ECOLE POLYTECHNIQUE

Recueil

Programme d'approfondissement

Time series analysis

Textes de contrôles
des connaissances proposés
les années antérieures

Département de Mathématiques Appliquées

Promotion 2011
Année 3
Période 2
MAP565

Programme d'approfondissement

Time series analysis

Textes de contrôles des connaissances proposés les années antérieures

Édition 2014

Ecole Polytechnique
Programme d'approfondissement
Time series analysis – MAP565

Written exam of March 25, 2013

Exercice 1. Let $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ and $L^1(\mathbb{T})$ denote the space of locally integrable $2\pi-$periodic functions, and for all $f \in L^1(\mathbb{T})$, denote

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x)| \, \mathrm{d}x \; .$$

Let us define the convolution product of f and g in $L^1(\mathbb{T})$ by

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{T}} f(u) g(x-u) \, \mathrm{d}u \;\; ,$$

whenever this integral is well defined.

1. Let ν be a finite non-negative measure on $\mathbb{T}$ and $f \in L^1(\mathbb{T})$. Define, for all $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x - \lambda) \, \nu(\mathrm{d}\lambda) \; ,$$

   whenever this integral is well defined. Show that $h \in L^1(\mathbb{T})$.
2. Show that $f \star g \in L^1(\mathbb{T})$ for all $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ and that $\|f \star g\|_1 \le \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be two centered processes and assume that X is independent of Y. We then define $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ by $Z_t = X_t Y_t$ for all $t \in \mathbb{Z}$. We further assume that X et Y are weakly stationary with respective autocovariance functions γ_X and γ_Y.

3. Show that Z is weakly stationary and express its autocovariance function γ_Z using γ_X and γ_Y.
4. What is the best linear predictor $\mathrm{proj}\left(Y_t | \overline{\mathrm{Span}}\,(Z_s,\, s \le t)\right)$ of Y_t using $Z_s,\, s \le t$?

Let us assume that X admits a spectral density $f_X \in L^1(\mathbb{T})$.

5. Show that Z admits a spectral density $f_Z \in L^1(\mathbb{T})$.
6. Assuming that Y also admits a spectral density $f_Y \in L^1(\mathbb{T})$, express f_Z using $f_Y \star f_X$.

We now temporarily assume that X is an MA(q) process,

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \epsilon_{t-k} \; ,$$

where $\epsilon \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. We further assume that $1 + \sum_{k=1}^q \theta_k z^k \neq 0$ for all $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| \le 1$.

7. Recall what the innovation process of X is in this case.
8. Is Z an AR, MA or ARMA process ? (precise the order).
9. In the special case where Y is a constant process ($Y_t = Y_0$ for all t), what is the innovation process of Z ?
10. Suppose as in Question 9 that Y is a constant process and that, in addition, $\epsilon \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$. Is Z an m dependent process ? (If yes, precise the value of m).
11. Under the same setting as in Question 10, determine the asymptotic behavior of the empirical mean $\hat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n Z_t$: is it a consistent, asymptotically normal estimator of the true mean $\mathbb{E}[Z_0] = 0$?

From now on we assume that X and Y are two independent weakly stationary AR(1) processes such that their autocorrelations of order 1 read

$$\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \phi \quad \text{and} \quad \rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \psi \ .$$

We denote by ϵ and η the innovation processes of X and Y, respectively, and set $\sigma_\epsilon^2 = \mathrm{Var}(\epsilon_0)$ and $\sigma_\eta^2 = \mathrm{Var}(\eta_0)$.

12. What are the recursive equations satisfied by X and Y ?
13. Compute γ_X, γ_Y et γ_Z.
14. Is Z an AR, MA or ARMA process ? (precise the order).
15. Determine the innovation process ξ of Z and its variance, and the spectral density of Z.

Exercice 2. We consider the weakly stationary solution (X_t) of the AR(1) equation

$$X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \ ,$$

where (ε_t) is a sequence of i.i.d. Bernoulli variables with mean $\alpha \in (0,1)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_0 = 0) = \alpha \ .$$

1. Compute the mean μ and the autocovariance function γ of X. What is the equation satisfied by $\bar{X}_t = X_t - \mu$ and $\bar{\epsilon}_t = \epsilon_t - \alpha$?
2. Express X_t using ε_s, $s \in \mathbb{Z}$.
3. Determine the best forward affine predictor of X_t,

$$\hat{X}_t^+ = \mathrm{proj}\left(X_t \middle| \, H_{t-1} \right) \ ,$$

where

$$H_{t-1} = \overline{\mathrm{Span}}\left(1, X_{t-k}, k \geq 1\right) \ ,$$

and the corresponding prediction error $\sigma_+^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_t^+ - X_t)^2]$.

4. Determine the best backward affine predictor of X_t,

$$\hat{X}_t^- = \mathrm{proj}\left(X_t \middle| \, G_{t+1} \right) \ ,$$

where

$$G_{t+1} = \overline{\mathrm{Span}}\left(1, X_{t+k}, k \geq 1\right) \ ,$$

and the corresponding prediction error $\sigma_-^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_t^- - X_t)^2]$.

In the next two questions, we determine the best affine predictor of X_t given its past and its future,

$$\hat{X}_t = \mathrm{proj}\left(X_t \middle| \, H_{t-1} \oplus G_{t+1} \right) \ ,$$

and the corresponding prediction error $\sigma^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_t - X_t)^2]$.

5. Justify that

$$\hat{X}_t = \mu + \mathrm{proj}\left(X_t \middle| \, \mathcal{H}_{t-1}^{\bar{X}} \oplus \mathrm{Span}\left(\bar{X}_{t+1}\right) \right) \ ,$$

where, as usual, $\mathcal{H}_{t-1}^{\bar{X}} = \overline{\mathrm{Span}}\left(\bar{X}_s, \, s < t\right)$, and deduce that there exists $a \in \mathbb{R}$ such that

$$\hat{X}_t = \mu + a\bar{X}_{t-1} + a\bar{X}_{t+1} \ .$$

6. Compute $\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1} \ \bar{X}_{t+1}]^T\right)$ and $\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1} \ \bar{X}_{t+1}]^T, X_t\right)$ and deduce a and σ^2. Compare with σ_+^2 and σ_-^2.

7. Determine the best forward predictor $\tilde{X}_t^+$ of X_t given its past,

$$\tilde{X}_t^+ = \mathbb{E}\left[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \ ,$$

where $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(X_{t-k}, k \geq 1)$ is the smallest σ-field that makes X_{t-k} measurable for all $k \geq 1$.

8. Compute $\mathbb{P}(X_t \in [k, k+1))$ for $k = 0, 1$ and $k \notin \{0, 1\}$. [**Hint** : use the answer of Question 2].

From now on, we set $\alpha = 1/2$.

9. Compute $\mathbb{P}(X_t \in 2^{-l}[k, k+1))$ for all $l \geq 1$ and $k = 0, 1, \ldots, 2^{l+1} - 1$.
10. Deduce the distribution of X_t.
11. Determine $\mathbb{E}\left[X_t \,|\, X_{t+1}\right]$. Compare with $\hat{X}_t$.

Ecole Polytechnique
Programme d'approfondissement
Time series analysis – MAP565

Examen écrit du 25 mars 2013

Exercice 1. On note $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ et $L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $2\pi-$périodiques localement intégrables, et pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x)| \,\mathrm{d}x \;.$$

Le produit de convolution de f et g dans $L^1(\mathbb{T})$ est défini par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{T}} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u \;\;,$$

dés que cette intégrale est bien définie.

1. Soit ν une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-\lambda)\;\nu(\mathrm{d}\lambda)\;,$$

dés que cette intégrale est bien définie. Montrer que $h \in L^1(\mathbb{T})$.

2. Montrer que $f \star g \in L^1(\mathbb{T})$ pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \,\|g\|_1$.

Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus centrés tels que X et Y soient indépendants. On définit alors $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par $Z_t = X_t Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. On suppose de plus que X et Y sont stationnaires au sens faible et on note leurs fonctions d'autocovariance par γ_X et γ_Y.

3. Montrer que Z est stationnaire au sens faible et donner sa fonction d'autocovariance γ_Z à partir de γ_X et γ_Y.
4. Quel est le meilleur prédicteur linéaire $\mathrm{proj}\left(Y_t \middle| \overline{\mathrm{Vect}}\,(Z_s,\, s \leq t)\right)$ de Y_t à partir de Z_s, $s \leq t$?

Supposons que X admette une densité spectrale $f_X \in L^1(\mathbb{T})$.

5. Montrer que Z admet une densité spectrale $f_Z \in L^1(\mathbb{T})$.
6. Supposons que Y admette aussi une densité spectrale $f_Y \in L^1(\mathbb{T})$, exprimer f_Z en fonction de $f_Y \star f_X$.

Supposons maintenant temporairement que X est un processus MA(q),

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \epsilon_{t-k}\;,$$

où $\epsilon \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. On suppose de plus que $1 + \sum_{k=1}^{q} \theta_k z^k \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

7. Rappeler le processus des innovations de X dans ce cas.
8. Le processus Z est-il un processus AR, MA ou ARMA ? (préciser l'ordre).
9. Dans le cas particulier où Y est un processus constant ($Y_t = Y_0$ pour tout t), quel est le processus des innovations de Z ?
10. En supposant comme en question 9 que Y est un processus constant et que, de plus, $\epsilon \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$, le processus Z est-il un processus m–dépendant ? (Si oui, préciser la valeur de m).
11. Sous les mêmes hypothèses que la question 10, déterminer le comportement asymptotique de la moyenne empirique $\hat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} Z_t$: est-ce un estimateur consistant ou asymptotiquement gaussien de la moyenne $\mathbb{E}[Z_0] = 0$?

Dorénavant, on suppose que X et Y sont 2 processus stationnaires au sens faible AR(1) indépendants tels que

$$\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \phi \quad \text{et} \quad \rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \psi \ .$$

On note ϵ et η les processus des innovations de X et Y, respectivement, et on note $\sigma_\epsilon^2 = \mathrm{Var}(\epsilon_0)$ et $\sigma_\eta^2 = \mathrm{Var}(\eta_0)$.

12. Expliciter les équations récurrentes vérifiées par X et Y.
13. Calculer γ_X, γ_Y et γ_Z.
14. Le processus Z est-il un processus AR, MA ou ARMA ? (préciser l'ordre).
15. Déterminer le processus des innovations ξ de Z et sa variance, et la densité spectrale de Z.

Exercice 2. On considère la solution stationnaire au sens faible (X_t) de l'équation AR(1)

$$X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \ ,$$

où (ε_t) est une suite de variables de Bernoulli i.i.d. de moyenne $\alpha \in (0, 1)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 1) = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_0 = 0) = \alpha \ .$$

1. Calculer la moyenne μ et la fonction d'autocovariance γ de X. Quelle est l'équation satisfaite par $\bar{X}_t = X_t - \mu$ et $\bar{\epsilon}_t = \epsilon_t - \alpha$?
2. Exprimer X_t à partir de ε_s, $s \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer le meilleur prédicteur affine avant de X_t,
$$\hat{X}_t^+ = \mathrm{proj}\left(X_t | \, H_{t-1} \right) \ ,$$
où
$$H_{t-1} = \overline{\mathrm{Vect}}\left(1, X_{t-k}, k \geq 1\right) \ ,$$
et l'erreur de prédiction correspondante $\sigma_+^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_t^+ - X_t)^2]$.
4. Déterminer le meilleur prédicteur affine arrière de X_t,
$$\hat{X}_t^- = \mathrm{proj}\left(X_t | \, G_{t+1} \right) \ ,$$
où
$$G_{t+1} = \overline{\mathrm{Vect}}\left(1, X_{t+k}, k \geq 1\right) \ ,$$
et l'erreur de prédiction correspondante $\sigma_-^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_t^- - X_t)^2]$.

Les 2 prochaines questions permettent de déterminer le meilleur prédicteur affine de X_t à partir de son passé et de son futur,

$$\hat{X}_t = \mathrm{proj}\left(X_t | \, H_{t-1} \oplus G_{t+1} \right) \ ,$$

et l'erreur de prédiction correspondante $\sigma^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_t - X_t)^2]$.

5. Justifier que
$$\hat{X}_t = \mu + \mathrm{proj}\left(X_t | \, \mathcal{H}_{t-1}^{\bar{X}} \oplus \mathrm{Vect}\left(\bar{X}_{t+1}\right) \right) \ ,$$
où, comme habituellement, $\mathcal{H}_{t-1}^{\bar{X}} = \overline{\mathrm{Vect}}\left(\bar{X}_s, \, s < t\right)$, et déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\hat{X}_t = \mu + a\bar{X}_{t-1} + a\bar{X}_{t+1} \ .$$
6. Calculer $\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1} \ \bar{X}_{t+1}]^T\right)$ et $\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1} \ \bar{X}_{t+1}]^T, X_t\right)$ et déduire a et σ^2. Comparer avec σ_+^2 et σ_-^2.

7. Déterminer le meilleur prédicteur $\tilde{X}_t^+$ de X_t à partir de son passé,

$$\tilde{X}_t^+ = \mathbb{E}\left[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] \ ,$$

où $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(X_{t-k}, k \geq 1)$ est la plus petite tribu qui rend X_{t-k} mesurable pour tout $k \geq 1$.

8. Calculer $\mathbb{P}(X_t \in [k, k+1))$ pour $k = 0, 1$ et $k \notin \{0, 1\}$. [**Indication** : utiliser la réponse à la question 2].

Dorénavant, on pose $\alpha = 1/2$.

9. Calculer $\mathbb{P}(X_t \in 2^{-l}[k, k+1))$ pour tout $l \geq 1$ et $k = 0, 1, \ldots, 2^{l+1} - 1$.
10. En déduire la distribution de X_t.
11. Déterminer $\mathbb{E}\left[X_t \,|\, X_{t+1}\right]$. Comparer avec $\hat{X}_t$.

Answers

Solution of Exercice 1 1. Since $f(x+1-\lambda) = f(x-\lambda)$, h is 1-periodic ($h(x) = h(x+1)$ whenever $h(x)$ is well defined). By Fubini's Theorem, we have

$$\int_{x\in\mathbb{T}} \left(\int_{\lambda\in\mathbb{T}} |f(x-\lambda)|\ \nu(\mathrm{d}\lambda) \right)\ \mathrm{d}x = \int_{\lambda\in\mathbb{T}} \left(\int_{x\in\mathbb{T}} |f(x-\lambda)|\ \mathrm{d}x \right)\ \nu(\mathrm{d}\lambda)\ .$$

Since, by periodicity of f, we have for all λ,

$$\int_{x\in\mathbb{T}} |f(x-\lambda)|\ \mathrm{d}x = \|f\|_1\ ,$$

we get that

$$\int_{x\in\mathbb{T}} \left(\int_{\lambda\in\mathbb{T}} |f(x-\lambda)|\ \nu(\mathrm{d}\lambda) \right)\ \mathrm{d}x = \|f\|_1\ \nu(\mathbb{T}) < \infty.$$

We deduce that h is integrable on $\mathbb{T}$. Hence the result. Moreover we obtained that

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1\ \nu(\mathbb{T})\ .$$

2. We apply similar arguments with $\nu(\mathrm{d}\lambda)$ replaced by $g(\lambda)\mathrm{d}\lambda$.
3. We have $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[Y_t] = 0$ for all t and, for all $s, t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \mathbb{E}[X_s\overline{X_t}]\mathbb{E}[Y_s\overline{Y_t}] = \gamma_X(s-t)\gamma_Y(s-t)\ .$$

Hence Z is weakly stationary and $\gamma_Z = \gamma_X\gamma_Y$.

4. Using that, for all $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[Y_t Z_s] = \mathbb{E}[Y_t Y_s X_s] = \mathbb{E}[Y_t Y_s]\mathbb{E}[X_s] = 0\ ,$$

the best linear predictor is 0.

5. Let ν_Y be the spectral measure of Y. We have, for all $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_Z(t) &= \gamma_X(t)\gamma_Y(t) \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} f_X(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda \right) \left(\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\ \nu_Y(\mathrm{d}\lambda) \right) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\lambda')t} f_X(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda \right)\ \nu_Y(\mathrm{d}\lambda')\ ,
\end{aligned}$$

where we used Fubini's Theorem. In the integral in λ, we set $u = \lambda+\lambda'$, and using Fubini's Theorem again, we get

$$\gamma_Z(t) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ut} \left(\int_{\mathbb{T}} f_X(u-\lambda')\ \nu_Y(\mathrm{d}\lambda') \right) \mathrm{d}u\ .$$

We conclude that Z has spectral density

$$f_Z(u) = \int_{\mathbb{T}} f_X(u-\lambda')\ \nu_Y(\mathrm{d}\lambda')\ .$$

6. Applying the previous question in the case where ν_Y has density f_Y, we get $f_Z = f_X \star f_Y$.
7. We are in the case where the innovation process is ϵ (canonical representation).
8. Since $\gamma_Z(t) = 0$ for $|t| \geq q+1$, Z is an MA(q) process.

9. In this case, we have for all t,

$$Z_t = X_t Y_0 = Y_0 \epsilon_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k Y_0 \epsilon_{t-k} \; .$$

Observing that $\epsilon_t \in \mathcal{H}_\infty^X$ under the assumption on the given MA coefficients, we have that Y_0 is independent of ϵ. Thus $(Y_0\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise and the above MA(q) equation gives that it is the innovation process of Z.

10. The process Z is not an m-dependent process because Z_s and Z_t both depends on the same Y_0.

11. We have $\hat{\mu}_n = Y_0 n^{-1} \sum_{k=1}^n X_t$. We know from the course that $n^{-1}\sum_{k=1}^n X_t$ converges to 0 a.s. Hence this is also the case for $\hat{\mu}_n$, which is strongly consistent. Another result of the course gives that $n^{-1}\sum_{k=1}^n X_t$ is asymptotically normal with asymptotic variance

$$v = 2\pi f_X(0) = \sigma^2 \left|1 + \sum_{k=1}^{q} \theta_k\right|^2 \; .$$

Since Y_0 is independent of X we get that

$$\sqrt{n}\hat{\mu}_n \Rightarrow W \; ,$$

where W is the product of Y_0 with an independent centered Gaussian random variable with variance v. Such a product is not Gaussian in general.

12. The AR(1) equations reads $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$ and $Y_t = \psi_1 Y_{t-1} + \eta_t$. Using that they are the canonical representations, we deduce that $\phi = \phi_1$ and $\psi = \psi_1$.

13. The usual computations yield, for all $t \geq 0$,

$$\gamma_X(t) = \sigma_\epsilon^2 \frac{\phi^t}{1-|\phi|^2} \quad \text{and} \quad \gamma_X(t) = \sigma_\eta^2 \frac{\psi^t}{1-|\psi|^2} \; .$$

Hence, for all $t \geq 0$,

$$\gamma_Z(t) = \sigma_\epsilon^2 \sigma_\eta^2 \frac{(\phi\psi)^t}{(1-|\phi|^2)(1-|\psi|^2)} \; .$$

14. From the previous question, Z appears to have the autocovariance function of an AR(1) process with AR coefficient $\phi\psi$. Looking for an AR(1) equation, we get

$$Z_t = (\phi X_{t-1} + \epsilon_t)(\psi Y_{t-1} + \eta_t) = \phi\psi Z_{t-1} + [\psi Y_{t-1}\epsilon_t + \phi X_{t-1}\eta_t + \epsilon_t \eta_t] \; .$$

It is straightforward to check that the random variable between brackets defines a white noise process as a sum of 3 uncorrelated white noises. Hence Z is an AR(1) process.

