

Capítulo 1

Solución de ecuaciones algebraicas

Hay ocasiones en las que ecuaciones algebraicas tienen una difícil solución analítica y en esas situaciones recurrimos a los métodos numéricos que serán descritos en este capítulo, hablaremos de métodos tanto abiertos como cerrados, ventajas y desventajas de los mismos.

1.1. Métodos cerrados

También llamados métodos de encierro, se basan en limitar con un intervalo que se va recortando hasta que se acerca a la solución.

1.1.1. Bisección

Es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seccionando el subintervalo que tiene la raíz, y es posible describirlo en los siguientes pasos.

1. Se eligen los valores limitantes a, b tales que $f(a)f(b) < 0$.
2. aproximamos la solución con la fórmula del punto medio
$$c = \frac{a+b}{2}$$

1.1.2. Método de falsa posición o regula fals

Para localizar el punto c , se busca la ecuación de una recta que pasa por los dos puntos de la función lo que se obtiene es una raíz falsa con una recta el procedimiento se muestra descrito en el siguiente algoritmo.

1.2. Métodos abiertos

Son métodos en los que solo necesitamos un valor inicial al que llamamos x_0 y son capaces de encontrar raíces tangentes al eje x.

1.2.1. Método de Newton-Raphson

Consiste en sacar la ecuación de las tangentes de la función.

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \quad (1.1)$$

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (1.2)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (1.3)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.4)$$

Cálculo de error

1.2.2. Método Secante

Se trata de un método donde se traza una recta secante entre los últimos 2 puntos. Se utilizan derivadas centrales para más precisión y el costo computacional sea menor.

$$(x_k, f(x_k + 1)) \quad (x_k, f(x_k))$$

$$y - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (1.5)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \quad (1.6)$$

Backtracking

Es un método de búsqueda de soluciones exhaustiva sobre grafos dirigidos a ciclos, el cual se acelera mediante poda de ramas poco prometedoras. Es decir se trata de buscar estados solución del problema.

Las condiciones de partida son:

1. Alcanza la solución
2. Se alcanzan todos los estados sde solución

Resumen del capítulo

Los métodos aquí mostrados son utilizados para encontrar raíces de funciones y todos llevan al mismo resultado, la gran diferencia está en el tiempo de cómputo utilizado para el resultado y la precisión de este.

Velocidad de convergencia

La velocidad de convergencia que hace referencia al tiempo que tarda el ordenador en arrojar un resultado, se muestra en seguida para métodos cerrados y abiertos

Métodos	Velocidad de convergencia
Bisección	Lineal [Lento]
Falsa posición	Lineal y super lineal
Newton-Raphson	Cuadrática [Rápido]
Secante	Cuadrática [Rápido]

Iteraciones con y sin backtracking en métodos abiertos

Si el algoritmo converge en k iteraciones :

Newton-Raphson	$2k_1$
Secante	$k_2 + 1$
Newton-Raphson con B.	$2k_3 + Nb_1$
Secante con B.	$k_4 + 1 + Nb_2$

Capítulo 2

Solución de sistemas de ecuaciones

El objetivo de estos métodos es encontrar un vector solución para una matriz dada partiendo de la ecuación $Ax = b$. En este capítulo se describirán métodos directos y métodos iterativos. Y lo primero es recordar algunas operaciones y propiedades básicas de las matrices vistas en Álgebra lineal.

2.1. Operaciones algebraicas con matrices

2.1.1. Suma de matrices

Es posible sumar dos matrices siempre y cuando sean del mismo tamaño haciendo una adición de sus elementos correspondientes.

Sí $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices del mismo tamaño $m \times n$, entonces su suma es la matriz de tamaño $m \times n$.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2.1.2. Multiplicación por un escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y c es un escalar, entonces el múltiplo escalar de A por c es la matriz de tamaño $m \times n$ dada por:

$$cA = [ca_{ij}]$$

2.1.3. Multiplicación de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz de $n \times p$, entonces el producto AB es una matriz de $m \times p$

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ entonces .

