ENSAE

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

Deuxième année
2005-2005

Séries temporelles linéaires

Corrigé des travaux dirigés n°1 à 8

Guillaume Lacôte
Bureau **E03**
Guillaume.Lacote@ensae.fr
http://ensae.no-ip.com/SE206/

Version du 20050121-11h02, révisée le 17 février 2005

Table des matières

1 Travaux Dirigés n°1

Corrigé de l'exercice 1

Rappels :

- Une suite de variables aléatoires réelles (ou *processus*) $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dite *du second ordre* si chacune d'elles est de carré intégrable.
- Un processus X est *fortement stationnaire ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n,\ \forall h \in \mathbb{Z},\ \mathcal{L}_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}} = \mathcal{L}_{X_{t_1+h},\ldots,X_{t_n+h}}$$

  où $\mathcal{L}_Y$ désigne la loi de Y.
- Un processus X est *(faiblement) stationnaire ssi*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) \\ \exists \gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+ \ /\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \forall h \in \mathbb{Z},\ \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \end{cases}$$

- Le processus X est un *bruit blanc fort* de variance $\sigma^2 \geq 0$ *ssi*

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ (X_t)_t \text{ est i.i.d} \end{array} \right.$$

- Le processus X est un *bruit blanc (faible)* de variance $\sigma^2 \geq 0$ *ssi*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 \\ \forall t \in \mathbb{Z},\ \forall h \in \mathbb{Z}^*,\ \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = 0 \end{cases}$$

☞ Q1 On a pour $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
- $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$ par indépendance
- Enfin $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-1}) = -\sigma^2$ et $\forall h \geq 2, \mathbb{C}ov(X_t, X_{t-h}) = 0$

X est donc stationnaire.

☞ Q2 On a successivement pour $t \in \mathbb{Z}$:
- $\mathbb{E}(X_t) = a + b\mathbb{E}(\epsilon_t) + c\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = a$
- $\mathbb{V}(X_t) = 0 + b^2\mathbb{V}(\epsilon_t) + c^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (b^2 + c^2)\,\sigma^2$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés
- Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(X_t, X_{t-1}) &= \mathbb{C}ov(a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}, a + b\epsilon_{t-1} + c\epsilon_{t-2}) \\ &= b^2\mathbb{C}ov(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) + bc\mathbb{C}ov(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) + cb\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) + c^2\mathbb{C}ov(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}) \\ &= bc\sigma^2 \end{aligned}$$

- Enfin $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = 0,\ \forall h \geq 2$

Le processus X est donc stationnaire.

☞ Q3 On a de façon similaire pour $t \in \mathbb{Z}$:

- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t)\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés
- Si ϵ est un bruit blanc fort, ϵ_t^2 est indépendant de $\epsilon_{t'}^2$ et donc $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t)\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (\sigma^2)^2$. En revanche si ϵ_t et ϵ_{t-1} sont décorrélés mais pas indépendants on ne peut rien dire : il existe un bruit blanc faible ϵ tel que $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2\right)$ dépend de t. [1]
- Enfin pour $\forall h \in \mathbb{Z}$ et si ϵ est un bruit blanc fort

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-1}\epsilon_{t+h}\epsilon_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

En revanche il existe un bruit blanc faible ϵ tel que $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h})$ dépend de t. [2]

Le processus X est donc stationnaire **si ϵ est un bruit blanc fort**, et il existe au moins un bruit blanc faible ϵ tel que X n'est **pas** stationnaire.

☞ Q4 X est une marche aléatoire. On a plus précisément

- On a $\mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(X_{t-1}) = 0$ et donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$.
- Par ailleurs $X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0$; Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_t) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{t-1} \epsilon_{t-i} + X_0\right) \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{V}(\epsilon_{t-i}) + \mathbb{V}(X_0) \quad \text{car } \epsilon_{\underbrace{t-i}_{>0}} \perp\!\!\!\perp X_0 \\ &= t\sigma^2 + \mathbb{V}(X_0)\end{aligned}$$

En particulier $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 + \mathbb{V}(X_0) > \mathbb{V}(X_0)$ et donc X n'est **pas** stationnaire.

☞ Q5 Pour $t \in \mathbb{Z}$ on a

- $\mathbb{E}(X_t) = 0$
- $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2$
- $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-h}) = 0$ si $h \geq 2$
- Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-1}) &= \sigma^2 \sin(ct)\cos(c(t-1)) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left(\sin(ct + c(t-1)) + \sin(ct - c(t-1))\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left(\sin(c(2t-1)) + \sin(c)\right)\end{aligned}$$

En particulier pour que X soit stationnaire il faut et il suffit que $u_t = \forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1))$ ne dépende pas de t, donc en particulier que $\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = u_1$ ce qui s'écrit $\forall t \in \mathbb{Z}, \sin(c(2t-1)) =$

[1] Par exemple $X_{2t} = 1$ et $X_{2t+1} = \frac{1}{2}\delta_t + \frac{1}{2}\delta_{-t}$ la binômiale qui vaut -1 ou 1 de façon équiprobable. Alors $\mathbb{E}(X_tX_{t+1}) = \mathbb{E}\left(X_{2\lceil\frac{2}{t}\rceil+1}\right) = 0$ mais $\mathbb{E}\left(X_{2t}^2X_{2t+1}^2\right) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(-t)^2 = t^2$ et $\mathbb{E}\left(X_{2t-1}^2X_{2t}^2\right) = \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}(-(t-1))^2 = (t-1)^2$ qui dépend de t à tout $t \in \mathbb{Z}$.

[2] Reprenant le contre-exemple ci-dessus on a $\mathbb{C}ov(X_{2t+1}, X_{2t+2}) = \mathbb{E}\left(\epsilon_{2t}\epsilon_{2t+1}^2\epsilon_{2t+2}\right) = \mathbb{E}\left(\epsilon_{2t+1}^2\right) = (2t+1)^2$.

$\sin c$ soit

$$\begin{aligned}
0 &= \sin(c) - \sin((2t-1)c) \\
&= 2\sin\left(\frac{1-(2t-1)}{2}c\right)\cos\left(\frac{1+(2t-1)}{2}c\right) \\
&= -2\sin((t+1)c)\cos(tc) \\
\text{soit} &\quad (t+1)c \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } tc \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $t \in \mathbb{Z}$ il faut et il suffit donc que $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Donc X est stationnaire *ssi* $c \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

☞ Q6 – On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
X_t &= \sum_{i=0}^{t} \lambda^i \left(\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}\right) \\
&= \epsilon_t + \sum_{i=1}^{t} \left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)\epsilon_{t-i} - \lambda^t \epsilon_{-1} \quad \text{(“transformation d'Abel”)}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_t) &= \sigma^2\left(1 + \sum_{i=1}^{t}\left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)^2 + \lambda^{2t}\right) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sigma^2\left(1 + \sum_{i=1}^{t}\left(\lambda^{i-1}\right)^2(\lambda-1)^2 + \lambda^{2t}\right) \\
&= \sigma^2\left(1 + (\lambda-1)^2\sum_{i=0}^{t-1}\left(\lambda^2\right)^i + \lambda^{2t}\right) \\
&= \sigma^2\left(1 + (\lambda-1)^2\frac{1-\lambda^{2t}}{1-\lambda^2} + \lambda^{2t}\right) \\
&= \sigma^2\left(1 + \frac{(1-\lambda)\left(1-\lambda^{2t}\right)}{1+\lambda} + \lambda^{2t}\right) \\
&= 2\sigma^2\frac{1+\lambda^{2t+1}}{1+\lambda}
\end{aligned}$$

En particulier pour que X soit stationnaire, il faut que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

Réciproquement si $\lambda = 1$, alors $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{-1}$ et donc X est stationnaire.

– Constatant que $2\sigma^2\frac{1+\lambda^{2t+1}}{1+\lambda} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{2\sigma^2}{1+\lambda}$, on pose $Y_t = \sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i\left(\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1}\right)$ (qui existe car la série est normalement convergente car $|\lambda| < 1$). On a par construction $\mathbb{V}(Y_t) = 2\frac{\sigma^2}{1-\lambda}$.
On a par ailleurs $Y_t = \epsilon_t + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i}$.

Par conséquent pour $h \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(Y_t, Y_{t+h}\right) &= \mathbb{C}ov\begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i} \ , \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t+h-i} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{C}ov\begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i} \ , \\ \epsilon_{t+h} + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{h-1}\lambda^{i-1}\epsilon_{t+h-i} + (\lambda-1)\sum_{i=h}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-(i-h)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{C}ov\begin{pmatrix} \epsilon_t + (\lambda-1)\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i} \ , \\ \epsilon_{t+h} + \sum_{1\le i\le h-1}\lambda^{i-1}\epsilon_{t+\underbrace{h-i}_{\ge 1}} + (\lambda-1)\lambda^{h-1}\epsilon_t + (\lambda-1)\lambda^h\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda^{j-1}\epsilon_{t-\underset{\ge 1}{j}} \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)\lambda^{h-1}\mathbb{V}\left(\epsilon_t\right) + (\lambda-1)^2\lambda^h\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i}\right) \\
&= (\lambda-1)\lambda^{h-1}\sigma^2 + (\lambda-1)^2\lambda^h\frac{1}{1-\lambda}\sigma^2 \\
&= -\left(1-\lambda\right)^2\lambda^{h-1}\sigma^2
\end{aligned}$$

et donc Y est bien stationnaire.
<u>*Autre méthode :*</u>
On a $Y = \sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i L^i(\mathbb{1}-L)\circ\epsilon = \left(\mathbb{1} + \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)L^i\right)\circ\epsilon$ et donc $Y-\epsilon$ est la transformée moyenne mobile infinie du processus stationnaire ϵ avec les cœfficients $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)$. Comme la série $\sum_i\left(\lambda^i - \lambda^{i-1}\right)$ est absolument convergente, Y est stationnaire.
Enfin on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(Y_t - X_t\right) &= \mathbb{V}\left((\lambda-1)\sum_{i=t+1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i} + \lambda^t\epsilon_{t-1}\right) \\
&= \lambda^t\mathbb{V}\left(\epsilon_{t-1}\right) + (\lambda-1)^2\sum_{i=t+1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\mathbb{V}\left(\epsilon_{t-i}\right) \\
&= \lambda^t\sigma^2 + (\lambda-1)^2\frac{1}{1-\lambda}\lambda^{t+1}\sigma^2 \\
&\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_t - X_t\right) &= \mathbb{E}\left((\lambda-1)\sum_{i=t+1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\epsilon_{t-i} + \lambda^t\epsilon_{t-1}\right) \\
&= (\lambda-1)\sum_{i=t+1}^{+\infty}\lambda^{i-1}\underbrace{\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-i}\right)}_{=0} + \lambda^t\underbrace{\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}\right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

on a [3]

$$\boxed{(X_t - Y_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^2} (0)}$$

☞ Q7 Non en général : considérer par exemple X_t stationnaire d'espérance nulle, et $Y_t = (-1)^t X_t$: alors $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathbb{C}ov(Y_t, Y_{t+h}) = (-1)^t(-1)^{t+h}\mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) = (-1)^h\gamma_X(h)$ donc Y est stationnaire, et de plus

$$X_t + Y_t = \begin{cases} 2X_t \text{ si } t \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et donc $\mathbb{C}ov(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = 4\gamma_X(h)\mathbb{1}_{t\in 2\mathbb{Z}}\mathbb{1}_{h\in 2\mathbb{Z}}$ qui dépend non-seulement de h mais aussi de t.

En revanche la somme de deux processus (faiblement ou fortement) stationnaires **non-corrélés** est faiblement stationnaire : si $\forall t, t'$, $X_t \perp\!\!\!\perp Y_{t'}$ alors

$$\mathbb{C}ov(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) = \mathbb{C}ov(X_t, X_{t+h}) + \mathbb{C}ov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$$

La somme de deux processus fortement stationnaires et **indépendants** est fortement stationnaire.

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Les composantes saisonnières ne sont pas identifiables : en effet les processus définis par $a, b, (s_t)_t$ et $a + \mu, b, (s_t - \mu)_t$ sont égaux pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Il est néanmoins naturel de supposer que le processus saisonnier est "centré" sur une période : *i.e.*

$$\forall t \in \mathbb{Z}\ s_t + s_{t+1} + s_{t+2} + s_{t+3} = 0$$

(le processus s étant de période 4 cette quantité ne dépend de tout façon pas de la date t).

☞ Q2 On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} Y_t &= a + b\frac{t + (t-1) + (t-2) + (t-3)}{4} + M_4(s)_t + M_4(u)_t \\ &= (a - \frac{6}{4}b) + bt + \underbrace{M_4(s)_t}_{=0 \text{ par hypothèse}} + M_4(u)_t \\ &= \mu + bt + v_t \end{aligned}$$

avec $\mu = a - \frac{3}{2}b$ indépendant de t et $v = M_4(u)$ est stationnaire (c'est un MA(3) mais pas un bruit blanc). On a ainsi désaisonnalisé la série X et fait apparaître la tendance déterministe $\mu + bt$.

[3] La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{Z}$ dans $\mathcal{L}^2$ *ssi* $\|Z_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{Z}$ soit $\mathbb{E}\left({Z_n}^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{Z}$ soit $\mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{Z}$ soit $\mathbb{V}(Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{Z}$ et $\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{Z}$

☞ Q3 On a immédiatement pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\Delta(Y)_t = b + \Delta(v)_t = b + \frac{u_t - u_{t-4}}{4}$$

Par conséquent
- $\mathbb{E}(Z_t) = b$
- $\mathbb{V}(Z_t) = \frac{\sigma^2+\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{8}$
- $\mathbb{C}ov(Z_t, Z_{t-h}) = \mathbb{C}ov\left(\frac{u_t-u_{t-4}}{4}, \frac{u_{t-h}-u_{t-h-4}}{4}\right) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{16} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier le processus Z est stationnaire, d'auto-corrélation $\rho_Z(h) = \frac{\gamma_Z(h)}{\gamma_0(h)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h = \pm 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 On a successivement pour $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t) - \theta\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$
- $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \theta^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (1+\theta^2)\,\sigma_\epsilon^2$
- $\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{C}ov(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}\,,\, \epsilon_{t-h} - \theta\epsilon_{t-h-1}) = \begin{cases} -\theta\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier X est stationnaire.

☞ Q2 On a par définition pour $t \in \mathbb{Z}$ $\widehat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^{T} \phi_k X_k$.
Alors pour $k \in [\![1, T]\!]$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\left(\left(X_{T+1} - \widehat{X}_{T+1}\right)\,,\, X_k\right) &= 0 \\ \text{soit}\quad \mathbb{C}ov(X_{T+1}, X_k) - \sum_{l=1}^{T} \phi_l \mathbb{C}ov(X_l, X_k) &= 0 \\ \text{soit}\quad \gamma_X(T+1-k) - \sum_{l=1}^{T} \phi_l \gamma_X(k-l) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit compte-tenu de l'expression de γ_X

$$\begin{cases} +\phi_{T-1}\theta\sigma_\epsilon^2 & -\phi_T(1+\theta^2)\,\sigma_\epsilon^2 & -\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k = T \\ +\phi_{k-1}\theta\sigma_\epsilon^2 & -\phi_k(1+\theta^2)\,\sigma_\epsilon^2 & +\phi_{k+1}\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k \in [\![2, T-1]\!] \\ & -\phi_1(1+\theta^2)\,\sigma_\epsilon^2 & +\phi_2\theta\sigma_\epsilon^2 & = 0 & \text{lorsque } k = 1 \end{cases}$$

d'où (puisque $\sigma_\epsilon^2 > 0$)

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\,\phi_T - \theta\phi_{T-1} & = -\theta \text{ lorsque } k = T \\ -\theta\phi_{k+1} + (1+\theta^2)\,\phi_k - \theta\phi_{k-1} & = 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ (1+\theta^2)\,\phi_1 - \theta\phi_2 & = 0 \text{ lorsque } k = 1 \end{cases}$$

☞ Q3 Par définition le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m est

$$r(m) = \mathbb{C}orr\left(X_t - \mathbb{E}\left(X_t | X_{t-1}, \ldots, X_{t-m}\right), X_{t-m} - \mathbb{E}\left(X_{t-m} | X_{t-m}, \ldots, X_{t-1}\right)\right)$$

(comme $\mathbb{E}(X_t) = 0$ il n'est pas nécessaire de régresser sur $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$ mais seulement sur $< X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$). Or il est aussi égal au cœfficient de X_{t-m} dans la régression de X_t sur $< X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$.[4] On a donc successivement :

– Calcul de $r(1)$:
  Projetant X_t sur $< X_{t-1} >$ on a $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}) = \phi_1^{(1)} X_{t-1}$ avec $r(1) = \phi_1^{(1)}$.
  Or d'après la question précédente on a $(1+\theta^2)\,\phi_1^{(1)} = -\theta$ et donc

$$r(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

– Calcul de $r(2)$:
  Projetant X_t sur $< X_{t-1}, X_{t-2} >$ on a $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}) = \phi_1^{(2)} X_{t-1} + \phi_2^{(2)} X_{t-2}$ avec $r(2) = \phi_2^{(2)}$.
  Attention : il n'y a aucune raison pour que $\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(2)}$ ...
  On a alors

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\,\phi_1^{(2)} - \theta\phi_2^{(2)} = -\theta \\ -\theta\phi_1^{(2)} + (1+\theta^2)\,\phi_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

  soit

$$\begin{cases} (1-\theta+\theta^2)\left(\phi_1^{(2)} + \phi_2^{(2)}\right) = -\theta \\ (1+\theta+\theta^2)\left(\phi_1^{(2)} - \phi_2^{(2)}\right) = 0 \end{cases}$$

  ce dont on tire que

$$\phi_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{1-\theta+\theta^2} - \frac{\theta}{1+\theta+\theta^2}\right)$$

  soit

$$r(2) = -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

  Remarque : on constate par ailleurs que $\phi_1^{(2)} = -\frac{\theta+\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4} \neq \phi_1^{(1)}$.

– Calcul de $r(T)$:
  Projetant X_t sur $< X_{t-1}, \ldots, X_{t-T} >$ on a $\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \ldots, X_{t-T}) = \phi_1^{(T)} X_{t-1} + \cdots + \phi_2^{(T)} X_{t-2}$ avec $r(T) = \phi_T^{(T)}$.

  On a alors

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\,\phi_T^{(T)} - \theta\phi_{T-1}^{(T)} & = -\theta \text{ lorsque } k = T \\ -\theta\phi_{k+1}^{(T)} + (1+\theta^2)\,\phi_k^{(T)} - \theta\phi_{k-1}^{(T)} & = 0 \text{ pour } k \in [\![2, T-1]\!] \\ (1+\theta^2)\,\phi_1^{(T)} - \theta\phi_2^{(T)} & = 0 \text{ lorsque } k = 1 \end{cases}$$

[4]Une preuve en est donnée dans "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, `V-D.2` page 161. Voir aussi exercice 4 .

ce dont on tire que par récurrence[5] que

$$r(T) = -\frac{\theta^T}{1+\theta^2+\cdots+\theta^{2T}}$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 (a) *Remarque :* bien-entendu comme X est stationnaire $\rho(m)$ ne dépend pas de t et est donc bien défini.

– $\mathbb{E}\left(X_t^{*+}\right)$ est la projection orthogonale de X_t sur le sous-espace vectoriel engendré par $(1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1})$ pour le produit scalaire $< X|Y >= \mathbb{E}(XY)$. Donc par définition $(X_t - X_t^{*+})$ est orthogonal à $\langle 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\rangle$, donc en particulier $(X_t - X_t^{*+}) \perp\!\!\!\perp (1)$ ce qui s'écrit $\mathbb{E}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = 0$.
De $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left(X_t^{*+}\right)$ on tire alors que

$$\mathbb{E}(X_t) = a_0 + a_1\mathbb{E}(X_{t-1}) + \cdots + a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1})$$

et donc, $(X_t)_t$ étant stationnaire,

$$a_0 = (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1})\,\mathbb{E}(X_t)$$

Par ailleurs par définition X_t^{*+} on a $\forall j \in [\![1, m-1]\!]$, $\left(X_t - X_t^{*+}\right) \perp\!\!\!\perp X_{t-j}$. Autrement dit pour $j \in [\![1, m-1]\!]$

$$\begin{array}{rrcl}
 & 0 & = & \mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\cdot X_{t-j}\right) \\
\text{soit} & \mathbb{E}(X_tX_{t-j}) & = & a_0\mathbb{E}(X_t) + a_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) + \cdots + a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) \\
\text{soit} & \mathbb{E}(X_tX_{t-j}) & = & (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1})\,\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) + \cdots \\
 & & & +a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) \\
 & & = & \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1\left(\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) + \cdots \\
 & & & +a_{m-1}\left(\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) \\
\text{soit} & \gamma_X(j) & = & a_1\gamma_X(j-1) + \cdots + a_{m-1}\gamma_X(j-m+1)
\end{array}$$

Autrement dit en notant

$$\Gamma_{m-1} = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(m-2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(m-2) & \gamma_X(m-3) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} = \mathbb{C}ov\,(X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1})$$

[5] Calcul non-détaillé ici. En utilisant exercice 4 , identifier le cœfficient b_k^{l-1} de X_{T-k}^{l-1} dans la régression de X_{T-l} sur $1, X_{T-m+1}, \ldots, X_{T-1}$, au cœfficient a_{l-k+1}^{l-1} de $X_{T-l+k-1}^{l-1}$ dans la régression de X_T sur $1, X_{T-1}, \ldots, X_{T-m+1}$ …

on a

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$$

– De façon similaire on a pour $j \in [\![1, m-1]\!]$

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*-}\right) \cdot X_{t-j}\right) \\
\text{soit} \quad \mathbb{E}\left(X_t X_{t-j}\right) &= b_0 \mathbb{E}\left(X_t\right) + b_1 \mathbb{E}\left(X_{t-m+1} X_{t-j}\right) + \cdots + b_{m-1} \mathbb{E}\left(X_{t-1} X_{t-j}\right) \\
\text{soit} \quad \mathbb{E}\left(X_t X_{t-j}\right) &= \left(1 - b_1 - \cdots - b_{m-1}\right) \mathbb{E}\left(X_t\right) \mathbb{E}\left(X_{t-j}\right) + b_1 \mathbb{E}\left(X_{t-m+1} X_{t-j}\right) + \cdots \\
&\quad + b_{m-1} \mathbb{E}\left(X_{t-1} X_{t-j}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_t\right) \mathbb{E}\left(X_{t-j}\right) + b_1 \left(\mathbb{E}\left(X_{t-m+1} X_{t-j}\right) - \mathbb{E}\left(X_{t-m+1}\right) \mathbb{E}\left(X_{t-j}\right)\right) + \cdots \\
&\quad + b_{m-1} \left(\mathbb{E}\left(X_{t-1} X_{t-j}\right) - \mathbb{E}\left(X_{t-1}\right) \mathbb{E}\left(X_{t-j}\right)\right) \\
\text{soit} \quad \gamma_X(j) &= b_1 \gamma_X(j - m + 1) + \cdots + b_{m-1} \gamma_X(j-1)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \Gamma_{m-1} \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

– Or Γ_{m-1} est inversible (sauf si le processus est presque-sûrement déterministe)[6] : en effet dans le cas contraire considérons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \begin{pmatrix} \gamma_X(i-1) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![1, m-1]\!], \ \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \mathbb{C}ov\left(X_{t-i}, X_{t-k}\right) &= 0 \\
\text{soit} \quad \forall k \in [\![1, m-1]\!], \ \mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}, X_{t-k}\right) &= 0 \\
\text{donc} \quad \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}, X_{t-k}\right) &= 0 \\
\text{soit} \quad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i X_{t-i}\right) &= 0 \\
\text{donc} \quad \mathbb{V}\left(X_{t-r} | X_{t-r-1}, \ldots, X_{t-m-1}\right) &= 0
\end{aligned}$$

où r est le numéro du premier λ_k non nul : ainsi le processus X est déterministe (conditionnellement à $m - r$ valeurs initiales) !

[6]Auquel cas bien entendu tous les cœfficients de corrélation partielle $r(m)$ sont nuls et l'exercice est trivial.

