13 Compléments : exercices

13.1 Exercices avec correction

Exercise 1 Soit (ε_t) un bruit blanc. Les processus suivants sont-ils stationnaires ? (éventuellement avec certaines restrictions sur les paramètres)

(i) $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$

(ii) $X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1} \sin(ct)$ où $c \in \mathbb{R}$

(iii) X_t tel que $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$

(i) Le processus X_t vérifie $E(X_t) = a =$ constante. Sa variance est donnée par $V(X_t) = \left[b^2 + c^2\right]\sigma^2$ où σ^2 est la variance du bruit, puisque le bruit est non-autocorrélé : $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$.

De plus, $\text{cov}(X_t, X_{t-1}) = bc\sigma^2$ qui ne dépend pas de t et $\text{cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$ pour tout $h > 1$. Aussi, le processus <u>X_t est stationnaire</u>.

(ii) Le processus X_t vérifie $E(X_t) = 0$ (= constante). De plus, sa variance est donnée par $V(X_t) = \left[\cos^2(ct) + \sin^2(ct)\right]\sigma^2 = \sigma^2$ où σ^2 est la variance du bruit, puisque le bruit est non-autocorrélé : $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$. .

Enfin, $\text{cov}(X_t, X_{t-1}) = \sigma^2 [\sin ct \cos c(t-1)]$ qui dépend de t pour $c \notin \pi\mathbb{Z}$. Aussi, le processus <u>X_t n'est pas stationnaire</u>

(iii) Le processus X_t peut se réécrire

$$X_t = \sum_{k=1} \varepsilon_k + X_0$$

qui correspond à une marche aléatoire. Aussi, le processus <u>X_t n'est pas stationnaire</u>. On peut montrer que le processus explose en $\sqrt{t}$.

Exercise 2 Soit (ε_t) un bruit blanc et (X_t) un processus vérifiant

$$X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z} \tag{57}$$

Montrer qu'il existe un processus stationnaire, solution de (57) sous la forme

$$X^*_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varepsilon_{t-k}$$

En déduire que ε_t n'est pas l'innovation du processus X^*_t.

Le polynôme caractéristique de la forme AR est $\Phi(Z) = 1 - 7Z/2 + 3Z^2/2$, qui peut s'écrire

$$\Phi(Z) = 1 - \frac{7}{2}Z + \frac{3}{2}Z^2 = (1 - 3Z)\left(1 - \frac{1}{2}Z\right)$$

Les racines sont alors $1/3$ et 2. La racine $1/3$ n'est pas à l'extérieur du disque unité : <u>la représentation n'est pas canonique</u>. Toutefois, il est possible d'inverser le poylnôme retard Φ. Soit X^*_t est défini par

$$\begin{aligned} X^*_t &= \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = \frac{1}{(1-3L)\left(1-\frac{1}{2}L\right)}\varepsilon_t = \left[\frac{6/5}{1-3L} - \frac{1/5}{1-L/2}\right]\varepsilon_t \\ &= -\frac{2}{5}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\varepsilon_{t+k}}_{\text{dépend du futur de } \varepsilon_t} - \frac{1}{5}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon_{t-k}}_{\text{dépend du passé de } \varepsilon_t} \quad \text{soit} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha_i\varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

Le processus ε_t est alors corrélé avec $X^*_{t-1}, X^*_{t-2}, \ldots$ (puisque X^*_t s'exprime en fonction du passé et du futur de ε_t) : <u>le processus ε_t n'est pas l'innovation</u>.

En revanche, en considérant un bruit blanc de la forme $\eta_t \sim BB\left(1;\sigma^2/9\right)$ (le coefficient $1/9$ venant de $(1/3)^2$, $1/3$ étant la racine appartenant au disque unité), on peut mettre $\tilde{X}_t$ sous forme AR,

$$\left(1-\frac{1}{2}L\right)\left(1-\frac{1}{3}L\right)\tilde{X}_t=\eta_t \text{ soit } \tilde{X}_t-\frac{5}{6}\tilde{X}_{t-1}+\frac{1}{6}\tilde{X}_{t-2}=\eta_t \text{ où } \eta_t \sim BB\left(1;\sigma^2/9\right)$$

Cette écriture correspondra à l'écriture canonique du processus $\tilde{X}_t$.

Exercise 3 On considère le processus aléatoire AR (2) suivant

$$X_t=40+0.4X_{t-1}-0.2X_{t-2}+\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \sim BB\left(0;\sigma^2=12.8\right)$$

(i) vérifier que le processus est stationnaire
(ii) calculer l'espérance de X_t
(iii) donner les équations de Yule-Walker du processus, calculer la variance, ainsi que les 5 premières valeurs des autocorrélations
(iv) calculer les 3 premières autocorrélations partielles

(i) Le processus peut s'écrire $\left(1-0.4L+0.2L^2\right)X_t=40+\varepsilon_t$. Le processus est stationnaire si les racines du polynôme sont à l'extérieur du disque unité :

$$1-0.4Z+0.2Z^2=0 \text{ ssi } Z=\frac{0.4\pm i\sqrt{0.64}}{0.4} \text{ c'est à dire } Z=\left\{\begin{array}{l} Z=1+2i \\ Z=1-2i \end{array}\right.$$

dont le module est $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}>1$: le processus est stationnaire.[24]

(ii) Le processus est un AR (2) avec constante : il n'est pas centré.

$$E\left(X_t\right)=0.4E\left(X_{t-1}\right)-0.2E\left(X_{t-2}\right)+40+0 \text{ soit } \mu=E\left(X_t\right)=40/0.8=50$$

(iii) Soit $Y_t=X_t-50$. Alors Y_t satisfait $Y_t=0.4Y_{t-1}-0.2Y_{t-2}+\varepsilon_t$ avec $E\left(Y_t\right)=0$. La fonction d'autocovariance de Y_t (qui est la même que celle de X_t) est obtenue de la façon suivante

$$E\left(Y_tY_{t-h}\right)=0.4E\left(Y_{t-1}Y_{t-h}\right)-0.2E\left(Y_{t-2}Y_{t-h}\right)+E\left(\varepsilon_tY_{t-h}\right)$$

ce qui donne l'équation de Yule Walker $\gamma_h=0.4\gamma_{h-1}-0.2\gamma_{h-2}$. Les initialisations sont obtenue par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1=0.4\gamma_0-0.2\gamma_1 \\ \gamma_2=0.4\gamma_1-0.2\gamma_0 \end{array}\right.$$

La première équation permet d'écrire $\gamma_1=0.4\gamma_0/1.2=\gamma_0/3$, et la seconde $\gamma_2=-0.2\gamma_0/3$. Or γ_0 vérifie

$$\gamma_0=E\left(Y_tY_t\right)=0.4E\left(Y_{t-1}Y_t\right)-0.2E\left(Y_{t-2}Y_t\right)+E\left(\varepsilon_tY_t\right)=0.4\gamma_1-0.2\gamma_2+E\left(\varepsilon_tY_t\right)$$

Et comme $\varepsilon_tY_t=0.4\varepsilon_tY_{t-1}-0.2\varepsilon_tY_{t-2}+\varepsilon_t^2$, on en déduit que $E\left(\varepsilon_tY_t\right)=\sigma^2$. Et donc $\gamma_0=0.4\gamma_1-0.2\gamma_2+\sigma^2$. D'où finallement, par substitution

$$\gamma_0=0.4\times\gamma_0/3-0.2\times\left(-0.2\gamma_0/3\right)+\sigma^2 \text{ et donc } \gamma_0=3\sigma^2/2.56=15$$

D'où finallement

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1=\gamma_0/3=5 \\ \gamma_2=-0.2\gamma_0/3=-1 \\ \gamma_3=0.4\times-1-0.2\times5=-1.4 \\ \gamma_4=0.4\times-1.4-0.2\times-1=0.36 \\ \gamma_5=0.4\times-0.36-0.2\times-1.4=0.136 \end{array}\right. \text{ et donc } \left\{\begin{array}{l} \rho_1=0.333 \\ \rho_2=-0.068 \\ \rho_3=-0.093 \\ \rho_4=-0.024 \\ \rho_5=0.009 \end{array}\right.$$

[24] Ceci pouvait également se noter directement en notant que les conditions de stationnarité dans le cas d'un AR (2) s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} \phi_1+\phi_2<1 \\ -\phi_1+\phi_2<1 \\ \phi_2>-1 \end{array}\right.$$

(iv) Les autocorrélations partielles se calculent à l'aide des déterminants des matrices d'autocorrélations :

$$\alpha(1) = \frac{|\rho_1|}{|1|} = 0.33$$

$$\alpha(1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -0.199$$

$$\alpha(1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = -0.00069$$

On peut noter que a (3) est très faible, ce qui confirme la nature AR (2) du modèle (en théorie, les autocorrélations partielles d'un processus AR (p) sont nulles au delà du rang p).

Exercise 4 Considérons deux processus (X_t) et (Y_t) liés par les relations suivantes

$$\begin{cases} Y_t = \phi Y_{t-1} + \alpha X_t + \varepsilon_t \\ X_t = \theta X_{t-1} + \eta_t \end{cases}$$

où ε_t et η_t sont des bruits blancs non-corrélés, de variance respective σ_ε^2 et σ_η^2. Pour les applications pratiques, on prendra

$$\alpha = 1.5,\ \phi = 0.4,\ \theta = 0.6,\ \sigma_\varepsilon^2 = 0.016 \text{ et } \sigma_\eta^2 = 0.036$$

(i) on pose $\omega_t = (1-\phi L)(1-\theta L) Y_t$. Calculer les moments de ω_t et en déduire qu'il s'agit d'un processus moyenne mobile (à préciser). Donner la représentation canonique de ω_t

(ii) en déduire que Y_t est un processus ARMA dont on précisera les ordres. Donner la représentation canonique de Y_t

(i) Le processus ω_t est défini par $\omega_t = (1-\phi L)(1-\theta L) Y_t$. X_t et Y_t étant centrés, on peut dèjà noter que $E(\omega_t) = 0$.

$$\begin{aligned} (1-\theta L) Y_t &= Y_t - \theta Y_{t-2} = \phi Y_{t-1} + \alpha X_t + \varepsilon_t - \theta[\phi Y_{t-2} + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}] \\ &= \phi[Y_{t-1} - \theta Y_{t-2}] + \alpha[X_t - \theta X_{t-1}] + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \\ &= \phi[Y_{t-1} - \theta Y_{t-2}] + \alpha\eta_t + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} = \phi[1-\theta L] Y_{t-1} + \alpha\eta_t + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

Ainsi $(1-\theta L) Y_t = \phi[1-\theta L] L Y_t + \alpha\eta_t + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$, soit $(1-\theta L)(1-\phi L) Y_t = \omega_t = \alpha\eta_t + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$. Le processus ω_t vérifie alors,

$$\begin{cases} \gamma(0) = E\left(\omega_t^2\right) = \alpha^2\sigma_\eta^2 + \left(1+\theta^2\right)\sigma_\varepsilon^2 = 0.10276 \\ \gamma(1) = E(\omega_t\omega_{t-1}) = -\theta\sigma_\varepsilon^2 = -0.0096 \\ \gamma(h) = 0 \text{ pour } h \geq 2 \end{cases}$$

Ce comportement de l'autocorrélogramme est caractéristique des processus MA (1) (nullité des autocorrélations au delà du rang 1) : <u>ω_t est un processus moyenne-mobile</u>.

Cherchons à écrire ω_t sous forme MA (1) : $\omega_t = u_t - \beta u_{t-1}$ où u_t est un bruit blanc de variance σ^2. Les paramètres β et σ^2 doivent alors vérifier

$$\begin{cases} \gamma(0) = \left(1+\beta^2\right)\sigma^2 \\ \gamma(1) = -\beta\sigma^2 \end{cases}$$

c'est à dire que β doit vérifier

$$-\frac{\beta}{1+\beta^2}=\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}=\frac{-\theta\sigma_\varepsilon^2}{\alpha^2\sigma_\eta^2+\left(1+\theta^2\right)\sigma_\varepsilon^2}=0.0934$$

β doit alors vérifier $0.0934\beta^2-\beta+0.0934=0$ soit $\beta=0.095$ ou $\beta=10.61$. On choisit la racine de module inférieur à 1 pour la représentation canonique (β étant l'inverse de la racine du polynôme caractéristique). ω_t satisfait $\omega_t=u_t-\beta u_{t-1}$ où u_t est un bruit blanc de variance $\sigma^2=0.101$ et où $\beta=0.095$.

(ii) D'après ce que nous venons de montrer $\omega_t=(1-\theta L)(1-\phi L)Y_t=(1-\beta L)u_t$ où u_t est un bruit blanc, c'est à dire que Y_t suite un processus $ARMA(2,1)$.

La forme développée de la dynamique de Y_t est

$$Y_t=(\phi+\theta)Y_{t-1}-\phi\theta Y_{t-2}+u_t-\beta u_{t-1} \tag{58}$$

Il est également possible de calculer les autocorrélations $\gamma(h)$ du processus : pour cela, on va multiplier cette expression par X_{t-h}, puis prendre l'espérance (le processus Y_t étant centré[25]) :

$$\begin{aligned}
Y_t^2 &= (\phi+\theta)Y_{t-1}Y_t-\phi\theta Y_{t-2}Y_t+u_tY_t-\beta u_{t-1}Y_t\\
&= (\phi+\theta)Y_{t-1}Y_t-\phi\theta Y_{t-2}Y_t+u_t\left[(\phi+\theta)Y_{t-1}-\phi\theta Y_{t-2}+u_t-\beta u_{t-1}\right]\\
&\quad -\beta u_{t-1}\left[(\phi+\theta)Y_{t-1}-\phi\theta Y_{t-2}+u_t-\beta u_{t-1}\right]
\end{aligned}$$

(on remplace Y_t par (58) dans u_tY_t et $u_{t-1}Y_t$). En prenant l'espérance, on obtient

$$\gamma(0)=(\phi+\theta)\gamma(1)-\phi\theta\gamma(2)+\sigma^2\left[1-\beta(\phi+\theta)+\beta^2\right]$$

De plus, en multipliant (58) par Y_{t-1} on peut écrire

$$\begin{aligned}
Y_tY_{t-1} &= (\phi+\theta)Y_{t-1}Y_{t-1}-\phi\theta Y_{t-2}Y_{t-1}+u_tY_{t-1}-\beta u_{t-1}Y_{t-1}\\
&= (\phi+\theta)Y_{t-1}Y_{t-1}-\phi\theta Y_{t-2}Y_{t-1}+u_tY_{t-1}-\beta u_{t-1}\left[(\phi+\theta)Y_{t-2}-\phi\theta Y_{t-3}+u_{t-1}-\beta u_{t-2}\right]
\end{aligned}$$

(u_t est indépendant du passé de Y_t, en particulier indépendant de Y_{t-1}) d'où, en prenant l'espérance

$$\gamma(1)=(\phi+\theta)\gamma(0)-\phi\theta\gamma(1)-\beta\sigma^2$$

En multipliant (58) par Y_{t-2} on a

$$\gamma(2)=(\phi+\theta)\gamma(1)-\phi\theta\gamma(0)$$

et de façon plus générale

$$\gamma(h)=(\phi+\theta)\gamma(h-1)-\phi\theta\gamma(h-2)$$

Exercise 5 Décomposition de Beveridge-Nelson d'un processus intégré

On s'intéresse dans cet exercice à la décomposition d'un processus $ARIMA$, intégré d'ordre 1, en la somme d'une marche aléatoire, et d'un processus stationnaire.

(1) Soit Y_t admettant la décomposition $(1-L)Y_t=\Theta(L)\varepsilon_t$ avec

$$\Theta(L)=\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_kL^k \text{ où } \theta_0=1 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty}|\theta_k|<+\infty$$

et ε_t bruit blanc de variance σ^2. Posons alors $\theta=\Theta(1)$.

$(1-i)$ Soit Θ^* tel que $\Theta(L)=\theta+(1-L)\Theta^*(L)$. Donner l'expression des coefficients θ_k^* du polynôme Θ^*.

$(1-ii)$ Montrer que si $\sum k|\theta_k|<+\infty$ alors $\sum|\theta_k^*|<+\infty$.

$(1-iii)$ Montrer que l'on peut décomposer Y_t sous la forme $Y_t=T_t+C_t$ où $(1-L)T_t=\theta\varepsilon_t$ et où C_t est un processus stationnaire.

[25] Ce qui implique que $cov(X_t,X_{t-h})=E(X_tX_{t-h})-E(X_t)E(X_{t-h})=E(X_tX_{t-h})$ pour tout h. En particulier $V(X_t)=E\left(X_t^2\right)$.

$(1-\text{iv})$ Quelle est la limite de $V(Y_t)/t$ quand $t \to \infty$?

$(1-\text{v})$ Considérons une décomposition quelconque du processus Y_t; $Y_t = \overline{T}_t + \overline{C}_t$ en une somme d'une marche aléatoire $\overline{T}_t$ et d'un processus stationnaire $\overline{C}_t$. Montrer qu'alors, on a nécessairement

$$V\left((1-L)\overline{T}_t\right) = \theta^2\sigma^2$$

(2) On supposera désormais que le processus Y_t vérifie une équation de la forme

$$(1-L)(1-\phi L)Y_t = \varepsilon_t \text{ où } 0 < \phi < 1 \quad (59)$$

$(2-\text{i})$ Ecrire la relation précédente sous la forme $(1-L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ (Forme de Wold)

$(2-\text{ii})$ Décomposer le processus Y_t en somme d'une marche aléatoire et d'un processus stationnaire. Les processus C_t et T_t sont-ils indépendants ?

(3) On veut montrer ici qu'il est impossible d'écrire le processus Y_t sous la forme $Y_t = T_t + C_t$ où $(1-L)T_t = u_t$ et $C_t = \Theta(L)v_t$ où les processus u_t et v_t sont des bruits blancs indépendants, et où $\Theta(L)$ est un polynôme en L dont les racines sont de module strictement supérieur à 1.

$(3-\text{i})$ En utilisant (59); calculer la densité spectrale de $X_t = (1-L)Y_t$

$(3-\text{ii})$ En supposant que $Y_t = T_t + C_t$ où $(1-L)T_t = u_t$ et $C_t = \Theta(L)v_t$; où les processus u_t et v_t sont des bruits blancs indépendants, calculer la densité spectrale de $X_t = (1-L)Y_t$

$(3-\text{iii})$ Etudier les comportements pour $\omega = 0$ des deux densités spectrales trouvées en $(3-\text{i})$ et en $(3-\text{ii})$.

$(3-\text{iv})$ Conclure.

$(1-\text{i})$ Par hypothèse, $(1-L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$. Soit alors $X_t = (1-L)Y_t$. Le polynôme Θ vérifie

$$\Theta(L) = \sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k\left(L^k - 1\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k\left(L^k - 1\right) + \Theta(1)$$

Or la différence $L^k - 1$ peut se réécrire

$$L^k - 1 = (L-1)\left[1 + L + \dots + L^{k-1}\right]$$

et donc

$$\begin{aligned}\Theta(L) &= \Theta(1) + (1-L)\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k\left[-\left(1 + L + \dots + L^{k-1}\right)\right] \\ &= \Theta(1) - (1-L)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\theta_j\right)L^k\end{aligned}$$

D'où finalement l'écriture $\Theta(L) = \theta + (1-L)\Theta^*(L)$ où

$$\Theta^*(L) = \sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k^* L^k \quad \text{avec } \theta_k^* = -\sum_{j=k+1}^{+\infty}\theta_j$$

$(1-\text{ii})$ En utilisant cette expression,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k^* = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\theta_j = [\theta_1+\theta_2+\theta_3+\dots] + [\theta_2+\theta_3+\dots] + [\theta_3+\dots] + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} j\theta_j$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|\theta_k^*| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}k|\theta_k|$$

Donc finalement si $\sum k|\theta_k| < +\infty$ alors $\sum|\theta_k^*| < +\infty$.

$(1-iii)$ D'après la question précédente, on peut écrire $X_t = \Theta(L)\varepsilon_t = \theta\varepsilon_t + (1-L)\Theta^*(L)\varepsilon_t$
Si $Y_t = T_t + C_t$, alors $X_t = (1-L)Y_t = (1-L)T_t + (1-L)C_t$. Aussi, on devrait avoir

$$\begin{cases}(1-L)T_t = \theta\varepsilon_t \\ C_t = \Theta^*(L)\varepsilon_t\end{cases}$$

- Montrons que le processus C_t est stationnaire :

$$C_t = \Theta^*(L)\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{+\infty}\theta_k^*\varepsilon_{t-k}$$

qui sera stationnaire si et seulement si $\sum|\theta_k^*| < +\infty$, qui sera vérifié dès lors que $\sum k|\theta_k| < +\infty$.
- Le processus T_t défini par $(1-L)T_t = \theta\varepsilon_t$ est une marche stationnaire :

$$T_t = T_{t-1} + \theta\varepsilon_t = \theta.\sum_{k=0}^{t}\varepsilon_{t-k} + T_{-1}$$

$(1-iv)$ La variance de Y_t peut se décomposer en

$$V(Y_t) = V(C_t) + 2\mathrm{cov}(C_t;T_t) + V(T_t)$$

avec $V(C_t)$ =constante et $V(T_t)$ est équivalent à $\theta^2\sigma_\varepsilon^2 t$, car $T_t = T_0 + \theta[\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_t]$. De plus,

$$|\mathrm{cov}(T_t;C_t)| \le \sqrt{V(T_t)}\sqrt{V(C_t)} = O\left(\sqrt{t}\right)$$

et finalement, on a

$$\frac{V(Y_t)}{t} \to \theta^2\sigma_\varepsilon^2 \text{ quand } t \to \infty$$

En effectuant exactement le même genre de calcul sur $Y_t = \overline{T}_t + \overline{C}_t$, p, a

$$V(Y_t) = V\left(\overline{C}_t\right) + 2\mathrm{cov}\left(\overline{C}_t;\overline{T}_t\right) + V\left(\overline{T}_t\right)$$

et on obtient alors

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V(Y_t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{V\left(\overline{T}_t\right)}{t} = \theta^2\sigma_\varepsilon^2$$

D'où finallement de résultat souhaité, $V\left(\Delta\overline{T}_t\right) = \theta^2\sigma_\varepsilon^2$.
PARTIE 2
$(3-$ i et ii$)$ Le processus Y_t se décompose en $Y_t = T_t + C_t$, avec $(1-L)Y_t = u_t$ et $C_t = B(L)v_t$. Aussi, en différenciant Y_t, on a

$$(1-L)Y_t = (1-L)T_t + (1-L)C_t = u_t + (1-L)B(L)v_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

où $\Theta(L)\varepsilon_t = u_t + (1-L)B(L)v_t$. Le processus $X_t = (1-L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ admet pour densité spectrale

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_u^2}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\sigma_v^2$$

en utilisant l'écriture $\Theta(L)\varepsilon_t = u_t + (1-L)B(L)v_t$
$(3-iii)$ En comparant les deux écritures pour $\omega = 0$ on constate alors que

$$\frac{\sigma_u^2}{2\pi} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}|\Theta(1)|^2 \text{ soit } \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} = |\Theta(1)|^2$$

Et comme $\left|\left(1-e^{i\omega}\right)B\left(e^{i\omega}\right)\right|^2\sigma_v^2 \ge 0$, alors $f(\omega) \ge f(0) = \sigma_u^2/2\pi$: f admet un minimum global en $\omega = 0$.

$(3-\text{iv})$ Soit $(1-L)(1-\phi L)Y_t=\varepsilon_t$ pour $0<\phi<1$. Alors $(1-\phi L)X_t=\varepsilon_t$ en posant $X_t=(1-L)Y_t$, on peut écrire

$$f(\omega)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\phi e^{i\omega}|^2}\text{ et } f(0)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\phi)^2}$$

Montrons qu'alors 0 n'est pas un minimum golbal : si $\omega=\pi/2$ alors $\left|1-\phi e^{i\omega}\right|^2=1+\phi^2>(1-\phi)^2$ puisque $0<\phi<1$, et donc

$$\frac{1}{(1-\phi)^2}>\frac{1}{1+\phi^2}\text{ et donc } f(0)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(Y_t) ne peut donc pas être décomposée en tendance - cycle, d'après le modèle de la question (2). Par contre il peut l'être d'apères le modèle (1) :

13.2 Examen de 2001/2002

Exercise 6 (i) Soit (ε_t) un bruit blanc et X_t défini par

$$X_t=\sum_{k=0}^{t}\lambda^k(\varepsilon_{t-k}-\varepsilon_{t-k-1})\text{ où }\lambda\in\mathbb{R}$$

Le processus X_t est il stationnaire ? (éventuellement avec certaines restrictions sur les paramètres)

(ii) Soit (ε_t) un bruit blanc, et X_t, Y_t et Z_t défini par $X_t=\varepsilon_t$, $Y_t=(-1)^t\varepsilon_t$ et $Z_t=X_t+Y_t$ pour tout $t\in\mathbb{Z}$.Les processus X_t, Y_t et Z_t sont-ils stationnaires ?

(iii) La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

(i) Le processus X_t est un processus centré, $E(X_t)=0$. Le processus X_t peut s'écrire

$$X_t=\lambda^0[\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}]+\lambda^1[\varepsilon_{t-1}-\varepsilon_{t-2}]+\lambda^2[\varepsilon_{t-2}-\varepsilon_{t-3}]+\dots+\lambda^{t-1}[\varepsilon_1-\varepsilon_0]+\lambda^t[\varepsilon_0-0]$$

avec la convention $\varepsilon_{-1}=0$. Cette relation peut se réécrire, en mettant en facteur les ε_{t-i},

$$\begin{aligned}X_t&=\lambda^0\varepsilon_t+\left[\lambda^1-\lambda^0\right]\varepsilon_{t-1}+\left[\lambda^2-\lambda^1\right]\varepsilon_{t-2}+\left[\lambda^3-\lambda^2\right]\varepsilon_{t-3}+\dots+\left[\lambda^{t-1}-\lambda^{t-2}\right]\varepsilon_1+\left[\lambda^t-\lambda^{t-1}\right]\varepsilon_0\\&=\lambda^0\varepsilon_t+(\lambda-1)\left[\varepsilon_{t-1}+\lambda\varepsilon_{t-2}+\lambda^2\varepsilon_{t-3}+\lambda^3\varepsilon_{t-4}+\dots+\lambda^{i-1}\varepsilon_{t-i}+\dots+\lambda^{t-2}\varepsilon_1+\lambda^{t-1}\varepsilon_0\right]\end{aligned}$$

Aussi, pour $\lambda=1$, alors $X_t=\varepsilon_t$ et le processus est stationnaire.

Pour $\lambda\neq1$, on peut écrire

$$X_t=\varepsilon_t+(\lambda-1)\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^k\varepsilon_{t-k-1}$$

Aussi,

$$V(X_t)=\sigma^2+(\lambda-1)^2\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^{2k}\sigma^2=\sigma^2+(\lambda-1)^2\frac{1-\lambda^{2t}}{1-\lambda^2}\sigma^2$$

qui n'est pas indépendante de t : X_t n'est pas un processus stationnaire.

(ii) Le processus X_t est un bruit blanc donc X_t est stationnaire.

Le processus Y_t vérifie $E(Y_t)=0$ (=constante), et $\gamma(0)=E\left(Y_t^2\right)=E\left(\varepsilon_t^2\right)=\sigma^2$ (=constante). Enfin, pour tout $h\neq0$, $\gamma(h)$ vérifie

$$\gamma(h)=E(Y_tY_{t-h})=E\left((-1)^{2t-h}\varepsilon_t\varepsilon_{t-h}\right)=\pm E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-h})=0$$

Le processus Y_t est stationnaire (et c'est même un bruit blanc).

Le processus Z_t est défini de la façon suivante

$$Z_t=\begin{cases}2\varepsilon_t&\text{pour } t \text{ pair}\\0&\text{pour } t \text{ impair}\end{cases}$$

Si $E(Z_t)=0$ (=constante), on peut noter que la variance, elle, ne sera pas constante : $E\left(Z_t^2\right)=4\sigma^2$ pour t pair, et $E\left(Z_t^2\right)=0$ pour t impair (car Z_t^2 est alors une constante). La variance de Z_t dépend de t : le processus Z_t n'est pas stationnaire.

(iii) Dans la question précédante, nous avions vu que X_t et Y_t étaient des processus stationnaire, et pourtant, leur somme Z_t n'est pa un processus stationnaire : la somme de deux processus stationnaires n'est pas forcément stationnaire.

Exercise 7 Soit ε_t un bruit blanc, centré de variance $5/18$, et considérons le processus Y_t défini par

$$Y_t = 2Y_{t-1}+\varepsilon_t$$

On suppose que Y_t n'est observable qu'avec une erreur d'observation : on ne peut observer que le processus $X_t=Y_t+\eta_t$ où η_t est un bruit blanc non corrélé avec ε_t, de variance $1/6$ (avec de plus $\mathrm{cov}\left(\varepsilon_t,\eta_{t-h}\right)=0$ pour tout $h\in\mathbb{Z}$)

(i) montrer que le processus $\omega_t=\varepsilon_t+\eta_t-2\eta_{t-1}$ est un processus MA, et en déduire que X_t est un processus $ARMA(1,1)$ que l'on précisera,

(ii) donner la représentation canonique de X_t,

(iii) en déduire une représentation de X_t du type

$$X_t=-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i X_{t-i}+u_t \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left|\alpha_i\right|<\infty \tag{60}$$

et où u_t est un bruit blanc que l'on explicitera (donner sa volatilité), non corrélé avec X_t. A quoi sert une telle représentation ?

(i) Soit $\omega_t=\varepsilon_t+\eta_t-2\eta_{t-1}$. Ce processus est centré : $E(\omega_t)=0+0-0=0$. Sa variance est donnée par

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= E\left(\omega_t^2\right)=E\left(\left[\varepsilon_t+\eta_t-2\eta_{t-1}\right]\left[\varepsilon_t+\eta_t-2\eta_{t-1}\right]\right)\\
&= E\left(\varepsilon_t^2+\eta_t^2+4\eta_{t-1}^2+2\varepsilon_t\eta_t-4\eta_t\eta_{t-1}-4\varepsilon_t\eta_{t-1}\right)\\
&= \sigma_\varepsilon^2+5\sigma_\eta^2+0+0+0=\sigma_\varepsilon^2+5\sigma_\eta^2
\end{aligned}$$

car $E(\varepsilon_t\eta_t)=E\left(\varepsilon_t\eta_{t-1}\right)=0$ (les processus sont indépendants) et $E\left(\eta_t\eta_{t-1}\right)=0$ (car η_t est un bruit blanc). Donc $E\left(\omega_t^2\right)=\sigma_\varepsilon^2+5\sigma_\eta^2$ qui est une constante : $\gamma(0)=5/18+5/6=20/18=10/9$. De plus

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= E(\omega_t\omega_{t-1})=E\left(\left[\varepsilon_t+\eta_t-2\eta_{t-1}\right]\left[\varepsilon_{t-1}+\eta_{t-1}-2\eta_{t-2}\right]\right)\\
&= E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t\eta_{t-1}-2\varepsilon_t\eta_{t-2}+\eta_t\varepsilon_{t-1}+\eta_t\eta_{t-1}-2\eta_t\eta_{t-2}-2\eta_{t-1}\varepsilon_{t-1}-2\eta_{t-1}\eta_{t-1}+4\eta_{t-1}\eta_{t-2}\right)\\
&= 0+0-0+0+0-0-0-2\sigma_\eta^2+0=-2\sigma_\eta^2
\end{aligned}$$

d'où $\gamma(1)=-2/6=-1/3$. Enfin, on peut montrer que $\gamma(2)=0$ et, plus généralement, $\gamma(h)=0$ pour $h\geq 2$. Ce processus ω_t vérifie

$$\rho(1)=\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}=-\frac{1}{3}\frac{9}{10}=-\frac{3}{10} \text{ et } \rho(h)=0 \text{ pour } h\geq 2$$

Le processus ω_t est un processus $MA(1)$. Aussi, il existe un bruit blanc ν_t et un paramètre θ tel que

$$\omega_t=\nu_t-\theta\nu_{t-1}$$

Le processus X_t vérifie

$$\begin{aligned}
X_t &= Y_t+\eta_t=\left[2Y_{t-1}+\varepsilon_t\right]+\eta_t=2\left[X_{t-1}-\eta_{t-1}\right]+\varepsilon_t+\eta_t\\
&= 2X_{t-1}+\left[\varepsilon_t+\eta_t-2\eta_{t-1}\right]=2X_{t-1}+\omega_t
\end{aligned}$$

donc, d'après la question précédente, il existe bruit blanc ν_t et un paramètre θ tel que $X_t=2X_{t-1}+\nu_t-\theta\nu_{t-1}$, c'est à dire que X_t est un processus $ARMA(1,1)$.

(ii) Pour expliciter l'écriture de ce processus ARMA, il convient de donner deux paramètres : θ (composante moyenne-mobile) et σ^2, la variance du nouveau bruit blanc. Pour identifier ces deux paramètres, on utilise les deux équations que nous avions obtenues auparavant. Pour le processus $\omega_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$, on a

$$\begin{cases} \gamma(0) = E\left(\omega_t^2\right) = \left[1+\theta^2\right]\sigma^2 = 10/9 \\ \gamma(1) = E(\omega_t \omega_{t-1}) = -\theta\sigma^2 = -1/3 \end{cases}$$

En divisant la première équation par la seconde, on obtient que

$$\frac{1+\theta^2}{\theta} = \frac{10}{9}\frac{3}{1} = \frac{10}{3}$$

ce qui donne l'équation de degré 2 suivante, $3\theta^2 - 10\theta + 3 = 0$, dont les racines sont

$$\theta = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\times 3\times 3}}{2\times 3} = \frac{10\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{10\pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1/3 \end{cases}$$

Pour mettre le processus sous forme canonique on choisit θ de telle sorte que la racine du polynôme moyenne-mobile ($\Theta(L) = 1 - \theta L$) est à l'extérieur du disque unité, c'est à dire $\theta < 1$. On choisit $\theta = 1/3$: Cette valeur permet d'en déduire la variance du bruit blanc associé : $-\theta\sigma^2 = -1/3$ donc $\sigma^2 = 1$.

La forme canonique du processus est alors

$$X_t = 2X_{t-1} + \varepsilon_t - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1} \text{ où } \varepsilon_t \sim BB(0,1)$$

(iii) Nous avons écrit le processus sous la forme $\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$. Afin d'obtenir une représentation de la forme (60), il convient d'inverser le polynôme retard $\Theta(L)$: $\Theta^{-1}(L)\Phi(L)X_t = \varepsilon_t$. Puisque nous avions choisi la racine de Θ à l'extérieur du disque unité, le polynôme $\Theta(L)$ est inverble en fonction des opérateurs passés, et

$$\Theta^{-1}(L)\Phi(L) = \frac{1}{1-\theta L}(1+\phi L) = (1+\phi L)\sum_{i=0}^{\infty}\theta^i L^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\underbrace{\left[\theta^{i-1}\phi + \theta^i\right]}_{\alpha_i} L^i$$

Avec cette écriture, on obtient finalement

$$X_t = -\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t \text{ avec } \begin{cases} \alpha_i = \theta^{i-1}\phi + \theta^i = 2/3^{i-1} + 1/3^i \\ \varepsilon_t \sim BB(0,1) \end{cases}$$

Cette écriture est utile pour faire de la prévision : la meilleur prévision possible, faite à la date T pour un horizon h est

$${}_T\widehat{X}^*_{T+h} = -\sum_{k=1}^{h-1}\alpha_k \cdot {}_T\widehat{X}^*_{T+h-k} - \sum_{k=h}^{T+h}\alpha_k X_{T+h-k}$$

Remarque 81 L'exercice suivant utilisait les sorties informatiques disponibles sur http://www.respublica.fr/charthur/TS/slides02

Exercise 8 Considérons la série brute X_t, série trimestrielle observée de 1980 à 2000. Nous noterons dans toute la suite

- X_t la série brute
- Y_t la série différenciée une fois $Y_t = \Delta X_t = (X_t - X_{t-1})$
- Z_t la série différenciée deux fois $Z_t = \Delta^2 X_t = \Delta Y_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$
- $Y2_t$ la série $Y2_t = Y_t - Y_{t-2}$ et $Z2_t$ la série $Z2_t = Z_t - Z_{t-2}$
- $Y4_t$ la série $Y4_t = Y_t - Y$ et $Z4_t$ la série $Z4_t = Z_t - Z_{t-4}$

A partir de l'ensemble des séries informatiques suivantes (courbes, histogrammes, tests, estimation d'équations...etc),le but est ici de trouver un (ou plusieurs) modèle permettant de modéliser au mieux la série X_t:

(i) quelle(s) série(s) peut-on essayer de modéliser à l'aide d'un processus ARMA ?

(ii) les modèles suivants sont-ils valides ?

$$(1-L)\left(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2-\alpha_3 L^3-\alpha_4 L^4-\alpha_5 L^5-\alpha_6 L^6-\alpha_7 L^7\right)X_t=\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc} \quad (61)$$

$$(1-L)\left(1-\alpha L^2\right)X_t=\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc} \quad (62)$$

$$(1-L)\left(1-L^2\right)\left(1-\alpha L^2\right)X_t=\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc} \quad (63)$$

$$(1-L)\left(1-L^4\right)X_t=\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1} \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc} \quad (64)$$

(iii) les méthodes SCAN et ESCF suggèrent-elles de 'bons' modèles ? si oui, lesquels ?

(iv) est-il possible de modéliser la série X_t sans composante MA ?

(v) la série X_t a en fait été simulée sur 80 valeurs, à l'aide d'un bruit blanc gaussien $N(0,1)$, de telle sorte que

$$(1-L)\left(1-L^4\right)(1-0.8L)X_t=\left(1-0.6L^2\right)\varepsilon_t$$

Les simulations correspondent-elles effectivement à un tel modèle ? Existe-t-il de 'meilleurs' modèles, ou d'autres modèles permettant de modéliser la série X_t ?

(i) Si l'on regarde la série brute X_t, nous sommes en présence d'une série non-stationnaire : nous n'observons pas la décroissance exponentielle de l'autocorrélogramme, que l'on pourrait observer sur un processus AR, et les 20 premières autocorrélations sont significatives : X_t est non-stationnaire, avec présence d'une racine unité.

La série différenciée (une fois) Y_t semble stationnaire, avec toutefois présence d'une racine unité saisonnière : toutes les autocorrélations obtenues avec un retard pair sont significativement non nulle. Y_t n'est pas stationnaire, avec présence d'une racine unité saisonnière.

La série $\left(1-L^2\right)Y_t$ présente le même genre de comportement que Y_t, c'est donc que 2 n'était pas la fréquence de la racine unité. $Y2_t$ n'est pas stationnaire. En revanche la série $Y4t$ est stationnaire. Les autres séries proposées étant obtenues à partir d'une série (Z_t) différenciée davantage, nous n'allons pas les prendre en compte. De toutes façons, un raisonnement analogue aurait pousser à ne retenir que $Z4_t$, qui est la seule série stationnaire. Or $Y4_t=(1-L)\left(1-L^4\right)X_t$ et $Z4_t=(1-L)^2\left(1-L^4\right)X_t=(1-L)Y4_t$: puisque $Y4_t$ est déjà stationnaire, il est inutile de différencier davantage. Nous allons modéliser $Y4_t=(1-L)\left(1-L^4\right)X_t$.

Ceci est validé par les tests de Dickey-Fuller.

(ii) L'estimation du modèle (61) - modèle $AR(7)$ pour Y_t - défini par

$$(1-L)\left(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2-\alpha_3 L^3-\alpha_4 L^4-\alpha_5 L^5-\alpha_6 L^6-\alpha_7 L^7\right)X_t=\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc}$$

est donnée dans le slide (50). Si tous les paramètres semblent significatif, on peut noter que l'estimation aboutit à une racine unité (1.01 est racine du polynôme AR, et Eviews précise 'Estimated AR process is nonstationary') : ce modèle ne peut pas être retenu.

L'estimation du modèle (62) - modèle $AR(2)$ pour Y_t - défini par

$$(1-L)\left(1-\alpha L^2\right)X_t=\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc}$$

est donnée dans le slide (67). Le paramètre α est significativement non nul. Toutefefois, si l'on considère l'autocorrélogramme des résidus obtenus après régression (slide (69)), on peut noter que l'on n'a pas un bruit blanc : toutes les autocorrélations paires sont non nulles. Ce modèle ne peut être retenu.

L'estimation du modèle (63) - modèle $AR(2)$ pour $Y2_t$ - défini par

$$(1-L)\left(1-L^2\right)\left(1-\alpha L^2\right)X_t=\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc}$$

est donnée dans le slide (79). Le paramètre α est significativement non nul. Toutefefois, si l'on considère l'autocorrélogramme des résidus obtenus après régression (slide (81)), on peut noter que l'on n'a pas un bruit blanc : toutes les autocorrélations paires sont non nulles. Ce modèle ne peut pas être retenu.

L'estimation du modèle (64) - modèle $MA(1)$ pour $Y4_t$ - défini par

$$(1-L)\left(1-L^4\right)X_t=\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1} \text{ où } \varepsilon_t \text{ est un bruit blanc}$$

est donnée dans le slide (96). Le paramètre μ est significativement non nul. Si l'on considère l'autocorrélogramme des résidus obtenus après régression (slide (98)), on peut noter qu'aucune autocorrélation n'est significativement non nulle. Si les tests de Box-Pierce (Q) ne sont pas validés à 5%, on peut malgré tout noter que ce modèle reste relativement bon Ce modèle pourrait être retenu.

(iii) La méthode SCAN appliquée à $Y4_t$ (c'est la variable que nous avions retenu dans la partie (i)) suggère des modèles $ARMA(0,1)$ ou $ARMA(4,0)$, alors que la méthode ESACF suggère des modèles $ARMA(2,3)$ ou $ARMA(0,4)$.

Le modèle $ARMA(0,1)$ appliqué à $Y4_t$ correspond au modèle (64) : ce modèle peut être retenu.

Le modèle $ARMA(4,0)$ appliqué à $Y4_t$ correspond au modèle estimé slide (106) : les 4 paramètres sont significatifs, et si l'on considère les autocorrélations, on obtient un bruit blanc : ce modèle peut être retenu.

Le modèle $ARMA(2,3)$ appliqué à $Y4_t$ correspond au modèle estimé slide (110) : on peut noter que le coefficient en $AR(1)$ est non-significatif. Le slide (111) permet de rester la même équation sans retard d'ordre 1 sur $Y4_t$: tous les coefficients sont là aussi significatifs. Et si l'on considère l'autocorrélogramme des résidus obtenus après régression (slide (11)), on peut noter qu'aucune autocorrélation n'est significativement non nulle : l 'hytpothèse de bruit blanc est validée également par le $Q-$test : ce modèle peut être retenu.

Le modèle $ARMA(0,4)$ appliqué à $Y4_t$ correspond au modèle estimé slide (115) : les composantes d'ordre 2 et 3 sont ne sont pas significativement non nulles, et si l'on teste le modèle sans les composantes d'ordre 2 et 3, la composante d'ordre 1 n'est plus significative. Enfin, le modèle $MA(4)$ ne marchant pas non plus, ce modèle ne peut pas être retenu.

(iv) Le modèle $AR(4)$ applique à $Y4_t$ (slide (106)) est valide : il est possible de modéliser la série X_t sans composante MA : le modèle

$$(1-L)\left(1-L^4\right)\left(1-0.6236L-0.5452L^2-0.5238L^3-0.2815L^4\right)X_t=\varepsilon_t$$

est valide.

(v) Le modèle $(1-L)\left(1-L^4\right)(1-0.8L)X_t=\left(1-0.6L^2\right)\varepsilon_t$ c'est à dire $Y4_t$ modélisé par une modèle $ARMA(1,2)$ est estimé dans le slide (88). Ce modèle est validé : les paramètres sont tous significatifs, et le résidu est un bruit blanc. Ce modèle est retenu.

Les différents modèles possibles sont alors

$$\begin{array}{lll}
[1] \text{ - slide } (96) & (1-L)\left(1-L^4\right)X_t=(1-\beta L)\eta_t \\
[2] \text{ - slide } (111) & (1-L)\left(1-L^4\right)\left(1-\alpha L^2\right)X_t=\left(1-\beta_1L-\beta_2L^2-\beta_3L^3\right)\varepsilon_t \\
[3] \text{ - slide } (106) & (1-L)\left(1-L^4\right)\left(1-\alpha_1L-\alpha_2L^2-\alpha_3L^3-\alpha_4L^4\right)X_t=u_t \\
[4] \text{ - slide } (88) & (1-L)\left(1-L^4\right)(1-\alpha L)X_t=\left(1-\beta L^2\right)v_t \\
[5] \text{ - slide } (131) & (1-L)\left(1-L^4\right)\left(1-\alpha_2L^2-\alpha_4L^4\right)X_t=\left(1-\beta_1L-\beta_2L^2-\beta_5L^5\right)e_t \\
[6] \text{ - slide } (123) & (1-L)\left(1-L^4\right)\left(1-\alpha L^2\right)X_t=\left(1-\beta_1L-\beta_3L^3-\beta_4L^4\right)e_t
\end{array}$$

où η_t,ε_t,u_t et v_t sont des bruit blancs.

Les indicateurs de choix de modèles donnt les résultats suivants :

	R^2	$\overline{R}^2$	$\log L$	Akaike	Schwarz	F-stat
[1]	0.2893	0.2893	−101.6273	−0.10115	−0.07025	
[2]	0.3322	0.3032	−94.7231	−0.13313	−0.00763	11.44084
[3]	0.3487	0.3196	−91.8485	−0.13792	−0.01044	11.95962
[4]	0.3273	0.3179	−97.4373	−0.15038	−0.08811	35.02662
[5]	0.9920	0.9916	−92.8359	−0.15744	−0.00056	2117.092
[6]	0.9913	0.9910	−99.1440	−0.08737	0.036229	2709.168

Comme le montre le tableau ci-dessus, le modèle $[4]$ a beau être celui qui a été simulé, ce n'est pas celui qui modéliser la mieux la série. En particulier, $[5]$ présente un meilleur critère d'Akaike, et $[6]$ un meilleur critère de Schwarz (que l'on cherche à minimiser), ainsi qu'une meilleure F-stat.