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

2.1.4. Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz se forma al escribir sus columnas como renglones. Por ejemplo, si A es la matriz de $m \times n$ dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.5. Matriz simétrica

Una matriz A es simétrica si $A = A^T$. Partiendo de esta definición, es evidente que una matriz simétrica debe ser cuadrada. Existen cuatro importantes propiedades de matrices simétricas las cuales son:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = c(A)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

2.1.6. Inversa de una matriz

Una matriz A de $n \times n$ es invertible (o no singular) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = BA = I$, donde I es la matriz identidad de orden n . La matriz B se denomina inversa (multiplicativa) de A .

Las matrices no cuadradas no tienen inversa.

Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única y se denota por A^{-1} .

$$AX = I \quad \text{Donde } X \text{ es la matriz inversa.}$$

2.1.7. Determinante de una matriz

El determinante de una matriz está dado por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

El determinante es la diferencia de los productos de dos diagonales de la matriz. Si A es una matriz triangular de orden n , su determinante es el producto de los elementos en la diagonal principal, $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$

2.2. Descomposición matricial

La descomposición matricial es una forma de factorización de matrices en distintas formas para diferentes propósitos y resultados. Las principales descomposiciones son descritas a continuación

2.2.1. Matriz triangular inferior

Una matriz con una triangulación inferior la podemos obtener de como producto de la siguiente fórmula.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k}{a_{ii}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Matriz triangular superior

El contrario de la matriz triangular inferior, esta la matriz triangular superior.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^n a_{ik}x_k}{a_{ii}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

2.3. Métodos directos

Los métodos directos se encargan de transformar el sistema original en otro equivalente y fácil de resolver.

2.3.1. Eliminación Gaussiana**2.3.2. Factorización LU**

$$LU \quad A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Doolittle

La condición para esta factorización es:

$$l_{ii} = 1$$

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} \quad U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

Crout

Mientras que para la factorización de Crout es:

$$u_{ii} = 1$$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj} \quad U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}}{L_{ii}}$$

Resultados

$$\begin{aligned} a_{11} &= u_{11} & l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} \\ a_{12} &= u_{12} & a_{32} &= l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \\ a_{13} &= u_{13} & l_{32} &= a_{32} - \frac{l_{31}u_{12}}{u_{22}} \\ a_{14} &= u_{14} & a_{33} &= l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \\ a_{21} &= l_{21}u_{11} & u_{33} &= a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} & a_{43} &= l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} \\ u_{22} &= l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{43} &= \frac{a_{43} - (l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23})}{u_{33}} \\ a_{23} &= a_{22} - l_{21}u_{12} & a_{44} &= l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} \\ u_{23} &= l_{21}u_{13} + u_{23} \\ a_{31} &= l_{31}u_{11} \end{aligned}$$

A es simétrica

$B^T B$, Ca como resultado una matriz simétrica.

$B^T D B$, Siempre da como resultado una matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}$$

Resultados

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= l_{11}^2 & l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\
 a_{43} &= a_{34} = l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} \\
 l_{43} &= \frac{a_{43} - (l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42})}{l_{33}} \\
 a_{44} &= l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \\
 l_{44} &= \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2}
 \end{aligned}$$

Los métodos que a continuación se mencionan, son métodos que como condición tienen que la matriz para resolver, debe ser simétrica.

A definida positiva

Para que una matriz A sea definida positiva si se cumple que $X^TAX > 0$ para cualquier vector $X \neq 0$

$A = LDL^T$, tiene solución paramétrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & 1 & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & 1 & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultados

$$\begin{aligned}
 a_{34} &= a_{43} = a_{11}l_{41}l_{31} + d_{22}l_{42}l_{32} + d_{33}l_{43} \\
 l_{43} &= \frac{a_{43} - (d_{11}l_{41}l_{31} + d_{22}l_{42}l_{32})}{d_{33}} \\
 a_{44} &= d_{11}l_{41}^2 + d_{22}l_{42}^2 + d_{33}l_{43}^2 + d_{44} - (d_{11}l_{41}^2 + d_{22}l_{42}^2 + d_{33}l_{43}^2)
 \end{aligned}$$

2.3.3. Factorización LLT Cholesky

$$A = LL^T$$

La factorización de Cholesky además de requerir una matriz simétrica, debe ser definida positiva y cabe mencionar que este método tiene una solución única.