Par conséquent Γ_{m-1} est inversible et

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \left(\Gamma_{m-1}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

(b) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) &= \mathbb{V}\left(a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}\right) \\
&= \left(a_1, \ldots, a_{m-1}\right) \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \\
&= \left(b_{m-1}, \ldots, b_1\right) \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(b_{m-1}, \ldots, b_1\right) \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_{t-m+1} \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{car } X \text{ stationnaire} \\
&= \mathbb{V}\left(b_{m-1} X_{t-m+1} + \cdots + b_1 X_{t-1}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X_t^{*+}\right) + \mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) &= \mathbb{V}\left(X_t\right) \quad \text{car } \left(X_t - X_t^{*+}\right) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+} \\
&= \mathbb{V}\left(X_{t-m}\right) \quad \text{car } X \text{ est stationnaire} \\
&= \mathbb{V}\left(X_t^{*-}\right) + \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) \quad \text{car } \left(X_{t-m} - X_t^{-+}\right) \perp\!\!\!\perp X_t^{*+}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)}$$

☞ Q2 (a) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
X_t^{*+} &= \mathbb{EL}\left(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right) \\
&= \left(c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_{m-1} X_{t-m+1}\right) + \mathbb{EL}\left(c_m X_{t-m} \,|\, 1, X_{t-m+1}, \ldots, X_{t-1}\right) \\
&\quad + \mathbb{EL}\left(u_t \,|\, 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}\right) \\
&= \left(c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_{m-1} X_{t-m+1}\right) + c_m X_t^{*-} + 0
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
X_t - X_t^{*+} &= X_t - \left(c_0 + c_1 X_{t-1} + \cdots + c_{m-1} X_{t-m+1}\right) - c_m X_t^{*-} \\
&= \left(c_m X_{t-m} + u_t\right) - c_m X_t^{*-} \\
&= c_m \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) + u_t
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = \mathbb{E}\left(c_m\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)^2 + c_m u_t\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right)$$

Or $u_t \perp\!\!\!\perp < 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1} >$, de sorte que $u_t \perp\!\!\!\perp \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)$.
Donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)}$$

☞ Q3 A moins que le processus ne soit dégénéré on a $\mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) > 0$ et donc

$$\begin{aligned}
r(m) &= c_m \quad \text{par définition} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right)\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right)}{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{C}ov\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right), \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right)}{\sqrt{\mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)}} \quad \text{car } \mathbb{V}\left(X_t - X_t^{*+}\right) = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right) \\
&= \mathbb{C}orr\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right), \left(X_{t-m} - X_t^{*-}\right)\right) \\
&= \rho(m)
\end{aligned}$$

Autrement dit, le cœfficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m est le cœfficient de X_{t-m} dans la régression affine de X_t sur $< 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m} >$, qui est aussi le cœfficient de corrélation de $X_t - X_t^{*+}$ avec $X_{t-m} - X_t^{*-}$.

⋆
⋆ ⋆

2 Travaux Dirigés n°2

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a $\Phi(\mathbb{X}) = (1-3\mathbb{X})(1-\frac{1}{2}\mathbb{X})$; on constate que $\frac{1}{3}$ est racine de Φ et n'est **pas** hors du disque unité. *Remarque :* Considérons E l'espace de tous les processus stationnaires ; il est métrisable (pour la distance $\mathbb{V}(\cdot - \cdot)$) et complet (l'algèbre des suites réelles $\mathcal{L}^1$ est un Banach $\mathbb{X} \mapsto \lambda \cdot \mathbb{X}$, $X, Y \mapsto X+Y$, , $X, Y \mapsto X \times Y$) . En outre si a est dans $\mathcal{L}^1$ alors $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

L'opérateur $L : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ (X_t)_{t\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (X_{t-1})_{t\in\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$ est un morphisme (voir question 3), de norme triple $\sup_{X\in E} \frac{\|LX\|}{\|X\|} = \sup_{X\in E} \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1$.

Considérons alors F l'espace des morphismes de E dans E, muni à son tour de la structure d'algèbre standard. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k \mathbb{X}^k$. Alors la série d'opérateurs de F $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k L^k$ converge dans F *ssi* la série réelle $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k$ converge, puisque L est de norme 1, soit si $|\lambda| < 1$.

Dans ce cas, comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k \mathbb{X}^k = \frac{1}{1-\lambda\mathbb{X}}$ on a : $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k L^k = (1-\lambda L)^{-1}$ est l'opérateur inverse dans F de $(1-\lambda L)$.

On a en l'occurence

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(\mathbb{X})} &= \frac{1}{(1-3\mathbb{X})(1-\frac{1}{2}\mathbb{X})} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-3\mathbb{X}} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathbb{X}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$ on a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathbb{X}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\mathbb{X}^k$$

A l'inverse $3 > 1$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-3\mathbb{X})} &= \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{\mathbb{X}-\frac{1}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)^k \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right)^k \end{aligned}$$

☞ Q2 – Définissons

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } k \geq 0 \\ -\frac{6}{5}\frac{1}{3^k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors par construction $\frac{1}{\Phi(\mathbb{X})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathbb{X}^k$.

Par conséquent l'opérateur $\Phi(L)$ est inversible et d'inverse $\Phi(L)^{-1} = \Phi^{-1}(L) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k L^k +$

$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_{-k}F^k$, où F désigne l'opérateur avance.
Soit donc $Y = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\epsilon_{t-k}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$; par définition $Y = \Phi(L)^{-1}\epsilon$, c'est-à-dire $\Phi(L)Y = \epsilon$.

– Par ailleurs pour $t \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 1$ on a $\mathbb{C}ov\left(\epsilon_t, Y_{t-k}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \mathbb{1}_{t=t-k-j}\, \sigma_\epsilon^2 = a_{-k}\sigma_\epsilon^2 \neq 0$. Or si ϵ était l'innovation de Y, alors $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_t = \left(Y_t - Y_t^{*+}\right) \perp\!\!\!\perp < 1, Yt-1, \ldots >$.
Donc ϵ n'est **pas** l'innovation de Y.

☞ Q3 – A est stationnaire donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\|a_kA_{t+k}\|_2 \leq |a_k|\|A\|_2 = |a_k|\gamma_A(0) + \mathbb{E}\left(A_0\right)^2$ et comme la série $\Theta(\mathbb{X})$ est absolument convergente, la série $\Theta(L) \circ A$ est normalement convergente.
Enfin $\mathbb{C}ov\left(B_t, B_{t-h}\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_ia_j\mathbb{C}ov\left(A_{t-i}, A_{t-h-j}\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_ia_j\gamma_A(h-i-j)$ ne dépend pas de $t \in \mathbb{Z}$.

– Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et montrons tout d'abord que $\forall\omega \in \mathbb{R}$, $f_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(\omega) = \left|1-\lambda e^{i\omega}\right|^2 f_A(\omega)$. On a tout d'abord pour $h \in \mathbb{Z}$ [7]

$$\begin{aligned}
\gamma_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(h) &= \mathbb{C}ov\left(A_t - \lambda A_{t-1}\,,\, A_{t-h} - \lambda A_{t-h-1}\right)\\
&= \mathbb{C}ov\left(A_t, A_{t-h}\right) - \overline{\lambda}\mathbb{C}ov\left(A_t, A_{t-h-1}\right) - \lambda\mathbb{C}ov\left(A_{t-1}, A_{t-h}\right) + \lambda\overline{\lambda}\mathbb{C}ov\left(A_{t-1}, A_{t-h-1}\right)\\
&= \left(1+|\lambda|^2\right)\gamma_A(h) - \overline{\lambda}\gamma_A(h-1) - \lambda\gamma_A(h+1)
\end{aligned}$$

Donc pour $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_{(\mathbb{1}-\lambda L)A}(h)e^{i\omega h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \left(\left(1+|\lambda|^2\right)\gamma_A(h) - \lambda\gamma_A(h-1) - \overline{\lambda}\gamma_A(h+1)\right)e^{i\omega h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \left(\left(1+|\lambda|^2\right) - \lambda e^{i\omega} - \overline{\lambda}e^{-i\omega}\right)\gamma_A(h)e^{i\omega h}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1-\lambda e^{i\omega}\right)\left(1-\overline{\lambda}e^{-i\omega}\right)\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_A(h)e^{i\omega h}\\
&= \left|1-\lambda e^{i\omega}\right|^2\gamma_A(h)
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$, P est scindé et s'écrit $P(\mathbb{X}) = (1-\lambda_1\mathbb{X})\cdots(1-\lambda_n\mathbb{X})$, donc

$$\begin{aligned}
f_{P(L)A}(\omega) &= \left|1-\lambda_1 e^{i\omega}\right|^2 f_{(1-\lambda_2\mathbb{X})\cdots(1-\lambda_n\mathbb{X})A}(\omega)\\
&= \left|1-\lambda_1 e^{i\omega}\right|^2\cdots\left|1-\lambda_n e^{i\omega}\right|^2 f_A(\omega)\\
&= \left|P\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)
\end{aligned}$$

Pour toute fraction rationnelle $F = \frac{P(\mathbb{X})}{Q(\mathbb{X})} \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$, on a

$$\begin{aligned}
\left|Q\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_{F(L)A}(\omega) &= f_{Q(L)F(L)A}(\omega)\\
&= f_{P(L)A}\\
&= \left|P\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega)
\end{aligned}$$

[7] Attention : $\mathbb{C}ov\left(\cdot,\cdot\right)$ est une forme hermitienne sur les variables aléatoires complexes, *i.e.* $\forall\mu \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}ov\left(X, \mu Y\right) = \overline{\mu}\mathbb{C}ov\left(X, Y\right)$ et pas $\mu\mathbb{C}ov\left(X, Y\right)$.

et donc $f_{F(L)A} = |F(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$.
Soit enfin $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathbb{X}^k$ une série absolument convergente ; notons $\phi_N(\mathbb{X}) = \sum_{|k|\geq N} a_k\mathbb{X}^k$. Alors $\forall N \in \mathbb{N},\ f_{\Theta_N(L)A}(\omega) = |\Theta_N(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)$. Or Θ est absolement convergente, donc $|\Theta_N(e^{i\omega})|^2$ admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$, à savoir $|\Theta(e^{i\omega})|^2$. Donc $f_{\Theta_N(L)A}(\omega)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$, et on a

$$\boxed{f_{\Theta(L)A}(\omega) = |\Theta(e^{i\omega})|^2 f_A(\omega)}$$

<u>*Autre méthode :*</u>
Soit $\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathbb{X}^k$ une série absolument convergente. Alors

$$\begin{aligned} \gamma_{\Theta(L)A}(h) &= \mathbb{C}ov\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_jA_{t-j}, \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_lA_{t-h-l}\right) \\ &= \sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_ja_l\gamma_A(h+l-j) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_{\Theta(L)A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_ja_l\gamma_A(h+l-j)\right)e^{i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_ja_l\left(\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_A(h+l-j)e^{i\omega h}\right) \quad \text{car les séries sont absolument sommables} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j,l\in\mathbb{Z}} a_ja_l\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_A(m)e^{i\omega(m-i+j)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_je^{i\omega j}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_le^{-i\omega l}\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\gamma_A(m)e^{i\omega m}\right) \quad \textit{idem} \\ &= \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_je^{i\omega j}\right|^2 f_A(\omega) \\ &= \left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_A(\omega) \end{aligned}$$

☞ Q4 Soit donc Θ une série absolument convergente, et considérons le processus $Z = \Theta(L)Y$. Alors

$$\begin{aligned} f_Z(\omega) &= \left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_Y(\omega) \\ &= \left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 f_{\Phi(L)^{-1}\epsilon}(\omega) \\ &= \left|\frac{\Theta\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right|^2 f_\epsilon(\omega) \end{aligned}$$

Or si η est un bruit blanc de variance σ_η^2, alors $f_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_\eta(h)e^{i\omega} = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$. Et comme pour tout processus A on a $\gamma_A(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f_A(\omega)e^{-i\omega}d\omega$, la réciproque est également vraie (un processus est un bruit blanc *ssi* sa densité spectrale est constante).

En particulier, si Θ est tel que $\left|\frac{\Theta(e^{i\omega})}{\Phi(e^{i\omega})}\right|$ est indépendante de ω, alors Z est un bruit blanc.

C'est pourquoi on considère $\Phi^*(\mathbb{X}) = \left(1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}\right)$: Φ^* a toutes ses racines hors du cercle unité par construction, et en outre en notant $\eta = \Phi^*(L)Y$ on a

$$\begin{aligned}
f_\eta(\omega) &= \left|\frac{\Theta\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \left|\frac{1 - \frac{1}{3}e^{i\omega}}{1 - 3e^{i\omega}}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \left|\frac{1}{3}e^{i\omega}\right|^2 \left|\frac{3e^{-i\omega} - 1}{1 - 3e^{i\omega}}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \left|\frac{1}{3}e^{i\omega}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \frac{1}{9}\frac{\sigma^2}{2\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\eta \text{ est un bruit blanc de variance } \frac{\sigma_\epsilon^2}{9} \text{ tel que } \Phi^*(L)Y = \eta}$$

Φ^* ayant toutes ses racines de module strictement supérieur à 1 il admet un développement en série entière à indices positifs uniquement, à savoir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi^*(\mathbb{X})} &= (-2)\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\mathbb{X}} + 3\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathbb{X}} \\
&= -2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\mathbb{X}^k + 3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\mathbb{X}^k
\end{aligned}$$

Posons donc pour $k \in \mathbb{N}$

$$b_k = 3 \cdot 2^{-k} - 2 \cdot 3^{-k}$$

Alors par construction $\forall t \in \mathbb{Z}, Y = \Phi^{*-1}(L)\eta = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \eta_{t-k}$.
En particulier, η est l'innovation de Y.

☞ Q5 Par définition de l'innovation on a pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\eta_t = Y_t - \mathbb{EL}\left(Y_t | Y_{t-1}, \ldots\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{EL}\left(Y_t | Y_{t-1}, \ldots\right) &= Y_t - \eta_t \\
&= \left(\left(1 - \Phi^*(L)\right)Y\right)_t \\
&= \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} \\
&\neq \frac{7}{2}Y_{t-1} - \frac{3}{2}Y_{t-2} \quad \text{en général}
\end{aligned}$$

$\star$

$\star \quad \star$

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Soit $V = \epsilon + (\mathbb{1} - 2L)\eta$.
On a pour $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}(V) = 0$ et de plus

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t-h}\right) &= \mathbb{C}ov\left(\epsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}\,,\, \epsilon_{t-h} + \eta_{t-h} - 2\eta_{t-h-1}\right) \\ &= \begin{cases} (1+5\rho)\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ -2\rho\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi V est stationnaire et sa fonction d'auto-corrélation est celle d'un processus MA(1).
Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$ et μ un bruit blanc de variance σ_μ^2, et notons $W = (\mathbb{1} - \theta L)\mu$.
Cherchons θ et σ_μ^2 tels que $\gamma_W = \gamma_V$.
On a $\gamma_W(h) = \begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\sigma_\mu^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma_\mu^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Fixons donc

$$\begin{cases} \theta = & \dfrac{\frac{1+5\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2} \\ \sigma_\mu^2 = & \dfrac{2\sigma_\epsilon^2}{\frac{1+\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}} \end{cases}$$

Alors[8] par construction

$$\begin{cases} & \theta^2 - \frac{1+5\rho}{2\rho}\theta + 1 = 0 \\ \text{et} & \sigma_\mu^2 = \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 1}\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\sigma_\mu^2 = & (1+5\rho)\sigma_\epsilon^2 \\ -\theta\sigma_\mu^2 = & -2\rho\sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

et donc $\gamma_V = \gamma_W$.
En particulier, comme le polynôme MA d'un processus MA se déduit de ses auto-corrélations par les équations de Yule-Walker, V et W suivent le même processus MA : V suit donc le processus MA de polynôme $(1 - \theta\mathbb{X})$. [9]
Définissons donc $\nu = (\mathbb{1} - \theta L)^{-1} V$; alors par construction ν est un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = \sigma_\mu^2$.

[8] Le choix de $\frac{\frac{1+5\rho}{2\rho} - \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2}$ plutôt que $\frac{\frac{1+5\rho}{2\rho} + \sqrt{\left(1+\frac{5}{2\rho}\right)^2 - 1}}{2}$ permet de garantir que $|\theta| < 1$.

[9] En toute rigueur, il faudrait préalablement montrer que si un processus X stationnaire a son auto-corrélation nulle à partir du rang q, alors il suit un processus MA d'ordre au plus q. Pour ce faire, il faut définir le polynôme moyenne-mobile Δ issu des équations de Yule-Walker, puis vérifier que $f_{\Delta(L)^{-1}\circ X}(\omega)$ est constante, ce qui garantit que $\Delta(L)^{-1} \circ X$ est bien un bruit blanc. Voir aussi TD 3, exercice 1

Ainsi V vérifie

$$V = (\mathbb{1} - \theta L)\nu$$

où ν est un bruit blanc de variance $\sigma_\nu^2 = \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 1}\sigma_\epsilon^2$.

☞ Q2 On a $\epsilon = (\mathbb{1} - 2L)X$ et donc $V = (\mathbb{1} - 2L) \circ (X + \eta) = (\mathbb{1} - 2L)Y$. Autrement dit

$$(\mathbb{1} - 2L)Y = (\mathbb{1} - \theta L)\mu$$

et donc Y suit un ARMA(1,1) (car $\theta \neq 2$).
Cependant le polynôme $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - 2\mathbb{X}$ admet $\frac{1}{2}$ pour racine qui n'est pas hors du cercle unité : cette représentation n'est donc pas canonique.
De la même façon que dans exercice 1 on définit $\Phi^*(\mathbb{X}) = (1 - \frac{1}{2}\mathbb{X})$.
Notons $\xi = (\mathbb{1} - \theta L)\Phi^{*-1}(L)\mu$; alors ξ est un bruit blanc de variance

$$\left|\frac{\Phi^*\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right|^2 \sigma_\mu^2 = \left|\frac{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega}}{1 - 2e^{i\omega}}\right|^2 \sigma_\mu^2 = \frac{1}{4}\sigma_\mu^2$$

Ainsi Y suit l'ARMA(1,1) sous forme canonique

$$\boxed{(\mathbb{1} - \tfrac{1}{2}L)Y = (\mathbb{1} - \theta L)\xi, \text{ où } \xi \text{ est un bruit blanc de variance } \tfrac{1}{4}\sigma_\mu^2}$$

☞ Q3 D'après le résultat précédent l'innovation du processus Y est ξ. Par ailleurs la fraction rationnelle $\frac{1}{1-\theta\mathbb{X}}$ est développable en série entière et on a $\frac{1}{1-\theta\mathbb{X}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \theta^k \mathbb{X}^k$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\xi &= (\mathbb{1} - \theta L)^{-1}\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}L\right)Y \\
&= \left(\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}L\right) \times \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \theta^k L^k\right)\right) \circ Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\sum_{k\geq 1} \theta^{k-1} L^k\right) \circ Y
\end{aligned}$$

et donc en définissant pour $k \geq 1$ $a_k = \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\theta^{k-1}$ on a $\forall t \in \mathbb{Z},\ \xi_t = Y_t - \sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}$ et donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{Z},\ Y_t = \xi_t + \textstyle\sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}}$$

En d'autres termes on a pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{EL}\left(Y_t | Y_{t-1}, \ldots\right) = \sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}$. Cette représentation permet de *prédire* en moyenne sans erreur la prochaine valeur de Y compte-tenu de l'observation de son passé. En outre, la série étant géométrique le nombre de termes nécessaires pour atteindre une précision δ donnée ne croît que logarithmiquement avec cette précision (et bien-sûr avec $\gamma_Y(0)$).[10]

⋆

⋆ ⋆

[10] Attention, l'erreur *systématique* due à la troncature de la série réelle $\sum_{k=1}^N$ n'a rien à voir avec l'*intervalle de confiance* de cette prévision, qui donne un domaine raisonnable pour réalisation de Y_{t+1} fondé sur la série complète.

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 On a bien-sûr $\forall m \in \mathbb{N}, \rho_X(m)^2 = \left(\frac{\mathbb{C}ov(X_t, X_{t-m})}{\mathbb{V}(X_t)}\right)^2 \leq \left(\frac{\mathbb{V}(X_t)\mathbb{V}(X_{t-m})}{\mathbb{V}(X_t)\mathbb{V}(X_{t-m})}\right)^2 = 1$

Notons $\Gamma_m(X) = \mathbb{C}ov\left(\left(\begin{array}{c} X \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m} \end{array}\right)\right)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma_m(X)$ est positive (c'est un produit scalaire) ; en particulier $|\Gamma_m| \geq 0$, ce qui s'écrit lorsque $m = 2$

$$\begin{aligned}
|\Gamma_2(X)| &= \left|\left(\begin{array}{ccc} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \gamma_X(2) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) & \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{array}\right)\right| \\
&= \gamma_X(0)^3 + 2\gamma_X(2)\gamma_X(1)^2 - \gamma_X(0)\gamma_X(2)^2 - 2\gamma_X(0)\gamma_X(1)^2 \\
&= \gamma_X(0)^3 \left(1 - \rho_X(2)\right)\left(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Si $\gamma_X(0) = 0$, le processus est (presque sûrement) déterministe et par Cauchy-Schwartz $\gamma_X(1) \leq \sqrt{\gamma_X(0)}^2 = 0$; ainsi dans tous les cas $(1 - \rho_X(2))(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) \geq 0$.
Supposons alors par l'absurde que $(1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2) < 0$; alors $|\rho_X(2)| \geq 1$, et donc $\rho_X(2) = 1$. Mais alors $1 + 1 - 2\rho_X(1)^2 < 0$, soit $\rho_X(1)^2 > 1$!
Par suite

$$\boxed{1 + \rho_X(2) - 2\rho_X(1)^2 \geq 0}$$

Remarque : $(\rho_X(m))_{m\in\mathbb{N}}$ est donc soumise à une infinité de contraintes (polynomiales) ; voir aussi "Séries temporelles et modèles dynamiques", C. Gouriéroux et A. Monfort, `5.2` p 155.
On notera en particulier que pour que $\rho_X(2) = 0$ il faut que $|\rho_X(1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

☞ Q2 (a) Pour que X soit stationnaire, il faut et il suffit qu'aucune racine de Φ ne soit unitaire.
Or les racines de Φ sont $\omega^- = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ et $\omega^+ = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$, avec la convention $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$ si $x < 0$.
Si les racines sont complexes conjuguées z et $\overline{z}$, alors $|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z\overline{z} = -\frac{1}{\phi_2}$. Donc si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ une condition nécessaire et suffisante est que $\phi_2 \neq -1$. Sinon, les deux

racines sont réelles et alors

$$\begin{aligned}
|\omega^{\pm}| \neq 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \left(-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}\right)^2 \neq 4\phi_2^2 \\
& \Leftrightarrow \quad \phi_1^2 + \left(\phi_1^2+4\phi_2\right) - 4\phi_2^2 \neq \pm 2\phi_1\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} \\
& \Leftrightarrow \quad \phi_1^2 + 2\phi_2 - 2\phi_2^2 \neq \pm\phi_1\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} \\
& \Leftrightarrow \quad \phi_1^4 + 4\phi_2^2 + 4\phi_2^4 + 4\phi_1^2\phi_2 - 4\phi_1^2\phi_2^2 - 8\phi_2^3 \neq \phi_1^2\left(\phi_1^2+4\phi_2\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \phi_2^2 + \phi_2^4 - \phi_1^2\phi_2^2 - 2\phi_2^3 \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (\phi_2 \neq 0 \,\text{ou}\, \phi_1 \neq \pm 1) \text{ et } \phi_2^2 - \phi_1^2 - 2\phi_2 + 1 \neq 0 \quad (\text{car } \phi_2 = 0 \Leftrightarrow \Phi(\mathbb{X}) = 1 - \phi_1\mathbb{X})
\end{aligned}$$

(b) On a

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$: en particulier $\phi_2 < 0$ et de plus

$$\begin{aligned}
|\omega^{\pm}| > 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \left|\frac{-\phi_1 \pm i\sqrt{-\left(\phi_1^2+4\phi_2\right)}}{2\phi_1}\right|^2 > 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\phi_1^2 - (\phi_1^2+4\phi_2)}{4\phi_2^2} > 1 \\
& \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\phi_2} > 1 \\
& \Leftrightarrow \quad -1 < \phi_2 < 0
\end{aligned}$$

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$:
Si $\phi_1 = 0$ alors $\phi_2 = 0$, et inversement si $\phi_2 = 0$ alors $\phi_1 = 1$; dans ce cas $X = \epsilon$.[11]
Sinon $\omega^- = \omega^+$ et on a

$$\begin{aligned}
|\omega^{\pm}| > 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \left|\frac{-\phi_1}{2\phi_2}\right|^2 > 1 \\
& \Leftrightarrow \quad |\phi_2| < \frac{1}{2}|\phi_1| \\
& \Leftrightarrow \quad \left|\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2\right| < \frac{1}{2}|\phi_1| \\
& \Leftrightarrow \quad \left|\frac{\phi_1}{2}\right|^2 < \left|\frac{\phi_1}{2}\right| \\
& \Leftrightarrow \quad 0 < \left|\frac{\phi_1}{2}\right| < 1
\end{aligned}$$

Ainsi dans tous les cas $|\omega^{\pm}| > 1 \;\Leftrightarrow\; |\phi_1| \leq 1$.

[11] Ce cas dégénéré est exclu par la suite : $\rho_X(1) = \rho_X(2) = 0$ et X ne convient pas sauf bien-sûr si $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

– Si $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$: Si $\phi_2 = 0$, $\phi_1 \neq 0$ et $\omega^- = \omega^+ = \frac{1}{\phi_1}$, donc $|\omega^\pm| > 1 \Leftrightarrow 0 < |\phi_1| < 1$. Sinon, $\omega^- < \omega^+$, et donc

$$\begin{aligned}
|\omega^\pm| > 1 &\Leftrightarrow \omega^+ < -1 \text{ ou } \omega^- > +1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}-\phi_1}{2\phi_2} < -1 \text{ ou } \frac{-\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2\phi_2} > 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \phi_2 > 0 : & \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} < \phi_1 - 2\phi_2 \text{ ou } \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} < -\phi_1 - 2\phi_2 \\ \text{Si } \phi_2 < 0 : & \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} > \phi_1 - 2\phi_2 \text{ ou } \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2} > -\phi_1 - 2\phi_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \phi_2 > 0 : & \phi_1^2+4\phi_2 < (\phi_1 - 2\phi_2)^2 \text{ ou } \phi_1^2+4\phi_2 < (\phi_1 + 2\phi_2)^2 \\ \text{Si } \phi_2 < 0 : & \phi_1^2+4\phi_2 > (\phi_1 - 2\phi_2)^2 \text{ ou } \phi_1^2+4\phi_2 > (\phi_1 + 2\phi_2)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \phi_2 - \phi_1 > 1 \text{ ou } \phi_2 + \phi_1 > 1 \\
&\Leftrightarrow \phi_2 - |\phi_1| > 1
\end{aligned}$$

Conclusion : une condition nécessaire et suffisante pour que les racines de Φ soient toutes de module supérieur à un est :

$$\left\| \begin{array}{llll} & \phi_1^2+4\phi_2 < 0 & \text{et} & -1 < \phi_2 < 0 \\ \text{ou} & \phi_1^2+4\phi_2 = 0 & \text{et} & |\phi_1| < 1 \\ \text{ou} & \phi_1^2+4\phi_2 > 0 & \text{et} & \phi_2 < 1 - |\phi_1| \end{array} \right.$$

Bien entendu lorsque cette condition est vérifiée le processus X est décrit sous forme MA canonique et donc ϵ est l'innovation de X.

