CALCUL NUMERIC

TEMA 3

Maciuca Gloria - Ruxandra
Grupa 344

Exercitiul 1

Sa se propuna un algoritm in baza metodei Gauss-Jordan, care are ca date de intrare matricea A si ca date de iesire inversa A^{-1} si $det(A)$.

Cunoscand egalitatea $\boldsymbol{AA^{-1} = I = A^{-1}A}$, vom extinde matricea A cu matricea identitate I. Vom aplica transformari matricei A si, corespunzator, extinderii I, urmarind sa transformam matricea initial A in matrice identitate, iar matricea initial I va deveni A^{-1}.

Pentru calculul determinantului, avem in vedere ca la un moment dat, pe parcursul transformarilor, matricea A va fi matrice triunghiulara, deci $detA$ va fiegal cu produsul elementelor de pe diagonala principala. Pentru fiecare impartire a unei linii la un scalar, determinantul este multiplicat cu acel scalar.

Pentru fiecare $j = 1 : n$, avem urmatoarele etape:

- dorim $\boldsymbol{pivot = 1}$ $\Rightarrow$ impartirea elementelor de pe linia pivotului la un scalar
- dorim ***elementele de sub pivot*** $\boldsymbol{= 0}$ $\Rightarrow$ *pentru* $i = j+1 : n$, vom efectua operatii de adunare sau scadere a liniei 'j' din liniile 'i'
- dorim ***elementele deasupra pivot*** $\boldsymbol{= 0}$ $\Rightarrow$ *pentru* $i = j-1 : 1$, vom efectua operatii de adunare sau scadere a liniei 'j' din liniile 'i'

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{4} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pentru a ilustra mai bine algoritmul, consideram exemplul alaturat:

$$\xrightarrow{1/4 L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Obtinem primul element de pe diagonala principala = 1.

$\boldsymbol{detA = 1 \cdot 4}$.

$$\xrightarrow{L_2 - 2 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 9/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Obtinem 0 sub pivot.

Observam ca al doilea element de pe diagonala principala(pivotul) a devenit 0.

Cautam sub pivot primul element$\neq$ 0. Il gasim pe linia 3 si o adunam la linia pivotului.

$$\xrightarrow{L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 11/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{detA = 1 \cdot 4 \cdot 1}$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{L_1 - 1/2 L_2} \\ \\ \xrightarrow{L_3 - L_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 11/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-9/2} & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Obtinem 0 sub pivot si deasupra pivotului.

In continuare, urmarim sa obtinem ultimul element al diagonalei principale = 1.

$$\xrightarrow{-{}^2/_9 L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -{}^5/_2 & {}^1/_2 & -{}^1/_2 & -{}^1/_2 \\ 0 & 1 & {}^{11}/_2 & -{}^1/_2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -{}^1/_9 & {}^2/_9 & 0 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{detA = 1 \cdot 4 \cdot (-{}^9/_2)}$.

Urmarim sa obtinem 0 deasupra pivotului.

$$\xrightarrow[L_2 - {}^{11}/_2 L_3]{L_1 - {}^5/_2 L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^2/_9 & {}^1/_{18} & -{}^1/_2 \\ 0 & 1 & 0 & {}^1/_9 & -{}^2/_9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^1/_9 & {}^2/_9 & 0 \end{array}\right)$$

La final, am obtinut matricea identitate in stanga, iar in dreapta se afla inversa matricei A.

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^2/_9 & {}^1/_{18} & -{}^1/_2 \\ {}^1/_9 & -{}^2/_9 & 1 \\ -{}^1/_9 & {}^2/_9 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boldsymbol{detA = -18}$$

OBSERVATIE:

In cazul in care, la un moment dat, un element aflat pe diagonala principala ar fi fost $= 0$, iar sub el nu am fi gasit niciun element$\neq 0$, ar fi rezultat ca matricea A nu este inversabila, iar $detA = 0$.