Para los que están en la diagonal

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

Para los que estan fuera de la diagonal

$$L_{ij} = L_{ji}^T = \frac{a_{ij} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

2.3.4. Factorización LDLT

$$A = LDL^T$$

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{kk} l_{ik} l_{jk}}{d_{jj}} \quad d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} l_{ik}^2$$

2.4. Métodos iterativos

$$Ax = b = f(x) = 0$$

Estos métodos parten de un vector inicial x^o , y la modificación medianre un esquema repetitivo de cálculo hasta llegar a la solución buscada

2.4.1. Método de punto fijo

$$\begin{aligned} f(x) = 0 & \rightarrow g(x) = x \\ & x_0 \\ x_1 &= g(x_0) \\ & \vdots \\ x_{k+1} &= g(x_k) \end{aligned}$$

Este método consiste en separar un sistema lineal y distribuir para tener más valores de "x".

$$A = (L + D + U)$$

Dónde D es una matriz diagonal y las matrices L y U son triangulares.

$$\begin{aligned} (L + D + U)x &= b \\ (L + U)x + Dx &= b \\ D^{-1}[Dx = b - (L + U)x] \\ x &= D^{-1}[b - (L + U)x] \end{aligned}$$

2.4.2. Método de Jacobi

Es un método sencible al orden en que se encuentran acomodadas las ecuaciones. Reemplaza el vector hasta que está completo y se necesita que converja rápido para poder comparar el rendimiento con un método directo.

$$x^o$$

$$x^{k+1} = D^{-1}[b - (L + U)x^k]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k+1} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^k \right)$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right)$$

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\max(\|x^{k+1}\|, \|x^k\|)} > e_1$$

Condición de convergencia

Es necesario que la matriz A sea diagonalmente dominante, osea qué, en cada renglón de A , se debe cumplir que

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad |a_{ii}| \gg |a_{ij}|$$

2.4.3. Método de Gauss-Seidel

Este es un método de convergencia rápido. Va reutilizando las mismas "x".

$$\begin{aligned} (L + D + U)x &= b \\ (L + D)x^{k+1} &= b - Ux^k \\ D^{-1}(Dx^{k+1}) &= b - [x^{k+1} - Ux^k] \\ x^{k+1} &= D^{-1}[b - Lx^{k+1} - Ux^k] \\ x^{k+1} &= D^{-1}[b - (L + U)x^k] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k+1} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k+1} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^k \right) \right)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - (a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + a_{14}x_4^k)]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - (a_{23}x_3^k + a_{24}x_4^k)]$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right)$$

Condición de convergencia

En la mayoría de los casos, si: $|a_{ii}| \gg |a_{ij}|$ en cada región sin que sea necesario.

2.4.4. Método de Gauss-Seidel con relajación (SOR)

Es una aplicación de Gauss-Seidel, converge más rápido, pero no siempre se cumple, depende del valor de W . Donde W es un valor paramétrico.

Se basa en el método de triangulación $W \in [0, 2]$

$$x^{k+1} = (1 - W)x^k + Wx_{GS}^{k+1}$$

*GS hace referencia al método Gauss-Seidel simple

$$x_i^{1-W} x_i^k + \frac{W}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right]$$

La W mas usual es $W = 1.5$

Conceptos de Gradientes**Gradiente de un campo escalar**

Sea $F : U \subseteq R^3 \rightarrow R$ un campo escalar, g sean

$$\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z}$$

Las derivadas parciales de f (es decir, derivar respecto a una variable manteniendo las otras como constantes).

Entonces el gradiente conjugado de f es:

$$grad(f) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z} \right)$$

El gradiente apunta en la dirección en la que la derivada direccional de la función f es máxima, y su módulo en un punto es el valor de esta derivada direccional en ese punto.

Se anula en los puntos de inflexión de la función f .

El gradiente convierte en un campo escalar en un campo vectorial.

Divergencia de un campo escalar

Sea $F : U \subseteq R^3 \rightarrow R^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial. Entonces la divergencia de F es:

$$div(F) = \frac{\delta}{\delta x} F_1 + \frac{\delta}{\delta y} F_2 + \frac{\delta}{\delta z} F_3$$

La divergencia convierte un campo vectorial en un campo escalar.

