Processus stationnaires au second ordre

Roland Badeau, Bertrand David

Les fichiers utiles au TP peuvent être récupérés sur le site pédagogique de SIMDI 226 :
`https://sitepedago.telecom-paristech.fr/front/frontoffice.php?SP_ID=2441#R1950`

1 Observation de processus, calcul des moyennes et des covariances (simuproc.m)

Utiliser le programme `simuproc.m` en le modifiant pour afficher les moyennes et les covariances mesurées à l'aide d'un grand nombre de réalisations pour les processus suivants :

1. bruit blanc Z_t (fonction Matlab `randn`) de variance σ^2,
2. processus AR(1) causal (filtrage d'un bruit blanc par le filtre de fonction de transfert $\frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{1-\phi_1 z}$, de coefficient $\phi_1 \in]-1,1[$),
3. processus sinusoïdal $X_t = A_0 \cos(\lambda_0 t + \Phi_0) + Z_t$, où $\lambda_0 \in [0,\pi[$ et Φ_0 est une variable aléatoire uniforme sur $[0,2\pi]$, indépendante des Z_t.

Corroborer les résultats par le calcul.

2 Estimation de la densité spectrale de puissance, périodogramme.

On cherche à estimer la densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus X_t stationnaire au second ordre et de moyenne nulle, observé sur un intervalle $t \in \{1\dots n\}$, à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD), implémentée dans la fonction Matlab `fft`. On rappelle que la DSP $f(\lambda)$ est définie comme la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$: $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h)\, e^{-i\lambda h}$. Remarque : cet exercice étant indépendant du précédent, le programme sera écrit dans un autre fichier Matlab.

1. Soit $\hat{\gamma}_n(h)$ l'estimateur empirique de la fonction d'autocovariance du processus X_t : $\forall h \in \{0\dots n-1\}$, $\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(X_t - \hat{\mu}_n)(X_{t+h} - \hat{\mu}_n)$ (où $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$) et $\forall h \geq n$, $\hat{\gamma}_n(h) = 0$. On définit le périodogramme de $X_1 \dots X_n$, noté $I_n(\lambda)$, comme $I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{h=-n+1}^{n-1} \hat{\gamma}_n(h)\, e^{-i\lambda h}$. Exprimer $I_n(\lambda)$ en fonction de la TFTD de $X_1 - \hat{\mu}_n \dots X_n - \hat{\mu}_n$.
2. En déduire un algorithme de calcul de $I_n(2\pi k/m)$ pour $k \in \{0\dots m-1\}$, où $m \geq n$ est l'ordre de la TFD utilisée, que vous implémenterez sous matlab. Testez-le avec les processus définis dans la section 1.
3. Comment obtenir la séquence $\hat{\gamma}_n(h)$ à partir de $I_n(2\pi k/m)$? Quelle précaution faut-il prendre sur m ? Ecrire la fonction Matlab correspondante : `gamma = acovb(x)` (attention : il faudra d'abord centrer le vecteur x).
4. Dans le cas du bruit blanc, estimer la variance du périodogramme pour plusieurs horizons d'observation n. Qu'en concluez-vous ?

3 Filtrage des processus. Modélisation AR de la parole.

3.1 Équations de Yule-Walker.

On considère un processus AR(p) causal défini par l'équation récurrente :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

où Z_t est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Montrer que pour tout $h \geq 1$ on a $\mathbb{E}(X_{t-h}\, Z_t) = 0$.

2. En déduire une relation de récurrence liant $\gamma(h)$ et $\gamma(h-1)\ldots\gamma(h-p)$ pour $h \geq 1$. Étudier le cas $h = 0$.
3. En déduire que ces équations pour $h = 0 \ldots p$ peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\Gamma_{p+1} \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi_1 \\ \vdots \\ -\phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où Γ_{p+1} est une matrice de Toeplitz (termes égaux le long d'une diagonale) que l'on précisera.

3.2 Estimation.

1. Générer sous Matlab un processus AR(4) de longueur $n = 1000$ à l'aide de la fonction `[X,phi] = genAR(p,n)`.
2. En utilisant la fonction `acovb` servant à générer la séquence des autocovariances biaisées, déduire une estimée $\hat{\Gamma}_{n,p+1}$ de la matrice Γ_{p+1}.
3. Résoudre alors le système d'équations (1) en calculant le vecteur intermédiaire

$$\mathbf{v} = \hat{\Gamma}_{n,p+1}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

4. Comparer les valeurs estimées pour les coefficients et la variance du bruit aux valeurs vraies. On pourra également comparer visuellement les spectres correspondants.

3.3 Application à la parole.

Analyse. Le signal est découpé en trames recouvrantes (par exemple à 50%) d'environ 30ms. Chaque trame est considérée comme un processus AR(12) et est estimée selon le procédé décrit à la section précédente. Si la trame présente un spectre harmonique, lié à la vibration des cordes vocales, elle est dite *voisée* et la période fondamentale (période de voisement) est estimée, soit T. Si la trame est non-voisée, $T = 0$. Les paramètres estimés $\gamma(0)$, ϕ et T sont transmis pour chaque trame au système de synthèse.

Synthèse. Si la trame est voisée, le signal est reconstruit comme le filtrage AR d'un peigne d'impulsions à la fréquence $f_0 = 1/T$. Si la trame n'est pas voisée, l'innovation sera prise égale à du bruit blanc. La synthèse est réalisée par addition-recouvrement (*overlap-add*, OLA) des trames de synthèse, à l'aide d'une fenêtre de Hann.

1. La fonction `T = detectpitch(trame,minT,maxT)` permet de détecter l'existence d'une périodicité dans un processus stationnaire. Elle recherche une période $T \in [\mathrm{minT}, \mathrm{maxT}]$ dans un signal `trame`. Elle renvoie $T = 0$ si le processus n'est pas périodique ou si la période n'est pas dans l'intervalle $[\mathrm{minT}, \mathrm{maxT}]$, ou $T \in [\mathrm{minT}, \mathrm{maxT}]$ si le processus est périodique de période T échantillons. Sachant que la fréquence fondamentale d'une voix humaine est généralement comprise dans l'intervalle 80Hz-400Hz, comment doit-on choisir minT et maxT ?
2. Utiliser le cadre fourni dans le script `anasyn.m` pour réaliser l'analyse synthèse d'un signal de parole.
3. Choisir un morceau de phrase et en modifier l'intonation (*i.e.* les valeurs de fréquence de voisement).