15. From the previous question, since $|\psi\phi| < 1$ the innovation process is defined by

$$\xi_t = \psi Y_{t-1}\epsilon_t + \phi X_{t-1}\eta_t + \epsilon_t \eta_t \; ,$$

which has variance

$$\sigma_\xi^2 = \frac{|\psi|^2 \sigma_\epsilon^2 \sigma_\eta^2}{1-|\psi|^2} + \frac{|\phi|^2 \sigma_\epsilon^2 \sigma_\eta^2}{1-|\phi|^2} + \sigma_\epsilon^2 \sigma_\eta^2 \; .$$

Finally, using the AR(1) equation of Z, we get

$$f_Z(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \left|1 - \phi\psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}\right|^{-2} \; .$$

Solution of Exercice 2

1. Taking the mean in the AR equation we get $\mu - \mu/2 = \alpha$, hence $\mu = 2\alpha$. The non-centered given AR(1) equation can be rewritten as
$$\bar{X}_t = \frac{1}{2}\bar{X}_{t-1} + \bar{\epsilon}_t \ . \tag{1}$$
Hence, for all $t \geq 0$, $\gamma(t) = \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)2^{-t}$.

2. Since ϵ is L^2 the series $\sum_{j\geq 0} 2^{-j}\epsilon_{t-j}$ absolutely converges in the L^2 sense. Hence it is the unique weakly stationary solution, for all $t \in \mathbb{Z}$,
$$X_t = \sum_{j\geq 0} 2^{-j}\epsilon_{t-j} \ . \tag{2}$$

3. Note that
$$\mathrm{proj}\left(\cdot|\, H_{t-1}\right) = \mathrm{proj}\left(\cdot|\, \mathcal{H}^{\bar{X}}_{t-1}\right) + \mathrm{proj}\left(\cdot|\, \mathrm{Span}\,(1)\right)$$
Since the AR(1) equation (1) is canonical, $\bar{\epsilon}$ is the innovation proces of $\bar{X}$ and thus
$$\mathrm{proj}\left(X_t|\, \mathcal{H}^{\bar{X}}_{t-1}\right) = \mathrm{proj}\left(\bar{X}_t|\, \mathcal{H}^{\bar{X}}_{t-1}\right) = \frac{1}{2}\bar{X}_{t-1} \ .$$
Hence
$$\hat{X}_t^{+} = \mu + \frac{1}{2}(X_{t-1} - \mu) = \frac{1}{2}X_{t-1} - \alpha \ .$$
and the error is $\epsilon_t - \alpha$ which has square norm
$$\sigma_+^2 = \alpha(1-\alpha) \ .$$

4. Since $(X_{-t})_{t\in\mathbb{Z}}$ has the same second order properties as X, which determine the prediction coefficients and error variances, we have
$$\hat{X}_t^{-} = \frac{1}{2}X_{t+1} - \alpha \ .$$
and
$$\sigma_-^2 = \alpha(1-\alpha) \ .$$

5. We observe that
$$H_{t-1} \oplus G_{t+1} = \left[\mathcal{H}^{\bar{X}}_{t-1} \oplus \mathrm{Span}\left(\bar{X}_{t+1}\right)\right] \oplus \mathrm{Span}\,(1) \oplus \overline{\mathrm{Span}}\,(\bar{\epsilon}_s,\ s \geq t+2) \ .$$
Moreover, in the right-hand side, $[\ldots]$, $\mathrm{Span}\,(1)$ and $\overline{\mathrm{Span}}\,(\bar{\epsilon}_s,\ s \geq t+2)$ are closed linear spaces which are orthogonal one with respect to each other. Since, on the other hand, $\bar{\epsilon}_s$ is orthogonal to X_t for all $s \geq t+2$, we get, when projecting X_t,
$$\hat{X}_t = \mu + \mathrm{proj}\left(X_t|\, \mathcal{H}^{\bar{X}}_{t-1} \oplus \mathrm{Span}\left(\bar{X}_{t+1}\right)\right) \ .$$
Now by parity of the autocovariance function of X, the prediction coefficients in the future and in the past must be the same ones. Symmetryzing the last expression of $\hat{X}_t$ we get that $\hat{X}_t = \mu + a\bar{X}_{t-1} + a\bar{X}_{t+1}$ for some real coefficient a.

6. Since $\gamma(t) = \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)2^{-t}$ we have
$$\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1}\ \bar{X}_{t+1}]^T\right) = \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)\ \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$
and
$$\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1}\ \bar{X}_{t+1}]^T, X_t\right) = \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)\ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \ .$$

The orthogonality property of the projection implies that

$$\mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1}\ \bar{X}_{t+1}]^T\right)\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \mathrm{Cov}\left([\bar{X}_{t-1}\ \bar{X}_{t+1}]^T, X_t\right) .$$

We find $a = 2/5$. Further we have

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_t) - \mathrm{Cov}\left(X_t, \hat{X}_t\right) = \frac{4}{3}\alpha(1-\alpha)(1-a) = \frac{4}{5}\alpha(1-\alpha) .$$

As expected, the error is smaller if one uses both the past and the future.

7. We have $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \epsilon_t$ where X_{t-1} is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable and ϵ_t is independent of $\mathcal{F}_{t-1}$. Hence

$$\tilde{X}_t^+ = \frac{1}{2}X_{t-1} + \mathbb{E}[\epsilon_t] = \frac{1}{2}X_{t-1} + \alpha = \hat{X}_t^+ .$$

8. Using (2), we note that X_t takes its values in $[0, 2)$ and that the binary representation of X_t reads $\epsilon_t.\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}\ldots$ In particular $X_t \in [0, 1)$ if and only if $\epsilon_t = 0$ and $X_t \in [1, 2)$ otherwise. It follows that $\mathbb{P}(X_t \in [0, 1)) = 1 - \alpha$, $\mathbb{P}(X_t \in [1, 2)) = \alpha$ and $\mathbb{P}(X_t \in [k, k + 1)) = 0$ if $k \neq 0, 1$.
9. Similarly, using that $\alpha = 1/2$, we have $\mathbb{P}(X_t \in 2^{-l}[k, k+1)) = 2^{-l-1}$ for $l \geq 1$ and $k = 0, 1, \ldots, 2^{l+1} - 1$.
10. We deduce that for all, $l \geq 0$ and $j = 1, 2, \ldots, 2^{l+1}$,

$$\mathbb{P}(X_t \leq 2^{-l}j) = \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(X_t \in 2^{-l}[k, k + 1)) = j2^{-l-1} .$$

By right-continuity of the repartition function, we get that for all $x \in [0, 2]$, $\mathbb{P}(X_t \leq x) = x/2$. Hence X_t has a uniform distribution on $[0, 2]$.

11. We observe that since $X_t = 2X_{t+1} - 2\epsilon_{t+1}$ with $X_t, X_{t+1} \in [0, 2)$ and $\epsilon_{t+1} \in \{0, 1\}$, we have that

$$X_t = \begin{cases} 2X_{t+1} - 2 & \text{if } X_{t+1} \geq 1 \\ 2X_{t+1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hence X_t is $\sigma(X_{t+1})$-measurable and $\mathbb{E}\left[X_t \,|\, X_{t+1}\right] = X_t$! In this case the non-linear predictor perfectly predict X_t from its future, while the linear predictor $\hat{X}_t$ using both the past and the future has an error with positive square norm equal to $(4/5)\alpha(1-\alpha) = 1/5$.

Warning about the book of the past exams in Time series analysis (MAP565).

Following the changes of MAP365 in 2013, the exams up to 2012 may use different notation from the one in the current lecture notes. For instance, L used to denote the backshift operator up to 2012, which is now denoted by B.

ECOLE POLYTECHNIQUE
PROGRAMME d'APPROFONDISSEMENT
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES, ÉCONOMIE, QUANTITATIVE ECONOMICS AND FINANCE

"Processus et estimation" - MAP565

Examen : 22 mars 2012

Exercice 1: Estimation de la moyenne d'un processus autorégressif d'ordre 1.

1. On considère le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait l'équation suivante

$$y_t = \phi y_{t-1} + m + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance σ^2.

1.a. Sous quelle condition l'équation ci-dessus peut-elle définir un processus stationnaire du second ordre ? On supposera cette condition satisfaite par la suite.

Réponse : $|\phi| \neq 1$

1.b. Sous quelle condition le terme $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ peut-il être considéré comme l'innovation d'un processus stationnaire satisfaisant cette équation ? On supposera cette condition satisfaite sauf indication contraire explicite.

Réponse : $|\phi| < 1$

1.c. Quelle est la moyenne du processus stationnaire $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?

Réponse : $Ey_t = \frac{m}{1-\phi} = \mu$

1.d. Donner les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle de ce processus

Réponse: la fonction d'autocorrélation est $\rho_y(h) = \phi^{|h|}$ et la fonction d'autocorrélation partielle est $r_y(1) = \phi$ puis $r_y(h) = 0$ si $h > 1$.

2. On suppose que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et que l'on dispose d'observations de y_t pour $t = 0, 1, \ldots T$. On veut estimer la moyenne du processus stationnaire du second ordre $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et l'on suppose dans cette partie **que ϕ et σ^2 sont connus.**

2.a. On considère comme estimateur la moyenne empirique des observations disponibles, ce que l'on note $\widehat{\mu}_1$. Est-ce un estimateur sans biais ? Donner la variance de cet estimateur pour l'échantillon considéré $V\widehat{\mu}_1$.

Réponse : sous les hypothèses retenues,

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

et comme

$$E\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{T+1} E \sum_{t=0}^{T} y_t = \mu$$

$\widehat{\mu}_1$ est un estimateur sans biais. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_1 &= \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} y_t \\
&= \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} \left(\mu + \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \right) \\
&= \mu + \frac{1}{T+1} \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{1-\phi^{T-t+1}}{1-\phi} \varepsilon_t + \frac{1-\phi^{T+1}}{1-\phi} \sum_{j=0}^{+\infty} \phi^j \varepsilon_{-j} \right)
\end{aligned}$$

il s'ensuit qu'après calcul

$$\begin{aligned}
V\widehat{\mu}_1 &= \frac{\sigma^2}{(1-\phi)^2} \left(\frac{1}{T+1} - \frac{2\phi \left(1-\phi^{T+1}\right)}{(T+1)^2 \left(1-\phi^2\right)} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{(T+1)(1-\phi)^2} \left(1 - \frac{2\phi \left(1-\phi^{T+1}\right)}{(T+1)\left(1-\phi^2\right)} \right)
\end{aligned}$$

2.b. On considére comme estimateur de la moyenne celui du maximum de vraisemblance conditionnelle de notre échantillon. On le note $\widehat{\mu}_2$. Donner son expression analytique, est-il sans biais ? Donner la variance de cet estimateur $V\widehat{\mu}_2$.

Réponse : La vraisemblance conditionnelle de notre échantillon est obtenue par conditionnement itératif. Elle s'écrit sous la forme

$$\log l\left(y_T, \ldots y_1 \left| y_0, \mu, \phi, \sigma^2\right.\right) = -\frac{T}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \phi y_{t-1} - (1-\phi)\,\mu\right)^2$$

L'équation de vraisemblance du paramètre μ est donnée par

$$\frac{\partial \log l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}(1-\phi)\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \phi y_{t-1} - (1-\phi)\,\mu_2\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_2 &= \frac{1}{T(1-\phi)}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \phi y_{t-1}\right) \\
&= \frac{-\phi}{T(1-\phi)}y_0 + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1} y_t + \frac{1}{T(1-\phi)}y_T
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_2 &= \frac{1}{T(1-\phi)}\sum_{t=1}^{T}\left((1-\phi)\,\mu + \varepsilon_t\right) \\
&= \mu + \frac{1}{T(1-\phi)}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t
\end{aligned}$$

donc l'estimateur est sans biais et sa variance est égale à

$$V\widehat{\mu}_2 = \frac{\sigma^2}{T(1-\phi)^2}$$

2.c. On considére comme estimateur de la moyenne celui du maximum de vraisemblance inconditionnelle de notre échantillon. On le note $\widehat{\mu}_3$. Donner son expression analytique, est-il sans biais ? Donner la variance de cet estimateur $V\widehat{\mu}_3$.

Réponse : La vraisemblance inconditionnelle peut être construite de la manière suivante : si l'on note e_{T+1} le vecteur de dimension $T+1$ composé de 1, y le vecteur obtenu en empilant les observations de la date 0 à la date T et J la matrice $(T+1)\times(T+1)$ composé de 1 sur la première sous-diagonale et de 0 ailleurs, nous avons comme y_0 a pour loi la loi stationnaire d'un AR(1)

$$\begin{aligned}
\left(I_{T+1} - \phi J_{T+1}\right)\left(y - \mu e_{T+1}\right) &= \varepsilon \\
&= \begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\phi^2} & 0 \\ 0 & I_T \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$y - \mu e_{T+1} = \eta \sim \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\sigma^2\left(I_{T+1} - \phi J_{T+1}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\phi^2} & 0 \\ 0 & I_T \end{pmatrix}\left(I_{T+1} - \phi J'_{T+1}\right)^{-1}}_{\Omega(\phi)}\right)$$

La vraisemblance inconditionnelle s'écrit donc

$$\log l\left(y_T, \ldots y_1, y_0 \left| \mu, \phi, \sigma^2\right.\right) = -\frac{T}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \log\det\Omega(\phi) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - \mu e_{T+1}\right)'\Omega(\phi)^{-1}\left(y - \mu e_{T+1}\right)$$

L'équation de vraisemblance du paramètre μ est donnée par

$$\frac{\partial \log l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} e'_{T+1} \Omega(\phi)^{-1} (y - \mu_3 e_{T+1})$$

d'où

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_3 &= \frac{e'_{T+1}\Omega(\phi)^{-1} y}{e'_{T+1}\Omega(\phi)^{-1} e_{T+1}} \\ &= \frac{y_0 + (1-\phi)\sum_{t=1}^{T-1} y_t + y_T}{1+\phi+T(1-\phi)} \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_3 &= \frac{e'_{T+1}\Omega(\phi)^{-1} (\mu e_{T+1} + \eta)}{e'_{T+1}\Omega(\phi)^{-1} e_{T+1}} \\ &= \mu + \frac{e'_{T+1}\Omega(\phi)^{-1} \eta}{e'_{T+1}\Omega(\phi)^{-1} e_{T+1}} \end{aligned}$$

donc l'estimateur est sans biais et sa variance est égale à

$$V\widehat{\mu}_3 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2+T(1-\phi)^2}$$

2.d. Lorsque ϕ varie dans le domaine de valeurs possibles, quelle est la borne supérieure des valeurs prises par la variance de ces estimateurs. Commentez cette propriété.

Réponse: lorsque ϕ tend vers 1 par valeur inférieure, la limite de $V\widehat{\mu}_1$, $V\widehat{\mu}_2$ et $V\widehat{\mu}_3$ est $+\infty$. Les estimateurs considérés ne sont pas de bons estimateurs lorsque le processus se rapproche d'une marche aléatoire. La moyenne empirique d'une marche aléatoire ne converge pas (cf. Chapitre 8)

2.e. Parmi les trois estimateurs introduits $\widehat{\mu}_1$, $\widehat{\mu}_2$ et $\widehat{\mu}_3$, y a-t-il un estimateur de la moyenne de y_t qui domine les deux autres au sens de L^2 quelle que soit la taille de l'échantillon ou la valeur de ϕ? Pour des estimateurs sans biais, on appelle "efficacité relative" de l'estimateur $\widehat{\mu}_i$ par rapport à l'estimateur $\widehat{\mu}_j$ le ratio

$$\frac{V\widehat{\mu}_j}{V\widehat{\mu}_i}$$

quelle est la valeur limite de $\frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_1}$ et de $\frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_2}$ lorsque T tend vers $+\infty$?

Réponse : comme $|\phi| < 1$, nous avons nécessairement $V\widehat{\mu}_3 < V\widehat{\mu}_2$, l'estimateur du maximum de vraisemblance inconditionnelle domine l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle. Lorsque T tend vers $+\infty$, $\frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_2}$ tend vers 1. Les deux estimateurs ont la même efficacité.

$$\begin{aligned} \frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_1} &= \frac{\frac{\sigma^2}{1-\phi^2+T(1-\phi)^2}}{\frac{\sigma^2}{(T+1)(1-\phi)^2}\left(1-\frac{2\phi(1-\phi^{T+1})}{(T+1)(1-\phi^2)}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{2\phi(1-\phi)}{(T+1)(1-\phi^2)}\right)\left(1-\frac{2\phi(1-\phi^{T+1})}{(T+1)(1-\phi^2)}\right)} \end{aligned}$$

d'où lorsque T est grand

$$\frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_1} = 1 - \frac{2\phi^2}{(T+1)(1-\phi^2)} + o\left(\frac{1}{T}\right)$$

donc $\widehat{\mu}_3$ domine $\widehat{\mu}_1$ mais asymptotiquement $\widehat{\mu}_1$ est aussi efficace que $\widehat{\mu}_3$. En revanche, pour $T = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_1} &= \frac{1}{\left(1+\frac{\phi(1-\phi)}{(1-\phi^2)}\right)(1-\phi)} = 1 + \frac{2\phi^2}{1+\phi-2\phi^2} \\ &\begin{cases} >1 & \text{si} \quad 1+\phi-2\phi^2 > 0 \Longleftrightarrow \phi \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[\\ <1 & \text{si} \quad 1+\phi-2\phi^2 < 0 \Longleftrightarrow \phi \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\end{cases} \end{aligned}$$

L'ordonnancement des estimateurs selon leur efficacité varie suivant la valeur de ϕ et la taille de l'échantillon. Aucun estimateur ne domine uniformément les deux autres.

2.f. On considère le comportement des estimateurs obtenus lorsque ϕ tend vers -1 . Donner l'expression des estimateurs et ceux de leur variance. Expliquer ce résultat.

Réponse : nous avons dans ce cas les trois estimateurs suivants :

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_1 &= \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} y_t \\ \widehat{\mu}_2 &= \widehat{\mu}_3 = \frac{1}{2T}y_0 + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1} y_t + \frac{1}{2T}y_T\end{aligned}$$

L'expression de la variance de $\widehat{\mu}_1$ est donnée par:

$$\begin{aligned}V\widehat{\mu}_1 &= \frac{\sigma^2}{(T+1)(1-\phi)^2}\left(1-\frac{2\phi\left(1-\phi^{T+1}\right)}{(T+1)(1-\phi^2)}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma^2}{(T+1)(1-\phi)^2}\left(1-\frac{2\phi}{(T+1)}\left(\sum_{j=0}^{s}\phi^{2j}\right)\right) & \text{si} \quad T=2s+1 \\ \frac{\sigma^2}{(T+1)(1-\phi)^2}\left(1-\frac{2\phi}{(T+1)}\left(\sum_{j=0}^{s-1}\phi^{2j}+\frac{\phi^{2s}}{1+\phi}\right)\right) & \text{si} \quad T=2s\end{cases}\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\phi\longrightarrow -1} V\widehat{\mu}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2(T+1)} & \text{si} \quad T=2s+1 \\ +\infty & \text{si} \quad T=2s\end{cases}$$

En effet, lorsque $T=2s+1$, nous disposons de $(s+1)$ couples de données telles que $(y_{2t'+1}+y_{2t'}=2\mu+\varepsilon_{2t'+1})$ et

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_1 &= \frac{1}{2(s+1)}\sum_{t=0}^{T} y_t \\ &= \frac{1}{2(s+1)}\sum_{t'=0}^{s}(2\mu+\varepsilon_{2t'+1}) \\ &= \mu+\frac{1}{2(s+1)}\sum_{t'=0}^{s}\varepsilon_{2t'+1}\end{aligned}$$

d'où

$$V\widehat{\mu}_1 = \frac{\sigma^2}{4(s+1)} = \frac{\sigma^2}{2(T+1)}$$

En revanche, lorsque $T=2s$, nous disposons d'un nombre impair d'observations et la variance de y_0 doit être prise en compte, or ce processus n'est pas stationnaire de variance divergente.

L'expression de la variance de $\widehat{\mu}_2$ et $\widehat{\mu}_3$ est

$$V\widehat{\mu}_2 = V\widehat{\mu}_3 = \frac{\sigma^2}{4T}$$

d'où

$$\lim_{\phi\longrightarrow -1}\frac{V\widehat{\mu}_3}{V\widehat{\mu}_1} = \begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{T}\right) & \text{si} \quad T=2s+1 \\ 0 & \text{si} \quad T=2s\end{cases}$$

$\widehat{\mu}_3$ et $\widehat{\mu}_2$ sont plus efficaces que $\widehat{\mu}_1$ dans le voisinage de $\phi=-1$.