ALGORITM:

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$
Date de iesire: $A^{-1} = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ **si** $det(A)$

$I \leftarrow eye(n)$;
$detA \leftarrow 1$;
for $j \leftarrow 1 : n$
  if $a_{jj} = 0$
    $pivot \leftarrow find(A(j:n, j) \neq 0)$;
    if $pivot$ is $empty$
      'Matricea A nu este inversabila.'
      return;
    end
    $(a_{ji}) \leftarrow (a_{ji}) + (a_{ki})$, $k = pivot(1) + j - 1,\ i = \overline{1,n}$
    $(r_{ji}) \leftarrow (r_{ji}) + (r_{ki})$, $k = pivot(1) + j - 1,\ i = \overline{1,n}$
  end
  $t = {}^1/_{a_{jj}}$
  $(a_{ji} \leftarrow t \cdot (a_{ji})$, $i = pivot(1) + j - 1$
  $(r_{ji}) \leftarrow t \cdot (r_{ji})$, $i = pivot(1) + j - 1$
  $detA \leftarrow {}^1/_t \cdot detA$
  for $i \leftarrow 1 : n$
    if $i \neq j$
      $t = {}^{a_{ij}}/_{a_{jj}}$
      $(a_{i,k}) \leftarrow (a_{i,k}) - t \cdot (a_{j,k})$, $k = pivot(1) + j - 1$
      $(r_{i,k}) \leftarrow (r_{i,k}) - t \cdot (r_{j,k})$, $k = pivot(1) + j - 1$
    end
  end
end
$invA \leftarrow I$.

Exercitiul 2

a. Sa se construiasca in Matlab procedura GaussJordan conform sintaxei $[invA, detA] =$ GaussJordan(A), unde $inv(A)$ reprezinta inversa matricei A, iar $detA$ semnifica $det(A)$.

Gauss-Jordan ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

```
function [invA, detA] = GaussJordan(A)

n = length(A);
I = eye(n);      Crearea matricei identitate de dimensiune nxn
detA = 1;        Initializam 'detA' cu 1

Parcurgem matricea pe coloane
for j = 1 : n

    Daca pivotul are valoarea 0, cautam primul element≠ 0 sub el
    if A(j, j) == 0
        pivot = find(A(j:n, j) ~= 0);

        Daca nu a fost gasit un asemenea element, concluzionam ca matricea nu este inversabila, iar
        detA = 0. Afisam mesaj corespunzator si iesim din functie.
        if isempty(pivot)
            fprintf ('Matricea A nu este inversabila.\n Determinatul
                matricei este detA = 0.\n');
            invA = NaN;
            detA = 0;
            return;
        end

        Altfel, la linia pivotului adunam linia pe care am gasit primul element ≠ 0.
        Modificam corespunzator si in matricea I.
        A(j, :) = A(j, :) + A(pivot(1) + j - 1, :);
        I(j, :) = I(j, :) + I(pivot(1) + j - 1, :);
    end

    Transformam pivotul in 1 prin impartirea liniei L_j la valoarea pivotului.
    Modificam corespunzator si in matricea I.
    Multiplicam detA cu valoarea initiala a pivotului.
    t = 1 / A(j, j);
    A(j, :) = t * A(j, :);
    I(j, :) = t * I(j, :);
    detA = detA / t;

    Urmarim sa obtinem 0 deasupra si sub fiecare pivot.
    for i = 1 : n

        Avem grija sa nu modificam pivotul
        if i ~= j
            t = A(i, j) / A(j, j);

            A(i, :) = A(i, :) - t * A(j, :);
            I(i, :) = I(i, :) - t * I(j, :);
        end
    end
```

```
end

Matricea initial I s-a transformat in inversa matricei initial A.
O returnam prin invA.
invA = I;

end
```

Exercitiul 2

b. Sa se apeleze procedura GaussJordan pentru datele de intrare:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercitiul 2b. ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

```
Salvam matricea A data:
A = [4  2  2;
     2  10  4;
     2  4  6];

Apelam functia GaussJordan creata anterior, pentru matrice A data:
[invA, detA] = GaussJordan(A);

if detA ~= 0
    Daca functia GaussJordan a returnat determinantul ≠ 0, inseamana ca a calculat si inversa
   matricei A. Afisam matricea inversa si determinantul.
    fprintf('Inversa matricei A este:\nInv(A) = \n');
    disp(invA);
    fprintf('Dterminantul matricei A este det(A) = %f\n.', detA);

end
```

OUTPUT:

Inversa matricei A este $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3056 & -0.0278 & -0.0833 \\ -0.0278 & 0.1389 & -0.0833 \\ -0.0833 & -0.0833 & 0.2500 \end{pmatrix}$

Determinantul matricei A este $det(A) = 144$.