Acomodo de
párrafos

Rotacional de un campo vectorial

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial. Entonces; el rotacional de F es:

$$\text{rot}(F) = \left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z}, \frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x}, \frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} \right)$$

o también se puede calcular como el siguiente determinante, (teniendo en cuenta que i,j,k son la coordenada a la que corresponden):

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del gradiente, divergencia y rotacional

1. $\text{rot}(\text{grad}(F)) = 0$
2. $\text{div}(\text{rot}(F)) = (\text{grad}(f) \cdot F + f \cdot \text{rot}(F)) = 0$
3. $\text{rot}(f \cdot F) =$
4. $\text{div}(f \cdot F) = f \cdot \text{div}(F) + \text{grad}(f) \cdot F$

Darle una
checada, la
notación de
punto debe ser
distinta, hay un
comando en
latex para
hacerla.

Valores máximos y mínimos

Una función de dos variables tiene un máximo relativo en (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando (x, y) esta cerca de (a, b) . El número $f(a, b)$ recibe el nombre de valor máximo relativo. Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo en (a, b) y $f(a, b)$ es un valor máximo relativo.

Si lo anterior se cumple para todos los puntos (x, y) en el dominio de f , entonces f tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto en (a, b) Teorema

Si f tiene un máximo o un mínimo relativo en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden existen allí, entonces $F_x(a, b) = 0$ y $F_y(a, b) = 0$.

Un punto (a, b) se llama punto crítico de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ o si una de estas derivadas parciales no existe.

Se ve un poco
confuso ecuaciones
o inecuaciones que
se parten por el
párrafo, intenta darle
un mejor acomodo.

Esa línea es
un tanto
confusa.

Analisis de sensibilidad de los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}x + y = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{a_{21}}{a_{22}}x + y = \frac{b_2}{a_{22}}$$

Se ve muy amontonado

Sistemas mal condicionados

En este tipo de casos estos sistemas son muy sensibles ante errores numéricos.

Número de condición de una matriz cuadrada

$$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Para alguna norma matricial.

$$\begin{aligned} |V|_e &= \sqrt{\sum V_i^2} \\ |V|_1 &= \max |V_i| \end{aligned}$$

- Norma Euclidianiana o Norma de Frobenius

$$\|A\|_1 = \sqrt{\sum \sum a_i^2}$$

- Norma 1 ó columna-suma

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- Norma ∞ ó renglon-suma

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- Norma 2 ó norma espectral

Cuando el número de condición es muy pequeño quiere decir que los sistemas no están tan mal condicionados y son proporcionales.

- Condición A

$$cond(A) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Δx : Es el cambio en la solución x de sistema lineal debido a los errores numéricos.

ΔA : Es el cambio en la matriz del sistema debido a la aritmética inexacta de las computadoras.

$$\begin{aligned} Cond(A) &\approx 1 \\ Cond(A) &\ggg 1 \end{aligned}$$

2.4.5. Método de Gradiente conjugado

Gradiente conjugado

El gradiente se ubica donde la pendiente es más grande (Es decir la dirección en la cuál se tienen la máxima pendiente). Los puntos críticos son donde el gradiente es 0.

$$z = f(x, y)$$

Tamaño muy pequeño de letra

Acomodar fórmulas

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} & \frac{\delta f}{\delta y} \end{bmatrix}$$

$$f(x, y)$$

$$\nabla f = 0$$

$$\nabla^2 f$$

$$\det(\nabla^2 f)$$

$$\blacksquare > 0 \text{ mínimo}$$

$$\blacksquare = 0 \text{ silla}$$

$$\blacksquare < 0 \text{ máximo}$$

En ambiente matemático no hay espacios, por eso te sale junto

$$f'(x) = 0 \text{ indica pendiente}$$

$$f''(x)$$

$$\blacksquare > 0 \text{ mínimo}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{bmatrix} \text{ Matriz Gaussiana}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Porque está centrado esta línea?