2.g. En pratique, lorsque ϕ n'est pas connu, on recommande l'usage de l'estimateur suivant

$$\frac{1}{2T}y_0+\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1}y_t+\frac{1}{2T}y_T$$

Pouvez-vous expliquer ce choix ?

Réponse : cet estimateur comme il a été indiqué précédemment se comporte mieux en termes de variance pour des coefficients autorégressifs au voisinage de la valeur -1.

Exercice 2: Biais à distance finie de l'estimateur d'un paramètre d'un modèle autorégressif

Soit un processus stationnaire $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant la représentation **canonique** autorégressive d'ordre 1 suivante

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

1. Quelle est la loi de y_t, la loi de y_t sachant y_{t-1} et la loi de y_{t-1} sachant y_t ? Quelle est la nature de $\eta_t = y_{t-1} - E(y_{t-1}|y_t)$? Comment interprétez-vous ce résultat ?

Réponse: La loi de y_t est $\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)$, la loi de y_t sachant que y_{t-1} est $\mathcal{N}\left(\phi y_{t-1}, \sigma^2\right)$, la loi y_{t-1} sachant y_t est déduite du conditionnement suivant

$$l(y_{t-1}|y_t) = \frac{l(y_{t-1}, y_t)}{l(y_t)}$$

Dans la mesure où le vecteur est gaussien, nous avons

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix}\right)$$

d'où

$$y_{t-1}|y_t \sim \mathcal{N}\left(\phi y_t, \sigma^2\right)$$

Il s'ensuit que $\eta_t = y_{t-1} - E(y_{t-1}|y_t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et pour $h > 0$

$$\begin{aligned} E\eta_t\eta_{t-h} &= E(y_{t-1} - \phi y_t)(y_{t-h} - \phi y_{t-h+1}) \\ &= \gamma_y(h-1) - \phi\gamma_y(h) - \phi\gamma_y(h-2) + \phi^2\gamma_y(h-1) \\ &= \gamma_y(0)\left(\phi^{h-1} - \phi^{h+1} - \phi\phi^{h-2} + \phi^2\phi^{h-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce processus η_t est un bruit blanc fort, c'est l'innovation du processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ lorsque l'on inverse le sens du temps.

2.Un statisticien observe ce processus sur deux dates consécutives (y_1, y_2) (on supposera par la suite que $|y_1| \neq |y_2|$)

2.a. Donner les estimateurs $\left(\widehat{\phi}, \widehat{\sigma^2}\right)$ du maximum de vraisemblance inconditionnel sur la base de ces deux variables aléatoires. Dans quel intervalle se trouvent les valeurs de $\widehat{\phi}$.

Réponse: La fonction de log-vraisemblance de l'échantillon composé des deux observations est

$$\begin{aligned} l\left(y_1, y_2; \phi, \sigma^2\right) &= -\ln 2\pi - \ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1-\phi^2\right) \\ & \quad -\frac{1}{2\sigma^2}\left(1-\phi^2\right)y_1^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y_2 - \phi y_1\right)^2 \end{aligned}$$

les équations de vraisemblance sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial\phi} &= -\frac{\phi}{1-\phi^2} + \frac{\phi}{\sigma^2}y_1^2 + \frac{y_1}{\sigma^2}(y_2 - \phi y_1) \\ \frac{\partial l}{\partial\sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(1-\phi^2\right)y_1^2 + \frac{1}{2\sigma^4}(y_2 - \phi y_1)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{\phi} = \frac{y_1 y_2}{\frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)}$$

et

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(y_1 - y_2)^2(y_1 + y_2)^2}{2\left(y_1^2 + y_2^2\right)}$$

On observe que par construction et par hypothèse

$$\begin{aligned}(y_1+y_2)^2 &> 0\\ (y_1-y_2)^2 &> 0\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}-2y_1y_2 &< y_1^2+y_2^2\\ 2y_1y_2 &< y_1^2+y_2^2\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\widehat{\phi}\right| = \frac{|y_1y_2|}{\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)} < 1$$

L'estimateur satisfait toujours la contrainte de représentation canonique.

2.b. Exprimer $\widehat{\phi}-\phi$ en fonction des variables aléatoires (y_1, y_2) et des erreurs d'approximation de chaque variable aléatoire en fonction de l'autre variable. Comment expliquez-vous la forme symétrique en les variables (y_1, y_2) de l'estimateur de ϕ obtenu ?

Réponse: Nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}-\phi &= \frac{y_1\left(y_2-\phi y_1\right)+y_2\left(y_1-\phi y_2\right)}{y_1^2+y_2^2}\\ &= \frac{y_1\varepsilon_2+y_2\eta_1}{y_1^2+y_2^2}\end{aligned}$$

y_1 et y_2 jouent des rôles symétriques, en effet, si l'on inverse le sens du temps le modèle joint demeure inchangé.

2.c. Montrer que cet estimateur est sans biais si $\phi = 0$. Cette propriété est-elle vérifiée pour les autres valeurs à l'intérieur de l'ensemble des valeurs possibles?

Réponse: Nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}-\phi &= \frac{y_1\varepsilon_2+y_2\eta_1}{y_1^2+y_2^2}\\ &= \frac{y_1\varepsilon_2}{y_1^2+\left(\phi y_1+\varepsilon_2\right)^2}+\frac{y_2\eta_1}{y_2^2+\left(\phi y_2+\eta_1\right)^2}\end{aligned}$$

Par symétrie

$$E_\phi\left(\widehat{\phi}-\phi\right) = 2E\frac{y_1\varepsilon_2}{y_1^2+\left(\phi y_1+\varepsilon_2\right)^2}$$

où

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\phi^2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\rho\cos\theta\\ \varepsilon_2 &= \rho\sin\theta\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}E_\phi\left(\widehat{\phi}-\phi\right) &= 2\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\cos\theta\sin\theta}{\frac{1}{1-\phi^2}\cos^2\theta+\left(\frac{\phi}{\sqrt{1-\phi^2}}\cos\theta+\sin\theta\right)^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\rho^2}\rho d\rho d\theta\\ &= 2\sigma^2\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-\phi^2}}{\cos^2\theta+\left(\phi\cos\theta+\sqrt{1-\phi^2}\sin\theta\right)^2}d\theta\end{aligned}$$

Lorsque $\phi = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} E_\phi\left(\widehat{\phi}-\phi\right) &= \sigma^2 \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, cette fonction de ϕ est régulière, continue et continuement différentiable sur l'intérieur $]-1,1[$, il est possible de calculer sa dérivée et de l'évaluer en $\phi = 0$. Nous obtenons après calcul

$$\left.\frac{\partial E_\phi\left(\widehat{\phi}-\phi\right)}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = -\sigma^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta < 0$$

Il existe donc un biais et ce biais est au voisinage de 0 positif pour les valeurs négatives de ϕ ($E_\phi\left(\widehat{\phi}-\phi\right) > 0$) et négatif pour les valeurs positives de ϕ ($E_\phi\left(\widehat{\phi}-\phi\right) < 0$) .

◀▶

Exercice 3: Coefficient de détermination d'un modèle ARMA(p,q)

Nous considérons un processus stationnaire y_t, $t \in \mathbb{Z}$ qui satisfait la représentation **canonique** ARMA suivante

$$\begin{aligned} \Phi(L)\, y_t &= \Theta(L)\, \varepsilon_t \\ y_t - \sum_{j=1}^{p} \phi_j y_{t-j} &= \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \varepsilon_{t-k} \end{aligned}$$

où ε_t est un bruit blanc faible de variance σ^2. Nous allons étudier le coefficient de détermination R^2 d'un modèle ARMA(p,q) qui représente la fraction de la variance de $(y_t)_t$ qui peut être prédite (Chapitre 5).

1. Rappelez l'expression du coefficient de détermination en fonction de la fonction d'autocovariance de $(y_t)_t$ et de la variance de l'innovation .

Réponse: $R^2 = 1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_y(0)}$

2. On suppose que $\Phi(L) = 1$.

2.a. Donner la forme du coefficient de détermination. Quels sont les processus de cette famille pour lesquels la coefficient de détermination est le plus élevé.

Réponse : Le processus est une moyenne mobile, $\gamma_y(0) = \sigma_\varepsilon^2\left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2\right)$ et donc $R^2 = \frac{\sum_{j=1}^q \theta_j^2}{1+\sum_{j=1}^q \theta_j^2}$. Le coefficient de détermination est d'autant plus grand que $\sum_{j=1}^q \theta_j^2$ est grand.

2.b. On suppose que le processus $(y_t)_t$ satisfait une représentation MA(1) de paramètre θ_1. Quelle est la valeur maximale du coefficient de détermination ?

Réponse : nous considérons la représentation canonique et avons pour $|\theta_1| \leq 1$,

$$R^2 = \frac{\theta_1^2}{1+\theta_1^2} \leq \frac{1}{2}$$

2.c. On suppose que le processus $(y_t)_t$ satisfait une représentation MA(2) de paramètre θ_1.et θ_2. Quelle est la valeur maximale du coefficient de détermination ?

Réponse : nous considérons la représentation canonique donc il existe u_1 et u_2 éventuellement complexes conjugués tels que $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$, $\theta_1 = -u_1 - u_2$ et $\theta_2 = u_1 u_2$ et

$$R^2 = \frac{(u_1+u_2)^2 + u_1^2 u_2^2}{1 + (u_1+u_2)^2 + u_1^2 u_2^2} = 1 - \frac{1}{1 + (u_1+u_2)^2 + u_1^2 u_2^2}$$

Maximiser R^2 est équivalent à maximiser $(u_1+u_2)^2+u_1^2u_2^2$, expression symétrique en (u_1,u_2). Elle est maximale sous nos contraintes en $(u_1,u_2)=(1,1)$ ou $(u_1,u_2)=(-1,-1)$, ce qui donne

$$R^2 \leq \frac{5}{6}$$

3. On suppose que $\Theta(L)=1$.

3.a. Donner l'expression du coefficient de détermination en fonction de la fonction d'autocorrélation.

Réponse : par les équations de Yule-Walker, nous avons à l'ordre 0

$$\gamma_y(0)=\sum_{j=1}^{p}\phi_j\gamma_y(j)+\sigma_\varepsilon^2$$

d'où

$$\begin{aligned}1-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_y(0)} &= 1-\frac{\gamma_y(0)-\sum_{j=1}^{p}\phi_j\gamma_y(j)}{\gamma_y(0)}\\ R^2 &= \sum_{j=1}^{p}\phi_j\rho_y(j)\end{aligned}$$

et pour les ordres 1 à p,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\rho_y(1)\\ \vdots\\ \rho_y(p)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\rho_y(0) & \cdots & \rho_y(p-1)\\ \vdots & \rho_y(0) & \vdots\\ \rho_y(p-1) & \cdots & \rho_y(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_p\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{\rho_y} &= R_y(p)\,\Phi\end{aligned}$$

d'où

$$R^2=\overrightarrow{\rho_y}'R_y(p)^{-1}\overrightarrow{\rho_y}$$

3.b. On suppose que le processus $(y_t)_t$ satisfait une représentation AR(1). Donner l'expression du R^2.

Réponse : nous avons directement $R^2=\rho_y(1)^2=\phi_1^2$

3.c. On suppose le processus $(y_t)_t$ satisfait une représentation AR(2). Donner l'expression du R^2 en fonction de la fonction d'autocorrélation à l'ordre 1 et de l'autocorrélation partielle à l'ordre 2. Interpréter cette équation. Un processus AR(2) a pour deux premières valeurs de sa fonction d'autocorrélation partielle $r_y(1)=0,05$ et $r_y(2)=0,70$. A quelle valeur du R^2 dans l'ajustement d'un modèle AR(2) doit-on s'attendre ?

Réponse : nous avons

$$\begin{aligned}R^2 &= \begin{pmatrix}\rho_y(1) & \rho_y(2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \rho_y(1)\\ \rho_y(1) & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\rho_y(1)\\ \rho_y(2)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{1-\rho_y(1)^2}\begin{pmatrix}\rho_y(1) & \rho_y(2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_y(1)(1-\rho_y(2))\\ \rho_y(2)-\rho_y(1)^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{\rho_y(1)^2+\rho_y(2)^2-2\rho_y(1)^2\rho_y(2)}{1-\rho_y(1)^2}\end{aligned}$$

Si $(y_t)_t$ satisfait une représentation AR(2), nous avons par définition de la fonction d'autocorrélation partielle

$$\begin{pmatrix}\rho_y(1)\\ \rho_y(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \rho_y(1)\\ \rho_y(1) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ r_y(2)\end{pmatrix}$$

d'où

$$r_y(2)=\frac{\rho_y(2)-\rho_y(1)^2}{1-\rho_y(1)^2}$$

et

$$\rho_y(2)=\left(1-\rho_y(1)^2\right)r_y(2)+\rho_y(1)^2$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \frac{\rho_y(1)^2 + \left(\left(1-\rho_y(1)^2\right) r_y(2) + \rho_y(1)^2\right)^2 - 2\rho_y(1)^2 \left(\left(1-\rho_y(1)^2\right) r_y(2) + \rho_y(1)^2\right)}{1-\rho_y(1)^2} \\
&= \rho_y(1)^2 + r_y(2)^2 \left(1-\rho_y(1)^2\right)
\end{aligned}
$$

Cette équation peut être interprétée de la façon suivante : la capacité prédictive de y_{t-1} et y_{t-2} à prédire y_t peut se décomposer en la capacité prédictive de y_{t-1} seule $(\rho_y(1)^2)$ augmentée de la fraction $r_y(2)^2 = \phi_2^2$ de la partie non prédite par y_{t-1} $(1-\rho_y(1)^2)$. Dans l'exemple numérique, nous obtenons $R^2 = (0,05)^2 + (0,70)^2 (1-(0,05)^2) = 0,49$.

ECOLE POLYTECHNIQUE
PROGRAMME d'APPROFONDISSEMENT
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES, ÉCONOMIE, QUANTITATIVE ECONOMICS AND FINANCE

"Processus et estimation" - MAP565

Examen - 21 mars 2011

Exercice 1: Variations sur un processus MA(1) (7 points)

Soit $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus satisfaisant une représentation MA(1)

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Donnez les conditions sous lesquelles le processus $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le processus des innovations de $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Nous supposons ces conditions satisfaites par la suite.

2 Nous supposons que les ε_t sont i.i.d de distribution normale. Nous définissons le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ comme suit:

$$\begin{cases} x_t = 1 & \text{si } y_t > 0 \\ x_t = 0 & \text{si } y_t \leq 0 \end{cases}$$

2.a. Montrez que $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationaire du second ordre.

2.b. Montrez que le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation MA(1)

$$x_t = m + u_t - \alpha u_{t-1}$$

Donnez la valeur de m et l'équation satisfaite par α. Dans la suite, nous admettons le résultat suivant: si $\lambda = 8\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\theta+\theta^2}{1-\theta+\theta^2}}\right)$, nous avons:

$$\begin{array}{cc} \lambda \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[& \alpha = \frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \\ \lambda = 2\pi & \alpha = 0 \\ \lambda \in \left]2\pi, \frac{8\pi}{3}\right] & \alpha = -\frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \end{array}$$

2.c. Est-ce que les variables aléatoires $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes ?

2.d. Un grand échantillon d'observations $\{x_1, ..., x_T\}$ est disponible, le paramètre α est estimé par la méthode des Moindres Carrés Conditionnels. Lorsque T tend vers l'infini, comment procédez-vous pour construire la loi asymptotique d'un estimateur de θ à partir de $\widehat{\alpha}_T$?

3. Nous considérons maintenant le processus : $\forall t \in \mathbb{Z}$, $z_t = y_t + x_t$

3.a. Donnez le domaine des valeurs prises par le processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

3.b. Est-ce que le processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationaire du second ordre ? [On rappelle que si $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}'$ est un vector aléatoire normal de dimension 2 de moyenne 0 et de matrice de variance-covariance

$$\begin{pmatrix} s^2 & \rho s\omega \\ \rho s\omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

alors $E\left[u1_{v>0}\right] = \frac{\rho s}{\sqrt{2\pi}}$.]

3.c. Donner la représentation AR, MA ou ARMA satisfaite par $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (les cas $\theta = 0$ et $\theta \neq 0$ devront être traités séparément).

3.d. Un échantillon d'observations $\{z_1, ..., z_T\}$ est disponible, comment procédez-vous pour estimer θ et σ^2?

□□□

Exercice 2: Processus autoregressif avec une moyenne variant dans le temps (7 points)

Nous considérons le processus réel $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ dont le processus de génération des données est

$$y_t = \mu(m_t) + \phi y_{t-1} + \eta_t \tag{1}$$

où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une bruit blanc fort de variance σ^2 et de loi de probabilité $l(\eta;\sigma^2)$ et $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une Chaîne de Markov d'ordre 1 avec deux états $\{0,1\}$, c'est-à-dire une variable aléatoire qui prend seulement les deux valeurs 0 ou 1 telle que

$$\begin{aligned} P(m_t = 0\,|m_{t-1} = 0) &= p \\ P(m_t = 1\,|m_{t-1} = 1) &= q \end{aligned}$$

avec $p \notin \{0,1\}$ et $q \notin \{0,1\}$. Nous notons P la matrice de transition de probabilité associée au processus de Markov m_t

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

Nous supposons que les processus $(\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont indépendants. Nous notons $\mu(0) = \mu_0$ et $\mu(1) = \mu_1$.

a. Donnez la distribution de probabilité invariante π de la chaîne de Markov définie par $\pi = P\pi$ avec les notations retenues. Dans la suite, on tire m_0 dans la distribution invariante π [$\begin{pmatrix} P(m_0 = 0) & P(m_0 = 1) \end{pmatrix}' = \pi$].

b. Montrez que $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est stationaire du second ordre. Vous pouvez travailler en deux temps. Premièrement montrer que $Em_t\,|m_{t-1}$ est une fonction affine de m_{t-1}. Secondement, calculer la fonction d'autocovariance de $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

c. Donnez la représentation AR, MA ou ARMA satisfaite par $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

d. Montrez qu'il existe un bruit blanc faible $(\zeta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de variance σ_ζ^2 et une nombre réel θ ($|\theta| < 1$) tel que $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ satisfait une représentation ARMA(2,1) de moyenne μ^*. La paramétrisation retenue de la forme MA est

$$\Theta(L)\,\zeta_t = \zeta_t + \theta\zeta_{t-1}$$

Donnez l'ensemble d'équations qui détermine μ^*, σ_ζ^2 et θ.

e. Quelles sont les propriétés de $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ lorsque $p = q = \frac{1}{2}$? Donnez sa moyenne et la variance de son processus des innovations.

f. Un statisticien estime l'équation dérivée en **d**, peut-il produire à partir de cette estimation une estimation de tous les paramètres de l'équation (1)?

□□□

Exercice 3: Processus stationaire autorégressif (6 points)

Nous cherchons lorsqu'ils existent les processus réels stationaires du second ordre qui satisfont l'équation suivante

$$y_t = \phi y_{t-1} + \phi y_{t+1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

où $\phi \neq 0$.

1. Nous supposons dans cette première partie que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc centré de moyenne nulle et de variance σ^2.

1.a. Donnez les valeurs de ϕ et σ^2 pour lesquelles existe un processus stationaire du second ordre $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait (2).

1.b. Donnez la représentation canonique de $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, sa fonction d'autocovariance et sa prédiction linéaire $p_{H_y^{t-1}}(y_t)$ (horizon 1) quand $|\phi| < \frac{1}{2}$.

1.c. On estime par le maximum de vraisemblance conditionnelle sous l'hypothèse de normalité de l'innovation et d'une variance de cette dernière connue σ^2, donnez la matrice de variance-covariance asymptotique des estimateurs des coefficients du AR.

