Quant Finance 5

Manuel Maurette

Clase 5: Mas modelos de *pricing*, comentarios finales

UCEMA

Disparadores a otros modelos - Montecarlo

Teorema (Teorema Fundamental de la Valuacion de Activos)

El precio de cualquier derivado se puede obtener descontando la esperanza del payoff, bajo la probabilidad de riesgo neutral.

$$V(0) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V(T)\right]$$

El Browniano Geométrico (1/2)

El movimiento browniano geométrico que le da la dinámica al precio del activo:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)$$
$$; \ \ \mathrm{S}(0) = \mathrm{S}_0$$

se puede expresar de la siguiente manera

$$S(t) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Con $W(t)$ un M.B. y $W(t) = W(t) - W(0) \sim N(0, t) = \sqrt{t}N(0,1)$

Con lo cual, a tiempo final, tenemos una expresión para $S(T)$

$$S(T) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

Con $Z \sim N(0,1)$.

El Browniano Geométrico (2/2)

- Recordemos la formula mas importante que venimos repitiendo clase tras clase que llamamos el Teorema Fundamental de la valuación de activos. En el caso de un *call* Europeo:

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\left(\text{máx}(S_T - K, 0)\right)$$

- Usando la formula anterior:

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\text{máx}\left(S e^{Z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0\right)\right]$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0, T)$

Modelo de Montecarlo (1/2)

El Método Montecarlo provee una manera para calcular la esperanza de una distribución:

La esperanza de una distribución es el promedio (si fueran finitos) de los eventos posibles, multiplicados por la probabilidad de que ocurran.

En el caso de un *call*: Si calculamos, para cada $i = 1, \dots, N$:

$$C_i = e^{-rT} \max(S_i(T) - K, 0)$$

Entonces podemos aproximar la esperanza (y el precio del *call*) por:

$$C \sim \frac{1}{N}(C_1 + C_2 + \cdots + C_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i$$

Modelo de Montecarlo (2/2)

Para cada C_i, necesitamos $S_i(T)$, una realización de S a tiempo T:

$$S_i(T) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i}$$

Con $Z_i \sim N(0{,}1)$. Es decir un numero aleatorio que siga la distribución normal con media 0 y desvió 1.

Algoritmo:

1. Generar N realizaciones de $S_i(T)$ de manera aleatoria:
   1. Generar N números aleatorios $rand_i$ con distribución uniforme en el (0,1)
   2. Generar N números aleatorios Z_i con distribución $N(0{,}1)$.
   3. Generar los $S_i(T)$ con la formula
2. Generar los N C_i con la formula de descontar el payoff.
3. Promediarlos y obtener una aproximación al precio del *call* a tiempo inicial, C.

Algoritmo Montecarlo

```
opcion_europea_mc
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo de MonteCarlo
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
    - pasos : int - Cantidad de caminos de montecarlo
Outputs
    - precio_MC: float - Precio del contrato
```

Disparadores a otros modelos – PDE (Ecuaciones Diferenciales Parciales)

Recordemos que la estrategia de replicación nos llevo a que el precio del *Call* Europeo era la solución de la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S, T) = (S - K)^+$$

O, en general:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

La idea del método es discretizar las derivadas parciales basándonos en la expansión en la serie de Taylor cerca de los puntos de interés.

Para las derivadas con respecto a S usaremos en ambos casos diferencias centradas. Para la primera:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S,t) = \frac{V(S+dS,t) - V(S-dS,t)}{2dS} + \mathcal{O}((dS)^2)$$

Para la segunda:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) = \frac{V(S+dS,t) - 2V(S,t) + V(S-dS,t)}{(dS)^2} + \mathcal{O}((dS)^2)$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Como se trata de una ecuación *backward*, para aproximar la derivada con respecto al tiempo usaremos diferencias backward :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) = \frac{V(S,t) - V(S,t-dt)}{dt} + \mathcal{O}(dt)$$

Observar que $O((dS)^2) = O(dt)$, con lo cual las tres aproximaciones son del mismo orden.

Modelos de diferencias finitas para PDEs

El siguiente paso del método es discretizar el espacio $[0, +\infty) \times [0, T]$. Para eso, primero elijamos un S_{MAX} grande ya que no podremos discretizar el infinito y dividimos el eje de las S uniformemente en nodos que distan dS entre sí.