(c) X étant supposée stationnaire et sous forme canonique, on a

$$\begin{aligned}
\gamma_X(1) &= \mathbb{C}ov\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t\,,\, X_{t-1}\right) \\
&= \phi_1 \mathbb{V}\left(X_{t-1}\right) + \phi_2 \mathbb{C}ov\left(X_{t-2}, X_{t-1}\right) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}, \dots \\
&= \phi_1 \gamma_X(0) + \phi_2 \gamma_X(1)
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\rho_X(1) = \tfrac{\phi_1}{1-\phi_2}}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\gamma_X(2) &= \mathbb{C}ov\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t\,,\, X_{t-2}\right) \\
&= \phi_1 \mathbb{C}ov\left(X_{t-1}, X_{t-2}\right) + \phi_2 \mathbb{V}\left(X_{t-2}\right) \quad \text{car } \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}, \dots \\
&= \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(0)
\end{aligned}$$

et donc $\rho_X(2) = \phi \rho_X(1) + \phi_2$ *i.e.*

$$\boxed{\rho_X(2) = \tfrac{\phi_1^2}{1-\phi_1} + \phi_2}$$

Remarque : d'une façon plus générale le développement de $\mathbb{C}ov\left(\Phi(L)X_t, \epsilon_t\right)$ assure que pour $m \geq d = d^\circ\Phi$, $\rho_X(m)$ suit la récurrence linéaire de polynôme caractéristique Φ. En particulier il existe des cœfficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ tels que $\forall m, \rho_X(m) = \lambda_1\omega_1^m + \cdots + \lambda_d\omega_d^m$.

Exprimons alors (ϕ_1, ϕ_2) en fonction de $(\rho_X(1), \rho_X(2))$: on a

$$\begin{cases} \rho_X(1) &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \\ \rho_X(2) &= \phi_1\rho_X(1) + \phi_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \phi_1 &= \rho_X(1)\left(1-\phi_2\right) \\ \rho_X(2) &= \rho_X(1)^2\left(1-\phi_2\right) + \phi_2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \phi_1 &= \frac{\rho_X(1)(1-\rho_X(2))}{1-\rho_X(1)^2} \\ \phi_2 &= \frac{\rho_X(2)-\rho_X(1)^2}{1-\rho_X(1)^2} \end{cases}$$

(d) Soit

$$\begin{cases} \phi_1 &= \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-{\rho_1}^2} \\ \phi_2 &= \frac{\rho_2-{\rho_1}^2}{1-{\rho_1}^2} \end{cases}$$

et définissons le processus X par $\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \eta_t$ où η est un bruit blanc.

Or $(\rho_1, \rho_2) \in R$, et donc[12] $(\phi_1, \phi_2) \in P$, de sorte que X est stationnaire et sous forme canonique. Par conséquent, $(\rho_X(1), \rho_X(2)) = (\rho_1, \rho_2)$.

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 4

☞ Q1 On a pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \begin{pmatrix} \mathbb{V}\left(X_{t-1}\right) & \mathbb{C}ov\left(X_t, X_{t-1}\right) & \cdots & \mathbb{C}ov\left(X_t, X_{t-k}\right) \\ \mathbb{C}ov\left(X_{t-2}, X_{t-1}\right) & \mathbb{V}\left(X_{t-1}\right) & \cdots & \mathbb{C}ov\left(X_{t-1}, X_{t-k}\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}ov\left(X_{t-k}, X_{t-1}\right) & \mathbb{C}ov\left(X_{t-k}, X_{t-1}\right) & \cdots & \mathbb{V}\left(X_{t-k}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(k-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(k-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(k-1) & \gamma_X(k-2) & \cdots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[12] Calcul non développé ici ...

En particulier Γ_k ne dépend pas de t et est symétrique réelle à diagonale positive, donc positive. Par ailleurs, si k est tel que $|\Gamma_k| = 0$, alors comme il est montré dans TD 1, exercice 4 conditionnellement à un nombre fini de réalisations $X_1, \ldots, X_r$ le processus X est presque-sûrement déterministe.

☞ Q2 Notons $X_t^* = a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_{m-1} X_{t-m+1}$; on en tire tout d'abord comme X est stationnaire que $a_0 = \mathbb{E}(X_t)(1 - a_1 - \cdots - a_k)$. Par ailleurs X_t^* est caractérisé par[13]

$$(X_t - X_t^*) \perp\!\!\!\perp 1 \text{ et } \forall j \in [\![1, k]\!],\ (X_t - X_t^*) \perp\!\!\!\perp X_j$$

ce qui s'écrit pour $j \in [\![1, k]\!]$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \mathbb{E}\left(\left(X_t - X_t^{*+}\right) \cdot X_{t-j}\right) \\ \text{soit} \quad \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & a_0 \mathbb{E}(X_t) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \cdots + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\ \text{soit} \quad \mathbb{E}(X_t X_{t-j}) & = & (1 - a_1 - \cdots - a_{m-1}) \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) + \cdots \\ & & + a_{m-1} \mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) \\ & = & \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) + a_1 \left(\mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) + \cdots \\ & & + a_{m-1} \left(\mathbb{E}(X_{t-m+1} X_{t-j}) - \mathbb{E}(X_{t-m+1})\mathbb{E}(X_{t-j})\right) \\ \text{soit} \quad \gamma_X(j) & = & a_1 \gamma_X(j-1) + \cdots + a_{m-1} \gamma_X(j-m+1) \end{array}$$

et donc en définitive

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a_0 & = & \mathbb{E}(X_t)(1 - a_1 - \cdots - a_k) \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} & = & (\Gamma_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \end{array}}$$

☞ Q3 On a

$$\begin{array}{rcl} X_t - X_t^* & = & X_t - a_0 - (a_1, \ldots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \\ & = & X_t - \left(\mathbb{E}(X_t) - a_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) - \cdots - a_k \mathbb{E}(X_{t-k})\right) - (a_1, \ldots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-k} \end{pmatrix} \\ & = & (X_t - \mathbb{E}(X_t)) - (a_1, \ldots, a_k) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix} \\ & = & (X_t - \mathbb{E}(X_t)) - (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \times \left(\Gamma_k'\right)^{-1} \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_t - k) \end{pmatrix} \end{array}$$

[13] Voir aussi TD 1, exercice 4 .

Or $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^*)$ et Γ_k est symétrique, donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_t - X_t^*) &= \mathbb{E}\left((X_t - X_t^*)^2\right) \\
&= \left\{
\begin{array}{ll}
 & \mathbb{E}\left((X_t - \mathbb{E}(X_t))^2\right) \\
- & 2\mathbb{E}\left((X_t - \mathbb{E}(X_t)) \cdot (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma_k)^{-1} \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_t - k) \end{pmatrix}\right) \\
+ & \left\{
\begin{array}{ll}
 & (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k)^{-1} \\
\times & \underbrace{\mathbb{E}\left((X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}), \ldots, X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k})) \times \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}) \end{pmatrix}\right)}_{\Gamma_k} \\
\times & (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
&= \left\{
\begin{array}{ll}
 & \mathbb{V}(X_t) \\
- & 2(\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \times (\Gamma_k)^{-1} \times \underbrace{\mathbb{E}\left((X_t - \mathbb{E}(X_t)) \cdot \begin{pmatrix} X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}) \\ \vdots \\ X_{t-k} - \mathbb{E}(X_t - k) \end{pmatrix}\right)}_{(\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k))'} \\
+ & (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{array}
\right. \\
&= \mathbb{V}(X_t) - (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) (\Gamma_k)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

☞ Q4 (a) On a

$$
\Gamma_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c}
\gamma_X(0) & \gamma_X(1) \cdots \gamma_X(k) \\
\hline
\begin{array}{c} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{array} & \Gamma_k
\end{array}\right)
$$

puisque Γ_k de dépend pas de la date t considérée.

Soit alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ et considérons $A(\lambda) = \Gamma_{k+1} - \lambda_1 C_2 - \cdots - \lambda_k C_{k+1}$ où $C_{i+1} =$

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(i) \\ \gamma_X(i-1) \\ \gamma_X(i-2) \\ \vdots \\ \gamma_X(i-k) \end{pmatrix} \text{ est la } i\text{-ième colonne de } \Gamma_{k+1}.$$

Alors $|A(\lambda)| = |\Gamma_{k+1}|$.

Or la première colonne C_A de $A(\lambda)$ s'écrit

$$C_A = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) - \lambda_1\gamma_X(1) - \cdots - \lambda_k\gamma_X(k) \\ \hline \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} - (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \times \Gamma_k \end{pmatrix}$$

Posons donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1}$; il vient

$$C_A = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \\ \hline \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

de sorte que [14]

$$\begin{aligned} |\Gamma_{k+1}| &= \left(\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \right) \cdot |\Gamma_k| \\ &= \boxed{\sigma_k^2 \cdot |\Gamma_k|} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ $|\Gamma_l| = \sigma_{l-1}^2 \cdots \sigma_1^2 |\Gamma_1| = \sigma_{l-1}^2 \cdots \sigma_1^2 \, \gamma_X(0)$

[14] Γ_k est symétrique et $\begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} \times (\Gamma_k)^{-1} \times (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k))$ est un réel (donc égal à son transposé) et donc

$$\gamma_X(0) - \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} (\Gamma_k)^{-1} (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) = \gamma_X(0) - (\gamma_X(1), \ldots, \gamma_X(k)) \left(\Gamma_k'\right)^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \vdots \\ \gamma_X(k) \end{pmatrix} = \sigma_k^2$$

(b) Notons $\mathcal{E}_k =< 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-k} >$. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{k+1} &= \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_{k+1}\right)\right) \\
&= \min_{Y\in\mathcal{E}_{k+1}} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) \\
&\leq \min_{Y\in\mathcal{E}_k\subset\mathcal{E}_{k+1}} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) \\
&\leq \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_k\right)\right) \\
&= \sigma^2_k
\end{aligned}$$

La suite $(\sigma^2_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée (par 0), donc convergente. Notons enfin $\mathcal{E}_\infty =< 1, X_{t-1}, \dots >$; alors pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\sigma^2_\infty = \mathbb{V}\left(X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_\infty\right)\right) = \min_{Y\in\mathcal{E}} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) \leq \min_{Y\in\mathcal{E}_k} \mathbb{V}\left(X_t - Y\right) = \sigma^2_k$$

Et réciproquement, $(\sigma^2_l - \sigma^2_\infty) \leq \|\mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_l\right) - \mathbb{EL}\left(X_t|\mathcal{E}_\infty\right)\|^2 \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$ de sorte que

$$\boxed{\sigma^2_l \xrightarrow[l\to+\infty]{} \sigma^2_\infty}$$

(c) On a alors

$$\begin{aligned}
\log\left(\sigma^2_\infty\right) &= \lim_{l\infty} \log\frac{|\Gamma_{k+1}|}{|\Gamma_k|} \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} \log\frac{|\Gamma_{j+1}|}{|\Gamma_j|} \quad \text{par Césaro} \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l}\log\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{|\Gamma_{j+1}|}{|\Gamma_j|}\right) \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l}\log\frac{|\Gamma_{l+1}|}{|\Gamma_1|} \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l}\left(\log|\Gamma_{l+1}| - \log|\gamma_X(0|\right) \\
&= \lim_{l\infty} \frac{1}{l}\log|\Gamma_{l+1}|
\end{aligned}$$

☞ Q5 (a) On a pour $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{E}\left(X_t\right) = 0$ et pour $h \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \left(1+\theta^2\right)\sigma^2_\epsilon & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma^2_\epsilon & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier X est stationnaire.

(b) On a pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma_k = \sigma_\epsilon^2 \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -\theta & 1+\theta^2 & -\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix}$$

On a tout d'abord

$$|\Gamma_1| = \left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2$$

$$|\Gamma_2| = \sigma_\epsilon^2 \left| \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta \\ -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} \right| = \left(1+\theta^2+\theta^4\right)\sigma_\epsilon^4$$

puis pour $k \geq 2$, en notant $A_k = \frac{1}{\sigma_\epsilon^{2k}}\Gamma_k$

$$|A_k| = \left| \left(\begin{array}{c|c} 1+\theta^2 & -\theta \; 0 \cdots 0 \\ \hline -\theta & \\ 0 & A_{k-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) \right|$$

(en développant par rapport à la première colonne)

$$= (-1)^{1+1}\left(1+\theta^2\right)|A_{k-1}| + (-1)^{2+1}(-\theta) \left| \left(\begin{array}{c|cccc} -\theta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & & 0 \\ 0 & -\theta & 1+\theta^2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -\theta & 1+\theta^2 \end{array} \right) \right|$$

(en soustrayant la première ligne à la deuxième)

$$= \left(1+\theta^2\right)|A_{k-1}| + \theta \left| \left(\begin{array}{c|c} -\theta & 0 \cdots 0 \\ \hline -\theta & \\ 0 & A_{k-2} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) \right|$$

$$= \left(1+\theta^2\right)|A_{k-1}| - \theta^2 |A_{k-2}|$$

Soit alors $k \geq 3$ tel que $\forall l < k,\ |A_l| = 1+\theta^2+\cdots+\theta^{2l}$. Alors

$$\begin{aligned} |A_k| &= \left(1+\theta^2\right)\left(1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k-2}\right) - \theta^2\ \left(1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k-4}\right) \\ &= \left(1+2\theta^2+2\theta^4+\cdots+2\theta^{2k-2}+\theta^{2k}\right) - \left(\theta^2-\theta^4-\cdots-\theta^{2k-2}\right) \\ &= 1+\theta^2+\cdots+\theta^{2k} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{|\Gamma_k|}{\sigma_\epsilon^{2k}} = 1 + \theta^2 + \cdots + \theta^{2k} = \frac{1-\theta^{2k+2}}{1-\theta^2}$

En définitive

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\Gamma_k| = \frac{1-\theta^{2k+2}}{1-\theta^2}\sigma_\epsilon^{2k}}$$

(c) $|\theta| < 1$ donc l'unique racine $\frac{1}{\theta}$ de $1 - \theta\mathbb{X}$ est hors du cercle unité (si elle existe, *i.e.* si $\theta \neq 0$) ; donc ϵ est bien l'innovation de X.

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \log|\Gamma_l| &= \frac{1}{k}\left(\log\left(1-\theta^{2k+2}\right) - \log\left(1-\theta^2\right) + \log\left(\sigma_\epsilon^{2k}\right)\right) \\
&\underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{\theta^{2k+2}}{k} - \frac{\log\left(1-\theta^2\right)}{k} + \log\sigma_\epsilon^2 \\
&\xrightarrow[k\to+\infty]{} \log\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

⋆

⋆ ⋆

3 Travaux Dirigés n°3

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a tout d'abord pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\
\text{donc} \quad ((\mathbb{1} - \phi_2 L) Y)_t &= \phi_1 ((1 - \phi_2 L) Y)_{t-1} + a ((\mathbb{1} - \phi_2 L) X)_t + (U_t - \phi_2 U_{t-1}) \\
&= \phi_1 ((1 - \phi_2 L) Y)_{t-1} + aV_t + (U_t - \phi_2 U_{t-1}) \\
\text{c'est-à-dire} \quad ((\mathbb{1} - \phi_1 L)(\mathbb{1} - \phi_2 L) Y)_t &= aV_t + U_t - \phi_2 U_{t-1} \\
\text{soit} \quad W_t &= aV_t + ((\mathbb{1} - \phi_2 L) U)_t
\end{aligned}$$

Alors
- $\mathbb{E}(W_t) = 0$
- pour $h \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{C}ov(W_t, W_{t+h}) = \begin{cases} a^2\sigma_V^2 + (1+\phi_2^2)\sigma_U^2 & \text{si } h = 0 \\ -\phi_2\sigma_U^2 & \text{si } h = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier W est stationnaire (et sa fonction d'auto-covariance est celle d'un processus MA(1)). Cherchons donc Θ et ϵ bruit blanc tels que $W = \Theta(L)\epsilon$ et Θ de degré 1.
Donnons-nous pour ce faire un bruit blanc ϵ de variance $\sigma_\epsilon^2 > 0$ et $\lambda \in]-1, 1[$, et soit $Z = (\mathbb{1} - \lambda L)\epsilon$; cherchons à déterminer ϵ et λ de façon à ce que $Z = W$.
L'égalite $\gamma_Z = \gamma_W$ pour $h \in \{0, 1\}$ conduit à

$$\begin{cases} (1+\lambda^2)\sigma_\epsilon^2 &= a^2\sigma_V^2 + (1+\phi_2^2)\sigma_U^2 \\ -\lambda\sigma_\epsilon^2 &= -\phi_2\sigma_U^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \lambda^2 - \frac{a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2}{\phi_2\sigma_U^2}\lambda + 1 &= 0 \\ \sigma_\epsilon^2 &= \frac{\phi_2\sigma_U^2}{\lambda} \end{cases}$$

Soit donc [15] $\lambda = \frac{a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2 - \sqrt{\left(a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2\right)^2 - 4\phi_2\sigma_U^2}}{2\phi_2\sigma_U^2}$; ainsi $\lambda \in]-1, 1[$. Posons alors[16] $\epsilon = (\mathbb{1} - \lambda L)^{-1} W$: ϵ est par construction un bruit blanc de variance $\sigma_\epsilon^2 = \frac{\phi_2\sigma_U^2}{\lambda}$ et de plus

$$\boxed{W = (\mathbb{1} - \lambda L)\epsilon}$$

Application numérique : On a $a^2\sigma_V^2 + (1+\phi_2^2)\sigma_U^2 = 0.10276 > 0.0192 = 2\phi_2\sigma_U^2$. Il vient $\lambda = 0.095$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.101$. On vérifie que $|\lambda| < 1$ et que la représentation de W est bien canonique (donc que ϵ est bien l'innovation de W).

[15] Les deux racines sont de même signe car leur produit 1 est positif, et ce signe est positif car leur somme $\frac{a^2\sigma_V^2 + \left(1+\phi_2^2\right)\sigma_U^2}{\phi_2\sigma_U^2}$ est positive. Le produit des racines valant 1, la plus petite des deux est de module inférieur à 1, à savoir $\frac{[\cdots] - \sqrt{[\cdots]^2 - 4}}{2}$.

[16] Parmi tous les bruits blancs possibles de variance $\sigma_\epsilon^2 = \frac{\phi_2\sigma_U^2}{\lambda}$ il n'y en a qu'**un seul** qui convienne, est c'est nécessairement $\epsilon = (\mathbb{1} - \lambda L)^{-1} W$.

☞ Q2 On a immédiatement

$$(\mathbb{1} - \phi_1 L)(\mathbb{1} - \phi_1 L) Y = (\mathbb{1} - \lambda L)\epsilon$$

A supposer que $\lambda \neq \phi_1$ et $\lambda \neq \phi_2$, Y est donc un processus ARMA(2,1) (sinon c'est un AR(1)) ; en outre cette représentation est canonique.

Application numérique : $(\mathbb{1} - 0.6L)(\mathbb{1} - 0.4L) Y = (\mathbb{1} - 0.095L)\epsilon$.

☞ Q3 Soit $\Phi(\mathbb{X}) = (1 - \phi_1\mathbb{X})(1 - \phi_2\mathbb{X})$; les racines $\frac{1}{\phi_1}$ et $\frac{1}{\phi_2}$ de Φ sont toutes de module supérieur à un ; donc (voir TD 2, exercice 1) Y adment un développement en série à cœfficients positifs $Y_t = \sum_{k\geq 0} a_k \epsilon_{t-k}$, et en particulier $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_t \perp\!\!\!\perp Y_{t-1}, \ldots$. Par conséquent ϵ est l'innovation de Y et en particulier $Y - Y^* = \epsilon$.

On en tire successivement que

$$\mathbb{V}(Y_t - Y_t^*) = \sigma_\epsilon^2$$

et de plus que

$$\begin{aligned}
Y^* &= Y - \epsilon \\
&= \left(\mathbb{1} - \Phi(L)(\mathbb{1} - \lambda L)^{-1}\right) Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - (\phi_1 + \phi_2) L + \phi_1\phi_2 L^2\right) \circ \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k L^k\right) Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \left(\lambda^2 - \lambda(\phi_1 + \phi_2) + \phi_1\phi_2\right) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k L^k\right) Y \\
&= \left(\mathbb{1} - \lambda^2 \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot (\mathbb{1} - \lambda L)^{-1}\right) \circ Y
\end{aligned}$$

Application numérique : $\begin{cases} y_t^* = y_{t-1} - 0.24 y_{t-2} - 1.045 \sum_{k\geq 1} 0.095^k y_{t-k} \\ \text{et par ailleurs } \mathbb{V}(Y_t - Y_t^*) = 0.101 \end{cases}$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 Pour tous $i \neq j$ et toutes dates t, t', ${U^i}_t, {U^i}_{t-1}, {U^i}_{t'}, {U^i}_{t'-1}, {U^j}_t, {U^j}_{t-1}, {U^j}_{t'}, {U^j}_{t'-1}$ sont tous deux-à-deux indépendants. Donc ${X^i}_t$ et ${X^j}_{t'}$ sont indépendants.

En particulier

$$\begin{aligned}
Z^{*X}_{T+1} &= \mathbb{EL}\left(\sum_{i=1}^{n} X^{i}{}_{T+1} | X^{1}{}_{T}, \ldots, X^{n}{}_{T}, X^{1}{}_{T-1}, \ldots, X^{n}{}_{T-1}, \ldots\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{EL}\left(X^{i}{}_{T+1} | X^{1}{}_{T}, \ldots, X^{n}{}_{T}, X^{1}{}_{T-1}, \ldots, X^{n}{}_{T-1}, \ldots\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{EL}\left(X^{i}{}_{T+1} | X^{i}{}_{T}, X^{i}{}_{T-1}, \ldots\right) \\
&= X^{1*}{}_{T+1} + \cdots + X^{n*}{}_{T+1} \\
&= \boxed{\rho_1 X^{1}{}_{T} + \cdots + \rho_n X^{n}{}_{T}} \quad \text{puisque } \mathbb{1} - \rho_i L \text{ est sous forme canonique car } |\rho_i| < 1
\end{aligned}$$

En outre

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(Z_{T+1} - Z^{*X}_{T+1}\right) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X^{i}{}_{T+1} - \sum_{i=1}^{n} \rho_i X^{i}{}_{T}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\rho_i X^{i}{}_{T} + U^{i}{}_{T}\right) - \sum_{i=1}^{n} \rho_i X^{i}{}_{T}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} U^{i}{}_{T}\right) \\
&= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2
\end{aligned}$$

☞ Q2 Observons que $Z = (\mathbb{1} - \rho_1 L)^{-1} U^1 + \cdots + (\mathbb{1} - \rho_n L)^{-1} U^n$, de sorte que pour tout polynôme Θ on a

$$\Theta(L) Z = \Theta(L) (\mathbb{1} - \rho_1 L)^{-1} U^1 + \cdots + \Theta(L) (\mathbb{1} - \rho_n L)^{-1} U^n \tag{1}$$

En particulier dès que $\Theta(\mathbb{X})$ est un multiple de tous les $(1 - \rho_i \mathbb{X})$ l'expression (1) est polynomiale des deux côtés. Soit donc Θ le ppcm (au sens de la division euclidienne de polynômes) de $1 - \rho_1\mathbb{X}$,...,$1 - \rho_n\mathbb{X}$. Alors Z vérifie

$$\Theta(L) Z = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(L) U^i$$

où $\Lambda_i(\mathbb{X}) = \frac{\Theta(\mathbb{X})}{1-\rho_i\mathbb{X}} = \Pi_{\begin{cases} \rho \in \{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \\ \rho \neq \rho_i \end{cases}} (1 - \rho\mathbb{X})$ est un polynôme de degré $n_i \leq n - 1$.

Considérons alors $V^i = \Lambda_i(L) U^i$ tous stationnaires, et soit $V = V^1 + \cdots + V^n$.
Alors

$$\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t+h}\right) = \gamma_{V^1}(h) + \cdots + \gamma_{V^n}(h)$$

En particulier $\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t+h}\right)$ est indépendant de t et donc (comme bien-sûr $\mathbb{E}\left(V_t\right) = 0$) V est stationnaire. En outre $\gamma_V(h) = 0$ dès que $h \geq \max_i n_i$, ce qui caractérise un Ma d'ordre *au plus* $\max_i n_i$.[17]

[17] Attention, si $k = l$ et $\gamma_A(k-1) + \gamma_B(l-1) = 0$ alors $A + B$ est un Ma d'ordre a plus $k - 1$ ...

