Statistiques des séries temporelles

Théorème d'Herglotz, filtrage des processus

Partie I

Rappel : stationnarité au second ordre

Processus du second ordre

- Définition (processus du second ordre)
  - Le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dit du second ordre si et seulement si $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$
  - Tout processus du second ordre admet une fonction moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et une fonction d'autocovariance définie sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ par

$$\Gamma(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu(s))\overline{(X_t - \mu(t))}].$$

- Soit Γ la fonction d'autocovariance d'un processus du second ordre indexé par $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Elle vérifie :
  1. Symétrie hermitienne : $\forall (s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $\Gamma(s,t) = \overline{\Gamma(t,s)}$;
  2. Type positif : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_s \Gamma(s,t)\overline{a_t} \geq 0.$$

Stationnarité au second ordre

- Définition (processus stationnaire au second ordre)
  - Soient $\mu \in \mathbb{C}$ et $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible, ou encore stationnaire au sens large (SSL), de moyenne μ et de fonction d'autocovariance γ si et seulement si :
    a) X est un processus du second ordre : $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$;
    b) $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[X_t] = \mu$;
    c) $\forall (s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{cov}(X_s, X_t) = \gamma(s-t)$.
- Propriété : tout processus du second ordre stationnaire au sens strict est aussi stationnaire au second ordre

Fonction d'autocovariance

- Proposition
  - La fonction d'autocovariance $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ d'un processus stationnaire au second ordre vérifie les propriétés suivantes :
    1. Symétrie hermitienne : $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\gamma(-h) = \overline{\gamma(h)}$;
    2. Type positif : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_s \gamma(s-t) \overline{a_t} \geq 0.$$

- Définition (matrice de covariance)
  - La matrice de covariance Γ_n de n valeurs consécutives $X_1 \dots X_n$ d'un processus stationnaire au second ordre possède une structure de Toeplitz, caractérisée par la relation $(\Gamma_n)_{i,j} = \gamma(i-j)$.

Exemples

- Exemple (bruit blanc faible)
  - On note $(X_t) \sim BB(0, \sigma^2)$ tout processus stationnaire au second ordre de fonction d'autocovariance $\gamma(h) = \sigma^2 \delta(h)$.
- Exemple (bruit blanc fort)
  - On note $(X_t) \sim IID(0, \sigma^2)$ toute suite de variables aléatoires IID, centrées et de variance σ^2.
  - Tout bruit blanc fort est aussi un bruit blanc faible.
- Exemple : processus harmonique
  - Le processus $X_t = A \cos(\lambda_0 t + \phi)$ (où A est une v.a. réelle centrée de variance $\sigma^2 < +\infty$ et ϕ est une v.a. uniforme sur $(-\pi, \pi]$ indépendante de A) est un processus stationnaire au second ordre centré qui admet pour fonction d'autocovariance

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \sigma^2 \cos(\lambda_0 h).$$

Partie II

Théorème d'Herglotz

Théorème d'Herglotz

- Soit $\mathbb{T}$ le torre $(-\pi, \pi]$ et $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ la tribu borélienne associée.
- Théorème (Herglotz)
  - Une suite $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ est de type positif si et seulement si il existe une unique mesure positive ν sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \; \gamma(h) = \int_{\mathbb{T}} e^{ih\lambda} \nu(d\lambda)$$

- Définition (mesure spectrale et densité spectrale de puissance)
  - Lorsque γ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire au second ordre, ν est appelée mesure spectrale du processus.
  - Si de plus ν admet une densité f ($\nu(d\lambda) = f(\nu) d\nu$), alors f est appelée densité spectrale de puissance (DSP) du processus

Théorème d'Herglotz

- Corollaire du théorème d'Herglotz
  - Une suite $(\gamma(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ à valeurs complexes telle que $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)|^2 < +\infty$ est de type positif si et seulement si la fonction de $L^2(\mathbb{T})$ définie par $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma(h)e^{-ih\lambda}$ est positive presque partout dans $\mathbb{T}$.
- Exemple (bruit blanc)
  - La fonction d'autocovariance du bruit blanc est $\gamma(h) = \sigma^2\delta(h)$
  - La densité spectrale correspondante est $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$
- Contre-exemple : processus harmonique
  - Le processus $X_t = A\cos(\lambda_0 t + \phi)$ admet pour mesure spectrale $\nu(d\lambda) = \frac{1}{4}\sigma^2(\delta_{\lambda_0}(d\lambda) + \delta_{-\lambda_0}(d\lambda))$, mais il n'admet pas de DSP.

Propriété des processus harmoniques

- Proposition
  - S'il existe un rang n pour lequel la matrice de covariance Γ_n est non inversible, alors le processus correspondant X_t est prédictible dans le sens où il existe $a_1 \dots a_l \in \mathbb{C}$ avec $l \leq n-1$ tels que $X_t = \sum_{k=1}^{l} a_k X_{t-k}$ p.s.
- Proposition
  - Soit $\gamma(h)$ la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire au second ordre. On suppose que $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \to 0$ quand $h \to +\infty$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la matrice Γ_n est de rang plein et donc inversible.

Partie III

Filtrage des processus

Théorème de filtrage des processus

Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite absolument sommable : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| < +\infty$. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus aléatoire tel que $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$. Alors, $\forall t \in \mathbb{Z}$, la suite $Y_{n,t} = \sum_{k=-n}^{n} \psi_k X_{t-k}$ converge presque sûrement, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite Y_t notée

$$Y_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k X_{t-k}.$$

De plus, $\forall t \in \mathbb{Z}$ la v.a. Y_t est intégrable : $\mathbb{E}[|Y_t|] < +\infty$, et la suite $(Y_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Y_t dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|Y_{n,t} - Y_t|] = 0.$$

Si $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$, alors $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[|Y_t|^2] < +\infty$ et la suite $(Y_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers la v.a. Y_t, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|Y_{n,t} - Y_t|^2] = 0.$$

Théorème de filtrage des processus

Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite absolument sommable : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| < +\infty$.
Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire au second ordre de moyenne $\mu_X = \mathbb{E}[X_t]$ et de fonction d'autocovariance $\gamma_X(h) = \mathrm{cov}(X_{t+h}, X_t)$.
Alors le processus $Y_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k X_{t-k}$ est stationnaire au second ordre, de moyenne $\mu_Y = \mu_X \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k$, de fonction d'autocovariance

$$\gamma_Y(h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j \overline{\psi_k} \gamma_X(h+k-j),$$

et de mesure spectrale

$$\nu_Y(d\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda})|^2 \nu_X(d\lambda),$$

où $\psi(e^{-i\lambda}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k e^{-ik\lambda}$.