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k P_k$$

Todos estos puntos van a estar determinados por $x + \alpha P$, donde x es la posición inicial y αP la distancia al valor inicial

Análisis del método

Es un método de convergen en "n iteraciones" con aritmética exacta.

$$Ax = b$$

Si A es simétrica y $\det(A) > 0$, el problema es equivalente a

$$\min \phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

$$\nabla \phi(x) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x & a_{12}y \\ a_{21}x & a_{22}y \end{bmatrix} - xb_1 - yb_2 \\ & \phi(x) = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + a_{12}xy + \frac{1}{2}a_{22}y^2 - xb_1 - yb_2 \\ & \frac{\delta\phi}{\delta x} = a_{11}x + a_{12}y - b_1 \\ & \frac{\delta\phi}{\delta y} = a_{21}x + a_{22}y - b_2 \\ & \boxed{\nabla\phi(x) = Ax - d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^o \\ & x^{k+1} = x^k + \alpha_k P_k \\ & f(\alpha) = \phi(x^k + \alpha P) \\ & f'(\alpha) = P \cdot \nabla\phi(x^k + \alpha P) = P^T[A(x^k + \alpha P) - b] \\ & f'(\alpha) = P^T Ax^k + \alpha P^T AP - P^T b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-P^T Ax^k + P^T b}{P^T AP} = \frac{-P^T (Ax^k - b)}{P^T AP} = \frac{-P^T \nabla\phi(x^k)}{P^T AP} \\ & \nabla\phi(x^k) = Ax^k - b \\ & x^{k+1} = x^k + \alpha_k P_k \\ & \alpha_k = \frac{P_k^T \nabla\phi(x^k)}{P_k^T AP_k} \end{aligned}$$

Para una matriz simétrica A con $\det(A) \leq 0$, existe un conjunto de n direcciones linealmente independientes que cumplen la siguiente propiedad

$$P_i^T AP_j \rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{si } i \leq j; \\ \leq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

y se llaman direcciones conjugadas.

$$\begin{aligned} & P_k^T A(x^* - x^o) = \sigma_o P_o + \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 + \cdots + \sigma_{n-1} P_{n-1} \\ & P_k^T A(x^* - x^o) = \sigma_o P_k^T AP_o + \sigma_1 P_k^T AP_1 + \sigma_2 P_k^T AP_2 + \sigma_k P_k^T AP_k + \cdots + \sigma_{n-1} P_k^T AP_{n-1} \\ & P_k^T A(x^* - x^o) = \sigma_k P_k^T AP_k \\ & \boxed{\sigma_k = \frac{P_k A(x^* - x^o)}{P_k^T AP_k}} \\ & \nabla\phi(x^k) = Ax^k - b \\ & x^{k+1} = x^k + \alpha_k P_k \end{aligned}$$

$$\alpha_k = \frac{-P_k^T \nabla \phi(x^k)}{P_k^T A P_k}$$

$$P_k^T A(x^k = x^o + \alpha_o P_o + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_{k-1} P_{k-1})$$

$$P_x^T A x^k = P_k A x^o + \alpha_o P_k^T A P_o + \alpha_1 P_k^T A P_1 + \cdots + \alpha_{k-1} P_k + A P_{k-1}$$

$$P_k^T A x^k = P_k A x^o$$

$$P_k^T A(x^k - x^o) = 0$$

$$\sigma_k = \frac{P_k^T (b - A x^k)}{P_k^T A P_k}$$

$$\sigma_k = \frac{-P_k^T (A x^k - b)}{P_k^T A P_k}$$

$$\sigma_k = \frac{P_k^T (b - A x^k)}{P_k^T A P_k} - \frac{P_k^T (A x^k - b)}{P_k^T A P_k}$$

$$P_o = -r_o$$

$$P_{k-1}^T A(P_k = -r_k + B_k P_{k-1})$$

$$P_{k-1}^T A P_k = -P_{k-1}^T A r_k + B_k P_{k-1}^T A P_{k-1}$$

$$B_k = \frac{P_{k-1}^T A r_k}{P_{k-1}^T A P_{k-1}}$$

Técnicas de preconditionamiento

$$Ax = b$$

$\hat{x} = Cx$ Donde C es la matriz de rotación

$$x = C^{-1} \hat{x}$$

$$C^{-T} A C^{-1} \hat{x} = C^{-T} b$$

Gradiente Conjugado con preconditionamiento de Jacobi

2.4.6. Gradiente biconjugado

2.4.7. Gradiente conjugado cuadrado

Capítulo 3

Almacenamiento de datos

El almacenamiento de datos es un tema muy importante dentro de los métodos numéricos, ya que es necesario tener un computador capaz de almacenar y resolver rápidamente los sistemas.