Plus précisément, soit $d = \max\{i \,/\, \gamma_V(i) \neq 0\}$, et donnons-nous $\delta_1, \dots, \delta_d$ et η un bruit blanc de variance σ_η^2 ; notons $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \delta_1\mathbb{X} - \dots - \delta_d\mathbb{X}^d$. Alors l'égalité $\gamma_{\Delta(L)\eta} = \gamma_V$ revient à un système de $d+1$ équations (a priori non-linéaire)

$$\left\{\ \mathcal{E}_h : \gamma_{\Delta(L)\eta}(h) = \gamma_V(h) \quad \text{pour } h \in [\![0, d]\!]\right.$$

correspondant aux équations de Yule-Walker, et dont on tire $\sigma_\eta^2, \delta_1, \dots, \delta_d$.
Soit alors $\Delta^*(\mathbb{X}) = 1 + \delta_1\mathbb{X} + \dots + \delta_r\mathbb{X}^r$, et notons Δ le polynôme canonique associé (celui dont toutes les racines sont de module supérieur à un, voir TD 2, exercice 1). Définissons enfin $\xi = \Delta(L)^{-1}V$. Alors par construction ξ est un bruit blanc, et en outre $V = \Delta(L)\xi$.
Ainsi

$$\boxed{\Theta(L)Z = \Delta(L)\xi}$$

avec $d^\circ\Theta \le n$ et $d^\circ\Delta \le \max_i n_i \le n-1$ et toutes les racines de Θ et Δ sont de module supérieur (ou égal) à 1.

☞ Q3 On sait que 1 n'est racine d'aucun $1 - \rho_i\mathbb{X}$, donc n'est pas racine de $\Theta(\mathbb{X})$. Montrons que par ailleurs V n'est pas intégré.
<u>*Attention :*</u>
Il ne suffit pas que Z (et donc $\Theta(L)Z$) soit stationnaire pour interdire que Θ ait une racine unitaire : $X = (\mathbb{1} - L)\epsilon$ est par exemple stationnaire TD 1, exercice 1 ...
Dans le cas contraire, soit s l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans Δ, et soit $\overline{\Delta}(\mathbb{X})$ le polynôme $\frac{\Delta(\mathbb{X})}{(1-\mathbb{X})^s}$; on note $\overline{\xi} = \overline{\Delta}(L)\xi$.
Soit alors $N \in \mathbb{N}$; comme $(1 - \mathbb{X})\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k = 1 - \mathbb{X}^{N+1}$ on a d'une part

$$\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \circ V_t = \left(1 - L^{N+1}\right)(\mathbb{1} - L)^{s-1} \circ \overline{\xi}_t$$

et d'autre part

$$\left(\sum_{k=0}^N L^k\right) \circ V_t = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^N L^k\right)^s \times \Lambda_i(L) \circ {U^i}_t$$

Considérons donc pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $N \in \mathbb{N}$ le polynôme $\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})$; comme les racines de Λ_i sont parmi les ρ_i, $1 - \mathbb{X}$ ne divise pas Λ_i et donc

$$\left(1 - \mathbb{X}^{N+1}\right) = \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)(1 - \mathbb{X}) \text{ ne divise pas } \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})$$

Notons pour tout polynôme P $\nu(P)$ le nombre de cœfficients non-nuls de P : alors $\nu\left(\Lambda_i(\mathbb{X})\right) \ge 1$ car Λ_i est de degré $n_i \ge 1$. Par conséquent pour $N \ge n_i$ on a [18]

$$\nu\left(\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})\right) \ge N - n_i$$

[18] Soit $P(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^p a_k\mathbb{X}^k$ un polynôme de degré P n'admettant pas 1 pour racine, et développons successivement

Donc en particulier

$$\mathbb{V}\left(\left(\sum_{k=0}^{N} L^k\right) \times \Lambda_i(L) \circ {U^i}_t\right) = \sum_{j=0}^{N+n_i} {\alpha_j}^2 \mathbb{V}\left({U^i}_{t-j}\right) \geq (N-n_i)\left(\min_{\alpha_j \neq 0} |\alpha_j|\right)^2 \sigma_i^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Autrement dit pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{V}\left(\left(\mathbb{1} - L^{N+1}\right)^s \overline{\xi}_t\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

Soit donc $\eta = \left(\mathbb{1} - L^{N+1}\right)^{s-1} \overline{\xi} = \left(\mathbb{1} - L^{N+1}\right)^{s-1} \overline{\Delta}(L)\xi$: η est stationnaire puisque ξ est un bruit blanc.

Or $\mathbb{V}\left(\eta_t - \eta_{t-N-1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, et donc $\gamma_\eta(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty$, et donc

$$\gamma_V(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty$$

Pourtant, les U^i sont indépendants donc $\gamma_V(h) = \sum_{i=1}^n \gamma_{\Lambda_i(L)U^i}(h)$ et donc comme chaque $\Lambda_i(L)U^i$ est un processus Ma son auto-covariance est nulle à partir d'un certain rang (n_i en l'occurence), et en particulier

$$\gamma_V(h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $(1-\mathbb{X})^s$ ne peut diviser $\Delta(\mathbb{X})$; on montre de façon identique qu'il en va de même pour toute racine de module 1, de sorte que V n'est pas intégré.

En conclusion,

$$\boxed{Z \text{ est un processus } \textsc{Arma}(p,r), \text{ où } p = d^\circ\Theta \text{ et } r \leq \max_i n_i}$$

Notons que les racines $\frac{1}{\rho_1}, \ldots, \frac{1}{\rho_n}$ de Θ sont toutes de module inférieur à 1 ; en outre par construction il en va de même pour celles de Δ.

Enfin, comme $\Theta(\mathbb{X})$ est le ppcm des $1-\rho_i\mathbb{X}$, il n'admet aucune racine commune avec Δ (car sinon, Δ admet par exemple ρ_1, donc il en va de même pour Δ^* car $|\rho_1| < 1$, et on montre que $1-\rho_1\mathbb{X}$ divise *tous* les $\Lambda_i(\mathbb{X})$ ce qui viole le fait que Θ soit le ppcm des $1-\rho_i\mathbb{X}$). Ainsi la représentation est canonique.

$\mathbb{X}^j P(\mathbb{X})$: il vient

	1	$\mathbb{X}$	$\mathbb{X}^2$	$\cdots$	$\mathbb{X}^p$	$\mathbb{X}^{p+1}$	$\cdots$	$\mathbb{X}^{N-p}$	$\cdots$	$\mathbb{X}^{p+N}$
$P(\mathbb{X})$	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_p	0	$\cdots$		$\cdots$	0
$\mathbb{X}P(\mathbb{X})$	0	a_0	a_1	$\cdots$	a_{p-1}	a_p	$\cdots$		$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$	$\ddots$				$\vdots$
$\mathbb{X}^N P(\mathbb{X})$	0							a_0	$\cdots$	a_p
$\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right) P(\mathbb{X})$	a_0	a_0+a_1		$\cdots$	$a_0+\cdots+a_p$	$a_0+\cdots+a_p$	$\cdots$	$a_0+\cdots+a_p$	$\cdots$	a_p

Le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right) P(\mathbb{X})$ est de degré au plus $N+p$, et au moins $N-\nu(P)$ monômes $\mathbb{X}^k$ ont pour cœfficient $a_0+\cdots+a_p$. Donc si $\nu\left(\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{X}^k\right) P(\mathbb{X})\right) < N-\nu(P)$, alors au moins $2\nu(P)+1$ cœfficients sont nuls, donc l'une au moins de $N-\nu(P)$ colonnes $a_1+\cdots+a_p$ est nulle. Dans ce cas, $P(1)=0$, *i.e.* 1 est racine de P ! Or 1 n'est pas racine de Λ_i, donc $\nu\left(\left(\sum_{k=0}^N \mathbb{X}^k\right)\Lambda_i(\mathbb{X})\right) \geq \nu(\Lambda_i)$.

Notons enfin que si les $(\rho_i)_i$ sont deux-à-deux distincts, $\Theta(\mathbb{X}) = (1-\rho_1\mathbb{X})\cdots(1-\rho_n\mathbb{X})$ et Z est un ARMA(n,n-1).

Remarque : Le résultat reste vrai si l'on substitue à $1-\rho_i\mathbb{X}$ un polynôme canonique $R_i(\mathbb{X})$ quelconque : $\Theta(\mathbb{X})$ reste le ppcm des $R_i(\mathbb{X})$, et s'ils sont tous premiers entre eux Z est un processus ARMA($\sum_{i=1}^n d^\circ R_i$, $\max_i d^\circ \Lambda_i$).

☞ Q4 Z est un AR pur *ssi* V est un bruit blanc, soit si $r=0$, soit encore si $(0,\ldots,0)$ est solution du système de Yule-Walker $\left\{ \mathcal{E}_h : \gamma_{\Delta(L)\xi}(h) = 0 \quad \text{pour } h \in [\![1,d]\!] \right.$.
Notons alors $\Lambda_i(\mathbb{X}) = \lambda_0^i + \lambda_1^i\mathbb{X} + \cdots + \lambda_{n_i}^i\mathbb{X}^{n_i}$, avec $\lambda_0^i = 1$. Alors pour $t \in \mathbb{Z}$

$$V_t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i} \lambda_k^i {U^i}_{t-k}$$

et donc pour $h \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(V_t, V_{t-h}\right) &= \sum_{1\le i,j\le n} \sum_{\substack{0\le k\le n_i \\ 0\le l\le n_j}} \lambda_k^i\lambda_l^j \mathbb{C}ov\left({U^i}_{t-k}, {U^j}_{t-h-l}\right) \\
&= \sum_{1\le i,j\le n} \sum_{\substack{0\le k\le n_i \\ 0\le l\le n_j}} \lambda_k^i\lambda_l^j \mathbb{1}_{i=j}\mathbb{1}_{t-k=t-h-l}\,\sigma_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=h}^{n_i} \lambda_k^i\lambda_{k-h}^i\sigma_i^2
\end{aligned}$$

Par conséquent Z est un AR pur *ssi*

$$\boxed{\forall h \in [\![1,n]\!],\ \textstyle\sum_{i=1}^n \left(\lambda_0^i\lambda_h^i + \cdots + \lambda_{n_i-h}^i\lambda_{n_i}^i\right)\sigma_i^2 = 0}$$

En particulier dans le cas où $n=2$ et $\rho_1 \neq \rho_2$ on a $\Theta(\mathbb{X}) = 1-(\rho_1+\rho_2)\mathbb{X}+\rho_1\rho_2\mathbb{X}^2$, $\Lambda_1(\mathbb{X}) = 1-\rho_2\mathbb{X}$ et $\Lambda_2(\mathbb{X}) = 1-\rho_1\mathbb{X}$.
Donc Z est au plus un ARMA(2,1), et c'est un AR(2) pur *ssi* [19]

$$\boxed{\rho_1\sigma_1^2 + \rho_2\sigma_2^2 = 0}$$

☞ Q5 Comme aucune racine de $\Theta(L)$ n'est de module 1, ξ est l'innovation de Z, et donc $\forall t \in \mathbb{Z}, \xi_t = Z_t - {Z_t^*}^Z$; en particulier

$$Z^{*Z} = Z - \xi = \left(\mathbb{1} - \Delta(L)\Theta^{-1}(L)\right) Z$$

où $\Theta(\mathbb{X})^{-1}$ admet un développement en puissances positives de $\mathbb{X}$.

[19] La condition s'écrit pour $h=1$: « $\left(\lambda_0^1\lambda_1^1 + \lambda_0^1\lambda_1^1\right)\sigma_1^2 + \left(\lambda_0^2\lambda_1^2 + \lambda_0^2\lambda_1^2\right)\sigma_2^2 = 0$ » c'est-à-dire, compte-tenu de ce que $\lambda_0^i = 1$ et $\lambda_1^i = \rho_i$: « $2\rho_1\sigma_1^2 + 2\rho_2\sigma_2^2 = 0$ ».

Par ailleurs 1 n'est pas racine de Δ, donc toutes les racines de Δ sont de module strictement supérieur à un ; on définit donc $\frac{\Lambda_i(\mathbb{X})}{\Delta(\mathbb{X})} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i \mathbb{X}^k$. Notons que $a_0^i = \frac{\Lambda_i(0)}{\Delta(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
V_Z &= \mathbb{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*Z}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\xi_{T+1}\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\Delta(L)^{-1}\left(\Lambda_1(L)U^1 + \cdots + \Lambda_n(L)U^n\right)_{T+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i L^k\right) \circ U^i{}_{T+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k^i\right)^2\right) \sigma_i^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \left(a_0^i\right)^2 \sigma_i^2 \\
&= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 \\
&= V_X
\end{aligned}$$

Ainsi la prévision fondée sur les observations agrégées est moins bonne que celle fondée sur les observations individuelles, et ce alors même que les U^i sont indépendants !
Notons enfin qu'il n'y a égalité que si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k^i = 0$ c'est-à-dire si $\Delta(\mathbb{X}) = \Lambda_i(\mathbb{X})$, soit finalement si

$$\rho_1 = \cdots = \rho_n$$

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 Soit $U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2\rho\cos\theta & \rho^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors A est inversible et de plus $\forall t \in \mathbb{Z}, U_t = A^t \times U_0$. Or les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(\mathbb{X}) = 1 - 2\rho\cos\theta\mathbb{X} + \rho^2\mathbb{X}^2$, à savoir $\rho e^{+i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Soit donc P inversible telle que $A = P^{-1} \times \begin{pmatrix} \rho e^{+i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{pmatrix} \times P$; alors $U_t = P^{-1} \times \begin{pmatrix} \rho^t e^{+it\theta} & 0 \\ 0 & \rho^t e^{-it\theta} \end{pmatrix} PU_0$, donc soient α, β tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = \alpha\rho^t e^{+it\theta} + \beta\rho^t e^{-it\theta}$$

En particulier on a

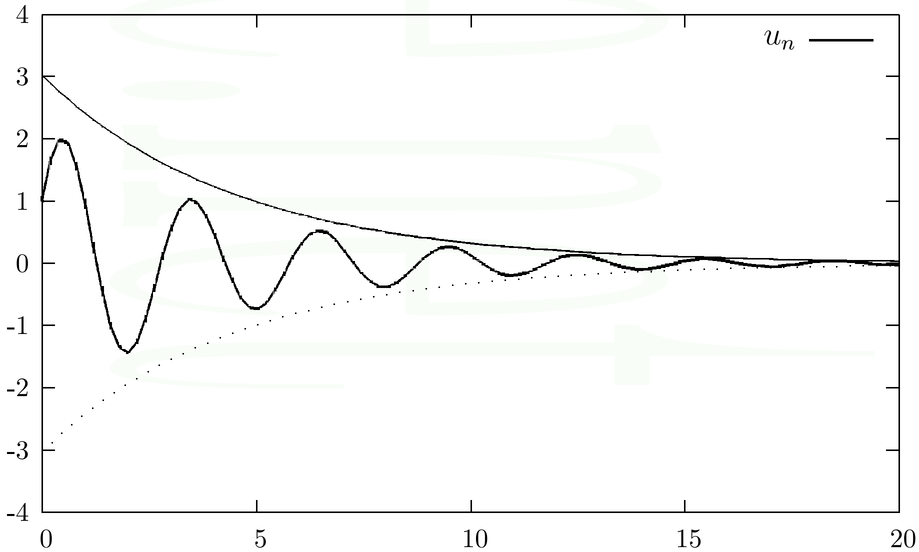
$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha + \beta & = & u_0 \\ \rho\left(\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}\right) & = & u_1 \end{array}\right.$$

d'où on tire

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{u_1}{\rho}\frac{1}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} - u_0 \\ \beta &= u_0 - \alpha \end{cases}$$

et donc finalement

$$\forall t \in \mathbb{Z}, u_t = (\alpha+\beta)\rho^t \cos(t\theta)+i(\alpha-\beta)\rho^t sin(t\theta) = u_0\rho^t \cos(t\theta)+\left(\frac{u_1}{\rho\sin\theta} - \frac{u_0}{\tan\theta}\right)\rho^t \sin(t\theta) - \underbrace{iu_0}_{\notin\mathbb{R}}\rho^t \sin(t\theta)$$



$(u_n)_{n\in[\![0,20]\!]}$ *lorsque* $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\rho = 0.8$ *et* $u_0 = u_1 = 1$

L'expression "quasi-périodique" tient à ce que u est bornée et que $\left(\frac{u_t}{\rho^t}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ est périodique.

☞ Q2 Les racines de $\Phi(\mathbb{X}) = 1 - 2\rho\cos\theta\mathbb{X} + \rho^2\mathbb{X}^2 = \left(1-\rho e^{i\theta}\mathbb{X}\right)\left(1-\rho e^{-i\theta}\mathbb{X}\right)$ sont de module $\frac{1}{\rho} > 1$; par conséquent la représentation "$\Phi(L)\circ X = \epsilon$" est la représentation MA canonique, et ϵ est l'innovation de X.

En particulier, pour tout $h \geq 1$ ϵ_t est indépendant de X_{t-h} ce qui s'écrit

$$\forall h \geq 1,\ \mathbb{C}ov\left(1 - 2\rho\cos\theta X_{t-1} + \rho^2 X_{t-2}, X_{t-h}\right) = 0$$

soit encore

$$\forall h \geq 1, \gamma_X(h) = 2\rho\cos\theta\gamma_X(h-1) + \rho^2\gamma_X(h-2)$$

et donc

$$\boxed{\gamma_X \text{ suit la récurrence de polynôme } \Phi}$$

En particulier d'après la question précédente γ_X est quasi-périodique.

Pour déterminer explicitement γ_X il reste à déterminer $\gamma_X(0)$: on a en l'occurence lorsque $h = 0$

$$\mathbb{C}ov\left(X_t - 2\rho\cos\theta X_{t-1} + \rho^2 X_{t-2}, \epsilon_t\right) = \mathbb{V}\left(\epsilon_t\right) = \sigma_\epsilon^2$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma_X(0) - 2\rho\cos\theta\gamma_X(1) + \rho^2\gamma_X(2) = \sigma_\epsilon^2$$

Pour calculer $\gamma_X(0)$ il suffit de constater que γ_X est paire et donc en associant l'équation de récurrence pour $h \in \{1,2\}$ il vient

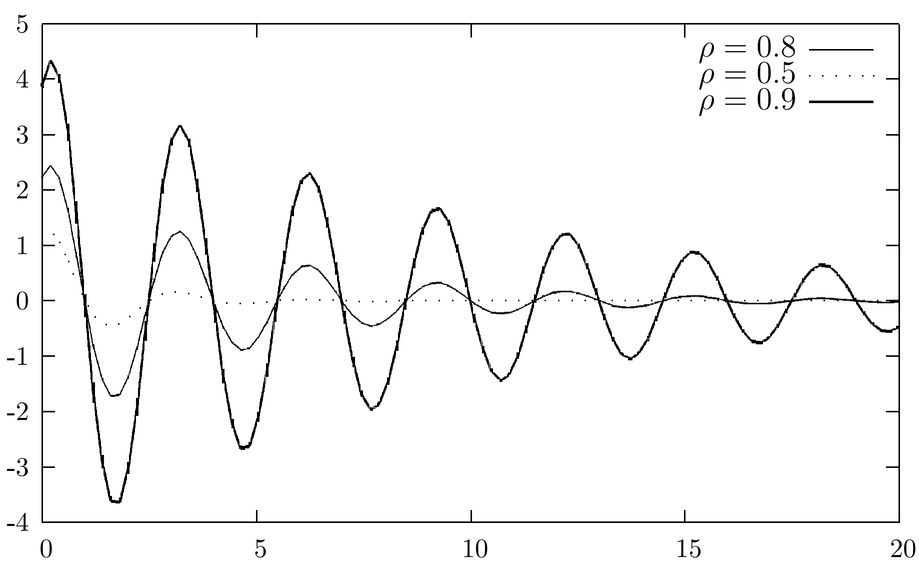
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \gamma_X(0) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & +\rho^2 & \gamma_X(2) & = & \sigma_\epsilon^2 \\ \gamma_X(1) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(0) & +\rho^2 & \gamma_X(-1) & = & 0 \\ \gamma_X(2) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & +\rho^2 & \gamma_X(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui s'écrit encore

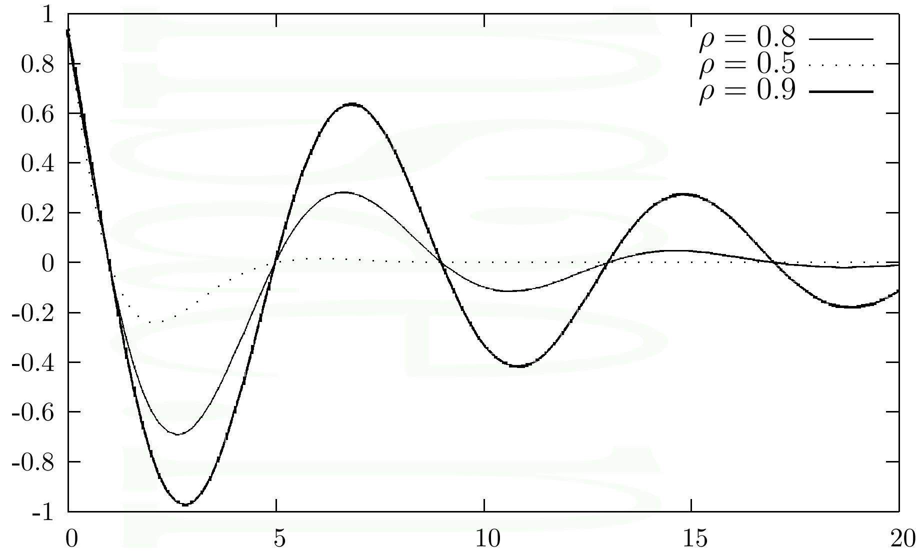
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & \gamma_X(0) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & +\rho^2 & \gamma_X(2) & = & \sigma_\epsilon^2 \\ -2\rho\cos\theta & \gamma_X(0) & +(1+\rho^2) & \gamma_X(1) & & & = & 0 \\ \rho^2 & \gamma_X(0) & -2\rho\cos\theta & \gamma_X(1) & & \gamma_X(2) & = & 0 \end{array}\right.$$

ce dont on tire que

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 & -2\rho\cos\theta & \rho^2 \\ 0 & 1+\rho^2 & 0 \\ 0 & -2\rho\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 & -2\rho\cos\theta & \rho^2 \\ -2\rho\cos\theta & 1+\rho^2 & 0 \\ \rho^2 & -2\rho\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon\left(1+\rho^2\right)}{\left(1+\rho^2\right) + 4\rho^4\left(\cos\theta\right)^2 - \rho^4\left(1+\rho^2\right) + 4\rho^2\left(\cos\theta\right)^2} \\ &= \boxed{\frac{\sigma_\epsilon\left(1+\rho^2\right)}{1+\left(\left(2\cos\theta\right)^2-1\right)\left(\rho^4+\rho^2\right)-\rho^6}} \end{aligned}$$



γ_X *lorsque* $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ *et différentes valeurs de* ρ



γ_X lorsque $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et différentes valeurs de ρ

On observe que γ_X est pseudo-périodique et que le facteur important est sa "vitesse d'aplatissement" ρ.

☞ Q3 On a pour $\omega \in]-\pi, \pi[$

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{\left|\Phi\left(e^{i\omega}\right)\right|^2}\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}\frac{1}{\left|1-2\rho\cos\theta e^{i\omega}+\rho^2 e^{2i\omega}\right|^2} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(1-2\rho\cos\theta\cos\omega+\rho^2\cos(2\omega)\right)^2+\left(-2\rho\cos\theta\sin\omega+\rho^2\sin(2\omega)\right)^2} \end{aligned}$$

Soit donc $g(\omega) = \frac{2\pi}{\sigma_\epsilon^2}\frac{1}{f_X(\omega)}$; il vient

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \left\{ \begin{array}{c} 1+4\rho^2\left(\cos\theta\right)^2\left(\cos\omega\right)^2+\rho^4\left(\cos(2\omega)\right)^2-4\rho\cos\theta\cos\omega-2\rho^2\cos(2\omega) \\ -2\rho^3\cos\theta\cos\omega\cos(2\omega)\ +4\rho^2\left(\cos\theta\right)^2\left(\sin\omega\right)^2+\rho^4\left(\sin(2\omega)\right)^2-2\rho^3\cos\theta\sin\omega\sin(2\omega) \end{array}\right. \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 2\left(1+4\rho^2\left(\cos\theta\right)^2+\rho^4\right)-4\rho\cos\theta\cos\omega \\ -2\rho^2\cos(2\omega)-2\rho^3\cos\theta\left(\cos\omega\cos(2\omega)+\sin\omega\sin(2\omega)\right) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Or $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$ donc

$$\boxed{g(\omega) = 2\left(1+4\rho^2\left(\cos\theta\right)^2+\rho^4\right)-4\rho\cos\theta\cos\omega-2\rho^2\cos\left(2\omega\right)-2\rho^3\cos\theta\cos(3\omega)}$$

Donc

$$g'(\omega) = 4\cos\theta\rho\sin\omega - 4\rho^2\sin\left(2\omega\right) - 6\rho^3\cos\theta\sin(3\omega)$$

En particulier g' s'annule et change de signe sur $]0,\pi[$, de sorte que g admet un minimum en $\omega_0 \in]0,\pi[$.[20] Donc f_X admet un extremum en ω_0.
Lorsque $\rho \to 1$, $\Phi(\mathbb{X})$ converge normalement vers $1 - 2\cos\theta\mathbb{X} + \mathbb{X}^2 = \left(\mathbb{X} - e^{i\theta}\right)\left(\mathbb{X} - e^{-i\theta}\right)$, dont toutes les racines sont unitaires. On peut montrer en outre[21] que $\omega_0 \xrightarrow[\rho\to 1^-]{} \theta$: ainsi dans le cas limite où X devient un processus intégré, la densité spectrale de X converge (simplement) vers la masse de Dirac sur $\{\theta\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

⋆
⋆ ⋆

[20] Le calcul explicite de ω_0, par exemple dans le cas où $\theta = \frac{2\pi}{3}$, est tout-à-fait passionnant et laissé à la sagacité du lecteur.