2. Nous supposons maintenant que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est de moyenne nulle et de variance 1 tel que $\forall t \neq s$, $E\varepsilon_t y_s = 0$.

2.a. Montrez que s'il existe une processus stationaire du second ordre $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant (2) , il doit satisfaire une représentation MA.

2.b. Montrez alors que s'il existe un processus stationaire du second ordre $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait (2), il doit satisfaire une représentation AR.

2.c. Donnez les valeurs de ϕ pour lesquelles les deux processus introduits ci-dessus sont solution de (2) quand $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus de moyenne nulle et de variance 1 tel que $\forall t \neq s$, $E\varepsilon_t y_s = 0$.

ECOLE POLYTECHNIQUE
PROGRAMME d'APPROFONDISSEMENT
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES, ÉCONOMIE, QUANTITATIVE ECONOMICS AND FINANCE

"Processes and estimation" - MAP565

Exam - March, 21st 2011

Exercise 1: Variation on a MA(1) process (7 points)
Let $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a process satisfying a MA(1) representation

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

where $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise whose variance is equal to σ^2.

1. Give the conditions under which the process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is the innovation process of $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. We assume these conditions satisfied in the sequel.

2 We assume that ε_t are i.i.d with a Gaussian distribution. We define a process $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ as follows:

$$\begin{cases} x_t = 1 & \text{if } y_t > 0 \\ x_t = 0 & \text{if } y_t \leq 0 \end{cases}$$

2.a. Show that $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a second order stationary process.

2.b. Show that the process $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfies a MA(1) representation

$$x_t = m + u_t - \alpha u_{t-1}$$

Give the value of m and give the equation satisfied by α. In the sequel, we admit the following result denoting $\lambda = 8\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\theta+\theta^2}{1-\theta+\theta^2}}\right)$, we have:

$$\begin{array}{cc} \lambda \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[& \alpha = \frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \\ \lambda = 2\pi & \alpha = 0 \\ \lambda \in \left]2\pi, \frac{8\pi}{3}\right] & \alpha = -\frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \end{array}$$

2.c. Are the random variables $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ independent ?

2.d. A large sample of observations $\{x_1, ..., x_T\}$ is available, the parameter α is estimated by a Conditional Least Squares method. When T is large, how do you proceed to derive the asymptotic distribution of an estimate of θ derived from $\widehat{\alpha}_T$?

3. We consider now the process: $\forall t \in \mathbb{Z}$, $z_t = y_t + x_t$

3.a. Give the range of values taken by the process $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

3.b. Is the process $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ second order stationary ? [Use that if $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}'$ is a bivariate Gaussian variable whose mean is 0 and variance-covariance matrix

$$\begin{pmatrix} s^2 & \rho s\omega \\ \rho s\omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

then $E[u 1_{v>0}] = \frac{\rho s}{\sqrt{2\pi}}$.]

3.c. Give the AR, MA or ARMA representation satisfied by $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (the cases $\theta = 0$ and $\theta \neq 0$ should be considered separately).

3.d. A sample of observations $\{z_1, ..., z_T\}$ is available, how do you proceed to estimate θ and σ^2?

□□□

Exercise 2: Autoregressive process with a time-varying mean (7 points)

We consider the real valued time series $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ whose data generating equation is

$$y_t = \mu(m_t) + \phi y_{t-1} + \eta_t \tag{1}$$

where $(\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is a strong white noise whose variance is equal to σ^2 and its probability distribution $l(\eta;\sigma^2)$ and $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is a Markov Chain of order 1 with two states $\{0,1\}$, i.e. a random variable that can only take the two values 0 or 1 such that

$$\begin{aligned} P(m_t = 0 \,|m_{t-1} = 0) &= p \\ P(m_t = 1 \,|m_{t-1} = 1) &= q \end{aligned}$$

with $p \notin \{0,1\}$ and $q \notin \{0,1\}$. We denote P the transition matrix associated to the Markov process m_t

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

We assume that $(\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ and $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ are independent. We denote $\mu(0) = \mu_0$ and $\mu(1) = \mu_1$.

a. Give the invariant probability distribution π defined with the above notations by $\pi = P\pi$. In the sequel, m_0 is drawn according to this invariant probability distribution π [$\begin{pmatrix} P(m_0 = 0) & P(m_0 = 1) \end{pmatrix}' = \pi$].

b. Show that $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is second order stationary. You can proceed in two steps. First, show that $Em_t\,|m_{t-1}$ is an affine function of m_{t-1}. Second, compute the autocovariance function of $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

c. Give the AR, MA or ARMA representation satisfied by $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

d. Show that there exist a weak white noise $(\zeta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ whose variance is equal to σ_ζ^2 and a real number θ ($|\theta| < 1$) such that $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ satisfies an ARMA$(2,1)$ with a mean equal to μ^*. The MA parameterization will be denoted by

$$\Theta(L)\,\zeta_t = \zeta_t + \theta\zeta_{t-1}$$

Give the set of equations that determines μ^*, σ_ζ^2 and θ.

e. What are the properties of $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ when $p = q = \frac{1}{2}$? Give its mean and the variance of its innovation process.

f. A statistician estimates the equation derived in **d**, can he compute from this estimation an estimate for all the parameters of equation (1)?

□□□

Exercise 3: Stationary autoregressive process (6 points)

We want to determine the real centered second order stationary processes, if any, that satisfy the following equation

$$y_t = \phi y_{t-1} + \phi y_{t+1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

where $\phi \neq 0$.

1. We assume in this first part that $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a centered weak white noise whose variance is equal to σ^2.

1.a. Give the values of ϕ and σ^2 for which there exists a second order stationary process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ that satisfies (2).

1.b. Give the canonical representation of $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, its autocovariance function and linear prediction $p_{H_y^{t-1}}(y_t)$ (horizon 1) when $|\phi| < \frac{1}{2}$.

1.c. When estimating this model in a Conditional Maximum Likelihood approach under the assumption that the innovation is normally distributed and its variance is known equal to σ^2, give the asymptotic variance-covariance matrix of the AR coefficient estimates.

2. We now assume that $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a zero mean and unit variance process such that $\forall t \neq s$, $E\varepsilon_t y_s = 0$.

2.a. Show that if there exists a second order stationary process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfying (2), it must satisfy a MA representation.

2.b. Show then that if there exists a second order stationary process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ that satisfies (2), it must satisfy an AR representation.

2.c. Give the values of ϕ for which the above processes are the solutions of (2) when $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a zero mean and unit variance process such that $\forall t \neq s$, $E\varepsilon_t y_s = 0$.

PROGRAMME d'APPROFONDISSEMENT
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES,
ÉCONOMIE,
QUANTITATIVE ECONOMICS AND FINANCE
"Processes and estimation"

Exam
March, 21st 2011

Exercise 1: Variation on a MA(1) process (7 points)
Let $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a process satisfying a MA(1) representation

$$y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

where $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise whose variance is equal to σ^2.

1. Give the conditions under which the process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is the innovation process of $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. We assume this condition satisfied in the sequel.

1. Answer: $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is the innovation process of $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ if $|\theta| \leq 1$. (Proposition 20 and Exercise 15)

2 We assume that ε_t are i.i.d with a Gaussian distribution. We define a process $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ as follows:

$$\begin{cases} x_t = 1 & \text{if } y_t > 0 \\ x_t = 0 & \text{if } y_t \leq 0 \end{cases}$$

2.a. Show that $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a covariance stationary process.

2.a. Answer: $\forall t \in \mathbb{Z}, y_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(1+\theta^2\right)\right)$, thus $P(x_t = 1) = P(x_t = 0) = 0.5$, therefore $Ex_t = 0.5$ and $Vx_t = 0.25$. Moreover,

$$\begin{aligned} cov(x_t, x_{t-h}) &= Ex_t x_{t-h} - 0.25 \\ &= P(x_t = 1, x_{t-h} = 1) - 0.25 \\ &= P(y_t > 0, y_{t-h} > 0) - 0.25 \end{aligned}$$

If $h > 1$, $\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0$ and $\varepsilon_{t-h} - \theta\varepsilon_{t-h-1} > 0$ are independent r.v.s and

$$P(y_t > 0, y_{t-h} > 0) = P(y_t > 0)\, P(y_{t-h} > 0)$$

whence $cov(x_t, x_{t-h}) = 0$. If $h = 1$, $P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0)$ does not depend on t since $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})$ is a triplet of independent normaly distributed r.v.s. therefore

$$cov(x_t, x_{t-1}) = P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) - 0.25$$

does not depend on t. $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a covariance stationary process.

2.b. Show that the process $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfies a MA(1) representation

$$x_t = m + u_t - \alpha u_{t-1}$$

Give the value of m and give the equation satisfied by α. In the sequel, we admit the following result, denoting $\lambda = 8\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\theta+\theta^2}{1-\theta+\theta^2}}\right)$, we have:

$$\begin{array}{cc} \lambda \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[& \alpha = \frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \\ \lambda = 2\pi & \alpha = 0 \\ \lambda \in \left]2\pi, \frac{8\pi}{3}\right] & \alpha = -\frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \end{array}$$

2.b. Answer: From 2.a., we have $m = 0.5$. The autocovariance function is equal to 0 for $h > 1$, the process $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfies a MA(1) representation. To compute α, we have to compute the quantity $P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0)$ where $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})$ is a triplet of independent normaly distributed r.v.s. We know that

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta \\ -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} \right)$$

The variance-covariance matrix can be diagonalized as follows

$$\begin{pmatrix} 1+\theta^2 & -\theta \\ -\theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\theta^2+\theta & 0 \\ 0 & 1+\theta^2-\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}$$

There exist two independent standard gaussian r.v.s (z_1, z_2) such that

$$\begin{aligned} \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} &= \sigma\sqrt{\tfrac{1+\theta^2+\theta}{2}} z_1 + \sigma\sqrt{\tfrac{1+\theta^2-\theta}{2}} z_2 = \sigma\sqrt{\tfrac{1+\theta^2-\theta}{2}} \left(\sqrt{\tfrac{1+\theta^2+\theta}{1+\theta^2-\theta}} z_1 + z_2 \right) \\ \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} &= -\sigma\sqrt{\tfrac{1+\theta^2+\theta}{2}} z_1 + \sigma\sqrt{\tfrac{1+\theta^2-\theta}{2}} z_2 = \sigma\sqrt{\tfrac{1+\theta^2-\theta}{2}} \left(-\sqrt{\tfrac{1+\theta^2+\theta}{1+\theta^2-\theta}} z_1 + z_2 \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) &= P\left(\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) z_1 + z_2 > 0, -\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) z_1 + z_2 > 0 \right) \\ &= \int\int_{\left\{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)z_1+z_2>0, -\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right)z_1+z_2>0\right\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(z_1^2+z_2^2\right)} dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

where $\lambda > 0$. Using polar coordinates $(z_1, z_2) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, we have

$$P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) = \int\int_D \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\rho d\phi$$

with $D = \left\{\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tan\phi > \tan\frac{\lambda}{8}\right\} \cup \left\{\phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \tan\phi < \tan\frac{\lambda}{8}\right\}$ or $D = \left[\frac{\lambda}{8}, \pi - \frac{\lambda}{8}\right]$ whence

$$P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\rho \int_{\frac{\lambda}{8}}^{\pi - \frac{\lambda}{8}} d\phi$$

and

$$4P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) - 1 = 1 - \frac{\lambda}{2\pi}.$$

The autocovariance function $\gamma_x(h)$ is such that

$$\begin{aligned} \gamma_x(0) &= \sigma_u^2\left(1+\alpha^2\right) = 0.25 \\ \gamma_x(1) &= -\sigma_u^2\alpha = P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) - 0.25 \end{aligned}$$

the ratio $\frac{\gamma_x(1)}{\gamma_x(0)}$ gives

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = -\left(4P(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} > 0, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2} > 0) - 1\right)$$

and

$$\alpha^2 + \frac{2\pi}{2\pi - \lambda}\alpha + 1 = 0$$

whence the results:

$$\begin{array}{cc} \lambda \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[& \alpha = \frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \\ \lambda = 2\pi & \alpha = 0 \\ \lambda \in \left]2\pi, \frac{8\pi}{3}\right] & \alpha = -\frac{\sqrt{(3\pi-\lambda)(\lambda-\pi)}-\pi}{2\pi-\lambda} \end{array}$$

2.c. Are the random variables $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ independent ?

2.c. Answer: The r.v.s $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are not independent.

$$\begin{aligned} P\left(x_t = 1 \text{ or } x_t = 0\right) &= 1 \\ P\left(u_t - \alpha u_{t-1} = 0.5 \text{ or } u_t - \alpha u_{t-1} = -0.5\ \right) &= 1 \\ P\left(u_t = \alpha u + 0.5 \text{ or } u_t = \alpha u - 0.5 \,|u_{t-1} = u\ \ \right) P\left(u_{t-1} = u\right) &= 1 \end{aligned}$$

Conditionally on u_{t-1}, the r.v. u_t can take only two values that depend on u_{t-1}.

2.d. A large sample of observations $\{x_1, ..., x_T\}$ is available, the parameter α is estimated by a Conditional Least Squares method. When T is large, how do you proceed to derive the asymptotic distribution of an estimate of θ derived from $\widehat{\alpha}_T$?

2.d. Answer: We first compute the relation between α and θ. We have

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\pi \frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha^2} \\ \cos\left(\frac{\lambda}{4}\right)\theta^2 + \theta + \cos\left(\frac{\lambda}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

In the second equation, we select the root whose modulus is less than 1 (the product of the two roots is equal to 1), we get

$$\begin{array}{cc} \lambda \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[& \theta = \frac{\sqrt{1-4\cos^2\frac{\lambda}{4}}-1}{2\cos\frac{\lambda}{4}} \\ \lambda = 2\pi & \theta = 0 \\ \lambda \in \left]2\pi, \frac{8\pi}{3}\right] & \theta = \frac{\sqrt{1-4\cos^2\frac{\lambda}{4}}-1}{2\cos\frac{\lambda}{4}} \end{array}$$

or

$$\lambda \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \quad \theta = \frac{-2\cos\frac{\lambda}{4}}{\sqrt{1-4\cos^2\frac{\lambda}{4}}+1}$$

We know that

$$\sqrt{T}\left(\widehat{\alpha}_T - \alpha\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, 1-\alpha^2\right)$$

and by Lemma 2, we get that

$$\sqrt{T}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \left[\frac{d\theta}{d\alpha}\right]^2 \left(1-\alpha^2\right)\right)$$

where $\frac{d\theta}{d\alpha}$ is computed at the value θ and $\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{d\theta}{d\lambda}\left(\lambda\left(\alpha\right)\right)\frac{d\lambda}{d\alpha}$, $\frac{d\lambda}{d\alpha} = 2\pi\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$ and $\frac{d\theta}{d\lambda}\left(\lambda\left(\alpha\right)\right) = \frac{\sin\frac{\lambda}{4}\left(1-\sqrt{1-4\cos^2\frac{\lambda}{4}}\right)}{4\cos^2\frac{\lambda}{4}\sqrt{1-4\cos^2\frac{\lambda}{4}}}$.

3. We consider now the process: $\forall t \in \mathbb{Z}$, $z_t = y_t + x_t$

3.a. Give the range of values taken by the process $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

3.a. Answer: The values taken by the process $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are in $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

3.b. Is the process $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ covariance stationary ? [Use that if $\left(\begin{array}{cc} u & v \end{array}\right)'$ is a bivariate Gaussian variable whose mean is 0 and variance-covariance matrix

$$\left(\begin{array}{cc} s^2 & \rho s\omega \\ \rho s\omega & \omega^2 \end{array}\right)$$

then $Eu1_{v>0} = \frac{\rho s}{\sqrt{2\pi}}$.]

3.b. Answer: The process $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is such that $Ez_t = Ex_t + Ey_t = 0.5$ and

$$cov\left(z_t, z_{t-h}\right) = \gamma_y\left(h\right) + \gamma_x\left(h\right) + Ey_t\left(x_{t-h} - 0.5\right) + E\left(x_t - 0.5\right)y_{t-h}$$

where the two last terms are respectively equal to $Ey_t x_{t-h} = E\left(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}\right)1_{\varepsilon_{t-h}-\theta\varepsilon_{t-h-1}>0}$ and $Ex_t y_{t-h} = E\left(\varepsilon_{t-h} - \theta\varepsilon_{t-h-1}\right)1_{\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1}>0}$. These quantities are equal to 0 when $|h| > 1$ because the r.v.s involved in the computation are independent. Consequently, the autocovariance function is equal to 0 for $|h| > 1$. When $h = 0$, we have to compute $EV1_{V>0}$ when V is a Gaussian r.v. whose variance is equal to $\sigma^2\left(1+\theta^2\right)$

$$\int_0^{+\infty} v\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(1+\theta^2\right)}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2\left(1+\theta^2\right)}}dv = \sqrt{\frac{\sigma^2\left(1+\theta^2\right)}{2\pi}}$$

so that $\gamma_z(0) = \left(1+\theta^2\right)\sigma^2 + \left(1+\alpha^2\right)\sigma_u^2 + 2\sqrt{\frac{\sigma^2(1+\theta^2)}{2\pi}}$. When $h = 1$, we have

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}\right)1_{\varepsilon_{t-1}-\theta\varepsilon_{t-2}>0} &= -\theta E\varepsilon_{t-1}1_{\varepsilon_{t-1}-\theta\varepsilon_{t-2}>0} \\ &= -\frac{\theta\sigma}{\sqrt{2\pi\left(1+\theta^2\right)}} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}\right)1_{\varepsilon_{t}-\theta\varepsilon_{t-1}>0} &= E\varepsilon_{t-1}1_{\varepsilon_{t}-\theta\varepsilon_{t-1}>0} \\ &= -\frac{\theta\sigma}{\sqrt{2\pi\left(1+\theta^2\right)}} \end{aligned}$$

so that $\gamma_z(1) = -\left[\theta\sigma^2 + \alpha\sigma_u^2 + \frac{2\theta\sigma}{\sqrt{2\pi(1+\theta^2)}}\right]$. These quantities do not depend on t. The process is covariance stationary. It cannot be a white noise, since its mean is different from 0. It can have an autocovariance function equal to 0 ($h \neq 0$) when $\theta = 0$.

3.c. Give the AR, MA or ARMA representation satisfied by $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (the cases $\theta = 0$ and $\theta \neq 0$ should be considered separately).

3.c. Answer: The autocovariance function of $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is that of a MA(1) process when $\theta \neq 0$ or that of the sum of a white noise and a constant equal to 0.5 when $\theta = 0$.

3.d. A sample of observations $\{z_1, ..., z_T\}$ is available, how do you proceed to estimate θ and σ^2?

3.d. Answer: It is possible to compute the value of y_t from the observation of z_t since when $z_t > 1$, $y_t = z_t - 1$ and when $z \leq 0$, then $y_t = z_t$. We can use a CLS or ML estimation method on the sample of recovered observations $\{y_1, ..., y_T\}$

Exercise 2: Autoregressive process with a time-varying mean (7 points)

We consider the real valued time series $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ whose data generating equation is

$$y_t = \mu\left(m_t\right) + \phi y_{t-1} + \eta_t \tag{1}$$

where $(\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is a strong white noise whose variance is equal to σ^2 and its probability distribution $l\left(\eta;\sigma^2\right)$ and $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is a Markov Chain of order 1 with two states $\{0, 1\}$ such that

$$\begin{aligned} P\left(m_t = 0\left|m_{t-1} = 0\right.\right) &= p \\ P\left(m_t = 1\left|m_{t-1} = 1\right.\right) &= q \end{aligned}$$

with $p \notin \{0, 1\}$ and $q \notin \{0, 1\}$. We denote P the transition matrix associated to the Markov process m_t

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

We assume that $(\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ and $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ are independent. We denote $\mu(0) = \mu_0$ and $\mu(1) = \mu_1$.

1.a Give the invariant probability distribution π defined with the above notations by $\pi = P\pi$. In the sequel, m_0 is drawn according to this invariant probability distribution π.