Exercitiul 2

c. Sa se rezolve in Matlab, apeland procedura GaussJordan, sistemul $A \cdot x = b$, unde $b = (12\ 30\ 10)^T$.

Exercitiul 2c. ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

Memoram sistemul sub forma matricei coeficientilor 'A' si a matricei 'b':

```
A = [4  2  2;
     2  10  4;
     2  4  6];

b = [12  30  10]';
```

Apelam functia GaussJordan creata anterior, pentru matrice A data:

```
[invA, detA] = GaussJordan(A);

if detA ~= 0
```

Daca functia GaussJordan a returnat determinantul $\neq 0$, inseamana ca a calculat si inversa matricei A. Cunoscand egalitatea $A^{-1}A = I$ si prelucrand ecuatia sistemului, aceasta devine $x = A^{-1}b$, de unde putem gasi solutia usor:

```
     x = invA * b;
     fprintf('Solutia sistemului este:\n');
     disp(x');

end
```

OUTPUT:

Solutia sistemului, calculata folosind metoda GAUSS JORDAN este:

x_1 = **2** x_2 = **3** x_3 = **-1**

Exercitiul 3

$$\textbf{Fie sistemul } x = \begin{cases} x_2 \; + \; x_3 \; = \; 3 \\ 2 \cdot x_1 \; + \; x_2 \; + \; 5 \cdot x_3 \; = \; 5 \\ 4 \cdot x_1 \; + \; 2 \cdot x_2 \; + \; x_3 \; = \; 1 \end{cases}.$$

a. Sa se afle manual descompunerea LU, utilizand Gauss cu pivotare partiala.

Construim matricele 'A' si 'b' ale sistemului:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Initial, vom scrie matricea $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ **, urmand sa o completam pe masura ce transformam matricea A in matrice superior triunghiulara.**

Incepem aplicarea algoritmului Gauss cu pivotare partiala matricei A.

Cautam elementul cu valoarea absoluta maxima pe coloana C_1. Interschimbam liniile L_1 si L_3 atat in matricea 'A', cat si in matricea 'b'.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{0}} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{4}} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Urmarim sa obtinem 0 sub primul pivot a_{11}. Observam ca elementul a_{31} are deja valoarea 0, astfel efectuam operatia de mai jos asupra liniei L_3 si completam corespunzator matricea 'L':

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{4}} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2} L_1} \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{4}} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

In continuare, conform metodei Gauss cu pivotare partiala, cautam elementul cu valoare maxima de pe coloana C_2, incepand cu linia L_2. Il gasim pe linia L_3 si interschimbam liniile L_2 si L_3.

Totodata, modificam si matricea 'L', interschimband elementele l_{21} si l_{31} calculate anterior:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{\mathbf{0}} & 9/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{\mathbf{1}} & 1 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & & 1 \end{pmatrix}$$

Observam ca sub al doilea pivot a_{22} avem deja 0, asadar am obtinut matricea superior triunghiulara 'U'.

Completam si matricea 'L' corespunzator.

Astfel, am obtinut descompunerea matricei 'A'(cu liniile interschimbate) in matricile 'L' si 'U':

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{9/2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Exercitiul 3

$$\textbf{Fie sistemul } x = \begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 = 5 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

b. Sa se afle solutia sistemului, conform metodei de factorizare LU.

Pentru a rezolva sistemul, vom folosi descompunerea LU realizata anterior:

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trebuie tinut cont de interschimbarile liniilor matricei initiale 'A', care vor fi efectuate si asupra matricei 'b'.

Mai intai, interschimbam liniile L_1 si L_3, iar in matricea obtinuta interschimbam L_2 si L_3:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Acum putem scrie sistemul sub forma:

$$L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{\mathbf{y}} = b$$

$$L \cdot y = b$$
$$U \cdot x = y$$

Rezolvam mai intai $L \cdot y = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De aici rezulta:

$$\boldsymbol{y_1 = 1}$$
$$\boldsymbol{y_2 = 3}$$
$$1/2 y_1 + y_3 = 5 \;\Rightarrow\; y_3 = 5 - 1/2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y_3 = 9/2}.$$

In continuare, rezolvam $U \cdot x = y$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

De aici rezulta:

$$\boldsymbol{x_3 = 1}$$
$$x_2 + x_3 = 3 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 - x_3 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_2 = 2}$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1 - 2x_2 - x_3}{4} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = -1}$$

Am obtinut solutia sistemului: $\{-1,\ 2,\ 1\}$.