3.1. Formas de matrices

Algunas ocasiones los sistemas de solución son muy grandes lo que implica un gran espacio de almacenamiento y esto puede provocar que la velocidad de solución no sea tan buena. Es por eso que se implementan técnicas de reducción matricial, para acelerar el tiempo de solución de sistemas robustos sin afectar el resultado.

Para esto, la forma de la matriz influye por la manera en que fueron enumerados cada uno de los elementos.

3.1.1. Memoria cache

Por ejemplo la memoria cache es mucho más rápida que la memoria RAM. Es más fácil acceder por renglones que por columnas, en una matriz.

Las líneas de la cache hacen que el sistema sea más eficiente (En una línea de 64 bytes).

$A \cdot V \rightarrow \text{rapido}$

$A^T \cdot V \rightarrow \text{Lento}$

3.2. Adaptación para matrices dispersas

Antes es importante recordar el tamaño de algunos tipos de datos y las equivalencias existentes entre tamaños de datos.

Tipo de dato	Cantidad de bytes
int	4
double	8

Acomodo de tabla

Intentar en lo posible que quepa en una línea, o si son más palabras en 2 líneas pero que no se vean palabras cortadas así en títulos.

20

3.2.1. Matriz sin reducción o con ancho de banda completa

Para calcular el espacio que ocupa una matriz de tamaño $m \times n$:

$$n \times m \times (\text{cantidad bytes})$$

*(depende el tipo de dato)

Matriz simétrica

Solo se toma la mitad de ancho de banda.
Este método puede ser tambien más lento debido a la búsqueda por columnas pero usa menos espacio de memoria y es más rapida que la eliminación Gaussiana con banda.

$$s = (m + 1)/2$$

$$n \times s$$

donde $(m + 1)$ siempre es impar.

3.2.2. Método para matrices skyline

Depende del tipo de método se elegira la manera de almacenarlas ya sea por triangulación superior, inferior.

No es tan útil para métodos iterativos, usa menos espacio en metodos directos y es más util para métodos directos y simétricos. Es espacio total utilizado esta dado por:

?

3.2.3. Método de compresión por remglones

$$nnz(8 + 4) + n \times 4$$

donde nnz es el número de elementos distintos de cero.

Los métodos directos primero hacen factorización simbolica para ver que ceros de la matriz original son llenados.

3.3. Resumen de capítulo

Es recomendable utilizar una tolerancia de $1e^{-12}$ para resolver sistemas.
Los métodos con banda completa, tardan mucho en converger al resultado.
Los métodos con preconditionamiento CPS es mejor usarlos primero.
Es de mucha utilidad estimar primero la complejidad de los métodos directos que es matriz·vector, operacionalmente car. Muy importante es que los esquemas de almacenamiento matrices de banda no simetricas y matrices de bandas simetricas, solo se pueden usar para métodos de solución que no destruyan la simetría de la matriz. Cholesky, LDLT y los iterativos.

Hay que encontrar la forma de darle un buen formato a esta parte. He visto que algunos libros usan cuadros de texto y en cada comentario ponen un itemize por ejemplo. Hay que pensarle.

El método de almacenamiento de la columna dinámica (Skyline) es util para métodos de factorización y no es recomendable para métodos iterativos, pero si para matrices simétricas de modo que se almacene solo la triangulación inferior o superior.

Capítulo 4

Solución de sistemas no lineales

En este capítulo veremos el modo de solución de los sistemas no lineales, que son aquellos en los que por lo menos una de sus ecuaciones no es lineal(hay un grado mayor que uno), o bien hay funciones compuestas.

Un ejemplo de uso es en los circuitos de corriente alterna, así como en las rede hidráulicas

$$u = kF$$
$$u = k(u, F)$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$F(x) = 0; \quad f(x) = 0$$

$$F(x^{k+1}) = F(x^k) + F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + \frac{F''(x^k)(x^{k+1} - x^k)^2}{2!}$$

$$0 = F(x^k) + F'(x^k)(x^{k+1} - x^k)$$

Matriz Jacobiana del sistema

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \nabla f_3(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \frac{\delta f_1}{\delta x_3} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \frac{\delta f_2}{\delta x_3} & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \frac{\delta f_n}{\delta x_2} & \frac{\delta f_n}{\delta x_3} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{bmatrix}$$

