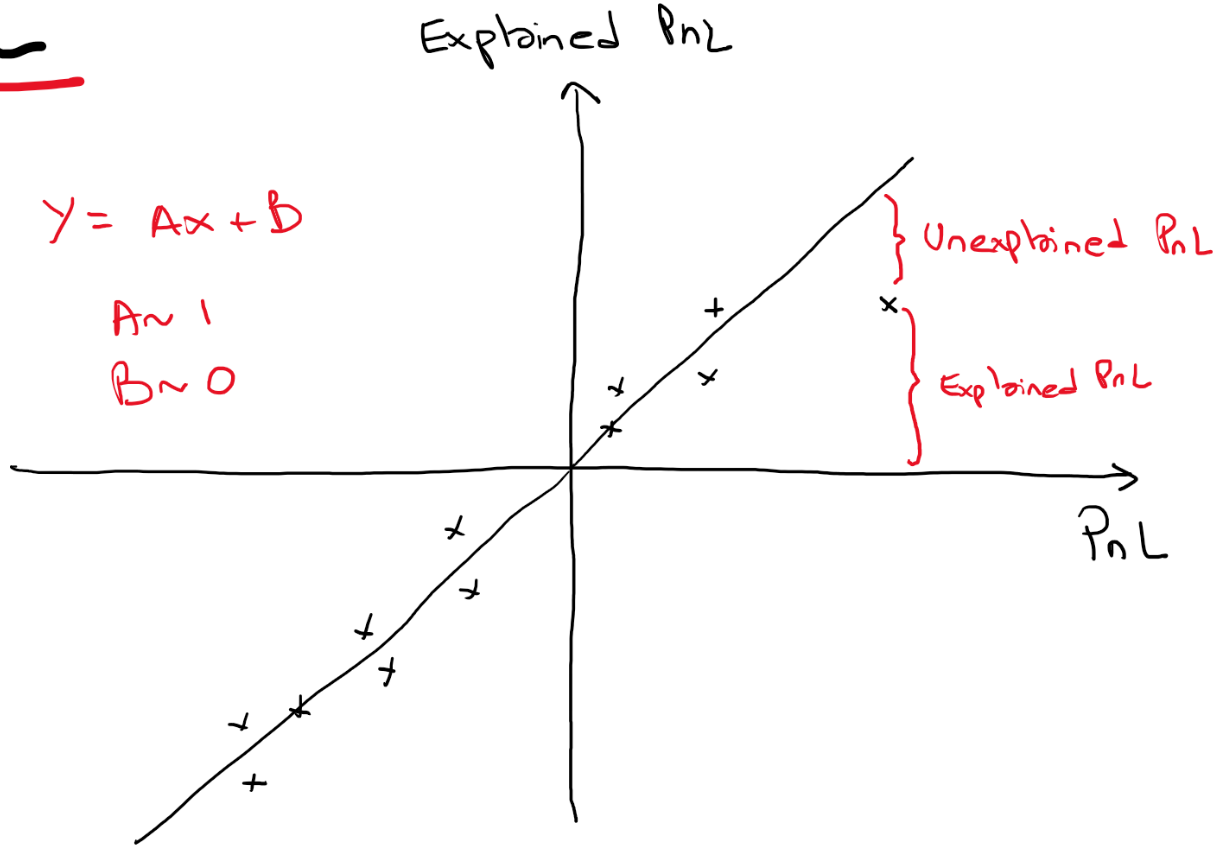
Γ- NEUTRAL: $\dfrac{N'(d_+(K_1,T_1))}{S\sigma\sqrt{T_1}} - \dfrac{N'(d_+(K_2,T_2))}{S\sigma\sqrt{T_2}} = 0$

PNL

$Y = Ax + B$

$A \sim 1$

$B \sim 0$



PNL

$PnL = \pi^t - \pi^{t-1}$	\$ ...
theta PnL $= \dfrac{\partial \pi}{\partial t}$	\$ ...
delta PnL $= \dfrac{\partial \pi}{\partial S}(S^t - S^{t-1})$	\$ ...
gamma PnL $= \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(S^t - S^{t-1})^2$	\$ ...
vega PnL $= \dfrac{\partial \pi}{\partial \sigma}(\sigma^t - \sigma^{t-1})$	\$ ...
New trades PnL	\$ ...
Edit PnL	\$ ...
Explained PnL	\$ ...
Unexplained PnL	\$ ...

- ¿Cuánto se ganó/perdió hoy?
- ¿Cuáles son las causas de esas ganancias/pérdidas?

Unexplained PnL = PnL − Explained PnL.

(EN GENERAL LAS GRIEGAS SE CALCULAN NUMERICAMENTE)

RELACIÓN ENTRE DELTA, THETA Y GAMMA

EC. DIFERENCIAL DE BS:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = rS$$

VALE TAMBIÉN PARA S: $\quad 0 + rS(1) + 0 = rS \quad \checkmark$

$\Rightarrow$ SE CUMPLE PARA UN PORTFOLIO DE c, p y S:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = r\pi$$

$$\boxed{\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\pi}$$