Exercitiul 4

Sa se propuna un algoritm de factorizare LU care foloseste metoda Gauss cu pivotare partiala. Algoritmul va avea ca date de intrare matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, respectiv vectorul $b \in \mathbb{R}^n$, iar ca date de iesire matricele L, U si $x \in \mathbb{R}^n$ - solutia sistemului $A \cdot x = b$.

Pentru a obtine descompunerea matricei 'A' de forma $A = LU$, vom efectua operatii asupra matricei A conform metodei Gauss cu pivotare partiala. Operatiile efectuate le vom memora in matrucea inferior triunghiulara L, iar forma obtinuta superior triunghiulara a matricei initial A va reprezenta matricea U.

Vom avea in vedere urmatoarele:

- **orice interschimbare de linii in matricea 'A' va fi aplicata si matricei 'b'**
- **orice interschimbare de linii in matricea 'A' va fi aplicata si asupra elementelor completate pana in acel moment in matricea 'L' pe respectivele linii**
- **matricea 'L' contine pe diagonala exclusiv valoarea 1**

<u>OBSERVATIE:</u>
In cazul in care, la un moment dat, un element aflat pe diagonala principala ar fi fost $= 0$, iar sub el nu am fi gasit niciun element$\neq 0$, ar fi rezultat ca sistemul nu poate fi rezolvat.

<u>ALGORITM:</u>

Date de intrare: $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, $i, j = \overline{1, n}$
Date de iesire: $L = (l_{ij})$, $U = (u_{ij})$ **si** $x = (x_i)$, $i, j = \overline{1, n}$

$L \leftarrow eye(n)$;
for $j \leftarrow 1 : n-1$
  $a_{mj} = max\ |a_{ij}|\ i = \overline{j, n}$
  if $a_{mj} = 0$
    'Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat.'
    return;
  end
  if $m \neq 1$
    $L_{A_j} \leftrightarrow L_{A_m}$;
    $L_{b_j} \leftrightarrow L_{b_m}$;
    $l_{jk} \leftrightarrow l_{mk}$; $k = \overline{1, j}$
  end
  for $i \leftarrow j+1 : n$
    $t = a_{ij}/a_{jj}$; $a_{ik} = a_{ik} - t \cdot a_{jk}$; $k = \overline{1, n}$
    $l_{ij} = t$;
  end
  if $a_{nn} \neq 0$
    $U = A$;;
  else
    'Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat.'
    return;
  end
$y = SubsAsc(L, b)$;
$x = SubsDesc(U, y)$;

Exercitiul 5

a. Sa se construiasca in Matlab procedura $[x] = $ SubsAsc(A, b).

Substitutia Ascendenta ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

```
Functia primeste ca date de intrare matricea inferior triunghiulara 'A' si matricea 'b' si returneaza un
vector 'x' al solutiei sistemului.
function [x] = SubsAsc(A, b)

n = length(b);      Memoram numarul ecuatiilor in variabila 'n'
x = zeros(1, n);    Initializam vectorul solutie cu zero-uri

Pentru a rezolva sistemul prin metoda substitutiei ascendente, pornim prin a afla mai intai x_1 si
    coboram in matricele de
intrare 'A' si 'b', inlocuind succesiv in ecuatii solutiile gasite, pana am aflat 'x_n'.
for i = 1 : n
    x(i) = (b(i) - sum (A(i, 1:n) .* x(1:n)))/ A(i, i);
      Cum am pornit cu vectorul solutie 'x' initializat cu 0-uri, la pasul 'k', pentru a afla 'x_k', din
    rezultatul 'b_k' al ecuatiei se scade suma produselor intre coeficientii
    A_ki si solutiile gasite x_i, pentru i = 1,k-1 si a produselor intre coeficientii
    A_kj si 0-urile corespunzatoare x_j a solutiilor inca necalculate, pentru j = k+1,n.
end

end
```

Exercitiul 5

b. Sa se construiasca in Matlab procedura $[L, U, x] = \textbf{FactLU}(A)$.