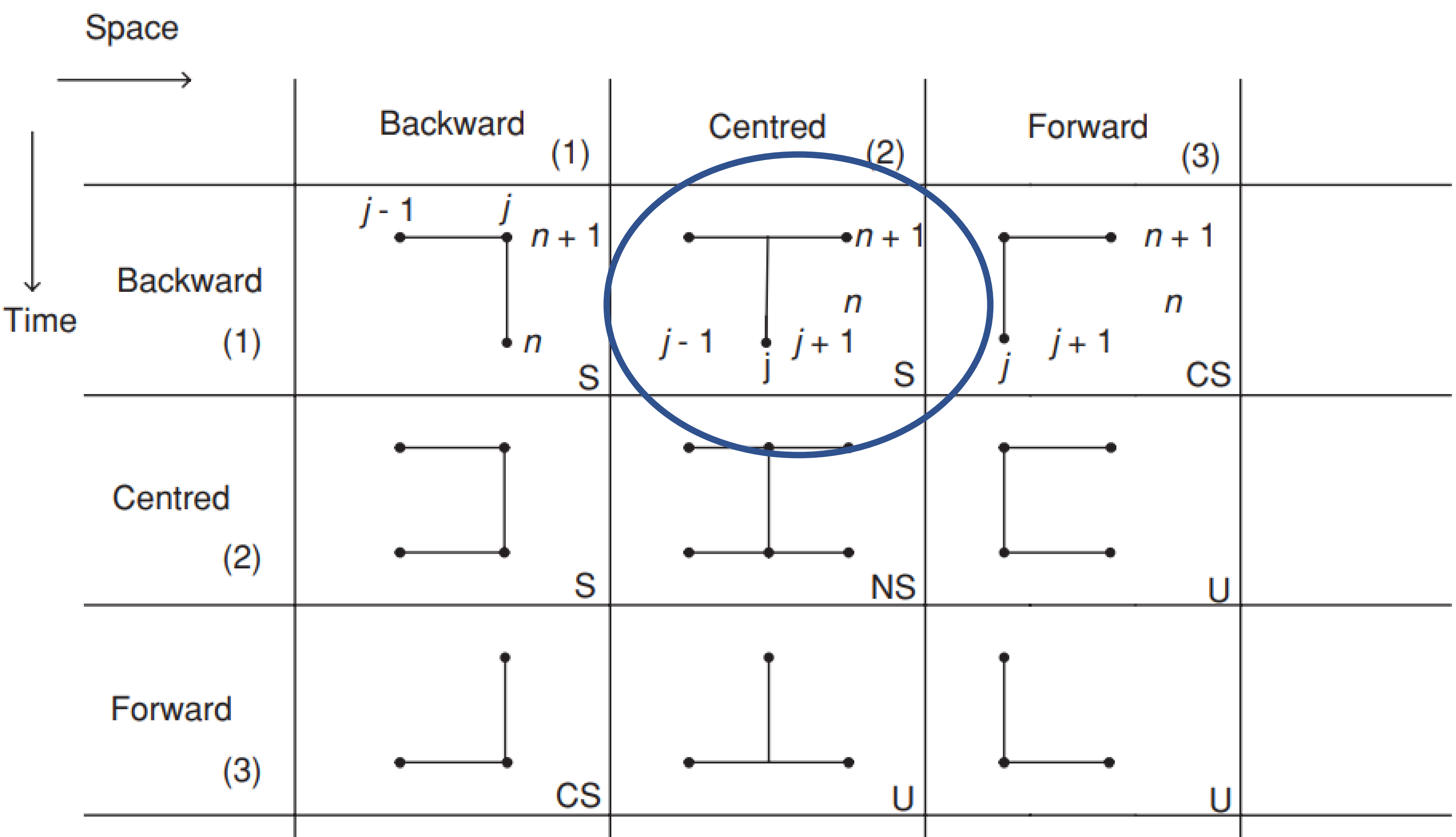
Lo mismo hacemos con el eje temporal, lo dividimos uniformemente en nodos que distan dt entre sí. Esto divide al plano (S, t) en una grilla uniforme con puntos de la forma (ndS, mdt).