1.a. Answer: The invariant probability distribution of this Markov chain is such that

$$\pi = P\pi$$

which gives

$$\begin{aligned}\pi_0 &= P(m_t = 0) = \frac{1-q}{2-p-q} \\ \pi_1 &= P(m_t = 1) = \frac{1-p}{2-p-q}\end{aligned}$$

1.b. Show that $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is covariance stationary. You can proceed in two steps. First show that $Em_t\,|m_{t-1}$ is an affine function of m_{t-1}. Second, compute the autocovariance function of $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

1.b. Answer: We rewrite the generating equation as follows

$$y_t = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\,m_t + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

On the one hand, we have

$$\begin{aligned}Em_t\,|m_{t-1} &= P(m_t = 1\,|m_{t-1}) \\ &= (1-p)(1-m_{t-1}) + qm_{t-1}\end{aligned}$$

or

$$E(m_t - \pi_1)\,|m_{t-1} = (q+p-1)(m_{t-1} - \pi_1)$$

If m_0 is drawn in π, the process $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ is covariance stationary:

$$\begin{aligned}Em_t &= \pi_1 \\ Vm_t &= \pi_1\pi_0 \\ cov(m_t, m_{t+1}) &= E(m_t - \pi_1)(m_{t+1} - \pi_1) \\ &= E(E(m_{t+1} - \pi_1)\,|m_t)(m_t - \pi_1) \\ &= (q+p-1)\,Vm_t\end{aligned}$$

and using the recurrence

$$cov(m_t, m_{t+h}) = (q+p-1)^h\,Vm_t$$

1.c. Give the AR, MA or ARMA representation satisfied by $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

1.c. Answer: By assumption $|q+p-1| < 1$, the autocovariance function is that of an AR(1). I can be checked that the partial auotocorrelation function is equal to 0 for lags strictly larger than 1. We can construct a weak white noise u_t, that is the innovation process of the linear representation of $(m_t)_{t\in\mathbb{N}}$ such that

$$m_t - \pi_1 = (q+p-1)(m_{t-1} - \pi_1) + u_t$$

where $Vu_t = V(m_t - Em_t\,|m_{t-1}) = \left(1 - (q+p-1)^2\right)\pi_1\pi_0$.

1.d. Show that there exist a weak white noise $(\zeta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ whose variance is equal to σ_ζ^2 and a real number θ ($|\theta| < 1$) such that $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ satisfies an ARMA$(2,1)$ with a mean equal to μ^*. The MA parameterization will be denoted by

$$\Theta(L)\,\zeta_t = \zeta_t + \theta\zeta_{t-1}$$

Give the set of equations that determines μ^*, σ_ζ^2 and θ.

1.d. Answer: We thus can write

$$\begin{aligned}y_t &= \pi_0\mu_0 + \pi_1\mu_1 + (\mu_1 - \mu_0)(m_t - \pi_1) + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \\ y_t - \frac{\pi_0\mu_0 + \pi_1\mu_1}{1-\phi} &= (\mu_1 - \mu_0)(m_t - \pi_1) + \phi\left(y_{t-1} - \frac{\pi_0\mu_0 + \pi_1\mu_1}{1-\phi}\right) + \varepsilon_t\end{aligned}$$

where

$$(1-(q+p-1)L)(1-\phi L)\left(y_t-\frac{\pi_0\mu_0+\pi_1\mu_1}{1-\phi}\right)=(\mu_1-\mu_0)u_t+(1-(q+p-1)L)\varepsilon_t$$

Let us denote $\mu^*=\frac{\pi_0\mu_0+\pi_1\mu_1}{1-\phi}$ and $\xi_t=(\mu_1-\mu_0)u_t+(1-(q+p-1)L)\varepsilon_t$, this process is such that

$$\begin{aligned}E\xi_t^2 &= (\mu_1-\mu_0)^2\left(1-(q+p-1)^2\right)\pi_1\pi_0+\left(1+(q+p-1)^2\right)\sigma^2\\ E\xi_{t+1}\xi_t &= -(q+p-1)\sigma^2\\ E\xi_{t+h}\xi_t &= 0 \qquad \forall h>1\end{aligned}$$

This autocovariance function characterizes a MA(1) process. There exists $(\zeta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ weak white noise whose variance is σ_ζ^2 such that

$$\xi_t=\zeta_t+\theta\zeta_{t-1}$$

where $|\theta|<1$. $\left(\sigma_\zeta^2,\theta\right)$ are the solutions of the two equations

$$\begin{aligned}\sigma_\zeta^2\left(1+\theta^2\right) &= (\mu_1-\mu_0)^2\left(1-(q+p-1)^2\right)\pi_1\pi_0+\left(1+(q+p-1)^2\right)\sigma^2\\ \sigma_\zeta^2\theta &= -(q+p-1)\sigma^2\end{aligned}$$

The second degree polynomial equation that determines θ has two roots whose product is equal to 1, we select the root with the smallest modulus.

1.e. What are the properties of $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ when $p=q=\frac{1}{2}$? Give its mean and the variance of its innovation process.

1.e. Answer : When $p=q=\frac{1}{2}$, the Markov chain is degenerate. m_t is equal to 0 or 1 with probability $\frac{1}{2}$ that does not depend on the past information. m_t is a Bernoulli random variable. $\mu(m_t)-\frac{\mu_0+\mu_1}{2}$ is a white noise. Consequently $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfies the following generating equation

$$y_t-\frac{\mu_0+\mu_1}{2}=\phi y_{t-1}+\mu(m_t)-\frac{\mu_0+\mu_1}{2}+\varepsilon_t$$

It is an AR(1) process whose AR coefficient is ϕ, its mean is $\frac{\mu_0+\mu_1}{2(1-\phi)}$ and the variance of its innovation process is $\sigma^2+\frac{(\mu_1-\mu_0)^2}{4}$.

1.f. A statistician estimates the equation derived in 1.d, can he compute from this estimation an estimate for all the parameters of equation (1)?

1.f. Answer : The model is characterized by $\left(p,q,\mu_0,\mu_1,\phi,\sigma^2\right)$. The canonical AR(2) representation involves five parameters $\left(\phi_1,\phi_2,\mu,\theta,\sigma_\zeta^2\right)$. The statistician cannot derive the six parameters of (1) from the five parameters of the linear representation.

Exercise 3: Stationary autoregressive process (6 points)

We want to determine the real centered second order stationary processes, if any, that satisfy the following equation

$$y_t=\phi y_{t-1}+\phi y_{t+1}+\varepsilon_t \tag{2}$$

where $\phi\neq 0$.

1. We assume in this first part that $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise whose variance is equal to σ^2.

1.a. Give the values of ϕ and σ^2 for which there exists a second order stationary process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ that satisfies (2).

1.a. Answer : If $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a second order stationary process then $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is given by the application of the filter $\left(1-\phi\left(L^{-1}+L\right)\right)$ on y_t. Its associated transfer function is

$$h(\omega)=1-2\phi\cos\omega$$

We can compute the spectral measure of $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ in applying the inverse of this filter on the white noise if the transfer function is in $L^2\left(]-\pi,\pi],d\omega\right)$. We then indeed have the relation

$$\frac{\sigma^2}{2\pi}d\omega = (1-2\phi\cos\omega)^2\, d\mu_y(\omega)$$

and the spectral density of y_t is given by

$$d\mu_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi(1-2\phi\cos\omega)^2}d\omega$$

if the integral of this function on $]-\pi,\pi]$ is bounded. Two cases must be considered :

(i) If $|\phi| \geq \frac{1}{2}$, the function is not integrable except when $\sigma = 0$. $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ then satisfies the recurrence equation

$$y_t = \phi\left(y_{t-1} + y_{t+1}\right)$$

The roots of the associated polynomial $1-\phi\left(u+\frac{1}{u}\right)=0$ are equal to

$$u_{\pm} = \frac{1 \pm i\sqrt{4\phi^2-1}}{2\phi}$$

and their modulus is equal to 1. Let us denote ω_ϕ the frequency such that $\cos\omega_\phi = \frac{1}{2\phi}$ then $u_+ = e^{i\omega_\phi}$ and $u_- = e^{-i\omega_\phi}$ and the covariance stationary processes satisfying (2) are the processes

$$y_t = \lambda_+ e^{i\omega_\phi t} + \lambda_- e^{-i\omega_\phi t}$$

where (λ_+,λ_-) are two random complex variables whose mean is equal to 0 and such that $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$ (we consider real processes) and $E\lambda_+\overline{\lambda_-} = 0$.

(ii) If $|\phi| < \frac{1}{2}$, the function is integrable. The process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is covariance stationary and its spectal density is

$$f_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi(1-2\phi\cos\omega)^2}$$

1.b. Give the canonical representation of $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, its autocovariance function and linear prediction $p_{H_y^{t-1}}(y_t)$ (horizon 1) when $|\phi| < \frac{1}{2}$.

1.b. Answer : We can work in the time or frequency domain. When $|\phi| < \frac{1}{2}$, the polynomial associated to the recurrence equation

$$y_t - \frac{1}{\phi}y_{t-1} + y_{t-2} = \frac{1}{\phi}\varepsilon_{t-1}$$

has two roots whose product is equal to 1. Let denote u the root with the smallest modulus. $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is not the innovation of the process. We use a Blaschke ratio associated to the root inside the unit circle. Working on the sepctral density, this gives

$$\begin{aligned}
f_y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi\left|1-\phi\left(e^{-i\omega}+e^{i\omega}\right)\right|^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{\phi^2\left|1-ue^{-i\omega}\right|^2\left|1-\frac{e^{-i\omega}}{u}\right|^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\left|1-ue^{-i\omega}\right|^2}{\phi^2\left|1-\frac{e^{-i\omega}}{u}\right|^2}\frac{1}{\left|1-ue^{-i\omega}\right|^4} \\
&= \frac{u^2\sigma^2}{2\pi\phi^2}\frac{1}{\left|1-ue^{-i\omega}\right|^4}
\end{aligned}$$

The innovation process is thus defined in applying the filter

$$1 - 2uL + u^2L^2$$

to $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and its variance is equal $\frac{\sigma^2 u^2}{\phi^2}$. Yule-Walker equations are the recurrence equations

$$\gamma_y(h+2) - 2u\gamma_y(h+1) + u^2\gamma_y(h) = 0 \qquad \forall h \geq 0$$

The root is multiple (multiplicity of order 2) and the solutions of this recurrence equation are

$$\gamma_y(h) = (a + b|h|)\, u^{|h|}$$

where a and b are derived from

$$\begin{aligned}
\gamma_y(0) - 2u\gamma_y(1) + u^2\gamma_y(2) &= \frac{\sigma^2 u^2}{\phi^2} \\
\gamma_y(1) - 2u\gamma_y(0) + u^2\gamma_y(1) &= 0 \\
\gamma_y(2) - 2u\gamma_y(1) + u^2\gamma_y(0) &= 0
\end{aligned}$$

We get :

$$\gamma_y(h) = \left(1 + u^2 + h\left(1-u^2\right)\right) \frac{\sigma^2 u^{h+2}}{\phi^2\left(1-u^6\right)}$$

Forecast at forizon 1 is given by

$$y_t(1) = 2u\ y_t - u^2 y_{t-1}$$

and the forecast error variance is $\frac{\sigma^2 u^2}{\phi^2}$.

1.c. When estimating this model in a Conditional Maximum Likelihood approach under the assumption that the innovation is normally distributed and its variance is known equal to σ^2, give the asymptotic variance-covariance matrix of the AR coefficient estimates.

1.c. Answer: We maximize the function

$$-\frac{T}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=3}^{T}\left(y_t - 2u\ y_{t-1} + u^2 y_{t-2}\right)^2$$

The first order condition with respect to u is

$$\sum_{t=3}^{T}\left(-2y_{t-1} + 2\widehat{u}\ y_{t-2}\right)\left(y_t - 2\widehat{u}\ y_{t-1} + \widehat{u}^2 y_{t-2}\right) = 0$$

this is third degree polynomial in $\widehat{u}$ which always a real root. The asymptotic variance-covariance matrix is given by the inverse of Fisher information. For one observation, we have:

$$\begin{aligned}
E_u - \frac{\partial^2 \log l\left(y_t\,|y_{t-1}, y_{t-2}, ...\right)}{\partial u^2}\,|y_{t-1}, y_{t-2}, ... &= E_u \frac{1}{\sigma^2}\left(2y_{t-2}\left(y_t - 2u\ y_{t-1} + u^2 y_{t-2}\right) + \left(-2y_{t-1} + 2u\ y_{t-2}\right)^2\right)|y_{t-1}, y_{t-2}, \\
&= E_u \frac{1}{\sigma^2}\left(2y_{t-2}\varepsilon_t + \left(-2y_{t-1} + 2u\ y_{t-2}\right)^2\right)|y_{t-1}, y_{t-2}, ... \\
&= 4\frac{\left(y_{t-1} - u\ y_{t-2}\right)^2}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

whence we obtain

$$\begin{aligned}
I(u) &= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=3}^{T} 4\frac{\left(y_{t-1} - u\ y_{t-2}\right)^2}{\sigma^2} \\
&= 4\frac{V\left(\left(1-uL\right)^{-1}\varepsilon_t\right)}{\sigma^2} \\
&= 4\frac{1}{1-u^2}
\end{aligned}$$

The asymptotic variance of $\widehat{u}$ is $\frac{1-u^2}{4}$.

2. We now assume that $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a zero mean and unit variance process such that $\forall t \neq s$, $E\varepsilon_t y_s = 0$.

2.a. Show that if there exists a second order stationary process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfying (2), it must satisfy a MA representation.

2.a. Answer : Under these assumptions, we have

$$\begin{aligned} E y_t \varepsilon_t &= 1 \\ E\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} &= E\varepsilon_t \varepsilon_{t+1} = -\phi \\ E\varepsilon_t \varepsilon_{t\pm h} &= 0 \qquad \forall h > 1 \end{aligned}$$

The parameter values ϕ for which there exists a covariance stationary process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are that of the lag one covariance function of a MA(1) process. Let $(\eta_t)_t$ be a white noise whose variance is s^2 and a real number θ whose modulus is less than or equal to 1 such that

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \eta_t - \theta \eta_{t-1} \\ s^2\left(1+\theta^2\right) &= 1 \\ -\theta s^2 &= -\phi \\ f_\varepsilon(\omega) &= \frac{s^2}{2\pi}\left|1-\theta e^{-i\omega}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}(1-2\phi\cos\omega) \end{aligned}$$

θ is such that

$$\begin{aligned} \frac{1+\theta^2}{\theta} &= \frac{1}{\phi} \\ \theta^2 - \frac{1}{\phi}\theta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

It follows that $\theta = u$. The spectral density is (up to a zero measure set) strictly positive, it implies that $|\phi| \leq \frac{1}{2}$.

2.b. Show then that if there exists a second order stationary process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ that satisfies (2), it must satisfy an AR representation.

2.b. Answer: If the process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ exists, its spectral measure is such that

$$(1-2\phi\cos\omega)^2\, d\mu_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}(1-2\phi\cos\omega)\, d\omega$$

When $\phi = \frac{1}{2}$, the function is not integrable and there does not exist a covariance stationary process. When $|\phi| < \frac{1}{2}$, the process $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is covariance stationary and its spectral density is

$$\begin{aligned} f_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-2\phi\cos\omega)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{s^2\left|1-ue^{-i\omega}\right|^2} \end{aligned}$$

This is an AR(1) process whose autoregressive parameter is u. The variance of its innovation is $\frac{1}{s^2}$.

2.c. Give the values of ϕ for which the above processes are the covariance stationary solutions of (2) when $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a zero mean-unit variance process such that $\forall t \neq s$, $E\varepsilon_t y_s = 0$.

2.c. Answer: From the two last questions, when $|\phi| < \frac{1}{2}$, the covariance stationary process $y_t = u y_{t-1} + \zeta_t$ where ζ_t is its innovation process (a white noise of variance $1+u^2$),exists and is such that

$$\begin{aligned}
y_t - \phi y_{t-1} - \phi y_{t+1} &= u y_{t-1} + \zeta_t - \phi y_{t-1} - \phi\left(u y_t + \zeta_{t+1}\right) \\
&= u y_{t-1} + \zeta_t - \phi y_{t-1} - \phi\left(u\left(u y_{t-1} + \zeta_t\right) + \zeta_{t+1}\right) \\
&= \zeta_t - \phi u \zeta_t - \phi \zeta_{t+1} \\
&= \left(1 - \phi u\right)\zeta_t - \phi \zeta_{t+1} \\
&= \frac{1}{1+u^2}\left(\zeta_t - u\zeta_{t+1}\right) \\
&= \varepsilon_t
\end{aligned}$$

where ε_t is a MA(1) process such that $V\varepsilon_t = 1$ and

$$\begin{aligned}
\text{for } h &> 0, cov\left(y_t, \varepsilon_{t+h}\right) = cov\left(y_t, \frac{1}{1+u^2}\left(\zeta_{t+h} - u\zeta_{t+h+1}\right)\right) = 0 \\
cov\left(y_t, \varepsilon_{t-1}\right) &= cov\left(y_t, \frac{1}{1+u^2}\left(\zeta_{t-1} - u\zeta_t\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+u^2}\left(uV\zeta_{t-1} - uV\zeta_t\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

and by recurrence, we can check that for all $h < 0$, the same result holds.

Ecole Polytechnique
Promotion X2007

Examen MAP 565
Mardi 29 mars 2010
durée 3h00

Problème

Partie A

Soit le processus $(y_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait l'équation de génération

$$y_t^* = x\cos\omega_0 t + x^*\sin\omega_0 t + \varepsilon_t$$

où $\omega_0 \in [0,\pi]$, (x, x^*) sont deux réels et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc réel de variance σ^2.

1. Est-ce que le processus $(y_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire du second ordre ? **Réponse:** Le processus se présente comme la somme d'une fonction déterministe et d'un bruit blanc. Sa moyenne est la fonction $x\cos\omega_0 t + x^*\sin\omega_0 t$ qui dépend de la date t lorsque $(x, x^*) \neq (0,0)$ ou $\omega_0 \neq 0$, le processus n'est alors pas stationnaire. Lorsque $(x, x^*) = (0,0)$, le processus $(y_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2, il est stationnaire. Lorsque $\omega_0 = 0$, le processus $(y_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ a une moyenne égale à x et une fonction d'autocovariance $\gamma_{y^*}(h)$ invariante par translation, nulle pour tout $h \neq 0$. Il est stationnaire.

2. Quelle forme prennent les trajectoires du processus $(y_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$. **Réponse:** Lorsque $(x, x^*) \neq (0,0)$ ou $\omega_0 \neq 0$, les trajectoires du processus sont des sinusoïdes bruitées. Suivant la valeur de σ^2 et de (x, x^*), la trajectoire peut plus ou moins faire apparaître cette régularité. Dans les autres cas, elles ne présentent pas de régularités.

3. On pose la suite réelle $(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t^*)$ définie par

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_t &= \widetilde{x}_{t-1}\cos\omega_0 + \widetilde{x}_t^*\sin\omega_0\\ \widetilde{x}_t^* &= -\widetilde{x}_{t-1}\sin\omega_0 + \widetilde{x}_t^*\cos\omega_0\end{aligned}$$

Montrer que pour un choix judicieux de valeurs de la suite à la date $t = 0$

$$y_t^* = \widetilde{x}_t + \varepsilon_t$$

Réponse: Nous avons

$$\begin{pmatrix}\widetilde{x}_t\\ \widetilde{x}_t^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\omega_0 & \sin\omega_0\\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{x}_{t-1}\\ \widetilde{x}_{t-1}^*\end{pmatrix}$$

où la matrice est une matrice de rotation, d'où

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\widetilde{x}_t\\ \widetilde{x}_t^*\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\omega_0 & \sin\omega_0\\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}\widetilde{x}_0\\ \widetilde{x}_0^*\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t\\ -\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{x}_0\\ \widetilde{x}_0^*\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Si nous posons $x = \widetilde{x}_0$ et $x^* = \widetilde{x}_0^*$, nous avons l'équation demandée.

