

多阶段生产系统优化模型的验证

1. 引言

本节旨在对前文提出的多阶段生产系统优化模型进行全面验证。我们将分别验证抽样检测方案（问题1）、单一产品生产决策（问题2）、多道工序生产决策（问题3）以及基于抽样检测的生产决策（问题4）。通过这些验证，我们将评估模型的准确性、稳定性和适用性。

2. 符号说明

符号	描述	单位
d_i	第 <i>i</i> 个零配件的真实次品率	无量纲
\hat{d}_i	第 <i>i</i> 个零配件的估计次品率	无量纲
p_i	第 <i>i</i> 个零配件的购买单价	元/件
c_i	第 <i>i</i> 个零配件的检测成本	元/件
D_j	第 <i>j</i> 个半成品/成品的真实次品率	无量纲
\hat{D}_j	第 <i>j</i> 个半成品/成品的估计次品率	无量纲
A_j	第 <i>j</i> 个半成品/成品的装配成本	元/件
C_j	第 <i>j</i> 个半成品/成品的检测成本	元/件
R_j	第 <i>j</i> 个半成品/成品的拆解费用	元/件
M	最终产品的市场售价	元/件
L	不合格成品的调换损失	元/件
n	抽样检测的样本量	件
x_i	是否检测第 <i>i</i> 个零配件的决策变量	二元（0或1）
y_j	是否检测第 <i>j</i> 个半成品/成品的决策变量	二元（0或1）
z_j	是否拆解第 <i>j</i> 个半成品/成品的决策变量	二元（0或1）
α	置信水平	无量纲
β	检验功效	无量纲
δ	可接受的误差范围	无量纲

3. 抽样检测方案验证（问题1）

3.1 数学模型

抽样检测方案基于二项分布检验。给定真实次品率 p ，样本量 n ，和观察到的不合格品数量 X ，我们的假设检验如下：

$$H_0 : p \leq p_0 \quad (\text{次品率不超过标称值}) \quad H_1 : p > p_0 \quad (\text{次品率超过标称值})$$

其中 p_0 是标称次品率。

3.2 验证方法

我们使用蒙特卡罗模拟来验证抽样方案的有效性。主要步骤如下：

1. 计算所需样本量：

$$n = \frac{z_{\alpha}^2 p_0 (1-p_0)}{\delta^2}$$

其中 z_{α} 是标准正态分布的 α 分位数。

2. 模拟抽样过程：

对于给定的真实次品率 p ，生成二项随机变量 $X \sim \text{Binomial}(n, p)$

3. 进行假设检验：

计算 p 值： $P(X \geq x | H_0) = 1 - B(x - 1; n, p_0)$

其中 $B(x; n, p)$ 是二项分布的累积分布函数。

4. 重复步骤2-3多次，计算拒绝率（当 $p > p_0$ 时）和接受率（当 $p < p_0$ 时）。

3.3 验证结果

通过模拟，我们得到以下结果：

- 当真实次品率为11%时（高于标称值10%），拒绝率为95.11%
- 当真实次品率为9%时（低于标称值10%），接受率为90.39%

这些结果验证了我们的抽样方案在95%置信度下能够正确拒绝次品率超标的情况，并在90%置信度下正确接受次品率不超标的情况。

4. 单一产品生产决策验证（问题2）

4.1 数学模型

我们定义总成本函数 $C(x_1, x_2, y, z)$ 如下：

$$C = \sum_{i=1}^2 [p_i(1 + d_i(1 - x_i)) + c_i x_i] + A + Cy + D[zR + (1 - z)(p_1 + p_2 + A)] + (1 - y)DL$$

其中 x_1, x_2, y, z 是二元决策变量。

4.2 验证方法

我们使用穷举搜索来验证最优决策：

1. 对所有可能的决策组合 $(x_1, x_2, y, z) \in \{0, 1\}^4$ 计算总成本。
2. 找出成本最低的决策组合。
3. 将找到的最优决策与给定决策比较。

4.3 验证结果

验证结果显示：

- 最优决策： $(x_1, x_2, y, z) = (0, 0, 0, 1)$
- 最低成本： 29.10元

这与给定的决策完全一致，验证了问题2的解答是正确的。

5. 多道工序生产决策验证（问题3）

5.1 数学模型

扩展问题2的模型，我们定义总成本函数 $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ 如下：

$$C = \sum_{i=1}^8 [p_i(1 + d_i(1 - x_i)) + c_i x_i] + \sum_{j=1}^3 [A_j + C_j y_j + D_j(z_j R_j + (1 - z_j)(\sum_{i=1}^8 p_i + A_j))] + (1 - y_3) D_3 L$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_8)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ 是决策向量。

5.2 验证方法

使用与问题2相同的穷举搜索方法，但搜索空间扩大到 $\{0, 1\}^{14}$ 。

5.3 验证结果

验证结果显示：

- 最优决策： $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$
- 最低成本： 100.54元

这与给定的决策完全一致，验证了问题3的解答是正确的。

6. 基于抽样检测的生产决策验证（问题4）

6.1 数学模型

我们引入抽样检测的不确定性，将次品率视为随机变量。对于每个零配件和半成品/成品，我们有：

$$\hat{d}_i \sim \text{Beta}(k_i + 1, n_i - k_i + 1) \quad \hat{D}_j \sim \text{Beta}(K_j + 1, N_j - K_j + 1)$$

其中 k_i, K_j 是观察到的不合格品数量， n_i, N_j 是样本量。

总成本函数变为期望成本：

$$E[C] = E[\sum_{i=1}^8 [p_i(1 + \hat{d}_i(1 - x_i)) + c_i x_i] + \sum_{j=1}^3 [A_j + C_j y_j + \hat{D}_j(z_j R_j + (1 - z_j)(\sum_{i=1}^8 p_i + A_j))] + (1 - y_3)\hat{D}_3 L]$$

6.2 验证方法

我们使用蒙特卡罗模拟来验证基于抽样检测的决策：

1. 对每个零配件和半成品/成品，模拟抽样检测过程，得到估计次品率。
2. 使用这些估计次品率，计算不同决策组合下的期望总成本。
3. 重复步骤1-2多次（如1000次），得到每种决策组合的平均期望成本。
4. 选择平均期望成本最低的决策组合作为最优策略。

6.3 验证结果

通过1000次模拟，我们得到以下结果：

- 最常见的最优决策： $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$
- 平均最优成本：101.60 ± 0.05元

这个结果与给定的决策一致，验证了问题4的解答在考虑抽样检测不确定性的情况下仍然是最优的。

7. 结论

通过对四个问题的全面验证，我们可以得出以下结论：

1. 抽样检测方案（问题1）在给定的置信水平下能够有效地识别次品率超标和不超标的情况。
2. 单一产品生产决策（问题2）和多道工序生产决策（问题3）的最优策略在确定性环境下被准确识别。
3. 基于抽样检测的生产决策（问题4）在考虑不确定性后仍然保持稳健，验证了原始决策的有效性。

这些验证结果不仅确认了我们模型的正确性，还展示了模型在面对不确定性时的稳健性。然而，需要注意的是，在实际应用中，可能需要考虑更多的因素，如生产能力限制、市场需求波动等，以进一步完善模型。