Nos concentramos entonces en el valor de $V\ (S, t)$ sólo en los puntos de la grilla. Escribimos:

$$V_n^m \simeq V(ndS, mdt) : 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$$

Donde dS y dt es la distancia entre los nodos y tal que

$$dS\ N = S_{MAX}\ y\ dt\ M = T$$



S= Always Stable
U= Always Unstable
NS= Neutrally Stable
CS= Conditionally Stable

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Aquí también necesitaremos condiciones de contorno y finales (ya que se trata de una ecuación backward). Las de contorno serán:

$$V_0^m = V_0(mdt) \qquad V_N^m = V_{inf}(mdt)$$

Donde $V_0(t)$ es lo que vale la función en el 0 y $V_{inf}(t)$ es lo que vale en el límite en infinito. La condición final será:

$$V_n^M = F(ndS)$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Donde $F(S)$ es el *payoff* del derivado. Con todo lo anterior no queda más que reemplazar cada cosa por lo que es:

$$\frac{V_n^m - V_n^{m-1}}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2(ndS)^2 + \frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{(dS)^2} + r(ndS)\frac{V_{n+1}^m - V_{n-1}^m}{2dS} - rV_n^m + \mathcal{O}(dt) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Ahora nos olvidamos del error y aceptamos que la igualdad vale en sentido discreto, de aproximación. Despejamos V_{m-1} y simplificamos los dS:

$$V_n^{m-1} = V_n^m + dt\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 (V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m) + dt\frac{rn}{2}(V_{n+1}^m - V_{n-1}^m) - dtrV_n^m$$

Agrupando los términos llegamos finalmente al esquema de diferencias finitas:

$$V_n^{m-1} = V_{n-1}^m\left(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 - \frac{1}{2}rn\right)dt + V_n^m\left(1 - (\sigma^2 n^2 + r)dt\right) + V_{n+1}^m\left(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 + \frac{1}{2}rn\right)dt$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

La ecuación vale para $1 \leq n \leq N-1$ y para $1 \leq m \leq M$.

En el caso de un *Call, para* los V_0 y V_N tenemos las condiciones de contorno

$$V_0^m = 0 \ \forall m \,; \, V_N^m = S_{MAX} \ \forall m \,;$$

Para V^M tenemos el payoff.

