Ordres multiplicatifs

Leonardo Saba

21 janvier 2021

1 Introduction

Soit $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, le but est de trouver pour quelles valeurs de n la congruence $a^n \equiv 1[m]$ est vraie.
On peut remarquer que 0 est une solution triviale : $a^0 = 1$ donc $a^0 \equiv 1[m]$ Soit α la première valeur possible non-nulle. On remarque tout de suite que :
si $a^\alpha \equiv 1[m]$
alors $(a^\alpha)^q \equiv 1[m]\ \forall q \in \mathbb{N}$
donc $a^{\alpha q} \equiv 1[m]$

Ainsi toutes les valeurs de n vérifiant cette congruence sont de la forme : $n = \alpha q$
On dira que α est l'ordre multiplicatif de a modulo m.

2 Fonctions f et f^{-1}

La congruence présentée précédemment peut être posée d'une manière différente :

$$a^n \equiv 1[m] \Leftrightarrow a^n = mq + 1, \forall q \in \mathbb{N}$$

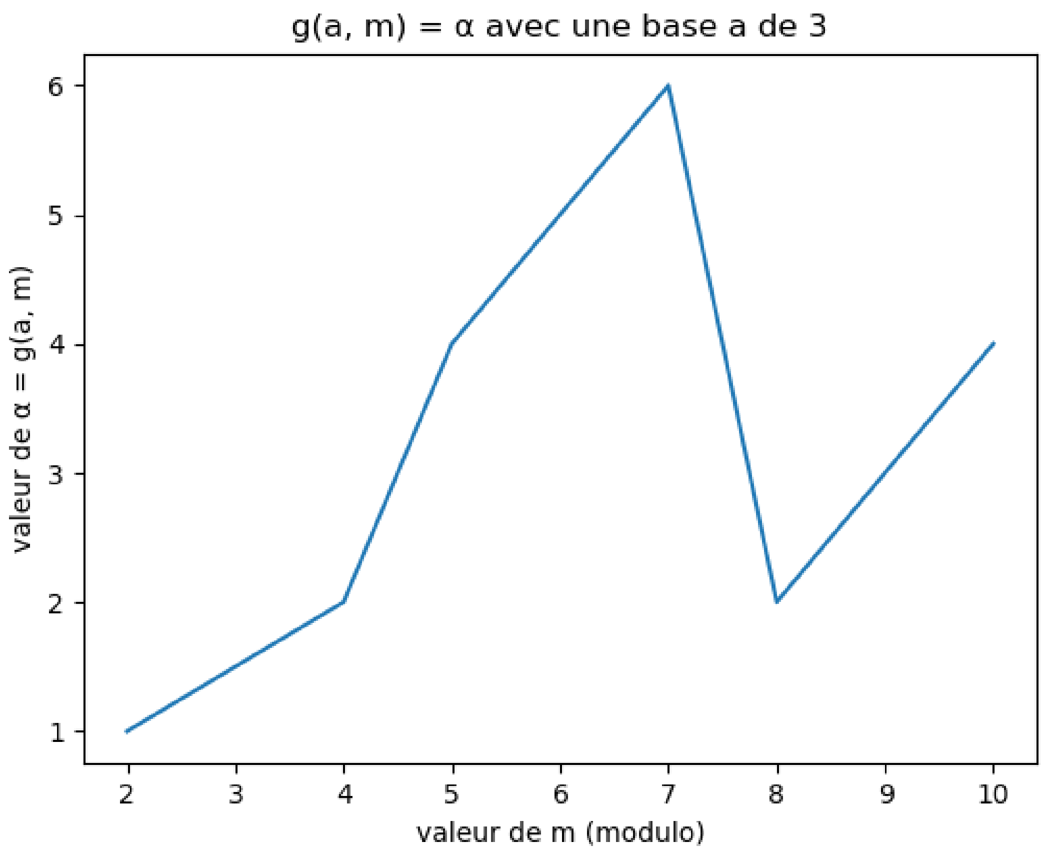
On peut en déduire n :
$n = \log_a(mq+1)$
$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(mq+1)}{ln(a)}$
Soit $f(x) = \frac{\ln(mx+1)}{ln(a)}$
Sa réciproque : $x = \frac{\ln(my+1)}{ln(a)}$
$\Leftrightarrow x\ln(a) = \ln(my+1)$
$\Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(my+1)$
$\Leftrightarrow a^x = my + 1 \Leftrightarrow \frac{a^x - 1}{m} = y$
Donc $f^{-1}(x) = \frac{a^x-1}{m}$

