Intento de aplicar la Regla de Sarrus a una matriz 4x4:

$$B = \begin{array}{cccc|ccc} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ i & j & k & l & i & j & k \\ m & n & o & p & m & n & o \end{array}$$

Hay 4 diagonales descendientes y cuatro ascendentes, lo que rompe el patrón, también aparecen más productos de los que deberían, entonces se generan términos adicionales en la suma y resta. En la matriz de Sarrus de ejemplo se cubren todos los términos correctamente, pero en una de 4x4 al aplicarlo faltan y hay productos extras.

PROBLEMA:

Se analizaron dos métodos para calcular determinantes de matrices: el de Expansión de Laplace y la Regla de Sarrus, cada uno tiene sus ventajas y desventajas dependiendo del tamaño de la matriz.

Aplique el método de la lluvia a la siguiente matriz 4x4

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

1. ¿Es posible aplicar el método de la lluvia a una matriz 4x4? Justifique su respuesta.

No, el método de la lluvia solo funciona con matrices de 3x3 porque se basa en extender la matriz copiando sus dos primeras columnas y luego sumando y restando productos de diagonales específicas, por lo que no podemos omitir términos o agregar productos que no son. Y para calcular el determinante de una matriz 4x4 o mayor se debe usar un método como la Expansión de Laplace o Gauss-Jordan.

2. Si no es posible, explique porqué y qué método alternativo recomendaría para calcular el determinante

El método alternativo que utilizare para calcular el determinante de una matriz 4x4 es la Expansión de Laplace, este nos permite descomponer la matriz en menores de 3x3, para después utilizar y poder resolver con la Regla de Sarrus.

Usare el Método del Pivote donde empezare primero calculando los determinantes 3x3 de la primera fila

$$\det(B) = a\begin{bmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{bmatrix}$$

La segunda:

$$\det(B) = b\begin{bmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{bmatrix}$$

Tercera fila:

$$\det(B) = c\begin{bmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{bmatrix}$$

Y por último la cuarta fila:

$$\det(B) = d\begin{bmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{bmatrix}$$

Expandiendo por la primera fila el determinante se define como:

$$\det(B) = a\begin{bmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{bmatrix} - d\begin{bmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{bmatrix}$$

Ahora cada uno de estos términos contiene una matriz 3x3, ahora resolveremos usando la Regla de Sarrus.

Determinante de a:

$$\begin{bmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{bmatrix} = (fkp + gln + hoj) - (hkn + foj + glp)$$

Determinante de b:

$$\begin{bmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{bmatrix} = (ekp + gli + hom) - (hkm + eoi + glp)$$

Determinante de c:

$$\begin{bmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{bmatrix} = (ejp + flm + nih) - (hjm + eni + flp)$$

Determinante de d:

$$\begin{bmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{bmatrix} = (ejo + fjn + gkm) - (gjn + ekn + fmo)$$

Ahora que ya tenemos los determinantes de cada una, los sustituiremos en la ecuación general

$$\begin{aligned} \det(B) = a&(fkp + gln + hoj - hkn - foj - glp) \\ &- b(ekp + gli + hom - hkm - eoi - glp) \\ &+ c(p + flm + nih - hjm - eni - flp) - d(ejo + fjn + gkm - gjn \\ &- ekn - fmo) \end{aligned}$$

Con esta expresión ahora podemos sustituir valores numéricos si se requiere un cálculo exacto.

RESUMEN.

La Expansión de Laplace y la Regla de Sarrus son dos métodos que permiten calcular determinantes en matrices cuadradas, para una matriz 3x3, ambos métodos llegan al mismo resultado, como en los ejemplos que el maestro puso, los dos métodos llegaron al mismo resultado siempre y cuando sean matrices de 3x3, pero Sarrus es más rápido y directo ya que se usa diagonalmente sin necesidad de descomponer la matriz en menores. Pero Laplace es más general y se puede aplicar a matrices de cualquier tamaño.

Sin embargo, la Regla de Sarrus no se puede aplicar a matrices de 4x4, al intentar aplicarla no se pueden identificar diagonales equivalentes de manera ordenada. Lo más difícil fue notar que no existe una forma correcta de extender la regla sin omitir términos o agregar productos equivocados, por eso en matrices de 4x4 o más grandes, es mejor la opción de la Expansión de Laplace.