$$V_n^M = \max(0, S_n - K)$$

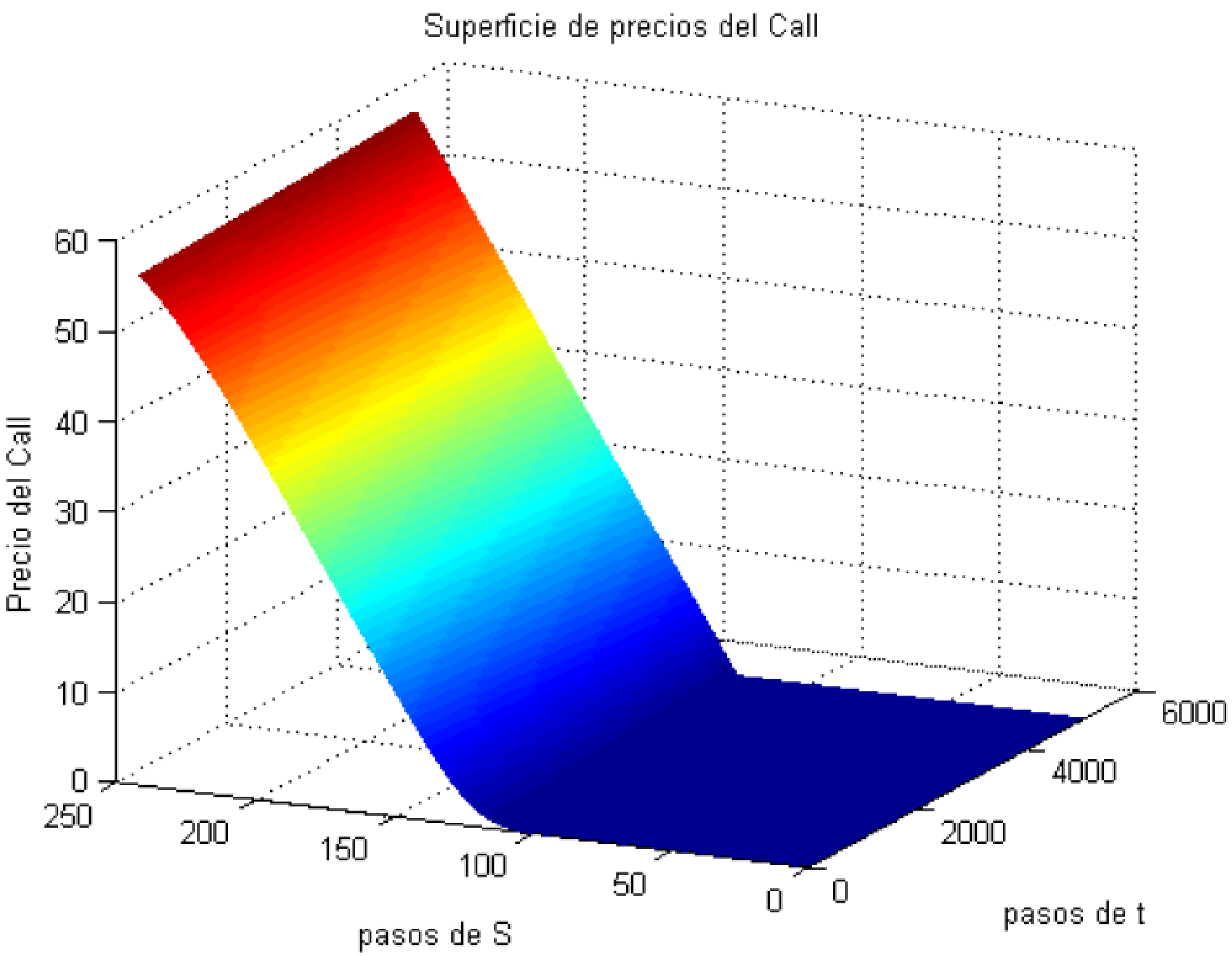
El esquema propuesto es un esquema explicito, ya que sólo involucra variables conocidas, es decir, que al momento de invocarlas en el algoritmo ya tienen asignado un valor.

$$V_n^{m-1} = V_{n-1}^m\left(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 - \frac{1}{2}rn\right)dt + V_n^m\left(1 - (\sigma^2 n^2 + r)dt\right) + V_{n+1}^m\left(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 + \frac{1}{2}rn\right)dt$$

$$A = \left(\begin{matrix} 1-(\sigma^2 0^2+r)dt & \frac{1}{2}dt(\sigma^2 1^2-(r-div)1) & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}dt(\sigma^2 0^2+(r-div)0) & 1-(\sigma^2 1^2+r)dt & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-(\sigma^2(N-1)^2+r)dt & \frac{1}{2}dt(\sigma^2 N^2-(r-di \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}dt(\sigma^2(N-1)^2+(r-div)(N-1)) & 1-(\sigma^2 N^2+r)d \end{matrix}\right.$$

$$V^{m-1} = A * V^m$$

Con el detalle de agregar las condiciones de contorno a la primera y ultima columna


Superficie de precios del Call
Precio del Call
60
50
40
30
20
10
0
250
200
150
100
50
0
pasos de S
0
2000
4000
6000
pasos de t

Algoritmo Diferencias Finitas

```
opcion_europea_fd
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo de Diferencias Finitas (metodo explicito)
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
Outputs
    - precio_FD: float - Precio del contrato
```

También esta la implementación en el caso Americano (misma lógica que en el Binomial)

Comparativa de modelos vistos

Modelo	Binomial
Pros	dependencia de caminos, barreras
Contras	sensibilidades

Modelo	Black Scholes analitico
Pros	Fórmula Cerrad, Velocidad, sensibilidades
Contras	No generalizable

Comparativa de modelos vistos

Modelo	Montecarlo
Pros	pocas hipotesis, casi todos los derivados
Contras	sensibilidades, tiempo

Modelo	Diferencias Finitas
Pros	cualquier Ec diff, toda la superficie
Contras	tiempo, estabilidad, error