[21] Essentiellement, $(\rho,\omega) \mapsto g_\rho(\omega)$ est C^1, et θ est l'unique racine sur $]0,\pi[$ de $g_1(\omega)$. ω_0 vérifie lorsque $\rho \to 1^-$: $4\cos\theta\sin\omega_0 - 4\sin(2\omega_0) - 6\cos\theta\sin(3\omega_0) = 0$ dont l'unique solution sur $]0,\pi[$ est $\omega_0 = \theta$.

4 Travaux Dirigés n°4

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 (a) Le monôme $1-\lambda\mathbb{X}$ étant inversible *ssi* $|\lambda|<1$, posons

$$A^*(\mathbb{X}) = \left(\Pi_{|\lambda_i|<1}\left(1-\lambda_i\mathbb{X}\right)\right)\left(\Pi_{|\lambda_i|>1}\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\mathbb{X}\right)\right)$$

où $\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}$ désignent les racines A.
Ainsi $A^*(L)$ est inversible.
Soit $\eta = (\mathbb{1}-L)A^*(L)X$; alors (voir TD 2, exercice 1) η est un bruit blanc, de variance $\frac{\sigma_\epsilon^2}{\Pi_{|\lambda_i|>1}\lambda_i^2}$.
On peut donc supposer sans perte de généralité, quitte à substituer A^* à A et η à ϵ, que toutes les racines de A sont de module strictement supérieur à un.
Dans ces conditions, notant $A(\mathbb{X}) = (1-\lambda_1\mathbb{X})\cdots(1-\lambda_n\mathbb{X})$ il vient

$$\frac{1}{A(\mathbb{X})} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_1^k\mathbb{X}^k\right)\cdots\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_n^k\mathbb{X}^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathbb{X}^k$$

avec $\forall k\in\mathbb{N},\ a_k = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}$.

(b) On a

$$\frac{1}{A(\mathbb{X})} = \sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathbb{X}^k$$

Or pour $M\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M}a_k\mathbb{X}^k &= \left(\sum_{k=0}^{M}a_k\right) + \sum_{k=0}^{M}a_k\left(\mathbb{X}^k-1\right)\\
&= \sum_{k=0}^{M}a_k1^k + a_0\cdot 0 + \sum_{k=1}^{M}a_k(\mathbb{X}-1)\left(1+\mathbb{X}+\cdots+\mathbb{X}^{k-1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{M}a_k1^k - (1-\mathbb{X})\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{k-1}a_k\mathbb{X}^j\\
&= \sum_{k=0}^{M}a_k1^k - (1-\mathbb{X})\sum_{j=0}^{M-1}\left(\sum_{k=j+1}^{M}a_k\right)\mathbb{X}^j
\end{aligned}$$

Par ailleurs A est convergente donc $\sum_{k=j+1}^{M}a_k$ admet une limite finie lorsque $M\to+\infty$, et on pose pour $j\in\mathbb{N}$

$$\boxed{b_j = -\sum_{k=j+1}^{+\infty}a_k}$$

Notons $b_j^N = -\sum_{k=j+1}^N a_k$; alors pour tous $M \in \mathbb{N}$ et $N \geq M+2$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^M |b_j^N| &= \sum_{j=0}^M \left| \sum_{k=j+1}^N a_k \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^M \sum_{k=j+1}^N |a_k| \\
&= \sum_{0\leq j<k\leq M+1} |a_k| + \sum_{\substack{M+2 \leq k \leq N \\ 0 \leq j < k}} |a_k| \\
&= \sum_{k=0}^{M+1} k|a_k| + \sum_{k=M+2}^{N} k|a_k| \\
&= \sum_{k=0}^{N} k|a_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k| \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \frac{1}{A(x)}\right) = \sum_k k a_k \mathbb{X}^k \text{ est absolument convergente.}
\end{aligned}$$

donc à la limite lorsque $N \to +\infty$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^M |b_j| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|$$

de sorte que la série $\sum_j b_j \mathbb{X}^j$ est convergente de rayon au moins 1.
On pose donc $\overline{A}(\mathbb{X}) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \mathbb{X}^j$; alors par construction comme $\sum_{k=0}^M a_k \xrightarrow[M\infty]{} \frac{1}{A(1)}$ on a

$$\boxed{A(\mathbb{X})^{-1} = \frac{1}{A(1)} + (1-\mathbb{X})\overline{A}(\mathbb{X})}$$

(c) Soit T la marche aléatoire d'origine 0 et vérifiant $\forall t \in \mathbb{Z}, T_t - T_{t-1} = \frac{1}{A(1)}\epsilon_t$, et notons $C = X - T$. Alors

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} - L)C &= (\mathbb{1} - L) \circ (X - T) \\
&= A(L)^{-1}\epsilon - (\mathbb{1} - L)T \\
&= \left(\frac{1}{A(1)} + (\mathbb{1} - L)\overline{A}(L)\right)\epsilon - (\mathbb{1} - L)T \\
&= (\mathbb{1} - L)\overline{A}(L)\epsilon
\end{aligned}$$

En particulier, il existe un variable fixe Z telle que $\forall t \in \mathbb{Z}$, $C_t = \overline{A}(L)\epsilon_t + Z$, et donc C est stationnaire. [22]

[22] On ne peut **pas** choisir Z qui est entièrement déterminée par la définition de $C = X - T$; en revanche on peut supposer que Z est décorrélée de tous les ϵ_t.

(d) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{l} T_t = \frac{1}{A(1)} \left(\epsilon_t + \cdots + \epsilon_{T-N} \right) + T_{t-N-1} \\ C_t = \alpha_0 \epsilon_t + \alpha_1 \epsilon_{t-1} + \cdots \end{array}$$

Or $T_t \perp\!\!\!\perp \epsilon_{t+h}$ pour $h \geq 1$ et donc pour tout $N \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\left(T_t, C_t\right) &= \left\{ \begin{array}{r} \frac{1}{A(1)} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \sigma_\epsilon^2 + \frac{1}{A(1)} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{C}ov\left(\epsilon_{t-k}, Z\right) \\ + \mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \epsilon_{t-k}\right) + \mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, Z\right) \end{array} \right. \\ &= \frac{\alpha_0 + \cdots + \alpha_N}{A(1)} \sigma_\epsilon^2 + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{C}ov\left(T_{t-N-1}, \epsilon_{t-k}\right) \end{aligned}$$

donc finalement

$$\boxed{\mathbb{C}ov\left(T_t, C_t\right) = \frac{1}{A(1)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \right) \sigma_\epsilon^2}$$

En particulier T et C sont corrélés à toutes dates sauf bien-sûr si $A(\mathbb{X}) = (1)$.

☞ Q2 (a) On a pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(M_t\right) &= \mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right) + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ &= t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

donc par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & t\sigma_U^2 - \sqrt{\mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right)} \sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \sqrt{\mathbb{V}\left(U_t + \cdots + U_0\right)} \sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & t\sigma_U^2 - \underbrace{\sqrt{\mathbb{V}\left(t\sigma_U^2\right)}}_{\underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{t\sigma_U^2}} \sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \mathbb{C}ov\left(U_t + \cdots + U_0\,,\, M_{-1}\right) + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \\ \leq\ & t\sigma_U^2 + \underbrace{\sqrt{\mathbb{V}\left(t\sigma_U^2\right)}}_{\underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{t\sigma_U^2}} \sqrt{\mathbb{V}\left(M_{-1}\right)} + \mathbb{V}\left(M_{-1}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{V}\left(M_t\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t\sigma_U^2$$

Or $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(M_t) + 2\mathbb{C}ov(M_t, S_t) + \mathbb{V}(S_t)$ et donc

$$\mathbb{V}(M_t) - 2\sqrt{\mathbb{V}(M_t)}\sqrt{\mathbb{V}(S_t)} + \mathbb{V}(S_t) \leq \mathbb{V}(X_t) \leq \mathbb{V}(M_t) + 2\sqrt{\mathbb{V}(M_t)}\sqrt{\mathbb{V}(S_t)} + \mathbb{V}(S_t)$$

et comme S est stationnaire (donc de variance $\mathbb{V}(S_t)$ indépendante de t)

$$\mathbb{V}(X_t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathbb{V}(M_t)$$

En particulier

$$\boxed{\tfrac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sigma_U^2 > 0}$$

Or $X = T + C$ où T est une marche aléatoire associée à $\eta = \frac{1}{A(1)}\epsilon$ et C stationnaire, donc de façon similaire

$$\frac{1}{t}\mathbb{V}(X_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{A(1)^2}\sigma_\epsilon^2$$

En particulier

$$\boxed{\sigma_U^2 = \tfrac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}}$$

Ainsi, quelle que soit la décomposition retenue la marche aléatoire est associée à un bruit blanc de variance $\frac{1}{A(1)^2}\sigma_\epsilon^2$.

(b) On a immédiatement $Y = (\mathbb{1} - L)X = A(L)^{-1}\epsilon$ et donc [23]

$$f_Y(\omega) = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2} f_\epsilon(\omega) = \frac{1}{|A(e^{i\omega})|^2}\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}$$

(c) On a par ailleurs

$$Y = (\mathbb{1} - L)M + (\mathbb{1} - L)S = U + (\mathbb{1} - L)B(L)V$$

Or à supposer que U et V sont décorrélés il en va de même pour U et $(\mathbb{1} - L)B(L)V$, donc pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{U+(1-L)B(L)V}(h) = \gamma_U(h) + \gamma_{(1-L)B(L)V}(h)$$

[23] η est un bruit blanc de variance σ_η^2 *ssi* $\forall\omega \in \mathbb{R}$, $f_\eta(\omega) = \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$.
L'implication découle de ce que $f_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_\eta(h)e^{i\omega h} = \frac{\gamma_\eta(0)}{2\pi}$, et la réciproque de ce que $\mathbb{C}ov(\eta_t, \eta_{t-h}) = \frac{1}{2\pi}\int_{]-\pi,+\pi[} f_\eta(\omega)e^{-i\omega h}d\omega = \mathbb{1}_{h=0}f_\eta(0)$ (par symétrie de l'intégrale sur $]-\pi, 0$ et $]0,\pi[$).

de sorte que

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_{U+(1-L)B(L)V}(h)e^{+i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_U(h)e^{+i\omega h}+\frac{1}{2\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\gamma_{(1-L)B(L)V}(h)e^{+i\omega h} \\ &= f_U(\omega)+f_{(1-L)B(L)V}(\omega) \\ &= \frac{\sigma_U^2}{2\pi}+\left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\frac{\sigma_V^2}{2\pi} \end{aligned}$$

(d) Soit donc ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \phi(\omega)=\frac{1}{\left|A\left(e^{i\omega}\right)\right|^2}\sigma_\epsilon^2=\sigma_U^2+\left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\sigma_V^2$$

Alors pour ce qui concerne la deuxième égalité

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\geq 0$$

et donc

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\ \phi(\omega)\geq\phi(0)$$

Or par ailleurs $\phi(0)=\frac{\sigma_\epsilon^2}{A(1)^2}$ et donc

$$\forall\omega\in\mathbb{R},\frac{1}{\left|A\left(e^{i\omega}\right)\right|^2}\geq\frac{1}{|A(1)|^2}$$

Considérons alors le cas où $A(\mathbb{X})=1-\rho\mathbb{X}$ où $\rho>0$: on a

$$|A(-1)|^2=|1+\rho|^2=1+2\rho+\rho^2>1-2\rho+\rho^2=|A(1)|^2$$

ce qui contredit le résultat précédent, de sorte que U et V ne peuvent **pas** être décorrélés. Ceci reste vrai plus généralement si $\rho\in\mathbb{C}$ avec $\Re(\rho)>0$: notant $\rho=a+ib$ il vient

$$\left|A\left(\frac{\overline{\rho}}{|\rho|}\right)\right|^2=\left|1-\rho\frac{\overline{\rho}}{|\rho|}\right|^2=|1+|\rho||^2=1+2\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2>a^2+b^2+1-2a=|A(1)|^2$$

puis de façon plus générale si A est un polynôme quelconque (sous forme canonique) dont les racines sont toutes de partie réelle positive.

Ainsi, il n'est pas toujours possible de décomposer un processus MA intégré en somme d'une marche aléatoire et d'une tendance dont les bruits blancs associés sont décorrélés. En revanche la décomposition de BEVERIDGE-NELSON est toujours possible (sous réserve que $A'(\mathbb{X})$ soit convergente).

⋆

⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) Les revenus de l'agent entre les dates t et $t+1$ sont les revenus du capital rk_t et du travail w_t, le seul emploi étant la consommation C_t entre ces dates. Le flux net de revenu est donc la variation du capital entre les deux dates, soit

$$\boxed{k_{t+1} - k_t = (rk_t + w_t) - C_t}$$

(b) Compte-tenu des informations $\mathcal{I}_t$ en sa possession à la date t un agent rationnel cherche à maximiser son utilité intertemporelle espérée (car il est neutre au risque) $\mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1},\right)\right)$ par un choix judicieux de consommations futures, sans néanmoins violer sa contrainte budgétaire **à aucune date future** (il n'a pas accès au crédit).

(c) Le Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(C_t, C_{t+1}, \ldots, k_t, k_{t+1}, \ldots, \lambda_0, \lambda_1, \ldots\right) &= \mathbb{E}\left(U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) \middle| \mathcal{I}_t\right) \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \lambda_h \left(k_{t+h+1} - (1+r)\, k_{t+h} - w_{t+h} + C_{t+h}\right)\end{aligned}$$

On a pour tout $h \geq 1$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+h}} = \frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}} + \lambda_h$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+h+1}} = (1+r)\lambda_{h+1} - \lambda_h$.
Une condition nécessaire du premier ordre est donc que

$$\frac{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h+1}}}{\frac{\partial \mathbb{E}(U|\mathcal{I}_t)}{\partial C_{t+h}}} = \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} = \frac{1}{1+r}$$

(d) L'utilité attendue à la date t d'un choix de consommation futur $C_t, C_{t+1}, \ldots$ est [24]

$$\boxed{U\left(C_t, C_{t+1}, \ldots\right) = \delta \textstyle\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta)^h} u\left(C_{t+h}\right)}$$

(e) u étant quadratique, $u'(x)$ est proportionnel à x ; comme par ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto \mathbb{E}\left(u(x)|\mathcal{I}_t\right)\right) = \left(x \mapsto \frac{\partial \mathbb{E}\left(u(x)|\mathcal{I}_t\right)}{\partial x}\right)$$

il vient pour $h \geq 0$

$$\frac{\frac{1}{(1+\delta)^{h+1}} C_{t+h+1}}{\frac{1}{(1+\delta)^h} C_{t+h}} = \frac{1}{1+r}$$

c'est-à-dire comme $\delta = r$

$$\boxed{\forall h \geq 0,\ C^{*t}_{t+h} = C^{*t}_t}$$

[24] le cœfficient δ sert à normaliser $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta)^h} = \frac{1}{\delta}$. De tout façon puisqu'une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern est définie à une transformation affine positive près, cela ne change rien à la suite.

(f) On a successivement pour $H \geq 1$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
C_t & = & W_t & + & (1+r)k_t & - & k_{t+1} & & \\
C_{t+1} & = & W_{t+1} & + & (1+r)k_{t+1} & - & k_{t+2} & & \times \frac{1}{1+r} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
C_{t+H} & = & W_{t+H} & + & (1+r)k_{t+H} & - & k_{t+H+1} & & \times \frac{1}{(1+r)^H} \\
\hline
\text{donc} \quad \sum_{h=0}^{H} \frac{C_{t+h}}{(1+r)^h} & = & \sum_{h=0}^{H} \frac{W_{t+h}}{(1+r)^h} & + & (1+r)k_t & - & k_{t+H+1} & &
\end{array}
$$

(g) En l'absence de cavalerie il vient

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{C_{t+h}^{*t}}{(1+r)^h} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^h} + (1+r)k_t$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^h} + (1+r)k_t$$

soit

$$C_t^{*t} = rk_t + \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r\mathbb{E}\left(W_{t+h}|\mathcal{I}_t\right)}{(1+r)^{h+1}}$$

et donc finalement, comme $k_{t+1} = (1+r)k_t + W_t - C_t^{*t}$

$$\boxed{C_{t+1}^{*t+1} - C_t^{*t} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right)\right)}$$

☞ Q2 (a) Δ étant supposé sous forme canonique, ses racines sont toutes de module strictement supérieur à un et donc (voir TD 2, exercice 1) il admet une inverse sous la forme $\Delta(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k$.

Soit alors $A(\mathbb{X}) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k\right) \Theta(\mathbb{X})$: A est absolument convergente car Θ est de degré fini ; en outre $W = \Delta(L)^{-1}\Theta(L)\epsilon = A(L)\epsilon$ et la série $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbb{X}^k\right) \Theta(\mathbb{X})$ est absolument convergente.

De façon similaire Θ est inversible et en notant $\Delta(\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \mathbb{X}^k$ il vient pour $t \in \mathbb{Z}$ $W_t = -\sum_{k\geq 1} \beta_k W_{t-k} + \epsilon_t$ et donc ϵ est l'innovation de W.

(b) Notons $A(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$.

On a tout d'abord pour $h \geq 0$

$$W_{t+h+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right) = \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}}$$

De façon similaire on a

$$\boxed{\mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) = \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k}}$$

(c) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \right) - \left(\sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \right) \right) \\
&= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+h} \epsilon_{t+1-k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+h} \epsilon_{t+1-k} \right) \right) \\
&= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} a_h \epsilon_{t+1} \\
&= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r a_h}{(1+r)^{h+1}} \right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

et donc C est une marche aléatoire, qui plus est associée au bruit blanc $L^{-1}\epsilon$.

☞ Q3 (a) Posons $A(\mathbb{X}) = \Delta(\mathbb{X})^{-1}\Theta(\mathbb{X})$ (développée en série absolument convergente) et ψ : $(t \mapsto \Delta(L)^{-1}\phi(t))$: il vient

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ W_t = \psi(t) + A(L) \circ \epsilon_t$$

En outre ϵ est l'innovation de A.
Par ailleurs on a pour $h \geq 0$

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_t\right) = \psi(t+h+1) + \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \\ \mathbb{E}\left(W_{t+h+1}|\mathcal{I}_{t+1}\right) = \psi(t+h+1) + \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \end{cases}$$

(b) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
C_{t+1} - C_t &= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\left(\psi(t+1) + \sum_{k=h}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \right) - \left(\psi(t+1) + \sum_{k=h+1}^{+\infty} a_k \epsilon_{t+h+1-k} \right) \right) \\
&= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r a_h}{(1+r)^{h+1}} \right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

et donc C est une marche aléatoire, encore associée au bruit blanc $L^{-1}\epsilon$.

☞ Q4 (a) Montrons tout d'abord par récurrence sur $d \geq 1$ que

$$u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} \left(\mathbb{1} - L\right)^l u_0 + \sum_{1 \leq i_d \leq \cdots \leq i_1 \leq n} v_{i_d}$$

– Lorsque $d = 1$ on a immédiatement (avec la convention $\mathcal{C}_n^0 = 1$)

$$u_n - u_{n-1} = v_n \ \rightarrow\ u_n = u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}$$

– Soit alors $d \geq 2$ tel que la formule soit vérifiée lorsque $(\mathbb{1} - L)^{d-1} u_n = v_n$.
Alors en appliquant le résultat pour $d = 1$ à $\left((\mathbb{1} - L)^{d-1} u_n\right)$ il vient

$$(\mathbb{1} - L)^{d-1} u_n = (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}$$

donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à u et $\left((\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{i_1=1}^{n} v_{i_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ il vient

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \sum_{1\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} \left((\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{i_d=1}^{i_{d-1}} v_{i_d} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \sum_{1\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} \\ &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \left(\sum_{1\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} 1 \right) (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} \end{aligned}$$

Or pour $p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq i_p\leq\cdots\leq i_1\leq q} 1 &= |\{(a_1, \ldots, a_p)/1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_p \leq q\}| \\ &= |\{(a_1, a_2 + 1, \ldots, a_p + p - 1)/1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_p \leq q\}| \\ &= |\{(b_1, \ldots, b_p)/1 \leq b_1 < \cdots < b_p \leq q + p - 1\}| \\ &= \mathcal{C}_{q+p-1}^{p} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{l=0}^{d-2} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \mathcal{C}_{n+d-1}^{d-1} (\mathbb{1} - L)^{d-1} u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} \\ &= \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 + \sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
Enfin, comme

$$\sum_{1\leq i_d\leq\cdots\leq i_1\leq n} v_{i_d} = \sum_{i_d=1}^{n} \left(\sum_{i_d\leq i_{d-1}\leq\cdots\leq i_1\leq n} 1 \right) v_{i_d} = \mathcal{C}_n^{d-1} \sum_{i_d=1}^{n} v_{i_d}$$

il vient

$$\boxed{u_n = \sum_{l=0}^{d-1} \mathcal{C}_{n+l}^{l} (\mathbb{1} - L)^l u_0 \ + \ \mathcal{C}_n^{d-1} \sum_{i=1}^{n} v_i}$$

(b) Soit $A(\mathbb{X}) = \Delta(\mathbb{X})^{-1}\Theta(\mathbb{X})$; alors

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ (\mathbb{1} - L)^d W_{t+h} = \psi(t) + A(L)\epsilon_{t+h}$$

Donc d'après le résultat précédent pour tout $h \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ W_{t+h+1} \ = \ \sum_{l=1}^{d-1} \mathcal{C}_{h+l}^{l-1} (\mathbb{1} - L)^l W_t \ + \ \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=1}^{h+1} (\psi(t+l) \ + \ A(L)\epsilon_{t+l})$$

Or

$$(1 - \mathbb{X})^l \ = \ \sum_{k=0}^{l} C_l^k (-1)^{l-k} \mathbb{X}^k$$

donc pour $h \geq 0$ et $t \in \mathbb{Z}$ (avec la convention $\mathcal{C}_{\cdot}^{-1} = 0$)

$$W_{t+h+1} = \sum_{0 \leq k \leq l \leq d-1} \mathcal{C}_{h+l}^{l-1} \mathcal{C}_l^k (-1)^{l+k} W_{t-k} \ + \ \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} (\psi(t+l) \ + \ A(L)\epsilon_{t+l})$$

Or pour $0 \leq k \leq l \leq d-1$ on a

$$\mathbb{E}\left(W_{t-k} | \mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t-k} | \mathcal{I}_t\right) = W_{t-k} - W_{t-k} = 0$$

Donc en notant $A(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{X}^k$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_{t+1}\right) - \mathbb{E}\left(W_{t+h+1} | \mathcal{I}_t\right) \\
= \ & \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} \,\middle|\, \mathcal{I}_{t+1} \right) - \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} \,\middle|\, \mathcal{I}_t \right) \right) \\
= \ & \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} \left(\sum_{k=l}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} - \sum_{k=l+1}^{+\infty} a_k W_{t+l+1-k} \right) \\
= \ & \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned}
C_{t+1} - C_t \ &= \ \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \left(\mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1} \right) \\
&= \ \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{r}{(1+r)^{h+1}} \mathcal{C}_{h+1}^{d-1} \sum_{l=0}^{h+1} a_l \right) \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\boxed{C \text{ est une marche aléatoire, associée au bruit blanc } L^{-1}\epsilon}$$

Ainsi, aussi général que soit le modèle linéaire régissant les revenus du travail, la consommation reste une marche aléatoire ; la seule hypothèse forte est de nature économique, et postule que la fonction d'utilité instantanée est quadratique.

⋆

⋆ ⋆

5 Travaux Dirigés n°5

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 (a) On suppose ici que le fichier `Donnees1.sd2` est enregistré dans le dossier `W :\Sas`. Le programme commencera donc par

```
LIBNAME Td_SAS 'W :\Sas\' ;
DATA table ;
SET Td_SAS.donnees1 ;
```

à la suite de quoi les données contenues dans la table `table` enregistrée dans le fichier `W :\Sas\donnees1.sd2` sont accessibles sous le nom `table` .

(b) L'affichage graphique se fait au moyen de la `PROC GPLOT` de la façon suivante :

```
DATA table ;
SET Td_SAS.donnees1 ;
time = _N_ /* Permet de nommer explicitement l'axe des abscisses */ ;
PROC GLPOT ;
PLOT XM * time /* Trace XM en fonction du temps */ ;
SYMBOL I=JOIN ;
RUN ;
```

On observe que la série semble périodique, de période 12.

