Introducción a Álgebra Lineal

4.1 Operaciones con matrices y determinantes

1. **Encuentra la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizamos la regla de Sarrus para poder encontrar si la matriz es invertible, la cual su determinante debe ser distinto de 0.

$$det(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(F) = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Calculamos los determinantes menores

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (4)(6) = -24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (4)(5) = -20$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (0)(6) - (1)(5) = -5$$

Sustituimos los valores

$$det(F) = (1)(-24) - (2)(-20) + (3)(-5)$$

$$det(F) = -24 + 40 - 15 = 1$$

Como det(F)=1 diferente de 0, la matriz es invertible.

Ahora calcularemos la matriz de cofactores la primera fila, ya la tenemos solo nos faltaría encontrar la segunda y tercera fila.

Segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} (2)(0) - (3)(6) = -18$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (2)(5) = -4$$

Tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(1) = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (3)(0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(0) = 1$$

La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores

$$adj(F) = \begin{bmatrix} -24 & -20 & -5 \\ -18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificamos que si sea la inversa.

$$F * F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando las multiplicaciones.
Multiplicamos F por la primera fila de F^{-1}
$(1)(-24) + (2)(20) + (3)(-5) = 1$
$(0)(-24) + (1)(20) + (4)(-5) = 0$
$(5)(-24) + (6)(20) + (0)(-5) = 0$

Multiplicamos F por la segunda fila de F^{-1}
$(1)(18) + (2)(-15) + (3)(4) = 0$
$(0)(18) + (1)(-15) + (4)(4) = 1$
$(5)(18) + (6)(-15) + (0)(4) = 0$

Multiplicamos F por la tercera fila de F^{-1}
$(1)(5) + (2)(-4) + (3)(1) = 0$
$(0)(5) + (1)(-4) + (4)(1) = 0$
$(5)(5) + (6)(-4) + (0)(1) = 1$

El resultado es la matriz identidad, confirmamos que la inversa es correcta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.**

Para demostrar tomares dos matrices cuadradas de 2*2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos comprobar que:

$$\det(A * B) = \det(A) * \det(B)$$

Calculamos primero el determinante de A:

$$\det(A) = (2 * 4) - (3 * 1) = 8 - 3 = 5$$

Determinante de B:

$$\det(B) = (5 * 1) - (3 * 2) = 5 - 6 = -1$$

$$\det(A) * \det(B) = 5 * (-1) = -5$$

Ahora calculamos el producto de A*B y su determinante:

$$A * B = \begin{bmatrix} (2) & (5) + (3) & (3) & & (2) & (2) + (3) & (1) \\ (1) & (5) + (4) & (3) & & (1) & (2) + (4) & (1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 9 & 4 + 3 \\ 5 + 12 & 2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 5 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$\det(A * B) = (19)(6) - (5)(17) = 114 - 85 = -5$$

Por lo tanto

$$\det(A * B) = \det(A) * \det(B)$$

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

En el método de Gauss- Seidel requiere que despejemos las variables.

Despejamos x de la primera ecuación

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

Despejamos y de la segunda ecuación

$$y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}$$

Despejamos z de la tercera ecuación

$$z = \frac{5 - x + y}{3}$$

Iniciamos con una estimación inicial de $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$, y usamos las ecuaciones anteriores para actualizar los valores

Primera interación:

- $x_1 = \frac{7+0-0}{4} = 1.75$
- $y_1 = \frac{1+2(1.75)+2(0)}{4} = 1.625$

- $z_1 = \frac{5-1.75+1.625}{3} = 1.625$

Segunda interación:

- $x_1 = \frac{7+1.625-1.625}{4} = 1.75$
- $y_1 = \frac{1+2(1.75)+2(1.625)}{4} = 2.09375$
- $z_1 = \frac{5-1.75+2.09375}{3} = 1.78125$