Factorizarea LU ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

Functia primeste ca date de intrare matricea coeficientilor sistemului 'A' si matricea 'b' si returneaza matricele 'L' si 'U', inferior, respectiv superior triunghiulare si vectorul 'x' al solutiei sistemului.

```
function [L, U, x] = FactLU(A, b)

n = length(A);    % Memoram numarul ecuatiilor in variabila 'n'
L = eye(n);       % Initializam matricea L ca matrice identitate

% Parcurgem matricea pe coloane
for j = 1 : n-1

    % Cautam valoarea maxima sub pivot
    [m, ind] = max(abs(A(j:n, j)));

    % Daca nu gasim o valoare diferita de 0, sistemul nu poate fi rezolvat. Afisam mesaj corespunzator
    % si iesim din functie.
    if m == 0
        L = NaN;
        U = NaN;
        x = NaN;
        fprintf('Sistemul este INCOMPATIBIL sau COMPATIBIL NEDETERMINAT');
        return;
    end

    % Daca valoarea maxima a fost gasita pe alta linie decat cea a pivotului, interschimbam cele doua
    % linii atat in matricea a, cat si in matricea b. In matricea L interschimbam doar elementele
    % completate pana acum de pe respectivele linii, nu intreegile linii.
    if ind ~= 1
        A([j ind+j-1], :) = A ([ind+j-1 j], :);
        b([j ind+j-1]) = b([ind+j-1 j]);

        L([j ind+j-1], 1:j-1) = L([ind+j-1 j], 1:j-1);
    end

    % In continuare, urmarim sa obtinem 0 sub fiecare pivot, in matricea A, prin scaderea din linia i a
    % liniei pivotului inmultita cu un scalar, pe care il memoram in matricea L pe pozitia noului 0
    % obtinut in matricea A:
    for i = j + 1 : n
        t = A(i, j) / A(j, j);

        A(i, 1:n) = A(i, 1:n) - t * A(j, 1:n);

        L(i, j) = t;
    end
end

% Daca ultimul element de pe diagonala principala ≠ 0, am obtinut matricea superior triunghiulara U.
if A(n, n) ~= 0
    U = A;
```

Altfel, inseamna ca sistemul nu poate fi rezolvat si afisam mesaj corespunzator.

```
else
    L = NaN;
    U = NaN;
    x = NaN;

    if b(n) ~=0
        fprintf ('Sistemul este INCOMPATIBIL.\n');
    else
        fprintf ('Sistemul este COMPATIBIL NEDETERMINAT.\n');
    end
end
```

Folosind formula $A = LU$, inlocuim in ecuatia sistemului si obtinem $LUx = b$. Notam $Ux = y$ si rezolvam $Ly = b$, dupa care ne intoarcem si aflam x:

```
y = SubsAsc(L, b);
x = SubsDesc(U, y);

end
```

Exercitiul 5

c. Sa se apeleze procedura FactLU pentru sistemul:

$$x = \begin{cases} x_2 \; + \; x_3 \; = \; 3 \\ 2 \cdot x_1 \; + \; x_2 \; + \; 5 \cdot x_3 \; = \; 5 \\ 4 \cdot x_1 \; + \; 2 \cdot x_2 \; + \; x_3 \; = \; 1 \end{cases}$$

Exercitiul 5c. ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

```
Memoram sistemul sub forma matricei coeficientilor 'A' si a matricei 'b':
A = [0  1  1;
     2  1  5;
     4  2  1];

b = [3  5  1];

Apelam functia FactLU pentru matricele 'A' si 'b':
[L, U, x] = FactLU(A, b);
Daca functia a returnat un rezultat ≠ NaN, afisam vectorul solutiei:
if ~isnan(x)

    fprintf('Solutia sistemului este:\n');
    disp(x);

end
```

OUTPUT:

Solutia sistemului, calculata folosind metoda FACTORIZARII LU este:

x_1 = **-1** x_2 = **2** x_3 = **1**

Exercitiul 6

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$**.**

a. Verificati daca A **este simetrica si pozitiv definita.**

Observam ca $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} = A$ **, asadar afirmam ca matricea A este simetrica.**

Pentru a verifica daca matricea A **este pozitiv definita, vom calcula determinantii minorilor principali:**

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \ > \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} = 1(5 \cdot 14 - 8 \cdot 8) - 2(2 \cdot 14 - 8 \cdot 3) + 3(2 \cdot 8 - 5 \cdot 3) = 1 \ > \mathbf{0}$$

Am obtinut toti determinantii > 0**, asadar matricea** A **este simetrica si pozitiv definita.**

Exercitiul 6

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$.

b. In caz afirmativ, determinati factorizarea Cholesky.