On définit en conséquence la série désaisonnalisée `DeSaison` au moyen de la fonction retard `LAG` de la façon suivante : [25]

```
DATA table ;
SET Td_SAS.donnees1 ;
DeSaison = XM - LAG12(XM) /* LAG[n](Y)(t) = Y(t-n) */ ;
```

(c) *Publi-information :*

Auto-corrélation	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
Directe $\rho(h)$	décroît exponentiellement vers 0	nulle à partir de $q+1$	décroît exponentiellement vers 0
Partielle $r(h)$	nulle à partir de $p+1$	(?)	nulle à partir de $p+1$
Inverse $\rho^i(h)$	nulle à partir de $p+1$	décroît exponentiellement vers 0	décroît exponentiellement vers 0

[25]Un façon habituelle de désaisonnaliser serait d'étudier la série moyennée sur une période $M_{12}XM = (\mathbb{1} + L + \cdots + L^{11})XM$ (voir TD 1, exercice 2) ; cependant sous réserve que l'on parvienne à modéliser $DeSaison = (\mathbb{1} - L^{12})XM$ sous forme ARMA le modèle final en `XM` sera plus simple, et c'est la démarche retenue ici. Cependant le reste de l'étude pourrait porter sur $M_{12}XM$.

Les auto-corrélogrammes direct, partiel et inverse peuvent être visualisés au moyen l'option `IDENTIFY` de la `PROC ARIMA` , de la façon suivante :

```
PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DeSaison NLAG=50 /* 0 <= h <= 50 */ ;
RUN ;
```

L'option `NLAG` permet de spécifier le nombre d'auto-covariances (inverses) à calculer.

On observe que les auto-corrélations inverses tendent (exponentiellement) vers zéro ; la série `DeSaison` est donc apparamment stationnaire. Pour s'en assurer, on définit `DesInt` la série de ses différences premières de la façon suivante :

```
DATA table ;
SET Td_SAS.donnees1 ;
DeSaison = XM - LAG12(XM) /* LAG[n](Y)(t) = Y(t-n) */ ;
DesInt = DeSaison - LAG(DeSaison) /* LAG = LAG1 */ ;
```

que l'on étudie à nouveau :

```
PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DesInt NLAG=50 /* 0 <= h <= 50 */ ;
RUN ;
```

On observe que les auto-corrélations inverses ne décroissent **pas** exponentiellement (mais plutôt linéairement) vers zéro, ce qui suggère que la série `DesInt` est **sur-différenciée**, ce qui corrobore la stationnarité de `DeSaison` envisagée auparavant.

On se propose donc d'estimer un modèle Arma pour la série `DeSaison` . On sait qu'une série Y suivant un modèle Arma(p,q) est telle que son auto-corrélation partielle est nulle à partir de l'ordre $p+1$ et son auto-corrélation directe est non-significative à partir de l'odre $q+1$. On recherche donc les premiers ordres au-delà desquels les auto-corrélations (respectivement partielles et directes) sont toujours en-deçà du fractile à 95% de la loi normale (à savoir 1.96), ce qui conduit à proposer pour la série `DeSaison` des ordres [26]

$$\boxed{d^* = 0,\ p^* = 3 \text{ et } q^* = 2}$$

(d) On cherche tout d'abord à estimer le modèle le plus général Arima(3,0,2) pur pour `DeSaison` , au moyen de l'option `ESTIMATE` de la `PROC ARIMA` :

[26] Cette identification préliminaire ne sert qu'à éviter d'estimer ensuite un modèle dont la plupart des cœfficients seront non-significativement non-nuls. En toute rigueur, mieux vaudrait retenir les ordres plus conservatoires $p^* = 7$ et $q^* = 7$ quitte à s'assurer ensuite *par un test statistique* que les cœfficients au-delà de $3, 2$ sont non-significativement non-nuls. Par souci de simplicité on se place directement dans l'hypothèse ou ces tests auraient déjà été effectués.

```
PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DesInt ;
ESTIMATE METHOD = ML PLOT P=3 Q=2 ;
RUN ;
```

L'option `METHOD=ML` sélectionne la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance ; l'option `PLOT` permet d'obtenir les auto-corrélogrammes des résidus estimés, afin de contrôler la validité du modèle.

Il faut en premier lieu s'assurer que le modèle estimé est bien un ARMA, ce qui revient à s'assurer que le résidu estimé est compatible avec l'hypothèse de bruit blanc : SAS pratique à cet effet le test de Porte-Manteau dont le résultat est indiqué dans la section `Autocorrelation Check for White Noise`. [27]

Dans le cas présent le test de Porte-Manteau conduit à accepter l'hypothèse selon laquelle le résidu est un bruit blanc, de sorte que la modélisation ARIMA(3,0,2) est **statistiquement** légitime. En outre, les tests individuels de nullitié des cœfficients du modèle sont tous rejetés au seuil 5%, de sorte que le modèle estimé est également valide.

(e) Sachant que le modèle ARIMA(3,0,2) est valide, on cherche enfin $p \leq 3$ et $q \leq 2$ tels que le modèle ARIMA(p,0,q) soit valide. Pour ce faire on estime successivement

– <u>un modèle AR :</u>
On cherche à modéliser `DeSaison` par un modèle AR pur, dont on sait que l'ordre éventuel est au plus 3. On calcule donc

```
PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DesInt ;
ESTIMATE METHOD = ML PLOT P=3 /* Implicitement, Q=0 */ ;
RUN ;
```

L'hypothèse selon laquelle les résidus ainsi estimés suivent un bruit blanc est acceptée, donc on peut légitimement admettre que `DeSaison` suit un modèle AR d'ordre au plus 3. Cependant le test individuel de nullité du cœfficient associé au troisième retard est **rejeté** au seuil 5%.

On réestime donc un modèle AR(2) :

```
PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DesInt ;
ESTIMATE METHOD = ML PLOT P=2 ;
RUN ;
```

dont le résidu estimé est toujours un bruit blanc (c'est heureux !), mais dont le second retard n'est toujours pas significativement non-nul.

[27] La colonne `Prob` donne la $p-value$ associée : l'hypothèse que la variable est significativement non-nulle est acceptée à $1 - pvalue$ %. Par exemple une valeur de 0.023 indique que la variable est significativement non-nulle "à 97%", tandis qu'une valeur de 0.452 laisse entendre que la variable n'est pas significative à 54%.

On estime donc finalement un modèle AR(1) :

```
PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DesInt ;
ESTIMATE METHOD = ML PLOT P=1 ;
RUN ;
```

qui est toujours valide et dont tous les cœfficients sont, cette fois, significativement non-nuls.
Ainsi la série `DeSaison` peut légitimement être modélisée par un modèle AR(1).

– un modèle MA :
On cherche à modéliser `DeSaison` par un modèle MA pur, dont on sait que l'ordre éventuel est au plus 2. On calcule donc

```
40 PROC ARIMA ;
IDENTIFY VAR=DesInt ;
ESTIMATE METHOD = ML PLOT Q=2 ;
RUN ;
```

L'hypothèse selon laquelle les résidus ainsi estimés suivent un bruit blanc est acceptée, donc on peut légitimement admettre que `DeSaison` suit un modèle MA d'ordre au plus 2 ; en outre tous les cœfficients sont significativement non-nuls (au seuil 5%).
Ainsi la série `DeSaison` peut légitimement être modélisée par un modèle MA(2).

En définitive, la série `DeSaison` peut être modélisée par trois modèles statistiquement valides, à savoir ARIMA(3,0,2), ARIMA(1,0,0) et ARIMA(0,0,2).

Le critère de parcimonie, selon lequel un modèle comprenant strictement moins de cœfficients est toujours préférable, conduit nénanmoins à rejeter le modèle ARIMA(3,0,2) qui est un sur-modèle strict à la fois du modèle AR(1) et du modèle MA(2).

Pour arbitrer enfin entre ces deux derniers modèles, on peut recourir à un critère informationnel, qui met en rapport la vraisemblance du modèle estimé et le nombre de paramètres nécessaires pour l'estimer. Le critère d'Akaike (`AIC`) arbitre en l'occurence en faveur du modèle MA(2), que l'on rentiendra finalement.

(f) En conclusion, on peut raisonnablement proposer pour la série d'origine le modèle

$$\boxed{(\mathbb{1} - L^{12})(\mathtt{XM} - 0,377) = (\mathbb{1} - 0,286L + 0,231L^2)\epsilon}$$

où ϵ est un bruit blanc de variance $\sigma_\epsilon^2 \simeq 0,233$.

☞ Q2

☞ Q3

⋆

⋆ ⋆

6 Travaux Dirigés n°6

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 Notons $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p+d}\alpha_i\mathbb{X}^i$ et $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^{q}\delta_i\mathbb{X}^i$.
Alors pour tout $h \geq 0$

$$X_{t+h} = -\sum_{i=1}^{p+d}\alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q}\delta_i\epsilon_{t+h-i}$$

et donc pour tout $h > q$

$$\begin{aligned}
{}_tX_{t+h} &= \mathbb{EL}\left(X_{t+h}|\, X_t,\ldots,X_0,Z\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{p+d}\alpha_i\mathbb{EL}\left(X_{t+h-i}|\, X_t,\ldots,X_0,Z\right) + \sum_{i=0}^{q}\delta_i\mathbb{EL}\left(\epsilon_{t+h-i}|\, \underbrace{X_t,\ldots,X_0,Z}_{=\langle\epsilon_t,\ldots,\epsilon_0,Z\rangle}\right) \\
&\qquad \text{car } \epsilon \text{ est l'innovation de } X \\
&= -\sum_{i=1}^{p+d}\alpha_i\, {}_tX_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q} 0 \quad \text{car } h > q
\end{aligned}$$

Ainsi à t fixé $({}_tX_{t+h})_h$ suit pour $h > q$ la récurrence linéaire de polynôme caractéristique $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X})$.

Application numérique :
$\Theta(\mathbb{X}) = (1-\frac{1}{2}\mathbb{X})$ est bien sous forme canonique car $2 > 1$ est sa seule racine, et il en va de même pour $\Delta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{4}{5}\mathbb{X}$.
Par ailleurs $(1-\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X}) = 1 - \frac{3}{2}\mathbb{X} + \frac{1}{2}\mathbb{X}^2$ donc pour $h \geq 2$

$${}_tX_{t+h} = \frac{3}{2}{}_tX_{t+h-1} - \frac{1}{2}{}_tX_{t+h-2}$$

Donc il existe α, β tels que pour tout $h \geq 0$

$${}_tX_{t+h} = \alpha 1^h + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^h$$

Des valeurs initiales pour $h \in \{1, 2\}$ on tire alors

$$\begin{cases} h = 1: & \alpha + \frac{1}{2}\beta = {}_tX_{t+1} \\ h = 2: & \alpha + \frac{1}{4}\beta = {}_tX_{t+2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = & \frac{1}{3}\left(4\,{}_tX_{t+2} - {}_tX_{t+1}\right) \\ \beta = & \frac{4}{3}\left({}_tX_{t+1} - {}_tX_{t+2}\right) \end{cases}$$

et donc finalement

$$\boxed{\forall h \geq 1,\ {}_tX_{t+h} = \frac{1}{3}\left(4\,{}_tX_{t+2} - {}_tX_{t+1}\right) + \frac{1}{3\cdot 2^{h-2}}\left({}_tX_{t+1} - {}_tX_{t+2}\right)}$$

☞ Q2 (a) On a pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} e_h &= X_{t+h} - {}_tX_{t+h} \\ &= \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \left(X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i}\right) + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \end{aligned}$$

en notant $\Delta(\mathbb{X}) = \sum_{i=0}^{q} \delta_i \mathbb{X}^i$.[28]

Or

$$\left(X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq i \\ e_{h-i} & \text{si } h > i \end{cases}$$

donc

$$\boxed{e_h = \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}}$$

Procédons alors par récurrence sur $h \geq 0$:

– on a $e_0 = 0 \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle = \langle 0 \rangle$

– soit alors $h \geq 1$ tel que $\forall i < h$, $e_{h-i} \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h-i} \rangle$; alors

$$\begin{aligned} e_h &= \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \underbrace{e_{t+h-i}}_{\in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h-i} \rangle} + \sum_{i=0}^{\min(q,h-1)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\ &\in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

<u>Autre méthode :</u>

On sait que $X_{t+h} \in \langle \epsilon_{t+h}, \ldots \rangle$ car ϵ est l'innovation de X. Par ailleurs, $\mathbb{EL}\left(Y | \epsilon_t, \ldots\right)$ étant la projection orthogonale de Y sur $\langle \epsilon_t, \ldots \rangle$, $(Y - \mathbb{EL}\left(Y | \epsilon_t, \ldots\right)) \in \langle \epsilon_t, \ldots \rangle^{\perp\!\!\!\perp}$.

Or ϵ est un bruit blanc donc $(\epsilon_{t+h}, \ldots)$ est une famille orthogonale, et donc dans $\langle \epsilon_{t+h}, \ldots \rangle$ l'orthogonal de $\langle \epsilon_t, \ldots \rangle$ est $\langle \epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_{t+1} \rangle$ de sorte que finalement

$$e_h = (X_{t+h} - {}_tX_{t+h}) \in \langle \epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h} \rangle$$

(b) On a $e_0 = 0$ et $e_1 = \epsilon_{t+1}$. Définissons donc par récurrence $(a_h)_{h \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_0 &= 1 & \\ a_h &= \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} (\delta_i + \alpha_i a_{h-i}) & \text{si } h \in [\![1, q+1]\!] \\ a_h &= \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i a_{h-i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons alors par récurrence sur h que $\forall h \geq 1$, $e_h = a_0 \epsilon_{t+h} + \cdots + a_{h-1} \epsilon_{t+1}$

– On a $e_1 = \epsilon_{t+1} = a_0 \epsilon_{t+1}$ puisque $a_0 = 1$ par définition.

[28] ϵ est l'innovation de X, donc $\langle X_{t-1}, \ldots \rangle = \langle \epsilon_{t-1}, \ldots \rangle$, donc il n'y a pas de terme en ϵ_{t+h-i} lorsque $h - i \leq 0$.

– Soit alors $h \geq 2$ tel que $\forall l \in [\![0, h-1]\!]$, $e_l = a_0\epsilon_{t+l} + \cdots + a_{l-1}\epsilon_{t+1}$; montrons que $e_h = a_0\epsilon_{t+h} + \cdots + a_{h-1}\epsilon_{t+1}$.
  Alors

$$\begin{aligned}
e_h &= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i e_{h-i} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{i=1}^{\min(h,p+d)} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{(h-i)-1} a_j\epsilon_{t+(h-i)-j} \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{1\leq i\leq \min(h,p+d)} \sum_{i\leq l\leq h-1} \alpha_i\, a_{l-i}\, \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{1\leq i\leq \min(h,p+d,l)} \alpha_i\, a_{l-i}\, \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \delta_k\epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=1}^{h-1} \left(\sum_{1\leq i\leq \min(l,p+d)} \alpha_i\, a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(q,h-1)} \left(\delta_k + \sum_{1\leq i\leq \min(k,p+d)} \alpha_i\, a_{k-i} \right) \epsilon_{t+h-k} + \sum_{l=\min(q,h-1)+1}^{h-1} \left(\sum_{1\leq i\leq \min(l,p+d)} \alpha_i\, a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} \\
&= \sum_{k=0}^{h-1} a_{h-k}\epsilon_{t+h-k}
\end{aligned}$$

  ce qui achève la récurrence.

Ainsi lorsque $h \geq q$, la suite $(a_h)_h$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1-\mathbb{X})^d\Theta(\mathbb{X})$.

<u>*Application numérique :*</u>
On a tout d'abord

$$e_1 = \left(\frac{3}{2}X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \frac{4}{5}\epsilon_t\right) - \left(\frac{3}{2}X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} - \frac{4}{5}\epsilon_t\right) = \epsilon_{t+1}$$

ce dont on tire $a_0 = 1$.
De même

$$e_2 = \frac{3}{2}e_1 + \epsilon_{t+2} - \frac{4}{5}\epsilon_{t+1}$$

et donc $a_1 = \frac{3}{2}a_0 - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$
Puis pour $h \geq 3$ on a $a_h = \frac{3}{2}a_{h-1} - \frac{1}{2}a_{h-2}$. Or les racines de $1 - \frac{3}{2}\mathbb{X} - \frac{1}{2}\mathbb{X}^2$ sont 1 et $\frac{1}{2}$, donc il existe α, β tels que pour tout $h \geq 0$

$$a_h = \alpha 1^h + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

et des valeurs initiales

$$\begin{cases} h=0: & \alpha+\beta=1 \\ h=1: & \alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{7}{10} \end{cases}$$

on tire finalement

$$\boxed{\forall h \geq 0,\ a_h = \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\frac{1}{2^h}}$$

(c) On a pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k \epsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{h-1}\left({a_k}^2 \mathbb{V}(\epsilon_{t+h-k})\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{h-1} {a_k}^2\right)\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer un équivalent en k de a_k, puis en h de $\left(\sum_{k=0}^{h-1} {a_k}^2\right)$. Comme $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suit la récurrence de polynôme $(1-\mathbb{X})\Theta(\mathbb{X})$ dont 1 est racine, on montre que $\left(\sum_{k=0}^{h-1} {a_k}^2\right) \underset{h\to+\infty}{\sim} \alpha h^{2d-1}$ avec $\alpha > 0$.

Notons en effet $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leq p$, les racines de $\Theta(\mathbb{X})$, [29] et soit $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ tels que $\forall h \geq q$, $a_h = \beta_0(h)1^h + \beta_1(h)\lambda_1^h + \cdots + \beta_r(h)\lambda_r^h$, avec $d^\circ\beta_0 = d-1$ et $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $d^\circ\beta_i \leq p$. Alors pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e_h) &= \sum_{k=0}^{h-1}\left(\beta_0(k)+\sum_{i=1}^{r}\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 \sigma_\epsilon^2 \\ &= \sigma_\epsilon^2\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k + \sum_{k=0}^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2\right) \end{aligned}$$

Notons alors ρ le cœfficient de plus haut degré $(d-1)$ de β_0 ; ainsi comme $d \geq 1$ on a $\beta_0(h) \underset{h\to+\infty}{\sim} \rho h^{d-1}$. Soit par ailleurs $i \in [\![1,r]\!]$; montrons que $\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k =_{h\to+\infty} 0\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\right)$.

Soit m_i un majorant de tous les cœfficients de β_i (en valeur absolue), et notons $d_i = d^\circ\beta_i$.

[29] Prises deux-à-deux distinctes ; elles sont en outre toutes de module inférieur à 1, et notamment différentes de 1.

Alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k\right| &\leq \sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\left(d_i m_i k^{d_i}\right)\lambda_i^k \\ &\leq d_i m_i\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\right)\left(\sum_{k=0}^{h-1}k^{d_i}\lambda_i^k\right)\end{aligned}$$

Enfin, comme $\sum_{k=0}^{h-1}k^{d_i}\lambda_i^k =_{h\to+\infty} O(1)$ [30] on a finalement

$$\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\beta_i(k)\lambda_i^k =_{t\to+\infty} O\left(\sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)\right)$$

De la même façon on a pour $i\in[\![1,r]\!]$ $\sum_{k=0}^{h-1}\left(\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 =_{h\to+\infty} O(1)$, et donc

$$\sum_{k=0}^{h-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 \leq \max_i\sum_{k=0}^{h-1}r^2\left(\beta_i(k)\lambda_i^k\right)^2 =_{h\to+\infty} O(1)$$

En définitive, comme $\beta_0(k)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \rho^2 k^{d-1}$ on a (par Césaro)

$$\boxed{\mathbb{V}\left(e_h\right) \underset{h\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{h-1}\beta_0(k)^2 \underset{h\to+\infty}{\sim} \rho^2 h^{2d-1} \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty}$$

[30] On a

$$\sum_{k=0}^{h-1}k^{d_i}\lambda_i^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}k^{d_i}\lambda_i^k$$

Or en divisant $\mathbb{X}^{d_i}$ suivant les puissances croissantes il vient qu'il existe $(\nu_0,\ldots,\nu_{d_i-1})$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}, k^{d_i}=\nu_0 k(k-1)\cdots 1+\nu_1(k-1)(k-2)\cdots 1+\cdots+\nu_{d_i-1}1$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}k^{d_i}\lambda_i^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j j! k^j\lambda_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x\mapsto x^k\right)\right)(\lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x\mapsto\frac{1}{1-x}\right)\right)(\lambda_i) \quad \text{car la série converge normalement} \\ &= \sum_{j=0}^{d_i-1}\nu_j\left(1-\lambda_i\right)^{-1-j} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

Autrement dit, il faut se limiter à des horizons de prévision raisonnables.

Application numérique :
On a ici pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(e_h) &= \sum_{i=0}^{h} \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{2^i} \right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{h} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\,\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\frac{1}{2^i}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{4^i} \right) \\
&= \left(\frac{2}{5}\right)^2 h\sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{1-\frac{1}{2^h}}{1-\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1-\frac{1}{4^h}}{1-\frac{1}{4}} \right) \sigma_\epsilon^2 \\
&= \frac{4}{25}\sigma_\epsilon^2\, h \;+\; \frac{12}{25}\left(2 - \frac{1}{2^h} - \frac{1}{4^h} \right) \sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $h \geq 0$ $e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$, et ϵ est un bruit blanc gaussien. Donc [31]

$$(X_t - {}_tX_{t+h}) = e_h \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2\right)\sigma_\epsilon^2\right)$$

Par conséquent un intervalle de confiance $I_\alpha(h)$ d'horizon h, qui est tel que

$$\mathbb{P}\left(X_{t+h} \in I_\alpha(h)\right) = 1 - \alpha$$

est

$$\boxed{I_\alpha(h) = \left[{}_tX_{t+h} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)} \sqrt{\textstyle\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2}\, \sigma_\epsilon \right]}$$

où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne le fractile à $1 - \frac{\alpha}{2}$ % de la loi normale centrée réduite.

Application numérique :
On a

$${}_tX_{t+2} = (2 \cdot 10 - 12) + \frac{1}{2^{2-1}}(12 - 10) = 9$$

et de plus

$$\mathbb{V}(e_2) \;=\; \left(a_0^2 + a_1^2\right)\sigma_\epsilon^2 \;=\; \left(1 + \left(\frac{7}{10}\right)^2\right) \cdot 1 \;=\; 1.49 \;\simeq\; 1.22^2$$

et donc

$$I_{95\%}(2) \simeq [\,7.78\,,\ 10.22\,]$$

⋆
⋆ ⋆

[31] La somme de deux normales indépendantes est une normale, d'espérance leur somme et de variance leur somme.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} {}_tX_{t+1} &= \mathbb{EL}\left(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \ldots\right) \\ &= \mathbb{EL}\left(\phi X_t + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t|X_t, X_{t-1}, \ldots\right) \\ &= \boxed{\phi X_t - \theta\epsilon_t} \end{aligned}$$

car $\langle \epsilon_t, \ldots\rangle = \langle X_t, \ldots\rangle$
Par ailleurs

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= (\mathbb{1} - \theta L)^{-1}(\mathbb{1} - \phi L)X_t \\ &= (\mathbb{1} - \phi L)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\theta^k L^k\right) \circ X_t \\ &= X_t + \sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty}\theta^{k-1}(\theta - \phi)X_{t-k} \end{aligned}$$

Donc en définitive

$$\begin{aligned} {}_tX_{t+1} &= (\phi - \theta)X_t - \theta\sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty}\theta^{k-1}(\theta - \phi)X_{t-k} \\ &= \sum_{k=\mathbf{0}}^{+\infty}\theta^k(\phi - \theta)X_{t-k} \\ &= \sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty}\theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t+\mathbf{1}-k} \end{aligned}$$

et on pose donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_k = \theta^{k-1}(\phi - \theta)}$$

La série $\sum_{k\geq 1} a_k$ est alors absolument convergente car $|\theta| < 1$ car le modèle est sous forme canonique.

☞ Q2 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}_t\hat{X}_{t+1} &= \theta^0(\phi - \theta)X_t + \sum_{k=\mathbf{2}}^{t+1}\theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t+\mathbf{1}-k} \\ &= (\phi - \theta)X_t + \theta\sum_{k=\mathbf{1}}^{t}\theta^{k-1}(\phi - \theta)X_{t-k} \\ &= \boxed{(\phi - \theta)X_t + \theta\,{}_{t-1}\hat{X}_t} \end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
e_{t+1} &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_{t+1} - \left((\phi-\theta)X_t - \theta\,{}_t\hat{X}_{t-1}\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left((X_{t+1} - \phi X_t) + \theta\left(X_t - {}_t\hat{X}_{t-1}\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left((\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t) + \theta\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\left(\mathbb{V}\left(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t\right) + 2\theta\mathbb{C}ov\left(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t\,,\, X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right) + \theta^2\mathbb{V}\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)\right)\\
&= (1+\theta^2) + \frac{2}{\sigma_\epsilon^2}\underbrace{\mathbb{C}ov\left(-\theta\epsilon_t, \theta X_t\right)}_{-\theta^2\sigma_\epsilon^2} + \theta^2 e_t\\
&= \boxed{(1-\theta^2) + \theta^2 e_t}
\end{aligned}$$

☞ Q4 On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \mathbb{V}\left(X_t\right)\\
&= \mathbb{E}\left({X_t}^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right)\\
&= \phi^2\mathbb{E}\left(X_{t-1}^2\right) + 0 - 2\phi\theta\mathbb{E}\left(X_{t-1}\epsilon_{t-1}\right) + \mathbb{E}\left((\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \quad \text{car} \quad \epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}\\
&= \phi^2\gamma_X(0) - 2\theta\phi\sigma_\epsilon^2 + \left(1+\theta^2\right)\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

Par conséquent comme $|\phi| < 1$ (car le modèle est canonique) il vient

$$\boxed{\gamma_X(0) = \tfrac{1-2\theta\phi+\theta^2}{1-\phi^2}\sigma_\epsilon^2}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\left(X_0 - {}_{-1}\hat{X}_0\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathbb{E}\left(X_0^2\right) \quad \text{car } {}_{-1}\hat{X}_0 = \mathbb{EL}\left(X_0|\emptyset\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right) = 0\\
&= \frac{\gamma_X(0)}{\sigma_\epsilon^2}\\
&= \frac{1-2\theta\phi+\theta^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

Or par ailleurs $e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1-\theta^2)$ ce qui s'écrit encore

$$(e_{t+1} - 1) = \theta^2\left(e_t - 1\right)$$

de sorte que

$$e_t = \theta^{2t}(e_0 - 1) + 1$$

Donc en définitive

$$\boxed{e_t = 1 + \theta^{2t}\,\frac{(\theta-\phi)^2}{1-\phi^2}}$$

☞ Q5 En particulier, l'erreur absolue de la prévision d'horizon 1 tronquée $\mathbb{E}\left(\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)\right)$ <u>converge vers σ_ϵ^2</u> lorsque $t \to +\infty$, puisque $|\theta| < 1$ puisque le modèle est canonique.

