Calcul Numeric – Tema #6

Ex. 1 Să se adapteze teorema III.2. pentru cazul unidimensional, i.e. $n = 1$.

Ex. 2 Rescrieţi demonstraţia teoremei III.2. adaptate la cazul unidimensional.

Ex. 3 Fie ecuaţia $f(x) = 0$, unde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$. Se consideră funcţia $g(x) = (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}}$.

a) Arătaţi că dacă x^* este punct fix pentru g, atunci x^* este rădăcina funcţiei f.

b) Aflaţi domeniul de definiţie $[a, b]$ al funcţiei g.

c) Construiţi în Matlab graficul funcţiei g pe intervalul $[a, b]$ şi un pătrat cu vârfurile de coordonate $(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)$. Verificaţi conform graficului dacă $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$, i.e. graficul funcţiei g rămâne în interiorul pătratului.

d) Construiţi graficul funcţiei g' pe intervalul $[a, b]$ şi două segmente de dreaptă situate pe dreptele $y = 1$ şi $y = -1$. Alegeţi conform graficului un interval $[a', b'] \subset [a, b]$ astfel încât $-1 < g'(x) < 1$. Verificaţi dacă $g(x) \in [a', b'], \forall x \in [a', b']$. Dacă nu, alegeţi un alt interval $[a'', b''] \subset [a', b']$ astfel încât $g(x) \in [a'', b''], \forall x'' \in [a'', b'']$. Obs.: Alegerea unui alt interval $[a'', b'']$ propune construirea unui pătrat cu diagonala pe bisectoarea $y = x$ care conţine punctul fix (punctul fix fiind punctul de intersecţie al funcţiei g cu bisectoarea $y = x$), iar graficul funcţiei g restricţionată la intervalul $[a'', b'']$ nu depăşeşte cadrul pătratului.

e) Aflaţi soluţia aproximativă conform metodei de punct fix cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$ folosind criteriul de oprire $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ şi un $x_0 \in [a', b']$ oarecare.

e) Construiţi într-o altă figură funcţia f pe intervalul $[a, b]$ şi soluţia aproximativă.

Ex. 4 a) Fie $g_1(x) = \left(\dfrac{x+3}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$; cerinţele sunt similare cu cele de la Ex. 3.

b) Fie $g_2(x) = \left(\dfrac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$; cerinţele sunt similare cu cele de la Ex. 3. Testaţi dacă şirul construit în baza funcţiei g converge la soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$.

Ex. 5 În baza unei funcţii $f \in C^2([a, b])$, derivata căreia nu se anulează pe intervalul $[a, b]$, se construieşte $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

a) Să se arate că x^* este rădăcină pentru f dacă şi numai dacă x^* este punct fix pentru g.

b) Să se demonstreze că $\exists\ \delta > 0$ astfel încât ipotezele teoremei III.2. pentru cazul unidimensional sunt satisfăcute pe intervalul $[x^* - \delta, x^* + \delta]$. Se va demonstra în primă fază că $g'(x^*) = 0$.

Ex. 6 Fie sistemul neliniar

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

a) Să se demonstreze că x^* este soluţie a sistemului neliniar dacă şi numai dacă x^* este punct fix pentru funcţia $G(x_1, x_2) = \left(\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}, \dfrac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}\right)$

b) Să se demonstreze conform teoremei III.2. că funcţia G admite un unic punct fix pe domeniul $D = \{(x_1, x_2)/0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}$

c) Să se afle soluţia aproximativă conform metodei de punct fix cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$.

d) Să se construiască grafic curbele descrise implicit de ecuaţiile $F_1(x_1, x_2) = 0, F_2(x_1, x_2) = 0$ unde $F_1(x,x_2) = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8$ şi $F_2(x_1, x_2) = x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8$. Alegeţi intervale potrivite pentru a vizualiza cât mai bine curbele. Vezi fisierul CalculSimbolic.pdf la secţiunea grafice de curbe descrise implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$.

e) Construiţi în acelaşi grafic soluţia aproximativă care va reprezenta punctul de intersecţie a graficelor celor două curbe.