Pentru a determina factorizarea Cholesky, vom folosi scrierea $A = L \cdot L^T$**.**
Descriem 'L**' si '**L^T**' astfel:**

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

De aici, rezulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11} \cdot l_{21} & l_{11} \cdot l_{31} \\ l_{21} \cdot l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} \\ l_{31} \cdot l_{11} & l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Rezolvam egalitatea de matrici rezultata:

$$\begin{aligned}
1 = l_{11}^2 \ &\Rightarrow \mathbf{l_{11} = 1} \quad (\textit{presupunem } l_{11} > 0) \\
2 = l_{11} \cdot l_{21} \ \Rightarrow \ 2 = 1 \cdot l_{21} \ &\Rightarrow \mathbf{l_{21} = 2} \\
3 = l_{11} \cdot l_{31} \ \Rightarrow \ 3 = 1 \cdot l_{31} \ &\Rightarrow \mathbf{l_{31} = 3} \\
5 = l_{21}^2 + l_{22}^2 \ \Rightarrow \ 5 = 2^2 + l_{22}^2 \ \Rightarrow \ 1 = l_{22}^2 \ &\Rightarrow \mathbf{l_{22} = 1} \quad (\textit{presupunem } l_{22} > 0) \\
8 = l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} \ \Rightarrow \ 8 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot l_{32} \ &\Rightarrow \mathbf{l_{32} = 2} \\
14 = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \ \Rightarrow \ 14 = 3^2 + 2^2 + l_{33}^2 \ \Rightarrow \ 1 = l_{33}^2 \ &\Rightarrow \mathbf{l_{33} = 1} \quad (\textit{presupunem } l_{33} > 0)
\end{aligned}$$

In urma factorizarii Cholesky, am obtinut:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Exercitiul 6

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$.

c. Sa se rezolve sistemul $A \cdot x = b$, $b = (-5 \ \ -14 \ \ -25)^T$, **folosind factorizarea Cholesky.**

Pentru a rezolva sistemul, vom folosi descompunerea Cholesky realizata anterior:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cunoastem ca $A = L \cdot L^T$ **si scriem sistemul sub forma:**

$$L \cdot \underbrace{L^T \cdot x}_{\mathbf{y}} = b$$

$$L \cdot y = b$$
$$L^T \cdot x = y$$

Rezolvam mai intai $L \cdot y = b$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ -25 \end{pmatrix}$$

De aici, rezulta:

$$\boldsymbol{y_1 = -5}$$
$$2 \cdot y_1 + y_2 = -14 \ \Rightarrow \ 2 \cdot (-5) + y_2 = -14 \ \Rightarrow \boldsymbol{y_2 = -4}$$
$$3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + y_3 = -25 \ \Rightarrow \ 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-4) + y_3 = -25 \ \Rightarrow \boldsymbol{y_3 = -2}$$

In continuare, rezolvam $L^T \cdot x = y$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De aici, rezulta:

$$\boldsymbol{x_3 = -2}$$
$$x_2 + 2 \cdot x_3 = -4 \ \Rightarrow \ x_2 + 2 \cdot (-2) = -4 \ \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = 0}$$
$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = -5 \ \Rightarrow \ x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -5 \ \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1}$$

Am obtinut solutia sistemului: {1, 0, −2}.

Exercitiul 7

a. Sa se construiasca in Matlab procedura FactCholesky, conform sintaxei $[x, L]$ = FactCholesky(A, b).