Remarquons en outre que la **vitesse de convergence** est géométrique (*i.e.* rapide), et que l'erreur est toujours supérieure à σ_ϵ^2 si $\theta > 0$.

Notons enfin que l'**erreur maximale** $1 + \frac{(\theta-\phi)^2}{1-\phi^2}$ est une fonction croissante de $\theta \in]-1, 1[$ et de $\phi \in]-1, 1[$. [32]

☞ Q1 On a pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$X_t = (\phi+1)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$$

Construisons par récurrence $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(f(t))_{t\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$.

– On a $X_0 = \epsilon_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \phi+1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$, et on pose donc $f(0) = \begin{pmatrix} \phi+1 \\ -\phi \\ -\theta \end{pmatrix}$

– On a

$$X_1 = (\phi+1)X_0 - \phi X_{-1} + \epsilon_1 - \theta\epsilon_0$$

Or par ailleurs $\epsilon_0 = \theta\epsilon_{-1} + X_0 - (\phi+1)X_{-1} + \phi X_{-2}$ et donc finalement

$$X_1 = (\phi+1-\theta)X_0 + (X_{-1}, X_{-2}, \epsilon_{-1}) \times \begin{pmatrix} \theta\phi+\theta-\phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

et on pose

$$a_1 = \phi+1-\theta \quad \text{et} \quad f(1) = \begin{pmatrix} \theta\phi+\theta-\phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$$

– Soit alors $t \geq 2$ tel que $a_1, \ldots, a_t$ soient construits et $f(0), \ldots, f(t)$ définis ; supposons en outre que $\forall l \in [\![3, t]\!], a_l = \theta a_{l-1}$. [33]

Construisons alors a_{t+1} et $f(t+1)$ tels que $a_{t+1} = \theta a_t$ et $X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$.

[32] Elle est décroissante en ϕ au-delà de $\frac{1}{\theta}$, mais $\phi < 1 < \frac{1}{\theta}$.

[33] Cette hypothèse, gratuite lorsque $t = 2$, est nécessaire conduire la récurrence dès que $t \geq 3$, car le calcul ci-dessous requiert la forme explicite des a_k pour $k < t$.

On a

$$\begin{aligned}
X_{t+1} &= (\phi+1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t \\
&= (\phi+1)X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta\left(X_t - \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} - Z \times f(t)\right) \\
&= (\phi+1-\theta)X_t + (\theta a_1 - \phi)X_{t-1} + \theta\sum_{k=2}^{t} a_k X_{t-k} + \theta Z \times f(t) + \epsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

Posons donc $a_{t+1} = \theta a_t$ et $f(t+1) = \theta f(t)\,;$ alors par construction

$$X_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k} + \epsilon_{t+1} + Z \times f(t+1)$$

ce qui achève la récurrence.
On construit ainsi $(a_k)_{k\geq 0}$ et f tels que $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \epsilon_t + Z \times f(t)$.

En outre, on a pour $k \geq 1$ $a_{k+1} = \theta^{k-1}a_2$ et pour $t \geq 1$ $f(t) = \theta^{t-1}\begin{pmatrix} \theta\phi+\theta-\phi \\ -\theta\phi \\ -\theta^2 \end{pmatrix}$.

En particulier, la série $\sum_k a_k$ est absolument convergente puisque $|\theta| < 1$ (le modèle étant sous forme canonique).
Par ailleurs pour $t \geq 1$

$$\|Z \times f(t)\|_2 \leq |\theta|^{t-1}\|Z \times f(1)\|_2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

car Z borné et $|\theta| < 1$, c'est-à-dire

$$Z \times f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}^2} (0)$$

☞ Q2 On a pour $t \geq 2$

$$\begin{aligned}
{}_t\hat{X}_{t+1} &= \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+\mathbf{1}-k} \\
&= a_1 X_t + \sum_{k=2}^{t+1} a_k X_{t+\mathbf{1}-k} \\
&= a_1 X_t + \sum_{k=1}^{t} a_{k+1} X_{t-k} \\
&= a_1 X_t + \left(a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^{t} a_{k+\mathbf{1}} X_{t-k} \right) \\
&= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \sum_{k=2}^{t} \theta^{(k+\mathbf{1})-2} a_2 X_{t-k} \\
&= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \sum_{k=2}^{t} \left(\theta^{k-2} a_2 \right) X_{t-k} \\
&= a_1 X_t + a_2 X_{t-1} + \theta \left({}_{t-1}\hat{X}_t - a_1 X_{t-1} \right) \\
&= \boxed{a_1 X_t + (a_2 - a_1) X_{t-1} + \theta \, {}_{t-1}\hat{X}_t}
\end{aligned}$$

☞ Q3 On a pour $t \geq 0$

$$X_{t+1} = (\phi + 1) X_t - \phi X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc pour $t \geq 2$

$$X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} = (\phi + 1 - a_1) X_t + (a_2 - a_1 - \phi) X_{t-1} + \theta \, {}_{t-1}\hat{X}_t + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

Or par définition de a, $a_1 = \phi + 1 - \theta$ et $a_2 = \theta a_1 - \phi$, donc

$$X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1} = \theta \left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t \right) + \epsilon_{t+1} - \theta \epsilon_t$$

et donc

$$e_{t+1} = \theta^2 e_t + (1 - \theta^2)$$

Par conséquent

$$e_t = \theta^{2t}(e_0 - 1) + 1 = \theta^{2(t-1)} \left(\underbrace{\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbb{E} \left(\left(X_1 - {}_0\hat{X}_1 \right)^2 \right)}_{e_1} - 1 \right) + 1$$

☞ Q4 Enfin,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(X_1 - {}_0\hat{X}_1\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left((\epsilon_1 + Z \times f(1))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((\epsilon_1 + \epsilon_{-1} + (\theta + \theta\phi - \phi)X_{-1} + \theta\phi X_{-2})^2\right) \\
&= \begin{pmatrix} (\theta + \theta\phi - \phi)^2 \\ \theta^2\phi^2 \\ (\theta^2 + 1) \\ \\ -2\theta\phi(\theta + \theta\phi - \phi) \\ -2\theta^2(\theta + \theta\phi - \phi) \\ 2\theta^3(\theta + \theta\phi - \phi) \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left(X_{-1}^2\right) \\ \mathbb{E}\left(X_{-2}^2\right) \\ \sigma_\epsilon^2 \\ \\ \mathbb{C}ov\left(X_{-1}, X_{-2}\right) \\ \mathbb{C}ov\left(X_{-1}, \epsilon_{-1}\right) \\ \mathbb{C}ov\left(X_{-2}, \epsilon_{-1}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ainsi en général même si l'erreur de prévision absolue $X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t$ converge vers σ_ϵ^2, elle dépend à horizon fini non seulement de σ_ϵ^2 mais aussi de la variance-covariance des conditions initiales Z.

⋆
⋆ ⋆

7 Travaux Dirigés n°7

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 L'observation de la série fait apparaître une tendance déterministe linéaire : la série observée est "assez proche" d'une certaine droite $\bar{y}_t = a + bt$.

Si l'on admet, comme le suggère son graphe, qu'à cette composante déterministe près elle est en outre stationnaire du second ordre, alors le processus Y dont elle est la réalisation admet une représentation auto-régressive infinie de la forme

$$\Phi(L)(Y_t - a - bt) = \epsilon_t$$

Or, à supposer que $\Phi(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k \mathbb{X}^k$ ainsi que sa dérivée sont de rayon supérieur à 1 on a

$$\begin{aligned}
\Phi(L) \circ (bt)_t &= b \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k (t-k) \\
&= b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k \right) t - b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\phi_k \right) \\
&= b\Phi(1)t - b\Phi'(1)
\end{aligned}$$

Comme $\Phi(L) \circ (a) = \Phi(1) \times a$ il vient en notant $\mu = a - b\Phi'(1)$ et $\beta = b\Phi(1)$

$$\boxed{\Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t}$$

En pratique, on se contente de chosir Φ de degré fini mais assez grand pour que ϵ soit significativement un bruit blanc.

☞ Q2 Afin de tester la présence éventuelle d'une racine unitaire, on cherche à factoriser "de force" $\Phi(L)$ par $\mathbb{1} - L$ (transformation de BEVERIDGE-NELSON, voir TD 4, exercice 1) : pour ce faire on effectue la division euclidienne $\Phi(\mathbb{X})$ par $1 - \mathbb{X}$ ce qui s'écrit, comme 1 est racine de $\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)$ [34]

$$\Phi^+(\mathbb{X}) = \frac{\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)}{(1 - \mathbb{X})} \in \mathbb{R}[X], \quad d^\circ\Phi^+ \leq d^\circ\Phi - 1$$

Alors

$$\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1 - \mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$$

[34] Cette opération n'est normalement définie que pour les polynômes, *i.e.* lorsque Φ est de degré fini. Si $d^\circ\Phi = +\infty$ on définit $\Phi_N(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{N} \phi_k \mathbb{X}^k$ dont on tire $\Phi_N^+(\mathbb{X})$ pour $N \geq 1$, dont on montre qu'elle est convergente de rayon supérieur à 1.

et donc

$$\begin{aligned}
\Phi(L)Y &= \Phi(1)\times Y + (\mathbb{1}-L)\cdot\Phi^+(L)\circ Y \\
&= \Phi(1)\times Y + \Phi^+(L)\circ\Delta Y \\
&= \Phi(1)\times Y + \underbrace{\Phi^+(0)}_{\Phi(0)-\Phi(1)}\times\Delta Y + \left(\underbrace{\Phi^+(L)-\Phi^+(0)}_{-\Phi^*(L)}\right)\circ\Delta Y \\
&= \Phi(1)\times Y + (1-\Phi(1))\times\Delta Y - \Phi^*(L)\circ\Delta Y \\
&= \Delta Y + \Phi(1)LY - \Phi^*(L)\circ\Delta Y
\end{aligned}$$

et comme par ailleurs $\Phi(L)Y_t = \mu + \beta t + \epsilon_t$ il vient en définitive

$$\boxed{\Delta Y_t = \mu + \beta t + \Phi^*(L)\Delta Y_t - \Phi(1)Y_{t-1} + \epsilon_t}$$

qui est bien le modèle recherché en posant $\phi = -\Phi(1)$.

Notons que par construction $\Phi^*(0) = 0$, donc $\Phi^*(\mathbb{X})$ ne contient que des puissances strictement positives de $\mathbb{X}$, et donc $\Phi^*(L)\circ\Delta Y_t$ ne contient que des valeurs passées $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \ldots$ de ΔY_t.

Tester si le modèle est intégré, c'est tester si $\Phi(1) = 0$; sous cette forme cela revient juste à tester si le cœfficient ϕ de Y_{t-1} est non-significativement non-nul.

Il aurait été possible de pratiquer une telle régression directement sur l'équation en Y_t au lieu de celle en ΔY_t ; mais comme Y n'est **pas** stationnaire, $\mathbb{C}ov\,(Y_t, Y_{t+h})$ est significative pour tout h, donc la régression aurait dû comporter une infinité de variables explicatives $(Y_{t-h})_{h\geq 1}$ ... A l'inverse si ΔY est stationnaire, un nombre fini d'explicatives peut suffire.

☞ Q3 Il est tout d'abord nécessaire de déterminer Φ tel que le modèle soit vérifié. Pour ce faire on choisit un degré arbitrairement grand pour Φ (ici 9) [35] et on vérifie que le modèle estimé par la régression des moindres carrés ordinaires [36] est statistiquement valide ; dans le cas présent, le R^2 ajusté (qui vaut $0,5129$) assure que le modèle capture une part suffisante de la variance, et donc que suffisamment de variables explicatives $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \ldots$ ont été introduites.

Remarquons que lorsque ΔY est stationnaire, les cœfficients de la régression sont donc aymptotiquement normaux, ce qui justifie l'emploi du test de Student pour tester leur significativité.[37]

En l'occurence, on observe que les cœfficients de la régression sur $\Delta Y_{t-4}, \ldots, \Delta Y_{t-8}$ ne sont (individuellement) pas significativement non-nuls (colonne `Prob > |τ|`).

Ainsi la modélisation proposée est valide mais le modèle estimé ici n'est pas significatif.

☞ Q4 (a)

(b)

(c)

[35] Car $8 = d^\circ\Phi^* = d^\circ\Phi^+ = d^\circ\Phi - 1$.

[36] Puisque ϵ est censé être un bruit blanc.

[37] En toute généralité il serait possible que ΔY ne soit pas stationnaire, auquel cas l'emploi du test de Student serait inadapté.

(d)

(e)

(f)

(g)

(h) On se propose donc de déterminer le sous-modèle minimal qui soit totalement significatif.

Remarque : Bien que l'on observe à ce stade que le cœfficient en Y_{t-1} est significativement non-nul, **on ne peut pas** en déduire qu'il le sera aussi dans le sous-modèle où tous les cœfficients sont significatifs.[38] Il est nécessaire de déterminer ce sous-modèle et d'y tester la significativité du cœfficient en Y_{t-1}.

- Compte-tenu de la régression précédente, on teste la nullité **simultanée** des cœfficients de $\Delta Y_{t-4}, \ldots, \Delta Y_{t-8}$ dans la régression. En l'occurence, l'hypothèse $\mathcal{H}_0$: " $\phi_{\Delta Y_{t-4}} = \cdots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$ " est acceptée car la statistique de Fisher associée vaut `0,7841` .
- On effectue donc la régression de ΔY sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-4} \rangle$, et on observe que le modèle ainsi estimé est valide (ce qui est heureux).
  Il apparaît cependant que les cœfficients de ΔY_{t-2} et de ΔY_{t-3} sont **individuellement** non-significativement non-nuls.
- On effectue donc le test de la nullité simultanée de ces cœfficients en formulant l'hypothèse $\mathcal{H}_0$: " $\phi_{\Delta Y_{t-2}} = \cdots = \phi_{\Delta Y_{t-8}} = 0$ ".

  Remarque : Noter que tester successivement
  i. la nullité simultanée des cœfficients de $\Delta Y_{t-4}, \ldots, \Delta Y_{t-8}$
     dans la régression sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-8} \rangle$
  ii. puis la nullité simultanée des cœfficients de ΔY_{t-2} et ΔY_{t-3}
     dans la régression sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-3} \rangle$

  est moins robuste statistiquement que de tester directement la nullité simultanée des cœfficients de $\Delta Y_{t-2}, \ldots, \Delta Y_{t-8}$ dans la régression sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-8} \rangle$.

  En l'occurence, l'hypothèse est acceptée car la statistique de Fisher associée vaut `0,6597`

[38] La statistique de Student du cœfficient β dans la régression ordinaire

$$Y = \alpha X^1 + \beta X^2 + \gamma X^3 + U$$

est

$$t_{X^2} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\widehat{\sigma_2^2}}}$$

où $\widehat{\sigma_2^2}$ désigne le terme diagonal de la matrice de variance-covariance Σ de $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Or rien ne dit que cette matrice ne dépend pas de X^3, même si γ est non-significativement non-nul : comme $\hat{\beta} = (X^{2\prime} X^2)^{-1} X^{2\prime} Y$ et $\hat{\gamma} = (X^{3\prime} X^3)^{-1} X^{3\prime} Y$ pour peu que $\mathbb{C}ov\left(X^2, X^3\right) \neq 0$, la matrice Σ dépendra de $\hat{\gamma}$ (au sens ou $\mathbb{C}ov\left(\Sigma^{i,3}, \hat{\gamma}\right) \neq 0$).

En l'occurence, on sait (voir TD 2, exercice 3) comme ΔY est stationnaire que ΔY_{t-1} et ΔY_{t-i} sont certainement corrélés.

– On effectue donc en définitive la régression de ΔY sur $\langle 1, t, Y_{t-1}, \Delta Y_{t-1}\rangle$, et on observe que le modèle ainsi estimé est valide. On constate en outre qu'aucun cœfficient n'est individuellement non-significatif.

On procède donc à l'identification du modèle AR (voir TD 5, exercice 1) en ΔY sur les explicatives t et LY.

On observe en l'occurence que les auto-corrélations directes décroissent "exponentiellement" vers 0 (en l'occurence, elles ne sont plus significativement non-nulles dès l'ordre $h \geq 3$) ; en outre le test de Porte-Manteau permet de conclure que le résidu estimé ϵ est non-significativement différent d'un bruit blanc.

☞ Q5 Le modèle estimé s'écrit

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \phi Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϕ_1 est le cœfficient en $\mathbb{X}$ de $\Phi^*(\mathbb{X})$, ce qui se réécrit encore

$$(\mathbb{1} - \rho L)Y_t = \mu + \beta t + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

en posant $\rho = 1 + \phi$.

☞ Q6 (a)

(b)

(c)

(d)

(e) Sous $\mathcal{H}_0^1$ le modèle se réécrit

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

La statistique de test associée est celle de la table `VI` , selon laquelle le fractile à 5% vaut `6,34` (on retient la valeur pour `250` observations [39]) ; comparée à la valeur empirique de `F-Value : 5,83` on accepte donc l'hypothèse $\mathcal{H}_0^1$.

☞ Q7 On constate que $\mathcal{H}_0^2 \to \mathcal{H}_0^1$; comme $\mathcal{H}_0^1$ est acceptable on se propose de tester $\mathcal{H}_0^2$.
Sous $\mathcal{H}_0^2$ le modèle se réécrit

$$Y_t = Y_{t-1} + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$$

La statistique de test associée est celle de la table `V` , selon laquelle le fractile à 5% vaut `4,75` ; comparée à la valeur empirique `F-Value : 10,75` on rejette donc l'hypothèse $\mathcal{H}_0^2$.

⋆
⋆ ⋆

[39] Plutôt que celle pour `100` observations, car le test est ainsi plus restrictif : si on accepte $\mathcal{H}_0$ avec le fractile à 250 observations, on l'accepterait a fortiori avec celui à 100 observations.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) Le modèle étant sous forme canonique, ϵ est l'innovation du processus vectoriel X : par définition de l'innovation $\epsilon_t = X_t - \mathbb{EL}\left(X_t|X_{t-1},\ldots\right)$ et donc en projetant pour $i \in \{1,2\}$

$$\epsilon_t^i = \mathbb{X}_t^i - \mathbb{EL}\left(X_t^i|X_{t-1},\ldots\right)$$

(ϵ^2 est l'innovation du processus $X^2|X^1$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{EL}\left(X_t^1|X_t^2, X_{t-1},\ldots\right) &= \mathbb{EL}\left(X_t^1|\left(X_t^2, X_{t-1}^2,\ldots\right),\left(X_{t-1}^1,\ldots\right)\right)\\
&= \mathbb{EL}\left(X_t^1|\left(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2,\ldots\right),\left(X_{t-1}^1,\ldots\right)\right)\\
&= \mathbb{EL}\left(X_t^1|\epsilon_t^2,\left(X_{t-1}^2,\ldots,X_{t-1}^1,\ldots\right)\right)\\
&= \mathbb{EL}\left(X_t^1|\epsilon_t^2, X_{t-1},\ldots\right)
\end{aligned}$$

Or $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_t^2 \perp\!\!\!\perp \langle X_{t-1},\ldots\rangle$ donc $\langle \epsilon_t^2, X_{t-1},\ldots\rangle = \langle \epsilon_t^2\rangle \overset{\perp\!\!\!\perp}{\oplus} \langle X_{t-1},\ldots\rangle$ et donc

$$\mathbb{EL}\left(X_t^1|X_t^2, X_{t-1},\ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1|\epsilon_t^2\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{\oplus} \mathbb{EL}\left(X_t^1|X_{t-1},\ldots\right)$$

Or

$$X_t = \sum_{k=\mathbf{1}}^{d^\circ\Phi} \Phi_k X_{t-k} + \epsilon_t$$

et $\epsilon_t \perp\!\!\!\perp \langle X_{t-1},\ldots\rangle$ donc en projetant

$$\mathbb{EL}\left(X_t^1|\epsilon_t^2\right) = \mathbb{EL}\left(\epsilon_t^1|\epsilon_t^2\right)$$

et donc finalement

$$\boxed{\mathbb{EL}\left(X_t^1|X_t^2, X_{t-1},\ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1|X_{t-1},\ldots\right) + \mathbb{EL}\left(\epsilon_t^1|\epsilon_t^2\right)}$$

(b) Par définition pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\boxed{X_t^2 \not\rightarrowtail X_t^1} &\Leftrightarrow \mathbb{EL}\left(X_t^1|X_t^2, X_{t-1},\ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1|X_{t-1},\ldots\right)\\
&\Leftrightarrow \mathbb{EL}\left(\epsilon_t^1|\epsilon_t^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \mathbb{C}ov\left(\epsilon_t^1, \epsilon_t^2\right) = (0)\\
&\Leftrightarrow \boxed{\Sigma^{1,2} = (0)}\\
&\Leftrightarrow \mathbb{C}ov\left(\epsilon_t^1, \epsilon_t^2\right) = (0)\\
&\Leftrightarrow \mathbb{EL}\left(\epsilon_t^2|\epsilon_t^1\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \mathbb{EL}\left(X_t^2|X_t^1, X_{t-1},\ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^2|X_{t-1},\ldots\right)\\
&\Leftrightarrow \boxed{X_t^1 \not\rightarrowtail X_t^2}
\end{aligned}$$

☞ Q2 (a) On a pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{k=\mathbf{1}}^{d^\circ\Phi} \phi_k X_{t-k} + \epsilon_t$$

et donc en projetant

$$X_t^1 = \sum_{k=\mathbf{1}}^{d^\circ \Phi} \phi_k^{1,1} X_{t-k}^1 + \sum_{k=\mathbf{1}}^{d^\circ \Phi} \phi_k^{1,2} X_{t-k}^2 + \epsilon_t^1$$

Si $\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$ alors

$$X_t^1 = \sum_{k=\mathbf{1}}^{d^\circ \Phi} \phi_k^{1,1} X_{t-k}^1 + \epsilon_t^1$$

et donc

$$\mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}, \ldots\right) = \sum_{k=\mathbf{1}}^{d^\circ \Phi} \phi_k^{1,1} X_{t-k}^1 = \boxed{\mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}^1, \ldots\right)}$$

c'est-à-dire $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$.

(b) Comme ϵ est l'innovation de X, soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{Z},\, X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \epsilon_{t-k}$$

Alors en projetant il vient [40]

$$\forall t \in \mathbb{Z},\, X_t^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{1,1} \epsilon_{t-k}^1 + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{1,2} \epsilon_{t-k}^2$$

(c) Supposons alors que $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$; alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}, \ldots\right) = \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}^1, \ldots\right)$ et donc $X_t^1 - \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}^1, \ldots\right) = X_t^1 - \mathbb{EL}\left(X_t^1 | X_{t-1}, \ldots\right) = \epsilon_t^1$: ϵ^1 est donc l'innovation de X^1.

(d) Si $X^2 \not\rightsquigarrow X^1$, alors X^1 adment une représentation de Wold sous la forme

$$X_t^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \epsilon_{t-k}^1$$

où $B_k \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. On a par ailleurs pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} \epsilon_{t-k}^1 + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \epsilon_{t-k}^2$$

et donc

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k & (0) \\ \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} & \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \epsilon_{t-k}^1 \\ \epsilon_{t-k}^2 \end{pmatrix}$$

[40] Chacune des deux sommes converge car $\left\|A_k^{1,j}\right\|_2^2 \leq \|A_k\|_2^2$ et que $\sum_k A_k$ est normalement convergente.

soit [41]

$$X = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_k & (0) \\ A_k^{2,1} & A_k^{2,2} \end{pmatrix} L^k \circ \epsilon$$

Alors

$$\epsilon = \Phi(L)X = \Phi(L) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_k & (0) \\ A_k^{2,1} & A_k^{2,2} \end{pmatrix} L^k \right) \circ \epsilon$$

et donc la matrice $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} B_k & (0) \\ A_k^{2,1} & A_k^{2,2} \end{pmatrix} \mathbb{X}^k \right)$ sur l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$ est régulière et est une inverse de $\Phi(\mathbb{X})$, ce qui s'écrit encore par blocs

$$\begin{pmatrix} \Phi(\mathbb{X})^{1,1} & \Phi(\mathbb{X})^{1,2} \\ \Phi(\mathbb{X})^{2,1} & \Phi(\mathbb{X})^{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} B_k \mathbb{X}^k\right) & (0) \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} \mathbb{X}^k\right) & \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}d_m & (0) \\ (0) & \mathcal{I}d_{n-m} \end{pmatrix}$$

et en particulier en considérant le bloc $(1, 2)$ il vient

$$(0) \times \Phi(\mathbb{X})^{1,1} + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k \right) \times \Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0)$$

Or $\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \mathbb{X}^k & (0) \\ \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,1} \mathbb{X}^k & \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k \end{pmatrix}$ est inversible, donc $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_k^{2,2} \mathbb{X}^k\right)$ également[42] et donc
$\Phi(\mathbb{X})^{1,2} = (0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$ et finalement

$$\boxed{\Phi(L)^{1,2} = (0)}$$

ce qui achève la preuve de la réciproque.

