



Processus stationnaires au second ordre

Roland Badeau, Bertrand David



Les fichiers utiles au TP peuvent être récupérés sur le site pédagogique de SIMD226 :
https://sitepedago.telecom-paristech.fr/front/frontoffice.php?SP_ID=2441#R1950

1 Observation de processus, calcul des moyennes et des covariances (simuproc.m)

Utiliser le programme `simuproc.m` en le modifiant pour afficher les moyennes et les covariances mesurées à l'aide d'un grand nombre de réalisations pour les processus suivants :

1. bruit blanc Z_t (fonction Matlab `randn`) de variance σ^2 ,
2. processus AR(1) causal (filtrage d'un bruit blanc par le filtre de fonction de transfert $\frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{1 - \phi_1 z}$, de coefficient $\phi_1 \in]-1, 1[$),
3. processus sinusoïdal $X_t = A_0 \cos(\lambda_0 t + \Phi_0) + Z_t$, où $\lambda_0 \in [0, \pi[$ et Φ_0 est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$, indépendante des Z_t .

Corroborer les résultats par le calcul.

2 Estimation de la densité spectrale de puissance, périodogramme.

On cherche à estimer la densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus X_t stationnaire au second ordre et de moyenne nulle, observé sur un intervalle $t \in \{1 \dots n\}$, à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD), implémentée dans la fonction Matlab `fft`. On rappelle que la DSP $f(\lambda)$ est définie comme la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$: $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-i\lambda h}$. Remarque : cet exercice étant indépendant du précédent, le programme sera écrit dans un autre fichier Matlab.

1. Soit $\hat{\gamma}_n(h)$ l'estimateur empirique de la fonction d'autocovariance du processus X_t : $\forall h \in \{0 \dots n-1\}$, $\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \hat{\mu}_n)(X_{t+h} - \hat{\mu}_n)$ (où $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$) et $\forall h \geq n$, $\hat{\gamma}_n(h) = 0$. On définit le périodogramme de $X_1 \dots X_n$, noté $I_n(\lambda)$, comme $I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-n+1}^{n-1} \hat{\gamma}_n(h) e^{-i\lambda h}$. Exprimer $I_n(\lambda)$ en fonction de la TFTD de $X_1 - \hat{\mu}_n \dots X_n - \hat{\mu}_n$.
2. En déduire un algorithme de calcul de $I_n(2\pi k/m)$ pour $k \in \{0 \dots m-1\}$, où $m \geq n$ est l'ordre de la TFD utilisée, que vous implémenterez sous Matlab. Testez-le avec les processus définis dans la section 1.
3. Comment obtenir la séquence $\hat{\gamma}_n(h)$ à partir de $I_n(2\pi k/m)$? Quelle précaution faut-il prendre sur m ? Ecrire la fonction Matlab correspondante : `gamma = acovb(x)` (attention : il faudra d'abord centrer le vecteur `x`).
4. Dans le cas du bruit blanc, estimer la variance du périodogramme pour plusieurs horizons d'observation n . Qu'en concluez-vous ?

3 Filtrage des processus. Modélisation AR de la parole.

3.1 Équations de Yule-Walker.

On considère un processus AR(p) causal défini par l'équation récurrente :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

où Z_t est un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Montrer que pour tout $h \geq 1$ on a $\mathbb{E}(X_{t-h} Z_t) = 0$.

Roland Badeau, Bertrand David



Contexte public } sans modifications
 Voir page 3

2. En déduire une relation de récurrence liant $\gamma(h)$ et $\gamma(h-1) \dots \gamma(h-p)$ pour $h \geq 1$. Étudier le cas $h = 0$.
3. En déduire que ces équations pour $h = 0 \dots p$ peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\Gamma_{p+1} \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi_1 \\ \vdots \\ -\phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

où Γ_{p+1} est une matrice de Toeplitz (termes égaux le long d'une diagonale) que l'on précisera.

3.2 Estimation.

1. Générer sous Matlab un processus AR(4) de longueur $n = 1000$ à l'aide de la fonction `[X,phi] = genAR(p,n)`.
2. En utilisant la fonction `acovb` servant à générer la séquence des autocovariances biaisées, déduire une estimée $\hat{\Gamma}_{n,p+1}$ de la matrice Γ_{p+1} .
3. Résoudre alors le système d'équations (1) en calculant le vecteur intermédiaire

$$\mathbf{v} = \hat{\Gamma}_{n,p+1}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

4. Comparer les valeurs estimées pour les coefficients et la variance du bruit aux valeurs vraies. On pourra également comparer visuellement les spectres correspondants.

3.3 Application à la parole.

Analyse. Le signal est découpé en trames recouvrantes (par exemple à 50%) d'environ 30ms. Chaque trame est considérée comme un processus AR(12) et est estimée selon le procédé décrit à la section précédente. Si la trame présente un spectre harmonique, lié à la vibration des cordes vocales, elle est dite *voisée* et la période fondamentale (période de voisement) est estimée, soit T . Si la trame est non-voisée, $T = 0$. Les paramètres estimés $\gamma(0)$, ϕ et T sont transmis pour chaque trame au système de synthèse.

Synthèse. Si la trame est voisée, le signal est reconstruit comme le filtrage AR d'un peigne d'impulsions à la fréquence $f_0 = 1/T$. Si la trame n'est pas voisée, l'innovation sera prise égale à du bruit blanc. La synthèse est réalisée par addition-recouvrement (*overlap-add*, OLA) des trames de synthèse, à l'aide d'une fenêtre de Hann.

1. La fonction `T = detectpitch(trame,minT,maxT)` permet de détecter l'existence d'une périodicité dans un processus stationnaire. Elle recherche une période $T \in [\text{minT}, \text{maxT}]$ dans un signal `trame`. Elle renvoie $T = 0$ si le processus n'est pas périodique ou si la période n'est pas dans l'intervalle $[\text{minT}, \text{maxT}]$, ou $T \in [\text{minT}, \text{maxT}]$ si le processus est périodique de période T échantillons. Sachant que la fréquence fondamentale d'une voix humaine est généralement comprise dans l'intervalle 80Hz-400Hz, comment doit-on choisir `minT` et `maxT` ?
2. Utiliser le cadre fourni dans le script `anasyn.m` pour réaliser l'analyse synthèse d'un signal de parole.
3. Choisir un morceau de phrase et en modifier l'intonation (*i.e.* les valeurs de fréquence de voisement).



Contexte public } sans modifications

Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après et à l'exclusion expresse de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage à destination de tout public qui comprend :

- Le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- Le droit de diffuser tout ou partie du document au public sur support papier ou informatique, y compris par la mise à la disposition du public sur un réseau numérique.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel, non exclusif et non transmissible.

Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : sitepedago@telecom-paristech.fr