Pornind de la forma descompusa $\boldsymbol{A = LL^T}$, descriem matricile L si L^T astfel:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

De aici, rezulta:

$$A = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Avand in vedere ca matricea A este simetrica, este suficient sa parcurgem matricea pentru $i \geq j$ si deducem forme generalizate pentru a_{ij} si pentru l_{ij}:

$$\boldsymbol{a_{ij}} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot l_{jk}$$

$$\boldsymbol{l_{ij}} = \frac{1}{l_{jj}} \cdot (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}) \qquad \textit{pentru } i \neq j$$

$$\boldsymbol{l_{ij}} = \sqrt{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}} \qquad \textit{pentru } i = j$$

<u>OBSERVATII:</u>

- **Pentru a verifica simetria matricei A, verificam egalitatea $A = A^T$**
- **Stim ca o alta conditie a factorizarii Cholesky este ca matricea A sa fie pozitiv definita. Cum matricea A este simetrica, acest lucru se poate verifica aplicand criteriul lui Sylvester, adica determinantii tuturor minorilor principali ai matricei A sa fie pozitvi. O modalitate de verificare ar putea fi transformarea matricei A in matrice triunghiulara, iar apoi memorarea intr-un vector d a elementelor de pe diagonala principala, deoarece cunoastem ca determinantul unei matrici superior/inferior triunghiulare este produsul elementelor de pe diagonala principala. Astfel, pentru fiecare i din A, se va verifica determinantul minorului $A(1:i, 1:i)$ = produsul $d(1:i)$. Insa acest proces, efectuat inaintea apelarii functiei FactCholesky, pare a fi prea costisitor, asadar, am considerat suficienta verificarea astfel incat sa se evite impartirea la 0 sau radacina unui numar negativ.**

Factorizarea Cholesky ("Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m")

```
Functia primeste ca date de intrare matricea coeficientilor 'A' si matricea 'b' si returneaza vectorul 'x'
al solutiei sistemului si matricea inferior triunghiulara 'L'.
function [x, L] = FactCholesky(A, b)

Verificam ca matricea A sa fie simetrica.
if A == A'

    n = length(A);    Memoram numarul ecuatiilor in variabila 'n'
    L = zeros(n);     Initializam matricea L cu zero-uri

    Parcurgem matricea A pentru i≥ j
    for i = 1 : n
        for j = 1 : i

            Testam daca ne aflam pe diagonala principala
            if i == j

                Verificam conditia unui numar strict pozitiv sub radical, ceea ce exclude si
                impartirea la 0
                if A(i, j) - sum(L(i, 1:i-1).^2) > 0

                    Aplicam formula dedusa mai sus pentru elementele de pe diagonala
                    L(i, j) = abs(sqrt(A(i, j) - sum(L(i, 1:i-1).^2)));

                else
                    Daca nu este ndeplinita conditia de calcul, afisam mesaj corespunzator si
                    iesim din functie
                    fprintf ('Nu se poate aplica factorizarea Cholesky
                        asupra matricei A.\n');
                    L = NaN;
                    x = NaN;
                    return;
                end

            else
                Daca nu ne aflam pe diagonala principala, aplicam formula pentru i≠ j
                L(i, j) = (A(i, j) - sum(L(i, 1:j-1).*L(j, 1:j-1))) / L(j, j);
            end
        end
    end
else
    Daca matricea A nu este simetrica, afisam mesaj corespunzator si iesim din functie
    fprintf ('Matricea A nu este simetrica.\n');
    L = NaN;
    x = NaN;
    return;
end
```

Folosind formula $A = LL^T$, inlocuim in ecuatia sistemului si obtinem $LL^T x = b$. Notam $L^T x = y$ si rezolvam $Ly = b$, dupa care ne intoarcem si aflam x:

```
x = SubsDesc(L', SubsAsc(L, b));

end
```

Exercitiul 7

b. Sa se aplice procedura FactCholesky pentru sistemul $A \cdot x = b$, unde:
$b = (-5 - 14 - 25)^T$ **si** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$.

Exercitiul 7b. (**"Tema#3_Maciuca_Gloria_Grupa344/Tema_3.m"**)

Memoram sistemul sub forma matricei coeficientilor 'A' si a matricei 'b':
```
A = [1  2  3;
     2  5  8;
     3  8  14];

b = [-5  -14  -25];
```
Apelam functia FactCholesky pentru 'A' si 'b'
```
[x, L] = FactCholesky(A, b);

if ~isnan(x)
```
Daca functia a returnat un rezultat $\neq NaN$, afisam solutia sistemului:
```
     fprintf('Solutia sistemului este:\n');
     disp(x);

end
```

OUTPUT:

Solutia sistemului, calculata folosind metoda FACTORIZARII CHOLESKY este:

x_1 = **1** x_2 = **0** x_3 = **-2**