3 Nombres premiers

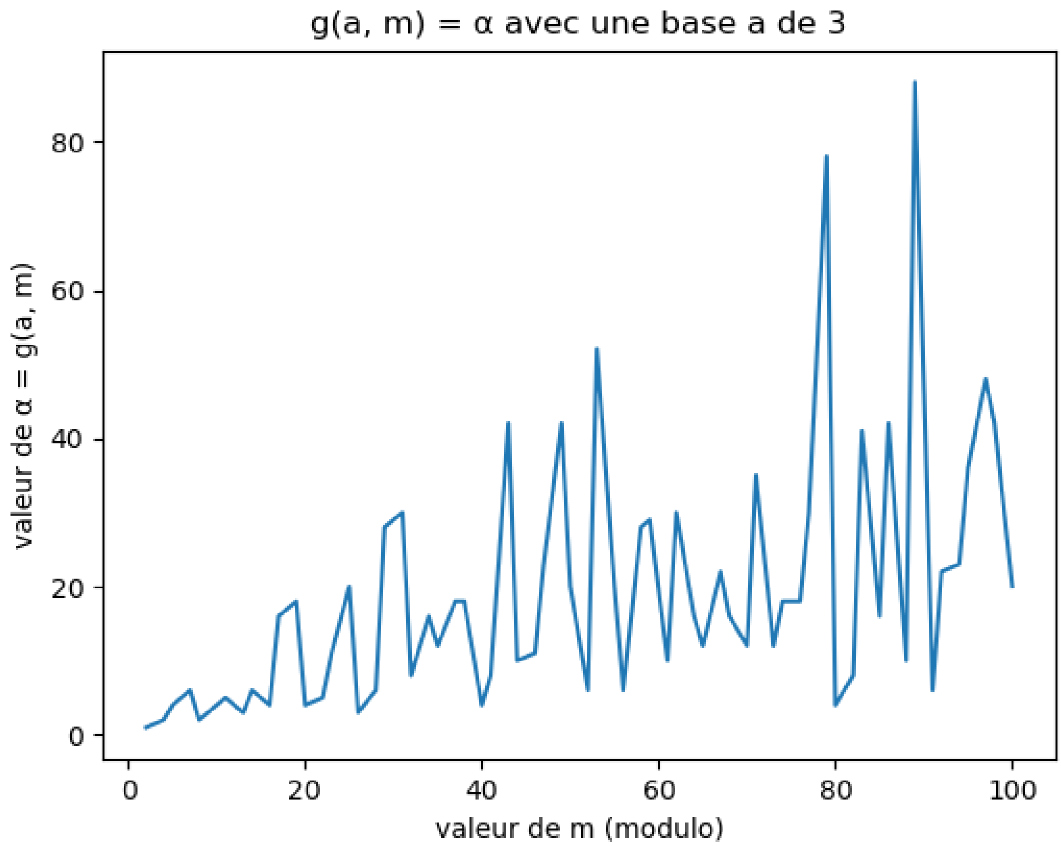
Soit S l'ensemble des solutions entières non-nulles $y = f^{-1}(x)$ avec $y \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$, on peut remarquer que la valeur S_0 correspond à la valeur α décrite en introduction.
Soit g la fonction satisfaisant :

$$\begin{array}{cccc} g & : & (\mathbb{N}, \mathbb{N}_{\geq 2}) & \to & \mathbb{N} \\ & & a, m & \mapsto & \alpha \end{array}$$

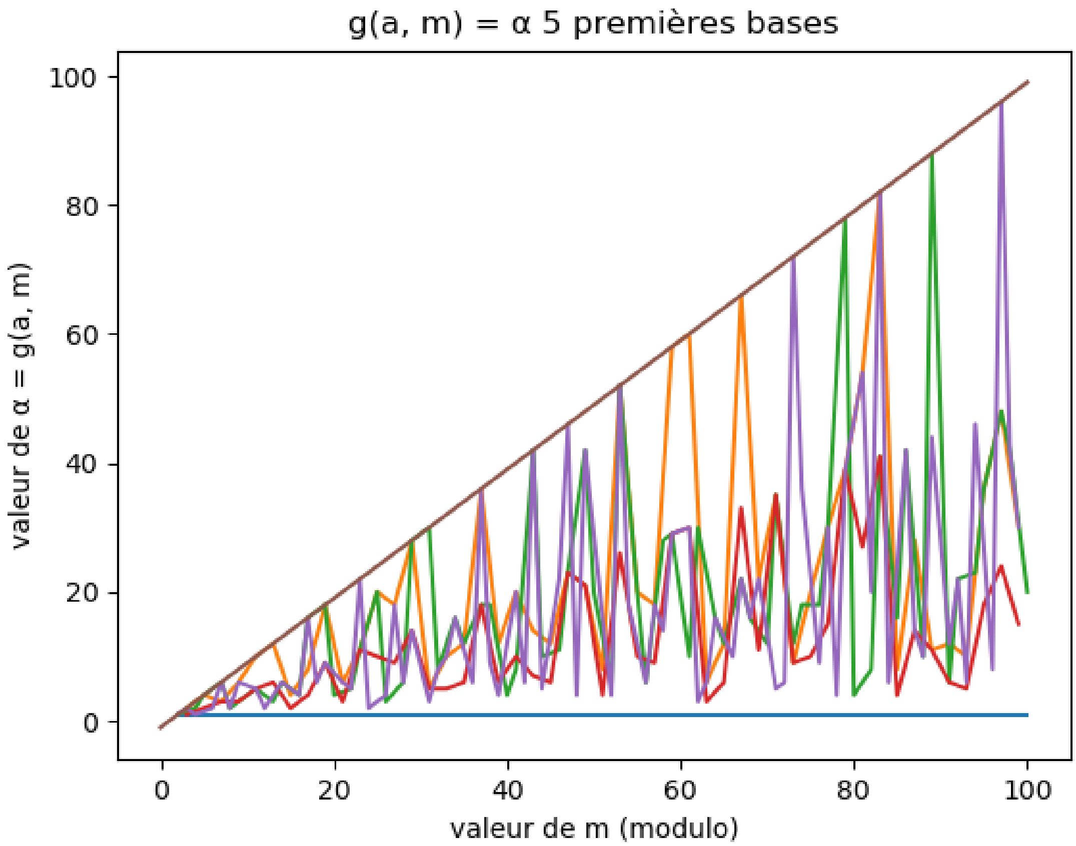
où a est la base et m le modulo
Prenons par exemple $a = 3$, faisons varier les valeurs de m. Voici les valeurs de g(a, m) pour $m \in [\![2\ ;\ 10]\!]$:



Les points ont été reliés pour une meilleure visibilité. Maintenant voyons les valeurs de $g(a, m)$ pour $m \in [\![2\ ;\ 100]\!]$:



On peut remarquer des différents "pics" de la fonction, correspondant ici aux valeurs : 2, 5, 7, 17, 19, 29, 31, 43, 53, 79 et 89. Ces "pics" sont alignés sur la droite d'équation $y = m - 1$. Ces valeurs semblent être des nombres premiers. Ainsi les solutions S_g de l'équation $g(a, m) = m - 1$ admettent $S_g \in \mathbb{E}$ avec parfois $\mathbb{E} \in \mathbb{P}$. Cela peut se démontrer avec le petit théorème de Fermat. Soit $p \in \mathbb{P}$ alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ainsi on retrouve la fonction $g(a, m)$ avec $m = p$ qui admet $g(a, p) = p - 1$ car ici $\alpha = p - 1$. p est alors forcément solution de l'équation $g(a, m) = m - 1$ quand $m = p$. Donc m $\in \mathbb{E}$. