





### Statistiques des séries temporelles

Théorème d'Herglotz, filtrage des processus

### Partie I

### Rappel: stationnarité au second ordre



Roland Badeau





Roland Badeau

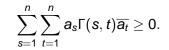


## Processus du second ordre

- Définition (processus du second ordre)
  - Le processus  $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est dit du second ordre si et seulement si  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$
  - Tout processus du second ordre admet une fonction moyenne  $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$  et une fonction d'autocovariance définie sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  par

$$\Gamma(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu(s))(\overline{X_t - \mu(t)})].$$

- Soit Γ la fonction d'autocovariance d'un processus du second ordre indexé par  $\mathbb Z$  à valeurs dans  $\mathbb C$ . Elle vérifie :
  - 1. Symétrie hermitienne :  $\forall (s,t) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\Gamma(s,t) = \overline{\Gamma(t,s)}$ ;
  - 2. Type positif:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{C}$ ,







- Définition (processus stationnaire au second ordre)
  - Soient  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ . Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible, ou encore stationnaire au sens large (SSL), de movenne  $\mu$  et de fonction d'autocovariance  $\gamma$  si et seulement si :
    - a) X est un processus du second ordre :  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$ ;
    - b)  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[X_t] = \mu$ ;
    - c)  $\forall (s,t) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = \gamma(s-t)$ .
- Propriété : tout processus du second ordre stationnaire au sens strict est aussi stationnaire au second ordre

Roland Badeau







## **三彩星間** Fonction d'autocovariance

#### Proposition

- La fonction d'autocovariance  $\gamma:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$  d'un processus stationnaire au second ordre vérifie les propriétés suivantes :
  - 1. Symétrie hermitienne :  $\forall h \in \mathbb{Z}, \ \gamma(-h) = \overline{\gamma(h)}$ ;
  - 2. Type positif:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_s \gamma(s-t) \overline{a_t} \geq 0.$$

Définition (matrice de covariance)

Contexte public

• La matrice de covariance  $\Gamma_n$  de *n* valeurs consécutives  $X_1 \dots X_n$ d'un processus stationnaire au second ordre possède une structure de Toeplitz, caractérisée par la relation  $(\Gamma_n)_{i,j} = \gamma(i-j)$ .











- Exemple (bruit blanc faible)
  - On note  $(X_t) \sim BB(0, \sigma^2)$  tout processus stationnaire au second ordre de fonction d'autocovariance  $\gamma(h) = \sigma^2 \delta(h)$ .
- Exemple (bruit blanc fort)
  - On note  $(X_t) \sim IID(0, \sigma^2)$  toute suite de variables aléatoires IID, centrées et de variance  $\sigma^2$ .
  - Tout bruit blanc fort est aussi un bruit blanc faible.
- Exemple : processus harmonique
  - Le processus  $X_t = A\cos(\lambda_0 t + \phi)$  (où A est une v.a. réelle centrée de variance  $\sigma^2 < +\infty$  et  $\phi$  est une v.a. uniforme sur  $(-\pi, \pi]$ indépendante de A) est un processus stationnaire au second ordre centré qui admet pour fonction d'autocovariance



 $\gamma(h) = \frac{1}{2}\sigma^2\cos(\lambda_0 h).$ 

Roland Badeau





### Partie II

## Théorème d'Herglotz

# Théorème d'Herglotz

- Soit  $\mathbb{T}$  le torre  $(-\pi, \pi]$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{T})$  la tribu borélienne associée.
- Théorème (Herglotz)
  - Une suite  $(\gamma(h))_{h\in\mathbb{Z}}$  est de type positif si et seulement si il existe une unique mesure positive  $\nu$  sur  $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$  telle que

$$orall h \in \mathbb{Z}, \; \gamma(h) = \int_{\mathbb{T}} \mathsf{e}^{ih\lambda} 
u(\mathsf{d}\lambda)$$

- Définition (mesure spectrale et densité spectrale de puissance)
  - Lorsque  $\gamma$  est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire au second ordre,  $\nu$  est appelée mesure spectrale du processus.
  - Si de plus  $\nu$  admet une densité  $f(\nu(d\lambda) = f(\nu)d\nu)$ , alors f est appelée densité spectrale de puissance (DSP) du processus

Roland Badeau

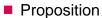






## Propriété des processus harmoniques

- Corollaire du théorème d'Herglotz
  - Une suite  $(\gamma(h))_{h\in\mathbb{Z}}$  à valeurs complexes telle que  $\sum\limits_{h\in\mathbb{Z}}|\gamma(h)|^2<+\infty$  est de type positif si et seulement si la fonction de  $L^2(\mathbb{T})$  définie par  $f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{h\in\mathbb{Z}}\gamma(h)e^{-ih\lambda}$  est positive presque partout dans  $\mathbb{T}$ .
- Exemple (bruit blanc)
  - La fonction d'autocovariance du bruit blanc est  $\gamma(h) = \sigma^2 \delta(h)$
  - La densité spectrale correspondante est  $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$
- Contre-exemple : processus harmonique
  - Le processus  $X_t = A\cos(\lambda_0 t + \phi)$  admet pour mesure spectrale  $\nu(d\lambda) = \frac{1}{4}\sigma^2(\delta_{\lambda_0}(d\lambda) + \delta_{-\lambda_0}(d\lambda))$ , mais il n'admet pas de DSP.



S'il existe un rang n pour lequel la matrice de covariance Γ<sub>n</sub> est non inversible, alors le processus correspondant X<sub>t</sub> est prédictible dans le sens où il existe a<sub>1</sub> . . . a<sub>l</sub> ∈ ℂ avec l ≤ n − 1 tels que X<sub>t</sub> = ∑<sup>l</sup><sub>k=1</sub> a<sub>k</sub>X<sub>t-k</sub> p.s.

### Proposition

 Soit γ(h) la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire au second ordre. On suppose que γ(0) > 0 et γ(h) → 0 quand h → +∞. Alors ∀n ∈ N\*, la matrice Γ<sub>n</sub> est de rang plein et donc inversible.





Roland Badeau





Roland Badeau





### Partie III

## Filtrage des processus

## Théorème de filtrage des processus

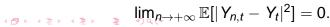
Soit  $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$  une suite absolument sommable :  $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| < +\infty$ . Soit  $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$  un processus aléatoire tel que  $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ . Alors,  $\forall t\in\mathbb{Z}$ , la suite  $Y_{n,t} = \sum_{k=-n}^n \psi_k X_{t-k}$  converge presque sûrement, quand n tend vers  $+\infty$ , vers une limite  $Y_t$  notée

$$Y_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k X_{t-k}$$
.

De plus,  $\forall t \in \mathbb{Z}$  la v.a.  $Y_t$  est intégrable :  $\mathbb{E}[|Y_t|] < +\infty$ , et la suite  $(Y_{n,t})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Y_t$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[|Y_{n,t}-Y_t|]=0.$$

Si  $\sup_{t\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}[|X_t|^2]<+\infty$ , alors  $\forall t\in\mathbb{Z},\,\mathbb{E}[|Y_t|^2]<+\infty$  et la suite  $(Y_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$  converge en moyenne quadratique vers la v.a.  $Y_t$ , i.e.













# Théorème de filtrage des processus

Soit  $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$  une suite absolument sommable :  $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| < +\infty$ . Soit  $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$  un processus stationnaire au second ordre de moyenne  $\mu_X = \mathbb{E}[X_t]$  et de fonction d'autocovariance  $\gamma_X(h) = \operatorname{cov}(X_{t+h}, X_t)$ . Alors le processus  $Y_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k X_{t-k}$  est stationnaire au second ordre, de moyenne  $\mu_Y = \mu_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k$ , de fonction d'autocovariance

$$\gamma_{\mathsf{Y}}(h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_j \overline{\psi_k} \gamma_{\mathsf{X}}(h+k-j),$$

et de mesure spectrale

$$\nu_{\mathsf{Y}}(\mathsf{d}\lambda) = |\psi(\mathsf{e}^{-i\lambda})|^2 \nu_{\mathsf{X}}(\mathsf{d}\lambda),$$

où 
$$\psi(e^{-i\lambda}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k e^{-ik\lambda}$$
.



Page 13 / 13



l Badeau