Partie B

Nous nous inspirons de ce qui précéde et nous étendons le processus de génération des données en introduisant des poids aléatoires. Nous considérons le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ dont l'équation de génération est

$$y_t = x_t + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le bruit blanc réel de variance σ^2 et $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le processus réel tel que

$$\begin{pmatrix} x_t \\ x_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t \\ \eta_t^* \end{pmatrix}$$

où $0 < \rho < 1$, $\omega_0 \in [0,\pi]$, $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\eta_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont deux bruits blancs de même variance τ^2 tels que $\forall\,(t,h) \in \mathbb{Z}^2$, $E\eta_t\eta_{t+h}^* = 0$. $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne sont corrélés à aucune date: $cov\,(x_t, \varepsilon_s) = 0$. pour tout (t,s). *L'objet de cette partie est d'établir la nature du processus* $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *, en particulier des formes de ses trajectoires.* Afin de simplifier les calculs, nous allons faire une incursion dans le domaine des processus à valeurs complexes. Le mode de raisonnement de nature Hilbertien demeure en effet valable dans un espace différent.

1. Calculer la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus à valeurs complexes $(\eta_t + i\eta_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ où $i^2 = -1$. Comment appelleriez-vous ce processus ? Nous rappelons que pour un processus complexe centré $(b_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, la fonction d'autocovariance est donnée par $\psi_b\,(t,r) = Eb_t\bar{b}_r$ où $\bar{b}_r$ est la quantité conjuguée de b_r. **Réponse:** Nous avons d'une part

$$\begin{aligned} E\left(\eta_t + i\eta_t^*\right) &= E\eta_t + iE\eta_t^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} E\left(\eta_t + i\eta_t^*\right)\left(\eta_{t+h} - i\eta_{t+h}^*\right) &= \gamma_\eta\,(h) + \gamma_{\eta^*}\,(h) \\ &= 2\tau^2\delta_{h,0} \end{aligned}$$

Le processus complexe $(\eta_t + i\eta_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance nulle pour tout h non nul. C'est un bruit blanc complexe de variance $2\tau^2$.

2. Donner l'équation de récurrence satisfaite par le processus complexe $a_t = x_t + ix_t^*$ où $i^2 = -1$. **Réponse:** nous avons

$$\begin{aligned} a_t &= \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_t^* \end{pmatrix} \\ &= \rho \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0} & ie^{-i\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-1}^* \end{pmatrix} + \eta_t + i\eta_t^* \\ &= \rho e^{-i\omega_0} a_{t-1} + \eta_t + i\eta_t^* \end{aligned}$$

où par construction $(\eta_t + i\eta_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ est donc un bruit blanc à valeurs complexes de variance $2\tau^2$. Lorsque $\omega_0 \in]0,\pi[$, $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une équation autorégressive d'ordre 1 avec un coefficient complexe. Lorsque $\omega_0 \in \{0,\pi\}$, le processus $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus complexe autorégressif de coefficient réel ρ ou $-\rho$.

3. En vous inspirant de ce qui a été fait en cours pour les processus autorégressifs réels du premier ordre, montrer que le processus

$$a_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j e^{-ij\omega_0}\left(\eta_{t-j} + i\eta_{t-j}^*\right)$$

est solution stationnaire du second ordre (variance finie, moyenne et fonction d'autocovariance invariante par translation) de l'équation de récurrence précédente? Donner la fonction d'autocovariance du processus $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ pour $h \geq 0$. *Dans la suite du problème nous considérons ces solutions stationnaires* $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. **Réponse:** En itérant l'équation de récurrence, nous obtenons

$$a_t = \left(\rho e^{-i\omega_0}\right)^h a_{t-h} + \sum_{j=0}^{h-1} \left(\rho e^{-i\omega_0}\right)^j \left(\eta_{t-j} + i\eta^*_{t-j}\right)$$

d'où

$$V\left(a_t - \sum_{j=0}^{h-1} \rho^j e^{-ij\omega_0} \left(\eta_{t-j} + i\eta^*_{t-j}\right)\right) = \rho^{2h} V\left(a_{t-h}\right)$$

Si le processus $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est de variance finie à toute date alors, au sens de L^2, puisque $\lim_{h\to+\infty} \rho^{2h} = 0$,

$$a_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j e^{-ij\omega_0} \left(\eta_{t-j} + i\eta^*_{t-j}\right)$$

Du fait de l'absolue sommabilité des coefficients $\left(\rho^j e^{-ij\omega_0}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, la variance de ce processus est donnée par

$$\begin{aligned}
Ea_t\overline{a}_t &= E\sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j e^{-ij\omega_0} \left(\eta_{t-j} + i\eta^*_{t-j}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{ik\omega_0} \left(\eta_{t-k} - i\eta^*_{t-k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^{2j} 2\tau^2 \\
&= \frac{2\tau^2}{1-\rho^2} < +\infty
\end{aligned}$$

elle est constante et bornée. Il s'ensuit que le moment d'ordre 1 existe et $Ea_t = 0$. Le processus a pour fonction d'autocovariance ($h > 0$)

$$\begin{aligned}
\psi_a(t, t+h) &= E\sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j e^{-ij\omega_0} \left(\eta_{t-j} + i\eta^*_{t-j}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{ik\omega_0} \left(\eta_{t+h-k} - i\eta^*_{t+h-k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^{2j+h} e^{i\omega_0 h} 2\tau^2 \\
&= \frac{2\tau^2 \rho^h e^{i\omega_0 h}}{1-\rho^2}
\end{aligned}$$

qui ne dépend que de l'écart de dates. Un calcul similaire donne pour $h < 0$

$$\psi_a(t, t+h) = \frac{2\tau^2 \rho^{-h} e^{i\omega_0 h}}{1-\rho^2}$$

Dans la mesure où les v.a. sont complexes, la fonction d'autocovariance est par définition telle que pour $h > 0$, $\psi_a(t, t-h) = \psi_a(t+h, t) = \overline{\psi_a(t, t+h)}$. A cette solution, nous pouvons ajouter un processus déterministe solution de l'équation de récurrence sans second membre:

$$d_t = c\left(\rho e^{-i\omega_0}\right)^t$$

où c est une variable aléatoire complexe. Si nous nous limitons aux solutions stationnaires de l'équation de récurrence, ceci implique que c est au sens de L^2 la v.a. nulle. L'unique processus stationnaire solution de l'équation de récurrence est

$$a_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j e^{-ij\omega_0} \left(\eta_{t-j} + i\eta^*_{t-j}\right)$$

et sa fonction d'autocovariance complexe est donnée par $(h \geq 0)$

$$\gamma_a(h) = \frac{2\tau^2 \rho^h e^{i\omega_0 h}}{1-\rho^2}$$

Le même raisonnement s'applique pour $\omega_0 \in \{0, \pi\}$. Dans ce cas, la fonction d'autocovariance est paire.

4. Donner l'équation ARMA satisfaite par le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, ainsi que celle de $(x_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$. On utilisera le fait que x_t et x_t^* sont respectivement la partie réelle et imaginaire de a_t (notées $\Re a_t$ et $\Im a_t$) et que a_t et $\overline{a}_t$ satisfont des équations de récurrence différentes car associées à des polynomes conjugués qu'il faut donc combiner et on détaillera la représentation canonique de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Discuter suivant la valeur de ω_0, .on distinguera les cas $\omega_0 \in \{0, \pi\}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\omega_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ [On notera ζ_t le processus des innovations de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$] **Réponse:** Nous avons

$$\begin{aligned} x_t &= \Re a_t \\ &= \frac{1}{2}(a_t + \overline{a_t}) \end{aligned}$$

où $\left(1 - \rho e^{-i\omega_0} L\right) a_t = \eta_t + i\eta_t^*$ et par conjugaison $\left(1 - \rho e^{i\omega_0} L\right) \overline{a}_t = \eta_t - i\eta_t^*$. Si $\omega_0 \in]0, \pi[$, les deux opérateurs $\left(1 - \rho e^{-i\omega_0} L\right)$ et $\left(1 - \rho e^{i\omega_0} L\right)$ sont différents. Nous avons

$$\begin{aligned} \left(1 - \rho e^{-i\omega_0} L\right)\left(1 - \rho e^{i\omega_0} L\right) x_t &= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \rho e^{i\omega_0} L\right)(\eta_t + i\eta_t^*) + \left(1 - \rho e^{-i\omega_0} L\right)(\eta_t - i\eta_t^*)\right\} \\ \left(1 - 2\rho\cos\omega_0 L + \rho^2 L^2\right) x_t &= (1 - \rho\cos\omega_0 L)\,\eta_t + \rho\sin\omega_0 L\eta_t^* \end{aligned}$$

où nous remarquons que les racines du polynôme de la forme AR $\left(1 - 2\rho\cos\omega_0 u + \rho^2 u^2\right)$ sont de module strictement supérieur à 1 ($|\rho| < 1$), condition nécessaire pour avoir une représentation canonique. Soit $\xi_t = (1 - \rho\cos\omega_0 L)\,\eta_t + \rho\sin\omega_0 L\eta_t^*$, ce processus est stationnaire du second ordre comme application de deux filtres absolument sommables sur deux bruits blancs non corrélés et tel que

$$\begin{aligned} \gamma_\xi(0) &= \left[\left(1 + \rho^2 (\cos\omega_0)^2\right) + \rho^2 (\sin\omega_0)^2\right]\tau^2 = \left(1 + \rho^2\right)\tau^2 \\ \gamma_\xi(1) &= -\rho\tau^2\cos\omega_0 \\ \gamma_\xi(h) &= 0 \; h \geq 2 \end{aligned}$$

Si $\omega_0 \neq \frac{\pi}{2}$, il satisfait une représentation MA(1) .(Proposition 19). Il existe donc un réel θ et un bruit blanc ζ_t de variance σ_ζ^2 tels que

$$\xi_t = \zeta_t + \theta\zeta_{t-1}$$

En identifiant les termes de la fonction d'autocovariance

$$\begin{aligned} \left(1 + \rho^2\right)\tau^2 &= \left(1 + \theta^2\right)\sigma_\zeta^2 \\ -\rho\tau^2\cos\omega_0 &= \theta\sigma_\zeta^2 \end{aligned}$$

nous tirons que le paramètre θ satisfait l'équation du second ordre

$$\rho\cos\omega_0\theta^2 + \left(1 + \rho^2\right)\theta + \rho\cos\omega_0 = 0$$

dont le discriminant est

$$\left(1 + \rho^2\right)^2 - 4\rho^2(\cos\omega_0)^2 = \left(1 - 2\rho\cos\omega_0 + \rho^2\right)\left(1 + 2\rho\cos\omega_0 + \rho^2\right) > (1+\rho)^2(1-\rho)^2$$

Il y a deux racines réelles dont le produit vaut 1, nous retenons pour la représentation canonique du processus celle dont le module est plus petit que 1.

$$\theta^* = \frac{-\left(1 + \rho^2\right) \pm \sqrt{\left(1 + \rho^2\right)^2 - 4\rho^2(\cos\omega_0)^2}}{2\rho\cos\omega_0}$$

Si $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, alors ξ_t est un bruit blanc et $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation AR(2) :

$$\left(1+\rho^2L^2\right)x_t = \eta_t + \rho\eta^*_{t-1} = \zeta_t$$

et la variance de son innovation vaut $\left(1+\rho^2\right)\tau^2$. Lorsque $\omega_0 \in \{0,\pi\}$, les deux opérateurs $\left(1-\rho e^{-i\omega_0}L\right)$ et $\left(1-\rho e^{i\omega_0}L\right)$ sont égaux. Nous avons

$$\left(1-\rho e^{-i\omega_0}L\right)x_t = \frac{1}{2}2\eta_t = \eta_t$$

Le processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation AR(1) dont le polynôme associé a sa racine à l'extérieur du cercle unité, c'est la représentation canonique. En ce qui concerne $(x^*_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, nous avons

$$\begin{aligned} x^*_t &= \Im a_t \\ &= \frac{1}{2i}\left(a_t - \overline{a_t}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(1-\rho e^{-i\omega_0}L\right)\left(1-\rho e^{i\omega_0}L\right)x^*_t &= \frac{1}{2i}\left\{\left(1-\rho e^{i\omega_0}L\right)\left(\eta_t+i\eta^*_t\right) - \left(1-\rho e^{-i\omega_0}L\right)\left(\eta_t - i\eta^*_t\right)\right\} \\ \left(1-2\rho\cos\omega_0 L+\rho^2L^2\right)x_t &= \left(1-\rho\cos\omega_0 L\right)\eta^*_t - \rho\sin\omega_0 L\eta_t \end{aligned}$$

C'est la même équation que celle de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en remplaçant ω_0 par $-\omega_0$. Nous avons donc à cette modification près les mêmes formules. Conclusion:

$\omega_0 = 0$	$(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation AR(1)
$\omega_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$	$(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation ARMA$(2,1)$
$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$	$(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation AR(2)
$\omega_0 \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$	$(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation ARMA$(2,1)$
$\omega_0 = \pi$	$(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation AR(1)

5. Donner la fonction d'autocovariance de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(x^*_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en utilisant ce qui a été obtenu pour le processus $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.**Réponse:** Nous avons observé que $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(x^*_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfont la même représentation ARMA en remplaçant ω_0 par $-\omega_0$. Il en sera de même pour la fonction d'autocovariance. Nous travaillons sur $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Nous avons selon le calcul fait en B.3 ($h>0$):

$$\begin{aligned} \gamma_x(h) &= \frac{1}{4}E\left(a_t+\overline{a}_t\right)\left(a_{t+h}+\overline{a}_{t+h}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\gamma_a(h)+\gamma_a(-h)+E\left[a_ta_{t+h}+\overline{a}_t\overline{a}_{t+h}\right]\right) \end{aligned}$$

où selon B.1

$$\begin{aligned} Ea_ta_{t+h} &= E\sum_{j=0}^{+\infty}\rho^j e^{-ij\omega_0}\left(\eta_{t-j}+i\eta^*_{t-j}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k e^{-ik\omega_0}\left(\eta_{t+h-k}+i\eta^*_{t+h-k}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$E\left[a_ta_{t+h}+\overline{a}_t\overline{a}_{t+h}\right] = 0$$

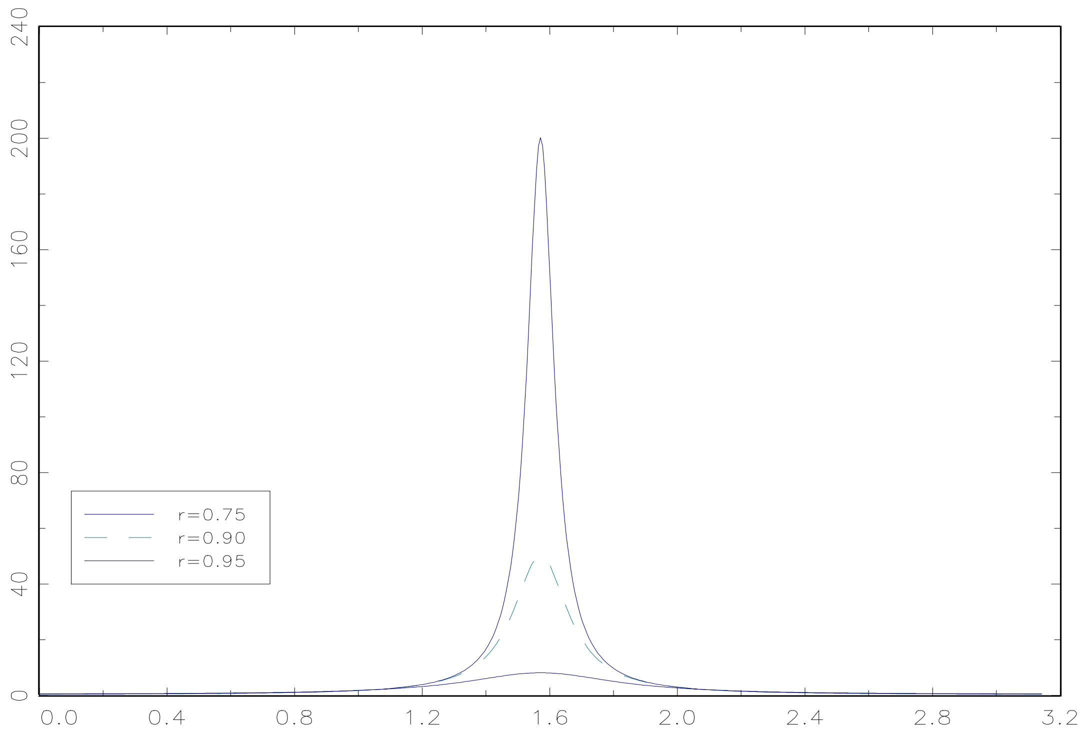
et

$$\gamma_x(h) = \tau^2\rho^h\left[\frac{\cos h\omega_0}{1-\rho^2}\right]$$

Quand $\omega_0 \in \{0,\pi\}$, nous avons

$$\gamma_x(h) = \frac{\tau^2\left(e^{-hi\omega_0}\left|\rho\right|^h\right)}{1-\rho^2}.$$

Figure 1: Densité spectrale



6. Représenter la densité spectrale du processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ lorsque $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\rho = 0,75$ et lorsque $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\rho = 0,95$. Quelles caractéristiques présentent les formes des trajectoires du processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$? **Réponse:** Nous avons $\left(1 - 2\rho\cos\omega_0 L + \rho^2 L^2\right) x_t = (1 - \rho\cos\omega_0 L)\,\eta_t + \rho\sin\omega_0 L\eta_t^*$ où η_t et η_t^* sont non corrélés, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
f_x(\omega) &= \frac{\left|1 - \rho\cos\omega_0 e^{-i\omega}\right|^2 + \left|\rho\sin\omega_0 e^{-i\omega}\right|^2}{\left|1 - 2\rho\cos\omega_0 e^{-i\omega} + \rho^2 e^{-2i\omega}\right|^2} \\
&= \frac{\left|1 - \rho\cos\omega_0 e^{-i\omega}\right|^2 + \left|\rho\sin\omega_0 e^{-i\omega}\right|^2}{\left|1 - \rho e^{-i\omega_0} e^{-i\omega}\right|^2 \left|1 - \rho e^{i\omega_0} e^{-i\omega}\right|^2} \\
&= \frac{\left|1 - \rho\cos\omega_0 e^{-i\omega}\right|^2 + \left|\rho\sin\omega_0 e^{-i\omega}\right|^2}{\left|1 - \rho e^{-i(\omega_0+\omega)}\right|^2 \left|1 - \rho e^{i(\omega_0-\omega)}\right|^2}
\end{aligned}
$$

Plus ρ est proche de 1 (ou -1), plus la densité spectrale présente un pic en la fréquence ω_0 (resp. $\omega_0 + \frac{\pi}{2}$). Les mouvements cycliques de fréquence ω_0 sont très présents dans les trajectoires. Dans le cas où $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons $\left(1 + \rho^2 L^2\right) x_t = \eta_t + \rho\eta_{t-1}^*$ d'où

$$
f_x(\omega) = \frac{1 + \rho^2}{\left(1 - 2\rho\cos(\omega + \omega_0) + \rho^2\right)\left(1 - 2\rho\cos(\omega_0 - \omega) + \rho^2\right)}.
$$

Partie C

On étudie maintenant le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ introduit au début de la partie B et sa prévision à l'horizon 1.