Calculamos el error deseado, el cual debe de ser 0%

$$E_{a1x1} = \left|\frac{1.75 - 1.75}{1.75}\right|(100\%) = 0\%$$

$$E_{a2x2} = \left|\frac{2.09375 - 1.625}{2.09375}\right|(100\%) = 22.38\%$$

$$E_{a3x3} = \left|\frac{1.78125 - 1.625}{1.78125}\right|(100\%) = 8.77\%$$

Como el error aun no es 0% para los tres, ocupamos otra nueva interación

Tercera interación:

- $x_1 = \frac{7+2.09375-1.78125}{4} = 1.828125$
- $y_1 = \frac{1+2(1.828125)+2(1.78125}{4} = 2.0546875$
- $z_1 = \frac{5-1.828125+2.0546875}{3} = 1.7421875$

Calculamos nuevamente el error deseado:

$$E_{a1x1} = \left|\frac{1.828125 - 1.75}{1.828125}\right|(100\%) = 4.27\%$$

$$E_{a2x2} = \left|\frac{2.0546875 - 2.09375}{2.0546875}\right|(100\%) = 1.90\%$$

$$E_{a3x3} = \left|\frac{1.7421875 - 1.78125}{1.7421875}\right|(100\%) = 2.24\%$$

Seguimos con una cuarta interación:

- $x_1 = \frac{7+2.0546875-1.7421875}{4} = 1.828125$
- $y_1 = \frac{1+2(1.828125)+2(1.7421875)}{4} = 2.03515625$
- $z_1 = \frac{5-1.828125+2.03515625}{3} = 1.735677083$

Calculamos el error deseado:

$$E_{a1x1} = \left|\frac{1.828125 - 1.828125}{1.828125}\right|(100\%) = 0\%$$

$$E_{a2x2} = \left|\frac{2.03515625 - 2.0546875}{2.03515625}\right|(100\%) = 0.95\%$$

$$E_{a3x3} = \left|\frac{1.735677083 - 1.7421875}{1.735677083}\right|(100\%) = 0.37\%$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x = 1.828125,\ \ y = 2.03515625\ \ y\ \ z = 1.735677083}$

4. **Encuentra todas las soluciones del sistema homogéneo:**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Forma de matriz de coeficientes:

$$A * x = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Vector de incógnitas:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

El vector de términos independientes es cero:

$$A * x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz aumentada: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right]$

Eliminamos el primer coeficiente de la segunda fila, multiplicando -2 a la primera fila y sumando a la segunda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminamos el primer coeficiente de la tercera fila, multiplicando -3 a la primera fila y sumando a la tercera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta es la forma escalonada de la matriz $x + 2y + 3z = 0$, las otras dos ecuaciones son 0, esto nos dice que tiene infinitas soluciones con dos variables libres

$$x = -2y - 3z$$

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. **Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}),(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6}),(\mathbf{3},\mathbf{6},\mathbf{9})\}$.**

Formar la matriz V colocando los vectores como columnas:

$$V=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

El segundo vector es el doble del primero y el tercer vector es el triple del primero, con esto observamos que los tres vectores no son independientes, sino que son múltiplos del primero. Para confirmalo, podemos calcular el rango de la matriz V.

Convertiremos la matriz en forma escalonada, aplicando operaciones fila para reducir la matriz a su forma escalonada, la primera fila se queda igual, la segunda y tercera fila la convertiremos en 0

Paso 1: Multiplicamos -2 por la primera fila y se lo sumamos a la segunda fila.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

Paso 2: Multiplicamos -3 por la primera fila y se la sumamos a la tercera fila.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La matriz escalonada tiene una sola fila no nula, lo que nos confirma que el rango de la matriz es 1, esto nos dice que solo hay un vector independiente, por lo tanto, la base del subespacio generado es:

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

La dimensión del subespacio es igual al número de vectores en la base, y como la base solo tiene un vector, la dimensión del subespacio es: $\dim\big(span(S)\big)=1$. Todos los vectores originales están contenidos en una sola línea en el espació tridimensional.