$$s^k = x^{k+1} - x^k$$

$$F'(x^k)(s^k) = -F(x^k)$$

Se resuelve el sistema para obtener posteriormente el valor de x^{k+1}

Capítulo 5

Derivadas numéricas parciales

En el primer capítulo hablamos de las derivadas numéricas, que hacen referencia a la derivación respecto a una sola variable. Habrá ocasiones en las que la solución de sistemas deberá ser dada por derivadas parciales, ya que los sistemas manejan más de una variable, lo que hace necesario conocer acerca de esto. Dado $f(x, y)$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad ; \quad \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_j} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{h}$$

$$[F'(x)]_{ij} = \frac{f_j(x_1, x_2, x_j + h, \dots, x_n) - f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{h}$$

Capítulo 6

Calculo de Eigenvalores

(Valores y vectores propios carecteristicos).

$$\frac{Md^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + kV = 0$$

$$\frac{Md^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + kV = f(t)$$

$$\frac{Md^2u}{dt^2} + ku = 0$$

Donde $u = e^{at}$

$$\frac{du}{dt} = ae^{at} \quad \frac{d^2V}{dt^2} = a^2e^{at}$$

$$a^2Me^{at} + ke^{at} = 0$$

$$a^2M + k = 0$$

$$a^2M + k = 0$$

$$a = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}i$$

$$Av = \lambda V$$

$$Av - \lambda V = 0$$

$(A - \lambda I)V = 0 \rightarrow$ Sistema lineal homogeneo tiene una solución trivial $v = 0$

Para que $V \neq 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ecuación polinómica de grado n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} &= 0 \\ \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= 0 \\ \lambda &= \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}}{2} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}\lambda} \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}y}{a_{11} - \lambda_1} \\ y \end{bmatrix} & \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}y}{a_{11} - \lambda_2} \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Propiedades

- Los eigenvectores son linealmente independientes
- Los igenectores no son únicos, pero sus direcciones si lo son.
- Si a es simétrico, todos los eigenvectores son reales.
- El rango de una matriz esta relacionado con el número de eigenvectores nulos

6.1. Método de la potencia

Hipotesis fundamental:

Los eigenvalores de A , se pueden ordenar por valor absoluto en la forma

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Entonces empezando en un vector cualquiera $z_0 \leq 0$ se tiene que la secuencia $z_{k+1} = Az_k$ converge a la dirección v_1 si $k \rightarrow \infty$

$$\text{Calcular } v_1 = \frac{z_k}{\|z_k\|}$$

$$\begin{aligned} v_1^T A v_1 &= r_1^T \lambda_1 v_1 \\ v_1^T A V_1 &= \lambda_1 v_1^T V_1 \\ \lambda_1 &= v_1^T A V_1 \end{aligned}$$

Normalizar el vector resultante para obtener resultados aceptables y no haya problema de desbordamiento.

6.2. Método de iteración inversa

Es un método útil cuando la matriz es simétrica y definida positiva.

Teorema

Si $\det(A) \leq 0$, A^{-1} existe y tiene los mismos eigenvectores, corresponde a los de A por

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \dots, \frac{1}{\lambda_n},$$

6.3. Técnica de desplazamiento ("Shifting")

Cuando se quieren encontrar los eigenvectores más chiquitos, siempre y cuando la matriz sea definida positiva.

sirve para acelerar la convergencia, con el método de la potencia trasladada.

$$Av = \lambda v$$

La matriz $A + \theta I$ tiene los mismos eigenvectores que A , y sus eigenvectores son $\theta + \lambda$. $(A + \theta I)v = Av + \theta Iv = Av + \theta v$

$$(A + \theta I)v = Av + \theta Iv = \lambda v + \theta v$$

$$(A + \theta I)v = (\lambda + \theta)v = (\lambda + \theta)v$$

6.4. Técnicas de deflación

Se obtiene una nueva matriz B de manera que contenga los mismos eigenvectores de A , pero uno de sus eigenvectores se reemplaza por uncero.

$$Bv = \lambda'v$$

$$Av = \lambda v$$

Si A es simétrica, B se obtiene por $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$

6.5. Método del polinomio

se puede aplicar la técnica de desplazamiento.

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

$$f(\lambda) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$LU = A$$

$$\det(A) = \det(L)\det(U)$$