1. Donner la représentation de type ARMA du processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Discuter suivant la valeur de ω_0. **Réponse:** Le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est défini par $y_t = x_t + \varepsilon_t$ donc lorsque $\omega_0 \notin \{0,\pi\}$

$$\left(1-2\rho\cos\omega_0 L+\rho^2L^2\right)y_t=\left(1-2\rho\cos\omega_0 L+\rho^2L^2\right)\varepsilon_t+\left(1-\rho\cos\omega_0 L\right)\eta_t+\rho\sin\omega_0 L\eta_t^*$$

Le terme de droite a une fonction d'autocovariance qui s'annule après l'ordre 2, il s'agit d'un MA(2) .(même raisonnement qu'au 2). Lorsque $\omega_0 \in \{0,\pi\}$,

$$\left(1-\rho e^{-i\omega_0}L\right)y_t=\left(1-\rho e^{-i\omega_0}L\right)\varepsilon_t+\eta_t$$

Le terme de droite a une fonction d'autocovariance qui s'annule après l'ordre 1, il s'agit d'un MA(1) . Conclusion:

$\omega_0 \in \{0,\pi\}$ $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation ARMA$(1,1)$
$\omega_0 \notin \{0,\pi\}$ $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation ARMA$(2,2)$

2. Donner la fonction d'autocovariance du processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. **Réponse:** Nous avons du fait de l'orthogonalité des processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$\gamma_y(h)=\gamma_x(h)+\gamma_\varepsilon(h)$$

d'où

$\gamma_y(0)=\frac{\tau^2}{1-\rho^2}+\sigma^2$ $h=0$
$\gamma_y(h)=\tau^2\rho^h\left[\frac{\cos h\omega_0}{1-\rho^2}\right]$ $h>0$

3. Donner la prévision à l'horizon 1 du processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à la date T (notée $E_T x_{T+1}$) connaissant le passé de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et de $(x_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ **Réponse:** Travailler en fonction du passé de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et de $(x_t^*)_{t\in\mathbb{Z}}$ est équivalent à travailler selon le passé de $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Nous avons en itérant l'équation de génération de $(a_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$a_{T+h}=\rho^h e^{-ih\omega_0}a_T+\sum_{j=0}^{h-1}\rho^j e^{-ij\omega_0}\left(\eta_{T+h-j}+i\eta^*_{T+h-j}\right)$$

d'où comme nous travaillons sur la représentation canonique

$$E_T a_{T+h}=\rho^h e^{-ih\omega_0}a_T$$

et

$$\begin{aligned}E_T x_{T+h} &= \frac{1}{2}E_T\left(a_{T+h}+\overline{a}_{T+h}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\rho^h e^{-ih\omega_0}a_T+\rho^h e^{ih\omega_0}\overline{a}_T\right)\\ &= \rho^h\left(x_T\cos\omega_0 h+x_T^*\sin\omega_0 h\right)\end{aligned}$$

Donc

$$E_T x_{T+1}=\rho\left(x_T\cos\omega_0+x_T^*\sin\omega_0\right)$$

4. Donner la prévision à l'horizon 1 du processus $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à la date T (notée $E_{T,x}x_{T+1}$) connaissant le passé de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. On distinguera en fonction de la valeur de ω_0. **Réponse:** $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation AR(1) , ou AR(2) ou ARMA$(2,1)$. Lorsque $\omega_0 \in \{0,\pi\}$, le processus est un AR(1) , donc

$$E_{T,x}x_{T+h}=\rho^h e^{-ih\omega_0}x_T$$

et

$$E_{T,x}x_{T+1}=\rho e^{-i\omega_0}x_T$$

Lorsque $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, le processus satisfait une représentation AR(2) , il faut distinguer selon que $h = 2m$ ou $h = 2m + 1$

$$\begin{aligned} E_{T,x}x_{T+2m} &= \left(-\rho^2\right)^m x_T \\ E_{T,x}x_{T+2m+1} &= \left(-\rho^2\right)^m x_{T-1} \end{aligned}$$

d'où

$$E_{T,x}x_{T+1} = -\rho^2 x_{T-1}$$

Enfin, lorsque $\omega_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le processus satisfait une représentation ARMA(2, 1) , la prévision est une fonction de x_T, x_{T-1} et l'innovation du processus à la date T que nous notons ζ_T. A l'horizon $h = 1$, nous avons

$$E_{T,x}x_{T+1} = 2\rho \cos \omega_0 x_T - \rho^2 x_{T-1} + \theta^* \zeta_T$$

A l'horizon $h = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} E_{T,x}x_{T+2} &= 2\rho \cos \omega_0 E_{T,x}x_{T+1} - \rho^2 x_T \\ &= 2\rho \cos \omega_0 \left[2\rho \cos \omega_0 x_T - \rho^2 x_{T-1} + \theta^* \zeta_T\right] - \rho^2 x_T \\ &= \rho^2 \left(4 \cos^2 \omega_0 - 1\right) x_T - 2\rho^3 \cos \omega_0 x_{T-1} + 2\rho\theta^* \cos \omega_0 \zeta_T \end{aligned}$$

Ensuite, pour $h > 2$, la prévision satisfait une équation de récurrence

$$E_{T,x}x_{T+h} = 2\rho \cos \omega_0 E_{T,x}x_{T+h-1} - \rho^2 E_{T,x}x_{T+h-2}$$

La forme générale des solutions est

$$E_{T,x}x_{T+h} = \lambda \rho^h e^{-ih\omega_0} + \overline{\lambda} \rho^h e^{ih\omega_0}$$

où λ est un nombre complexe. Les conditions initiales nous donnent

$$\begin{aligned} 2\rho \cos \omega_0 x_T - \rho^2 x_{T-1} + \theta^* \zeta_T &= \lambda \rho e^{-i\omega_0} + \overline{\lambda} \rho e^{i\omega_0} \\ \rho^2 \left(4 \cos^2 \omega_0 - 1\right) x_T - 2\rho^3 \cos \omega_0 x_{T-1} + 2\rho\theta^* \cos \omega_0 \zeta_T &= \lambda \rho^2 e^{-i2\omega_0} + \overline{\lambda} \rho^2 e^{i2\omega_0} \end{aligned}$$

d'où nous tirons:

$$\lambda = \frac{-\rho e^{-i\omega_0} x_T + \rho^2 x_{T-1} - \theta^* \zeta_T}{2i\rho \sin \omega_0}$$

5. En quoi la prévision à l'horizon 1 du processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ connaissant son passé est-elle différente de celle de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne connaissant que son passé $x_{T-1}, x_{T-2}, \ldots$. **Réponse:** La différence entre les processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est directement liée à $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc donc

$$E_{T,y}y_{T+h} = E_{T,y}x_{T+h}$$

mais du fait de la présence de ce bruit supplémentaire, l'information apportée par le passé de $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est différente de celle apportée par celui de $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et

$$E_{T,y}y_{T+h} \neq E_{T,x}x_{T+h}$$

Partie D

Nous nous tournons maintenant vers la question de l'estimation du modèle de $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Dans cette partie, nous supposons que $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, $\eta_t \sim \mathcal{N}\left(0, \tau^2\right)$ et $\eta_t^* \sim \mathcal{N}\left(0, \tau^2\right)$, que ces séquences de variables aléatoires sont indépendantes et que $\omega_0 \in \left]0, \pi\right[$. Nous disposons d'un échantillon d'observations de la date $t = 1$ à $t = T$.

1. Donner la représentation espace-état satisfaite par le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ lorsque l'état est associé à $\begin{pmatrix} x_t & x_t^* \end{pmatrix}'$. **Réponse:** Nous avons

$$\begin{aligned} y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ x_t^* \end{pmatrix} + \varepsilon_t \\ \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ x_{t+1}^* \end{pmatrix} &= \rho\begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ x_t^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{t+1} \\ \eta_{t+1}^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui correspond à la définition du modèle état-mesure du cours (Définition 54) en définissant le bruit de l'équation de transition avec un décalage d'une date mais ceci n'a pas de conséquence dans la mesure où il s'agit de bruits blancs indépendants entre eux et avec le bruit de l'équation de mesure.

2. Donner les équations de récurrence de filtrage du filtre de Kalman pour ce dernier modèle (on prendra comme conditions initiales $\widehat{z}_{0|0} = 0$ et $P_{0|0} = \tau^2 I_2$ avec les notations du cours). **Réponse:** Nous avons $\widehat{z}_{0|0} = 0$ et $P_{0|0} = \tau^2 I_2$, puis

$$\begin{aligned} \widehat{z}_{t|t} &= \widehat{z}_{t|t-1} + \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} P_{t|t-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma^2} P_{t|t-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\left(y_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} z_{t|t-1}\right) \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} P_{t|t-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma^2} P_{t|t-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} P_{t|t-1} \\ \widehat{z}_{t+1|t} &= \rho\begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix}\widehat{z}_{t|t} \\ P_{t+1|t} &= \tau^2 I_2 + \rho^2\begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix} P_{t|t}\begin{pmatrix} \cos\omega_0 & -\sin\omega_0 \\ \sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Quand $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, donner une manière de calculer la matrice de variance-covariance asymptotique des estimateurs des paramètres du modèle. **Réponse:** Lorsque $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait l'équation

$$\left(1+\rho^2L^2\right)y_t = \left(1+\rho^2L^2\right)\varepsilon_t + \eta_t + \rho\eta_{t-1}^*$$

où

$$\xi_t = \left(1+\rho^2L^2\right)\varepsilon_t + \eta_t + \rho\eta_{t-1}^*$$

est tel que sa fonction d'autocovariance est

$$\begin{aligned} \gamma_\xi(0) &= \left(1+\rho^4\right)\sigma^2 + \left(1+\rho^2\right)\tau^2 \\ \gamma_\xi(1) &= 0 \\ \gamma_\xi(2) &= \rho^2\sigma^2 \\ \gamma_\xi(h) &= 0 \text{ si } h > 2 \end{aligned}$$

Soit ζ_t l'innovation du processus ξ_t, nous savons que le processus canonique de génération de ξ_t est défini par trois paramètres $\left(\theta_1, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right)$

$$\xi_t = \zeta_t + \theta_1\zeta_{t-1} + \theta_2\zeta_{t-2}$$

avec

$$\begin{aligned} \left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\sigma_\zeta^2 &= \left(1+\rho^4\right)\sigma^2 + \left(1+\rho^2\right)\tau^2 \\ 0 &= \theta_1\left(1+\theta_2\right)\sigma_\zeta^2 \\ \theta_2\sigma_\zeta^2 &= \rho^2\sigma^2 \end{aligned}$$

d'où $\theta_1 = 0$ et θ_2 est solution de l'équation

$$\frac{\theta_2}{(1+\theta_2^2)} = \frac{\rho^2\sigma^2}{(1+\rho^4)\,\sigma^2 + (1+\rho^2)\,\tau^2}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
\theta_2^2 - \frac{\left(1+\rho^4\right)\sigma^2 + \left(1+\rho^2\right)\tau^2}{\rho^2\sigma^2}\theta_2 + 1 &= 0 \\
\theta_2^2 - \left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)\theta_2 + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Nous retenons la solution de cette équation du second ordre de module inférieur à 1 (le produit des racines est égal à 1 et le discriminant positif).

$$\theta_2 = \frac{\left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2 + \left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)^2 - 4}}{2}$$

Le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation ARMA$(2,2)$

$$y_t + \rho^2 y_{t-2} = \zeta_t + \theta_2\zeta_{t-2}$$

caractérisé par trois paramètres $\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right)$ qui sont liés de manière non-linéaire aux trois paramètres du modèle espace-état $\left(\rho, \tau^2, \sigma^2\right)$ par une fonction $\left(\rho, \tau^2, \sigma^2\right) = g\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right)$ où

$$\begin{aligned}
g_1\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right) &= \sqrt{\rho^2} \\
g_2\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right) &= \frac{\left(1+\theta_2^2\right)\sigma_\zeta^2 - \left(1+\rho^4\right)\frac{\theta_2\sigma_\zeta^2}{\rho^2}}{(1+\rho^2)} \\
g_3\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right) &= \frac{\theta_2\sigma_\zeta^2}{\rho^2}
\end{aligned}$$

[Remarque, l'hypothèse $0 < \rho < 1$ permet d'identification de ρ]. En appliquant les théorèmes 24 et 26 du cours, nous pouvons calculer la matrice de variance-covariance asymptotique $V_\infty\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right)$ de $\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2$ d'où celle de $\left(\rho, \tau^2, \sigma^2\right)$ par le Lemme 2

$$\frac{\partial g}{\partial x'} V_\infty\left(\rho^2, \theta_2, \sigma_\zeta^2\right) \frac{\partial g'}{\partial x}.$$

Ecole Polytechnique
Promotion X2006

Examen MAP565 corrigé
"Processus et estimation"

Mercredi 25 mars 2009

Problème: Partie I

Nous considérons un processus stationnaire du second ordre $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui satisfait la représentation suivante:

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance σ^2 , $\phi \neq 0$.

1. Sous quelle(s) condition(s), le processus de génération de données associé à cette équation peut-il avoir des solutions stationnaires du second ordre ? On suppose ces conditions satisfaites dans la suite de l'exercice. **Réponse**: $|\phi| \neq 1$

2. Donner la moyenne et la densité spectrale du processus y_t. **Réponse**: $Ey_t = \frac{\mu}{1-\phi}$ et

$$f_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\left|1+\theta e^{-i\omega}\right|^2}{\left|1-\phi e^{-i\omega}\right|^2}.$$

3. Qualifier ce processus. Commenter les cas $\phi + \theta = 0$ et $\phi\theta = -1$. On suppose que $\phi + \theta \neq 0$ et $\phi\theta \neq -1$ dans la suite de l'exercice. **Réponse**: Il s'agit lorsque les polynômes $(1 - \phi L)$ et $(1 + \theta L)$ ou $(1 - \phi L)$ et $\left(1 + \frac{1}{\theta}L\right)$ sont premiers entre eux d'un processus $\mathrm{ARMA}(1,1)$ .Considérons le cas où $|\phi| < 1$: Lorsque les polynômes $(1 - \phi L)$ et $(1 + \theta L)$ ne sont pas premiers entre eux (donc égaux, $\phi + \theta = 0$), nous pouvons écrire

$$(1-\phi L)\left(y_t - \frac{\mu}{1-\phi} - \varepsilon_t\right) = 0$$

soit encore

$$y_t = \frac{\mu}{1-\phi} + \varepsilon_t + \phi^t v$$

où v est une variable aléatoire constante. Comme le processus est stationnaire du second ordre, nécessairement, $Ev = Vv = 0.$ $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc décentré. Lorsque $(1 - \phi L)$ et $\left(1 + \frac{1}{\theta}L\right)$ ne sont pas premiers entre eux (donc $1 + \phi\theta = 0$), nous pouvons écrire

$$(1-\phi L)\left(y_t - \frac{\mu}{1-\phi} - \frac{1+\theta L}{1+\frac{1}{\theta}L}\varepsilon_t\right) = 0$$

ou encore

$$y_t = \frac{\mu}{1-\phi} + \frac{1+\theta L}{1+\frac{1}{\theta}L}\varepsilon_t + \phi^t v$$

Comme le processus est stationnaire du second ordre, nécessairement, $Ev = Vv = 0$ et $\frac{1+\theta L}{1+\frac{1}{\theta}L}\varepsilon_t$ est un bruit blanc. $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc décentré. Lorsque $|\phi| > 1$, un raisonnement similaire tient en calculant des développements vers le futur. Il est aussi possible d'utiliser la densité spectrale du processus. Si $\theta + \phi = 0$

$$f_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

$(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc. Si $1+\phi\theta=0$, alors

$$\begin{aligned} f_y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\left|1-\frac{1}{\phi}e^{-i\omega}\right|^2}{\left|1-\phi e^{-i\omega}\right|^2} \\ &= \frac{\sigma^2\left|\frac{1}{\phi}e^{-i\omega}\right|^2}{2\pi}\frac{\left|\phi e^{i\omega}-1\right|^2}{\left|1-\phi e^{-i\omega}\right|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi\left|\phi\right|^2} \end{aligned}$$

et $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc.

4. Sous quelles conditions la représentation ci-dessus est-elle la représentation canonique du processus ? On suppose ces conditions satisfaites dans la suite de l'exercice. **Réponse**: $|\phi|<1$ et $|\theta|\leq 1$

5. Calculer les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation de ce processus. **Réponse**: si nous posons $y_t^*=y_t-\frac{\mu}{1-\phi}$, les fonctions d'autocovariance de y_t et y_t^* sont confondues. Les équations de Yule-Walker de y_t^* prennent la forme

$$\begin{aligned} \gamma_y(0)-\phi\gamma_y(1) &= \sigma^2\left(1+\theta^2+\theta\phi\right) \\ -\phi\gamma_y(0)+\gamma_y(1) &= \theta\sigma^2 \\ \gamma_y(h) &= \phi\gamma_y(h-1) \text{ si } h>1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma_y(0) &= \frac{\sigma^2\left(1+\theta^2+2\theta\phi\right)}{1-\phi^2} \\ \gamma_y(1) &= \frac{\sigma^2(\phi+\theta)(1+\phi\theta)}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

et pour $h\geq 1$,

$$\gamma_y(h)=\phi^{h-1}\frac{\sigma^2(\phi+\theta)(1+\phi\theta)}{1-\phi^2}$$

et

$$\rho_y(h)=\phi^{h-1}\frac{(\phi+\theta)(1+\phi\theta)}{(1+\theta^2+2\theta\phi)}$$

6. Calculer la valeur de la fonction d'autocorrélation partielle à l'ordre 2. **Réponse**: La fonction d'autocorrélation partielle est caractérisée selon sa définition par le jeu d'équations suivant

$$\begin{aligned} Ey_{t-1}^*\left(y_t^*-u_1^1y_{t-1}^*-r(2)\,y_{t-2}^*\right) &= 0 \\ Ey_{t-2}^*\left(y_t^*-u_1^1y_{t-1}^*-r(2)\,y_{t-2}^*\right) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} r(2) &= \frac{\gamma(1)(\phi\gamma(0)-\gamma(1))}{\gamma(0)^2-\gamma(1)^2} \\ &= -\frac{\theta(\phi+\theta)(1+\phi\theta)}{(1-\phi^2)(1+\theta^2+\theta\phi+\theta)(1+\theta^2+\theta\phi-\theta)} \end{aligned}$$

Cette fonction est nulle lorsque $\theta=0$ ou $\phi+\theta=0$ ou $1+\phi\theta=0$,le processus est alors un AR(1) ou un bruit blanc (une fois recentré).

7. Le processus de génération des données dont vous disposez est soit un AR(1), soit ARMA$(1,1)$. Comment procédez vous pour distinguer les deux formes de modèles à partir de l'autocorrélogramme et de l'autocorrélogramme partiel ? **Réponse**: le processus AR(1) est caractérisé par une fonction d'autocorrélation partielle qui s'annule à partir de l'ordre 2. Ce n'est pas le cas du processus ARMA$(1,1)$.Si l'on doit choisir exclusivement entre ces deux processus, il est possible de tester la nullité de $r(2)$.

Problème: Partie II

En supplément des conditions énoncées dans la Partie I, nous supposons que ε_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et que $\theta \neq 0$. Par ailleurs, on posera $y_t^{**} = \frac{y_t - Ey_t}{\sqrt{Vy_t}}$.