6. **Determine los autovalores y auto vectores de la matriz.**

$$G=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\det(G-\lambda I)=0$$

Matriz identidad:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Restamos

$$G - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$(5-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2)$$

$$= (5-\lambda)^2 - 4$$

$$= 25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 21$$

Factorizamos:

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0$$

Despejamos los valores de λ para encontrar los autovalores de la matriz G.

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 3$$

Autovalor λ, resolvemos:

$$(G - \lambda I)v = 0$$

Donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ es el autovector

Sustituimos $\lambda_1 = 7$

$$G - 7I = \begin{bmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-2(x+y) = 0$$

$$((-2(x+y) = 0)/-2$$

$$x + y = 0$$

$$x = -y$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sustituimos $\lambda_2 = 3$

$$G - 3I = \begin{bmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$2(x-y) = 0$$

$$((2(x-y)=0)/2$$

$$x-y=0$$

$$x=y$$

$$v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensional.

7. Explique como el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.

PCA utiliza el álgebra lineal para reducir la dimensionalidad de los datos. Se basa en encontrar las direcciones de mayor varianza en los datos, llamadas autovectores. Luego, proyecta los datos originales en un espacio de menor dimensión definido por los autovectores con los autovalores más altos. Esto permite reducir la complejidad de los datos mientras se conserva la mayor cantidad de información posible.

8. Calcule la descomposición de valores singulares (SVD) de la matriz:

$$H=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$$

$$H=USV^T$$

- U es una matriz ortogonal que contiene autovectores de HH^T
- S es una matriz diagonal con los valores singulares de H.
- V es una matriz ortogonal con los autovectores de H^TH.

Calculamos H^TH

Paso 1 : calculamos la traspuesta de H:

$$H^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$$

Paso 2: calculamos H^TH

$$H^TH=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(3)(3)+ & (2)(2) & (3)(1)+ & (2)(2)\\(1)(3)+ & (2)(2) & (1)(1)+ & (2)(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9+4 & 3+4\\3+4 & 1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 7\\7 & 5\end{bmatrix}$$

Paso 3: calculamos HH^T

$$HH^T=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(3) & (3)+(1) & (1) & (3) & (2)+(1) & (2)\\(2) & (3)+(2) & (1) & (2) & (2)+(2) & (2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+1 & 6+2 \\ 6+2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(H^T H - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos los determinantes:

$$(13-\lambda)(5-\lambda) - (7)(7) = 0$$

$$65 - 13\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 49 = 0$$

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4(16)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 64}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{260}}{2}$$

$$= \frac{18 \pm 2\sqrt{65}}{2} = 9 \pm \sqrt{65}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{9 + \sqrt{65}}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{9 - \sqrt{65}},$$

9. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

El algebra lineal es importante en el aprendizaje con redes neuronales, ya que nos permite modelar y optimizar la información de manera eficiente. Los datos de entrada y las conexiones entre neuronas se representan mediante vectores y matrices y las operaciones fundamentales, como la multiplicación de matrices que permiten calcular las activaciones de cada capa, durante el entrenamiento, el ajuste de peso se basa en el cálculo de gradientes y la retro propagación que depende de derivadas parciales y manipulaciones matriciales.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en la IA

Los espacios vectoriales son esenciales en la inteligencia artificial porque permiten representar datos de forma estructurada y manipulable matemáticamente. En IA, los datos ya sean imágenes, texto o audio se convierten en vectores dentro de un espacio multidimensional lo que facilita su análisis y comparación. Esto es importante para tareas como el procesamiento de lenguaje natural, donde las palabras se representan en espacios vectoriales para capturar relaciones de significado o en visión por computadora, donde las imágenes se transforman en matrices de características. Además los espacio vectoriales permiten aplicar técnicas como reducción de dimensionalidad con PCA optimización en modelos de aprendizaje y calculo eficiente en redes neuronales. También la IA puede encontrar patrones, hacer predicciones y mejorar la toma de decisiones.