☞ Q1 On sait que

$$\Phi(L)X = \epsilon$$

donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ en multipliant par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ il vient

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \Phi(L) \right) \circ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \epsilon$$

---

[41] Avec la convention que

$$ML^k = \begin{pmatrix} M^{1,1}L^k & \cdots & M^{1,n}L^k \\ \vdots & & \vdots \\ M^{n,1}L^k & \cdots & M^{n,n}L^k \end{pmatrix}$$

et en remarquant que chaque $\sum_k A_k^{i,j} \mathbb{X}^k$ est convergente car $|A_k^{i,j}| \leq \|A_k\|_2$ et que $\sum_k A_k$ est normalement convergente.

[42] Comme la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs, si elle est inversible, alors C l'est également.

Notons donc $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \epsilon$; alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{C}ov\left(\eta_t, \eta_{t-l}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}' \mathbb{C}ov\left(\epsilon_t, \epsilon_{t-l}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Posons en particulier $\alpha = \frac{\Sigma^{1,2}}{\Sigma^{1,1}}$: alors $\mathbb{C}ov\left(\eta_t, \eta_{t-l}\right) = 0$ et donc η est un bruit blanc. Sa matrice de variance-covariance est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^{1,1} & 0 \\ 0 & \Sigma^{2,2} - \frac{\left(\Sigma^{1,2}\right)^2}{\Sigma^{1,1}} \end{pmatrix}$$

Notons enfin $\Psi(\mathbb{X})$ la matrice à cœfficients dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \Phi(\mathbb{X})$; alors

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(car $\Phi(0) = \mathcal{I}d$), donc $\Psi(0)$ est bien inversible et le modèle est correctement spécifié.

☞ Q2 D'une façon générale, l'estimateur des moindres carrés ordinaires de la régression de $Y = Xb + U$ est, si X est de plein rang, $\hat{b}_{mcg} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X' \times \Omega^{-1} Y$, où Ω désigne la matrice de variance-covariance de U.

Considérons alors les deux sous-blocs

$$\left(\frac{Y^1}{Y^2}\right) = \left(\frac{Xb^1}{Xb^2}\right) + \left(\frac{U^1}{U^2}\right)$$

et supposons que $\mathbb{V}\left(\frac{U^1}{U^2}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Omega^{1,1} & (0) \\ \hline (0) & \Omega^{2,2} \end{array}\right)$ soit bloc-diagonale.

Alors

$$\begin{aligned}
\hat{b}_{mcg} &= \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X' \times \Omega^{-1} \left(\frac{Y^1}{Y^2}\right) \\
&= \left(X' \left(\begin{array}{c|c} \Omega^{1,1} & (0) \\ \hline (0) & \Omega^{2,2} \end{array}\right)^{-1} X\right)^{-1} \times X' \times \left(\begin{array}{c|c} \Omega^{1,1} & (0) \\ \hline (0) & \Omega^{2,2} \end{array}\right)^{-1} \left(\frac{Y^1}{Y^2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \left(X' \left(\Omega^{1,1}\right)^{-1} X\right)^{-1} X' \times \left(\Omega^{1,1}\right)^{-1} Y^1 \\ \left(X' \left(\Omega^{2,2}\right)^{-1} X\right)^{-1} X' \times \left(\Omega^{2,2}\right)^{-1} Y^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{b^1}_{mcg} \\ \hat{b^2}_{mcg} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dans le cas présent, la régression $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \hline X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 & \cdots & X_{t-p}^1 & | & X_{t-1}^2 & \cdots & X_{t-p}^2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{array}{c|c} \psi_1^{1,1} & \psi^{2,1} \\ \vdots & \\ \psi_p^{1,1} & \psi_p^{2,1} \\ \hline \psi_1^{1,2} & \psi^{1,2} \\ \vdots & \\ \psi_p^{2,1} & \psi_p^{2,2} \end{array}\right) + \begin{pmatrix} \eta_t^1 \\ \eta_t^2 \end{pmatrix}$$

tandis que les sous-régressions $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$ s'écrivent respectivement

$$(\mathcal{R}^1):\ X_t^1 = \begin{pmatrix} X_{t-1}^1 & \cdots & X_{t-p}^1 & | & X_{t-1}^2 & \cdots & X_{t-p}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1^{1,1} \\ \vdots \\ \psi_p^{1,1} \\ \hline \psi_1^{1,2} \\ \vdots \\ \psi_p^{1,2} \end{pmatrix} + \eta_t^1$$

et

$$(\mathcal{R}^2):\ X_t^2 = \begin{pmatrix} X_t^1 & | & X_{t-1}^1 & \cdots & X_{t-p}^1 & | & X_{t-1}^2 & \cdots & X_{t-p}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \hline \psi_1^{2,1} \\ \vdots \\ \psi_p^{2,1} \\ \hline \psi_1^{2,2} \\ \vdots \\ \psi_p^{2,2} \end{pmatrix} + \eta_t^2$$

comme $\mathbb{V}(\eta_t) = \begin{pmatrix} \Sigma^{1,1} & 0 \\ 0 & \Sigma^{2,2} - \frac{\left(\Sigma^{1,2}\right)^2}{\Sigma^{1,1}} \end{pmatrix}$ est diagonale, l'estimation des cœfficients de Ψ par la régression globale $\mathcal{R}$ est équivalente à celle résultant des deux sous-régressions $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$.

☞ Q3 L'hypothèse $\mathcal{H}_0$ se réécrit "$\Sigma^{1,2} = 0$" soit encore "$\alpha = 0$".

Remarquons en outre que si ϵ est gaussien, alors il en va de même pour $\eta = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 - \frac{\mathbb{C}ov\left(\epsilon^2,\epsilon^1\right)}{\mathbb{V}(\epsilon^1)}\epsilon^1 \end{pmatrix}$; tester $\mathcal{H}_0$ revient donc à tester la nullité individuelle du cœfficient estimé $\widehat{\alpha}$, ce qui peut être fait au moyen de la statistique de Student habituelle.

Remarquons que sous $\mathcal{H}_0$ seule la régression $\mathcal{R}^2$ est modifiée ; il suffit donc de pratiquer le test *dans la seule régression* $\mathcal{R}^2$.

☞ Q4 L'hypothèse $\mathcal{H}_0^*$ se réécrit "$\forall k \in \mathbb{N},\ \phi_k^{1,2} = 0$" soit encore "$\forall k \in \mathbb{N},\ \psi_k^{1,2} = 0$".

Le test de $\mathcal{H}_0^*$ revient alors au test de la nullité simultanée des cœfficients estimés $\left(\widehat{\psi_1^{1,2}}, \ldots, \widehat{\psi_p^{1,2}}\right)$, qui peut être conduit au moyen de la statistique de Fisher. [43]

[43] A savoir $F = \frac{SCR_{\mathcal{H}_0} - SCR_{\neg\mathcal{H}_0}}{SCR_{\neg\mathcal{H}_0}} \cdot \frac{T-2p}{p}$ où T désigne le nombre d'observations, $2p$ le nombre total de variable explicatives et p le nombre de variables dont on teste la nullité simultanée, et bien-sûr $SCR_{\mathcal{H}}$ désigne la somme des carrés des résidus estimés (*i.e.* la variance non-expliquée) sous l'hypothèse $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}_0$ est vraie alors F suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(p, T-2p)$.

Remarquons que cette fois sous $\mathcal{H}_0^*$ seule la régression $\mathcal{R}^1$ est modifiée, et tester $\mathcal{H}_0^*$ revient à tester la régression $\mathcal{R}^1$ sous $\mathcal{H}_0^*$ par rapport à $\mathcal{R}^1$ sous $\neg\mathcal{H}_0^*$. Ainsi il suffit de pratiquer le test *dans la seule régression* $\mathcal{R}^1$.

⋆
⋆ ⋆

8 Travaux Dirigés n°8

Corrigé de l'exercice 1

☞ Q1 On a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbb{1}-\phi L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{1}-\theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

et on pose donc $\Phi(L) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mu L^3 & \mathbb{1}-\phi L \end{pmatrix}$ et $\Theta(L) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}-\theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L) \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est l'innovation du processus $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *ssi* $|\Phi(\mathbb{X})| = 1-\phi\mathbb{X}$ et $|\Theta(\mathbb{X})| = (1-\theta_1\mathbb{X})(1-\theta_2\mathbb{X})(1-\phi\mathbb{X})$ ont tous deux leurs racines de module strictement[44] supérieur à 1 (soit *ssi* $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$ et $|\varphi| < 1$).

☞ Q2 Soit $Z_t = (1-\varphi L)Y_t$. On a :

$$Z_t = c(1-\phi) + \mu X_{t-3} + (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\varphi L)V_t$$

puis, comme $X_{t-3} = (\mathbb{1}-\theta_1 L)U_{t-3}$ il vient

$$Z_t = c(\mathbb{1}-\phi) + \mu\underbrace{(\mathbb{1}-\theta_1 L)U_{t-3}}_{\text{MA}(1)} + \underbrace{(\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L)V_t}_{\text{MA}(2)}$$

En particulier (voir TD 3, exercice 2) comme U et V sont indépendants, Z est un processus Ma d'ordre *au plus* 2.
Comme en outre $\gamma_Z(2) = \theta_2\phi\sigma_V^2 \neq 0$, Z est un processus Ma(2).
Par conséquent, Y est un processus Arma(1,2).
Soit $\Psi \in \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$ et η bruit blanc tels que $Z = \Psi(L)\eta$; Ψ et σ_η^2 sont déterminés (voir TD 2, exercice 2) par les équations de Yule-Walker en Z qui pour $h \in \mathbb{Z}$ s'écrivent d'une part d'après la définition de Z

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(Z_t, Z_{t+h}) &= \mu^2\gamma_{U_{t-3}-\theta_1 U_{t-4}}(h) + \gamma_{V_t-(\theta_2+\phi)V_{t-1}+\theta_2\phi V_{t-2}}(h) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

et d'autre part d'après la définition de $\Psi(\mathbb{X}) = \Psi_0 + \Psi_1\mathbb{X} + \Psi_2\mathbb{X}^2$ et η

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(Z_t, Z_{t+h}) &= \mathbb{C}ov\,(\Psi_0\eta_t + \Psi_1\eta_{t-1} + \Psi_2\eta_{t-2}, \Psi_0\eta_{t-h} + \Psi_1\eta_{t-h-1} + \Psi_2\eta_{t-h-2}) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

L'égalisation de ces expressions pour $h \in \{0,1,2\}$ conduit à un système polynômial en $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \sigma_\eta^2$ qui s'expriment donc de façon non-linéaire (en général) en les paramètres θ_1, θ_2 et ϕ.

[44] $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est l'innovation de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *ssi* leurs racines sont de module supérieur ou égal à 1 ; mais comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est stationnaire, aucune racine n'est unitaire.

☞ Q3 La prévision linéaire optimale de Y conditionnellement au seul passé de Y s'obtient en transformant la forme ARMA(1,2) précédente en une forme AR(∞) en Y. Mais pour obtenir celle conditionnellement aux passés de X et de Y, il faut déterminer la prévision linéaire optimale de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ conditionnellement à son passé, ce qui se fait en transformant la formulation ARMA vectorielle en forme AR(∞) vectorielle :[45]

$$\Theta(L)^{-1}\Phi(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Theta(1)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ c(1-\phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{aligned} \Theta(L)^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}-\theta_1 L & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)(\mathbb{1}-\phi L) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbb{1}-\theta_1 L)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1}-\theta L)^{-1} & 0 \\ -\mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1} & (\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{(1-\phi)(1-\theta_2)}\right)(c(1-\phi)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

La projection linéaire optimale de Y connaissant le passé de X et de Y s'obtient alors en projetant : on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1}X_t = \frac{c}{1-\theta_2} + V$$

et donc

$$\mathbb{EL}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_2^k Y_{t-k} - \mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1}X_t | X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right) = \frac{c}{1-\theta_2}$$

et donc en appliquant l'opérateur $\mathbb{E}\left(\cdot|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right)$ il vient [46]

$$\boxed{\mathbb{E}\left(Y_t|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right) = \frac{c}{1-\theta_2} + \mu L^3(\mathbb{1}-\theta_2 L)^{-1}(\mathbb{1}-\phi L)^{-1}X_t - \sum_{k=\mathbf{1}}^{+\infty}\theta_2^k Y_{t-k}}$$

⋆

⋆ ⋆

[45] Attention à l'ordre en général : $\Theta(L)^{-1}$ et $\Phi(L)$ sont des matrices et donc en général $\Theta(L)^{-1}\times\Phi(L) \neq \Phi(L)\times\Theta(L)^{-1}$. Cependant dans le cas présent $\Theta(L)$ est diagonale, donc commute avec $\Phi(L)$.

[46] Cette expression fait a priori intervenir $\mathbb{E}\left(X_t|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right)$; mais comme le polynôme en facteur de X est divisible par L^3, seules les valeurs passées de X interviennent.

Si ce n'était pas le cas, il faudrait déterminer explicitement $\mathbb{E}\left(X_t|X_{t-1},\ldots,Y_{t-1},\ldots\right)$ en projetant la forme AR(∞) sur X : $(\mathbb{1}-\theta_1 L)^{-1}X = U$. Notons enfin que cette dernière est indépendante de Y, ce qui est heureux.

Corrigé de l'exercice 2

☞ Q1 (a) $(\mathbb{1}-L)X = U$ donc $(X_t)_{t>0}$ est une marche aléatoire, donc non-stationnaire.
D'autre part, $\mathbb{V}(X_{t-1}-V_t) = (t-1)\sigma_U^2 + \sigma_Y^2$ car X_t et V_t sont indépendants. Or si (par l'absurde) $(Y_t)_{t>0}$ était stationnaire, alors $X_{t-1} - V_t = -Y_t + \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2}$ serait stationnaire, donc de variance constante, et il en irait de même pour X ! Donc $(Y_t)_{t>0}$ n'est pas stationnaire.
Autre méthode :
Si Y était stationnaire alors $X - V = (-\mathbb{1} + \frac{5}{6}L - \frac{1}{6}L^2)Y$ le serait également, et comme V est stationnaire et X et V sont décorrélés, X le serait également.

(b) $\Delta X = U$ est un bruit blanc, donc stationnaire.
Par ailleurs
$$\Delta Y_t = \frac{5}{6}(\Delta Y)_{t-1} - \frac{1}{6}(\Delta Y)_{t-2} - U_{t-1} + V_t - V_{t-1}$$
Définissons $W_t = -\underbrace{U_{t-1}}_{\text{MA}(0)} + \underbrace{V_t - V_{t-1}}_{\text{MA}(1)}$; alors (voir TD 3, exercice 2) W est un processus MA d'ordre au plus 1. Comme en outre $\gamma_w(1) = -\sigma_v^2 \neq 0$, W est un MA(1) et donc ΔY est un processus ARMA(2,1)

☞ Q2 Posons
$$A(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 1-\mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix}$$
Alors
$$A(L)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$
et en outre
$$|A(\mathbb{X})| = (1-\mathbb{X})\left(1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2\right) = (1-\mathbb{X})\left(1-\frac{1}{2}\mathbb{X}\right)\left(1-\frac{1}{3}\mathbb{X}\right)$$
dont les racines 1, 2 et 3 sont toutes de module supérieur (ou égal) à un, de sorte que la représentation est canonique.

☞ Q3 $A(\mathbb{X}) - A(1)$ est un polynôme (matriciel) en $\mathbb{X}$ qui s'annule en $\mathbb{X} = 1$, donc divisible par $(1-\mathbb{X})$: on a en l'occurence
$$\begin{aligned} A(\mathbb{X}) - A(1) &= \begin{pmatrix} 1-\mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X} & 1 - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\mathbb{X} & 0 \\ \mathbb{X}-1 & \frac{2}{3} - \frac{5}{6}\mathbb{X} + \frac{1}{6}\mathbb{X}^2 \end{pmatrix} \\ &= (1-\mathbb{X}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Notons donc $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\mathbb{X} \end{pmatrix}$; A^* divise $A(\mathbb{X}) - A(1)$.

On a alors

$$\epsilon = A(L)Z = A(1)Z + A^*(L)\Delta Z$$

Or ΔZ est (asymptotiquement) stationnaire [47] donc il en va de même pour $A(1)Z = \epsilon - A^*(L)\Delta Z$.

Or $A(1)Z = \begin{pmatrix} 0 \\ X + \frac{1}{3}Y \end{pmatrix}$, donc en particulier

$$\boxed{X + \tfrac{1}{3}Y}$$

est (asymptotiquement) stationnaire.

⋆
⋆ ⋆

Corrigé de l'exercice 3

☞ Q1 (a) Comme $\Phi(\mathbb{X}) - \Phi(1)$ s'annule en 1, il est divisible par $1-\mathbb{X}$ et soit donc $\Phi^+(\mathbb{X}) = \frac{\Phi(\mathbb{X})-\Phi(1)}{1-\mathbb{X}} \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$; ainsi $\Phi(\mathbb{X}) = \Phi(1) + (1-\mathbb{X})\Phi^+(\mathbb{X})$.

Alors (voir TD 7, exercice 1)

$$\begin{aligned}
\Phi(L)Y &= \Phi(1) \times Y + (\mathbb{1} - L) \cdot \Phi^+(L) \circ Y \\
&= \Phi(1) \times Y + \Phi^+(L) \circ \Delta Y \\
&= \Phi(1) \times Y + \underbrace{\Phi^+(0)}_{\Phi(0)-\Phi(1)} \Delta Y + \underbrace{\left(\Phi^+(L) - \Phi^+(0)\right)}_{-\Phi^*(L)} \Delta Y \\
&= \Phi(1) \times Y + (\mathbb{1} - \Phi(1)) \times \Delta Y - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\
&= \Phi(1) \times Y + \Delta Y - (\Phi(1) \times Y - \Phi(1) \times LY) - \Phi^*(L) \circ \Delta Y \\
&= \Delta Y + \Phi(1) \times LY - \Phi^*(L) \circ \Delta Y
\end{aligned}$$

et donc comme par ailleurs $\Phi(L)Y_t = \mu + \epsilon_t$ il vient en définitive

$$\boxed{\Delta Y_t = -\Phi(1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \mu + \epsilon_t}$$

en notant $\Phi^*(\mathbb{X}) = \Phi^+(0) - \Phi^+(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \mathbb{X}^i$.

[47] Ce n'est pas tout-à-fait évident : ΔX et ΔY sont stationnaires, mais il faut encore montrer que $\mathbb{C}ov\,(\Delta X_t, \Delta Y_{t+h})$ ne dépend pas du temps t : pour ce faire, on soustrait l'équation en Y aux dates t et $t-1$, ce qui fait apparaître $\Delta Y_t = \frac{5}{6}\Delta Y_{t-1} - \frac{1}{6}\Delta Y_{t-2} - \Delta X_{t-1} + \Delta V_t$.

(b) On a

$$\Delta Y = \Phi(1)LY - \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i L^i \Delta Y + \mu + \epsilon$$

et donc

$$\Phi(1)LY = \underbrace{-\Delta Y + \sum_{i=1}^{p-1}\Gamma_i L^i \Delta Y}_{\Psi(L)\Delta Y} + \mu + \epsilon$$

Supposons (par l'absurde) que $\Phi(1)$ soit inversible : alors

$$LY \;=\; \Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y + \Phi(1)^{-1}\mu + \Phi(1)^{-1}\epsilon$$

Mais comme Y est intégré d'ordre 1, ΔY est stationnaire, et donc LY, donc Y, serait stationnaire ! [48]

Comme on a supposé que Y était intégré d'ordre 1, $\Phi(1)$ n'est **pas** inversible, *i.e.* est de rang au plus $n-1$.

(c) Soit α une base de l'image de $\Phi(1)$ (qui est de dimension $r \leq n-1$), et notons $\beta_{i,1},\ldots,\beta_{i,r}$ les cœfficients de la i-ième ligne L_i de $\Phi(1)$ dans la base α. On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$L_i = \sum_{j=1}^{r}\beta_{i,j}\alpha_j \quad \text{où} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix}\alpha_{j,1}\\ \vdots \\ \alpha_{j,n}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}n,1(\mathbb{R})$$

et donc

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_r\end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix}\beta_{1,1} & \cdots & \beta_{n,1}\\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1,r} & \cdots & \beta_{n,r}\end{pmatrix}}_{\beta'}$$

soit

$$\boxed{\Phi(1) = \alpha\beta'}$$

(d) On a

$$\Phi(1)Y_{t-1} = \Psi(L)\Delta Y_t + \mu + \epsilon_t$$

Or α est une base, donc $\alpha'\alpha$ est de plein rang donc inversible ; en multipliant par $(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'$ il vient alors

$$(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Phi(1)Y_{t-1} = (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Psi(L)\Delta Y_t + (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\mu + (\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\epsilon_t$$

et donc $(\alpha'\alpha)^{-1}\alpha'\Phi(1)Y$ est stationnaire.

Comme $\Phi(1) = \alpha\beta'$ cela revient à dire que

[48] En toute rigueur se pose le problème de la corrélation de $\Phi(1)^{-1}\Psi(L)\Delta Y$ avec ϵ. Mais comme Y est intégré d'ordre 1 (et pas plus), ΔY vérifie une équation AR(d)e la forme $A(L)\Delta Y = \gamma + \epsilon$ de sorte que $LY = B(L)\Delta Y$ pour $B(\mathbb{X}) = \Phi(1)^{-1}(\Psi(\mathbb{X}) + A(\mathbb{X}) - \gamma)$.

$$\boxed{\beta' Y \text{ est stationnaire}}$$

☞ Q2 (a) Comme $C(\mathbb{X}) - C(1)$ s'annule en 1, soit $C^+(\mathbb{X}) = \frac{\mathbb{C}(\mathbb{X})-\mathbb{C}(1)}{1-\mathbb{X}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[\mathbb{X}]$; ainsi $C(\mathbb{X}) = C(1) + (1-\mathbb{X})C^+(\mathbb{X})$. On a alors

$$(\mathbb{1} - L)Y = m + C(1)\epsilon + (\mathbb{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Définissons $S = C^*(L)\epsilon$; ainsi S est stationnaire.
Soit alors $T = Y - S$, montrons que T est une marche aléatoire (avec dérive) : on a

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} - L)T &= (\mathbb{1} - L)Y - (\mathbb{1} - L)S \\ &= m + C(1)\epsilon\end{aligned}$$

qui est un “bruit blanc” d'espérance m.

(b) On a en multipliant la décomposition de Y par β'

$$\beta'(\mathbb{1} - L)Y = \beta' m + \beta' C(1)\epsilon + \beta'(\mathbb{1} - L)C^*(L)\epsilon$$

Or $\beta' Y$ est stationnaire, donc $\mathbb{E}\left(\beta' Y_t\right) = \mathbb{E}\left(\beta' Y_{t-1}\right)$ et par suite

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{E}\left((\mathbb{1} - L) \circ (\beta' Y)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\beta'(\mathbb{1} - L)Y\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\beta' m + \beta' C(1)\epsilon + \beta'(\mathbb{1} - L)C^*(L)\epsilon\right) \\ &= \beta' m\end{aligned}$$

Enfin, si (par l'absurde) $\beta' C(1) \neq 0$, alors $Z = \beta' Y - \beta' C^*(L)\epsilon$ qui vérifie $(\mathbb{1} - L)Z = \beta' C(1)\epsilon$ est une marche aléatoire, donc d'espérance non-bornée dans le temps, et donc il en va de même pour $\beta' Y$ qui est pourtant stationnaire ! Donc $\beta' C(1) = 0$.

(c) On a $\beta' m = 0$, donc $m \in \langle\beta\rangle^\perp$, et donc il existe m_0 tel que $m = \beta^\perp m_0'$.
De même $\beta' C(1) = 0$, donc $C(1) \in \langle\beta\rangle^\perp$ et il existe δ tel que $m = \beta^\perp \delta'$.

(d) On a

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} - L)T &= m + C(1)\epsilon \\ &= \beta^\perp\left(m_0' + \delta'\epsilon\right)\end{aligned}$$

Soit donc M la marche aléatoire multi-variée (de taille $n - r$) vérifiant $M_0 = 0$ et

$$(\mathbb{1} - L)M = m_0' + \delta'\epsilon$$

Alors $(\mathbb{1} - L)T = \beta^\perp(\mathbb{1} - L)M = (\mathbb{1} - L) \circ \left(\beta^\perp M\right)$, donc les processus T et $\beta^\perp M$ sont égaux à une constante (aléatoire) près ; [49] comme $\dim(\beta^\perp) = n - \dim(\beta) = n - r$ on a

$$\boxed{T \text{ est un vecteur composé de } n - r \text{ marches aléatoires univariées}}$$

⋆
⋆ ⋆

[49] On n'a pas nécessairement $T = M$: notamment il n'y a aucune raison a priori pour que $T_0 = Y_0 - C^+(L)\epsilon_0$ soit égal à $\beta^\perp M_0$, car une valeur de M_0 ad hoc n'existe pas forcément !