1. Donner la loi inconditionnelle de y_t, la loi conditionnelle de y_t sachant y_{t-h}.pour $h \geq 1$.**Réponse**:

$$\begin{aligned}(1-\phi L)\left(y_t - \frac{\mu}{1-\phi}\right) &= (1-\phi L + (\theta+\phi) L)\varepsilon_t \\ y_t - \frac{\mu}{1-\phi} &= \varepsilon_t + (\theta+\phi)\left[L\sum_{j=0}^{+\infty}\phi^j L^j\right]\varepsilon_t\end{aligned}$$

d'où $y_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{1-\phi}, \sigma^2\left(1+\frac{(\phi+\theta)^2}{1-\phi^2}\right)\right)$. Nous avons selon ce qui précéde pour $h \geq 1$

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-h}\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\frac{\mu}{1-\phi} \\ \frac{\mu}{1-\phi}\end{pmatrix}, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1+\theta^2+2\theta\phi & \phi^{h-1}(\phi+\theta)(1+\phi\theta) \\ \phi^{h-1}(\phi+\theta)(1+\phi\theta) & 1+\theta^2+2\theta\phi\end{pmatrix}\right)$$

d'où

$$y_t\,|y_{t-h} \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{1-\phi} + \phi^{h-1}\frac{(\phi+\theta)(1+\phi\theta)}{1+\theta^2+2\theta\phi}\left(y_{t-1} - \frac{\mu}{1-\phi}\right), 1+\theta^2+2\theta\phi - \frac{\phi^{2(h-1)}(\phi+\theta)^2(1+\phi\theta)^2}{1+\theta^2+2\theta\phi}\right)$$

2. La famille des polynômes d'Hermite $H_n(x)$ est définie par la récurrence suivante:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]$$

Donner les polynômes $H_0(x)$, $H_1(x)$ et $H_2(x)$. Montrer que si X est une variable normale standard (de loi $\mathcal{N}(0,1)$), alors

$$EH_n(X)H_m(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ n! \text{ si } n = m\end{cases}$$

[Indication: on considérera la famille des fonctions $u_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x)$ et l'on montrera que $\int_{\mathbb{R}} x^k u_n(x)\,dx = n!\sqrt{2\pi}\mathbf{1}_{n=k}$].On admettra par la suite que si U et V sont deux variables gaussiennes standard de corrélation ρ, alors

$$E(H_n(U)H_m(V)) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \rho^n n! \text{ si } n = m\end{cases}$$

Réponse: $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$ et $H_2(x) = x^2 - 1$. Le polynôme d'Hermitte $H_n(x)$ est de degré n et le coefficient de plus haut degré est 1. Par construction, $\frac{d}{dx}u_{n-1}(x) = -u_n(x)$. Par intégration par partie, $k \leq n$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x^k u_n(x)\,dx &= \left[-x^k u_{n-1}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + k\int_{\mathbb{R}} x^{k-1}u_{n-1}(x)\,dx \\ &= k!\int_{\mathbb{R}} u_{n-k}(x)\,dx\end{aligned}$$

Si $k < n$, alors $\int_{\mathbb{R}} x^k u_n(x)\, dx = k! \int_{\mathbb{R}} (-1)^{n-k} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] dx = 0$. Si $k = n$, alors $\int_{\mathbb{R}} x^n u_n(x)\, dx = n! \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, d'où le résultat. En effet, soit $H_k(x)$ polynôme de degré $k < n$,

$$\begin{aligned} EH_k(X) H_n(X) &= \int_{\mathbb{R}} H_k(x) H_n(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_k(x) u_n(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

et comme $H_n(x) = x^n + \sum_{j=1}^{n} h_{n,j} x^{n-j}$,

$$\begin{aligned} EH_n^2(X) &= \int_{\mathbb{R}} H_n^2(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_n(x) u_n(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= n! \end{aligned}$$

3. Calculer la variance de $z_t = a + by_t + cy_t^2$. [Indication: on exprimera ce processus en fonction de y_t^{**}.] **Réponse**: Soit $y_t^{**} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_y(0)}} y_t^* = \sqrt{\frac{1-\phi^2}{\sigma^2(1+\theta^2+2\theta\phi)}} y_t^* \sim \mathcal{N}(0,1)$, nous avons

$$\begin{aligned} z_t &= a + b\left(\frac{\mu}{1-\phi} + \sqrt{\gamma_y(0)} y_t^{**}\right) + c\left(\frac{\mu}{1-\phi} + \sqrt{\gamma_y(0)} y_t^{**}\right)^2 \\ &= \alpha + \beta y_t^{**} + \gamma y_t^{**2} \\ &= \alpha + \gamma + \beta y_t^{**} + \gamma\left(y_t^{**2} - 1\right) \\ &= (\alpha+\gamma) H_0(y_t^{**}) + \beta H_1(y_t^{**}) + \gamma H_2(y_t^{**}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= a + b\frac{\mu}{1-\phi} + c\left(\frac{\mu}{1-\phi}\right)^2 \\ \beta &= \left(b + 2c\frac{\mu}{1-\phi}\right)\sqrt{\gamma_y(0)} \\ \gamma &= c\gamma_y(0) \end{aligned}$$

d'où par l'orthogonalité des polynômes d'Hermitte

$$Vz_t = \beta^2 + 2\gamma^2$$

4. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. En déduire que l'on peut représenter $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ comme la somme d'une constante et de deux processus ARMA$(1,1)$ non corrélés. **Réponse**: En suivant le raisonnement précédent, nous avons

$$\begin{aligned} z_t &= (\alpha+\gamma) H_0(y_t^{**}) + \beta H_1(y_t^{**}) + \gamma H_2(y_t^{**}) \\ z_{t-h} &= (\alpha+\gamma) H_0\left(y_{t-h}^{**}\right) + \beta H_1\left(y_{t-h}^{**}\right) + \gamma H_2\left(y_{t-h}^{**}\right) \end{aligned}$$

d'où selon la propriété énoncée plus haut

$$\begin{aligned} \gamma_z(h) &= \beta^2 \rho_y(h) + 2\gamma^2 \rho_y(h)^2 \\ &= \frac{\beta^2}{\gamma_y(0)} \gamma_y(h) + \frac{2\gamma^2}{\gamma_y(0)^2} \gamma_y(h)^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\rho_y(h)^2 = \left(\phi^2\right)^{h-1} \frac{(\phi+\theta)^2 (1+\phi\theta)^2}{(1+\theta^2+2\theta\phi)^2}$$

Nous remarquons que sous l'hypothèse $\theta \neq 0$, $\phi^2 \neq \rho_y(1)^2$. Considérons l'équation en θ^* suivante :

$$\rho_y(1)^2 = \frac{\left(\phi^2+\theta^*\right)\left(1+\phi^2\theta^*\right)}{\left(1+(\theta^*)^2+2\theta^*\phi^2\right)} < 1$$

ou encore

$$\left[\phi^2 - \rho_y(1)^2\right](\theta^*)^2 + \left[\phi^4+1-2\phi^2\rho_y(1)^2\right]\theta^* + \left[\phi^2-\rho_y(1)^2\right] = 0$$

Le produit des racines de cette équation du second degré est 1, l'une au moins est de module inférieur ou égal à 1. Le discriminant de cette équation est

$$\delta = \left[\phi^4+1-2\phi^2\rho_y(1)^2\right]^2 - 4\left[\phi^2-\rho_y(1)^2\right]^2$$

ou

$$\delta = \left(1-\phi^2\right)\left(\phi^2+1\right)\left(1+2\rho_y(1)^2-\phi^2\right)\left(\phi^2+1-2\rho_y(1)^2\right)$$

Comme

$$\left(\phi^2+1-2\rho_y(1)^2\right) = \frac{\left(1-\phi^2\right)\left(1-\phi^4+\left(\theta^2-\phi^2\right)^2\right)}{(1+\theta^2+2\theta\phi)^2}$$

nous concluons que $\delta > 0$. L'équation ci-dessus a donc deux racines réelles dont l'une est de module inférieur à 1, nous notons cette solution θ^{**}. La fonction d'autocovariance d'un processus $(z_{2,t})_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant une représentation ARMA$(1,1)$ de paramètres $\left(\phi^2, \theta^{**}\right)$ est

$$\begin{aligned}\gamma_{z_2}(0) &= \frac{\sigma_2^2\left(1+\theta^{**2}+2\theta^{**}\phi^2\right)}{1-\phi^4}\\ \gamma_{z_2}(h) &= \frac{\sigma_2^2\left(\phi^2+\theta^{**}\right)(1+\phi\theta^{**})}{1-\phi^4}\phi^{2(h-1)}\end{aligned}$$

Posons

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^4\left(1-\phi^4\right)}{(1-\phi^2)^2}\frac{\left(1+\theta^2+2\theta\phi\right)^2}{(1+\theta^{**2}+2\theta^{**}\phi^2)} = \frac{\sigma^4\left(1-\phi^4\right)}{(1-\phi^2)^2}\frac{(\phi+\theta)^2(1+\phi\theta)^2}{(\phi^2+\theta^{**})(1+\phi^2\theta^{**})}$$

La fonction d'autocovariance du processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ apparaît égale à la somme des fonctions d'autocovariance de deux processus ARMA$(1,1)$: d'une part,

$$z_{1,t} = \phi z_{1,t} + \eta_{1,t} + \theta\eta_{1,t-1}$$

où $(\eta_{1,t})_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc tel que $V\eta_{1,t} = \frac{\beta^2\sigma^2}{\gamma_y(0)} = \left(b+2c\frac{\mu}{1-\phi}\right)^2\sigma^2$ et d'autre part

$$z_{2,t} = \phi^2 z_{2,t} + \eta_{2,t} + \theta^{**}\eta_{2,t-1}$$

où $(\eta_{2,t})_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc tel que $V\eta_{2,t} = \frac{2\gamma^2\sigma_2^2}{\gamma_y(0)^2} = 2c^2\frac{\sigma^4\left(1-\phi^4\right)}{(1-\phi^2)^2}\frac{\left(1+\theta^2+2\theta\phi\right)^2}{(1+\theta^{**2}+2\theta^{**}\phi^2)}$. Il s'ensuit que si l'on considère deux processus $(\eta_{1,t})_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\eta_{2,t})_{t\in\mathbb{Z}}$ non corrélés pour tout couple de dates, nous pouvons représenter $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sous la forme

$$z_t = a + b\frac{\mu}{1-\phi} + c\left(\frac{\mu}{1-\phi}\right)^2 + c\gamma_y(0) + z_{1,t} + z_{2,t}$$

5. En déduire que le processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation ARMA dont on précisera les ordres, avec une moyenne non nulle que l'on donnera. **Réponse**: En appliquant le polynôme $(1-\phi L)\left(1-\phi^2 L\right)$ à z_t, nous avons

$$(1-\phi L)\left(1-\phi^2 L\right)\left(z_t-\left(a+b\frac{\mu}{1-\phi}+c\left(\frac{\mu}{1-\phi}\right)^2+c\gamma_y(0)\right)\right)=\zeta_t$$

où

$$\zeta_t=(1-\phi L)\left(\eta_{2,t}+\theta^{**}\eta_{2,t-1}\right)+\left(1-\phi^2 L\right)\left(\eta_{1,t}+\theta\eta_{1,t-1}\right)$$

Le processus ζ_t est tel que $\forall h>2$, $\gamma_\zeta(h)=0$. Il admet une représentation MA(2) [Remarque: selon la valeur des paramètres, il est possible que ce processus soit MA(1)]. Le processus suit donc un ARMA$(2,2)$ de moyenne $a+b\frac{\mu}{1-\phi}+c\left(\frac{\mu}{1-\phi}\right)^2+c\gamma_y(0)$.

Problème : Partie III

Nous souhaitons prévoir à l'horizon 1 les valeurs à venir du processus $(z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini dans la Partie II dans le cas simple où $a=b=0$ et $c=1$. L'hypothèse de normalité est maintenue, la moyenne de y_t est supposée nulle.

1. Donner la prévision à l'horizon 1 du processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à la date T, elle sera notée $y_{T+1|T}$ et exprimée en fonction des y_{T-h} et ε_{T-h}, pour $h\leq 0$. Est-elle égale à l'expérance conditionnelle ? Donner la variance de l'erreur de prévision $\sigma^2_{T+1|T}$. **Réponse**: Nous avons en itérant le modèle ARMA$(1,1)$,

$$y_{T+h}=\phi^h y_T+\phi^{h-1}\theta\varepsilon_T+(\phi+\theta)\sum_{j=1}^{h-1}\phi^{j-1}\varepsilon_{T+h-j}+\varepsilon_{T+h}$$

$$y_{T+1|T}=\phi y_T+\theta\varepsilon_T$$

et

$$\begin{aligned}V\left(y_{T+1}-y_{T+1|T}\right)&=\sigma^2_{T+1|T}\\&=\sigma^2\end{aligned}$$

Pour $h>1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}y_{T+h|T}&=Ey_{T+h}\left|y_T,y_{T-1},...\right.\\&=\phi^{h-1}\left(\phi y_T+\theta\varepsilon_T\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}V\left(y_{T+h}-y_{T+h|T}\right)&=\sigma^2_{T+h|T}\\&=V\left((\phi+\theta)\sum_{j=1}^{h-1}\phi^{j-1}\varepsilon_{T+h-j}+\varepsilon_{T+h}\right)\\&=\sigma^2\left(1+\frac{(\phi+\theta)^2\left(1-\phi^{2(h-1)}\right)}{1-\phi^2}\right).\end{aligned}$$

Le processus est gaussien, l'espérance linéaire et l'espérance conditionnelle sont confondues.

2. Calculer la prévision et la variance de l'erreur de prévision de z_{T+1} conditionnelle à toute l'information disponible, elle sera notée $z_{T+1|T}$.**Réponse**: Nous avons

$$y_{T+h} = \phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right) + \sigma_{T+h|T}\, u_{T+h|T}$$

où $u_{T+h|T} \sim \mathcal{N}(0,1)$. En utilisant le cadre de la Partie II, nous avons

$$\begin{aligned} z_{T+h} &= \left(y_{T+h}\right)^2 \\ &= \left(\left[\phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)\right]^2 + \sigma^2_{T+h|T}\right) H_0\left(u_{T+h|T}\right) \\ &\quad +2\phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)\sigma_{T+h|T}\, H_1\left(u_{T+h|T}\right) \\ &\quad +\sigma^2_{T+h|T}\, H_2\left(u_{T+h|T}\right) \end{aligned}$$

d'où comme $u_{T+h|T}$ est une v.a. gaussienne non corrélée (indépendante) avec le passé du processus, nous obtenons

$$\begin{aligned} z_{T+h|T} &= E\left(z_{T+h}\left|y_T, y_{T-1}, \ldots\right.\right) \\ &= \left[\phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)\right]^2 + \sigma^2_{T+h|T} \\ &= \phi^{2h} y_T^2 + 2\phi^{2h-1}\theta y_T\varepsilon_T + \phi^{2(h-1)}\theta^2\varepsilon_T^2 + \sigma^2_{T+h|T} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E\left(z_{T+h} - z_{1,T+h|T}\right)^2 &= E\left(2\phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)\sigma_{T+h|T}\, H_1\left(u_{T+h|T}\right) + \sigma^2_{T+h|T}\, H_2\left(u_{T+h|T}\right)\right)^2 \\ &= 4\phi^{2(h-1)}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)^2\sigma^2_{T+h|T} + 2\sigma^4_{T+h|T} \end{aligned}$$

Pour $h = 1$,

$$z_{T+1|T} = \left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)^2 + \sigma^2$$

et

$$E\left(z_{T+1} - z_{T+1|T}\right)^2 = 4\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)^2\sigma^2 + 2\sigma^4.$$

3. Calculer l'espérance du carré d'une erreur de prévision naïve $\check{z}_{T+1|T} = \left(y_{T+1|T}\right)^2$. **Réponse**: Nous avons

$$\begin{aligned} z_{T+h} - \check{z}_{T+h|T} &= \left(y_{T+h}\right)^2 - \check{z}_{T+h|T} \\ &= \left(\left[\phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)\right]^2 + \sigma^2_{T+h|T} - \check{z}_{T+h|T}\right) H_0\left(u_{T+h|T}\right) \\ &\quad +2\phi^{h-1}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)\sigma_{T+h|T}\, H_1\left(u_{T+h|T}\right) \\ &\quad +\sigma^2_{T+h|T}\, H_2\left(u_{T+h|T}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E\left(z_{T+h} - \check{z}_{T+h|T}\right)^2 &= 4\phi^{2(h-1)}\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)^2\sigma^2_{T+h|T} + 2\sigma^4_{T+h|T} + \left(z_{T+h|T} - \check{z}_{T+h|T}\right)^2 \\ &> E\left(z_{T+h} - z_{T+h|T}\right)^2 \end{aligned}$$

La variance des erreurs des prévisions naïves est strictement plus grande puisque $z_{T+h|T} = \left(y_{T+h|T}\right)^2 + \sigma^2_{T+h|T} = \check{z}_{T+h|T} + \sigma^2_{T+h|T}$. Pour $h = 1$,

$$E\left(z_{T+1} - \check{z}_{T+1|T}\right)^2 = 4\left(\phi y_T + \theta\varepsilon_T\right)^2\sigma^2 + 3\sigma^4$$

4. Calculer la prévision optimale et la variance de l'erreur de prévision de z_{T+1} dans la famille des prévisions linéaires en $(z_t)_{t\leq T}$, elle sera notée $\tilde{z}_{T+1|T}$.**Réponse**: Selon la Partie II, nous savons que la fonction d'autocovariance de z_t a la forme

$$\gamma_z(h) = \beta^2\rho_y(h) + 2\gamma^2\rho_y(h)^2$$

où $\beta = \left(b + 2c\frac{\mu}{1-\phi}\right)\sqrt{\gamma_y(0)} = 0$ et $\gamma = \gamma_y(0)^2$, soit encore

$$\gamma_z(h) = 2\gamma_y(h)^2$$

qui est la fonction d'autocovariance d'un processus ARMA$(1,1)$ de paramètres $\left(\phi^2, \theta^{**}\right)$ et de variance $2\frac{\sigma^4\left(1-\phi^4\right)}{\left(1-\phi^2\right)^2}\frac{\left(1+\theta^2+2\theta\phi\right)^2}{\left(1+\theta^{**2}+2\theta^{**}\phi^2\right)} = \sigma^{*2}$. Il s'ensuit qu'il existe un bruit blanc de variance unitaire $(\eta_{3,t})$ tel que

$$\left(1-\phi^2 L\right)\left(z_t - \gamma_y(0)\right) = \left(1+\theta^{**}L\right)\sigma^*\eta_{3,t}$$

donc selon la formule obtenue pour les processus ARMA$(1,1)$ pour $h \geq 2$:

$$z_{T+h} - \gamma_y(0) = \phi^{2h}\left(z_T - \gamma_y(0)\right) + \phi^{2(h-1)}\theta^{**}\sigma^*\eta_{3,T} + \left(\phi^2 + \theta^{**}\right)\sigma^*\sum_{j=1}^{h-1}\phi^{2(j-1)}\eta_{3,T+h-j} + \sigma^*\eta_{3,T+h}$$

d'où

$$\widetilde{z}_{T+h|T} = \gamma_y(0)\left(1-\phi^{2h}\right) + \phi^{2(h-1)}\left[\phi^2 z_T + \theta^{**}\sigma^*\eta_{3,T}\right]$$

et

$$E\left(z_{T+h} - \widetilde{z}_{T+h|T}\right)^2 = \sigma^{*2}\left(1 + \frac{\left(\phi^2+\theta^{**}\right)^2\left(1-\phi^{4(h-1)}\right)}{1-\phi^4}\right)$$

Pour $h = 1$,

$$\widetilde{z}_{T+1|T} = \phi^2 y_T^2 + \left(1-\phi^2\right)\gamma_y(0) + \theta^{**}\sigma^*\eta_{3,T}$$

et

$$\begin{aligned} V\left(z_{T+1} - \widetilde{z}_{T+1|T}\right) &= \sigma^{*2} \\ &= 2\frac{\sigma^4\left(1-\phi^4\right)}{\left(1-\phi^2\right)^2}\frac{\left(1+\theta^2+2\phi\theta\right)^2}{1+\theta^{**2}+2\theta^{**}\phi^2}. \end{aligned}$$

5. Pensant étudier un bruit blanc faible, un statisticien étudie la présence d'effets ARCH dans le processus $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Il considère le carré du processus. Conclurera-t-il la présence d'un effet ARCH ou GARCH ? **Réponse**: En régressant y_t^2 sur des valeurs passées et une constante, il travaille sur l'approximation de $\left(y_t^2\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ en fonction de son passé. Comme, $\left(y_t^2\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfait une représentation faible ARMA$(1,1)$, sa fonction d'autocorrélation partielle ne s'annule pas (elle converge exponentiellement vers 0). Dans une procédure de test de non significativité des coefficients de la projection, il doit rejeter l'hypothèse nulle (pour un échantillon de grande taille) et peut être amené à considérer une modélisation de type ARCH.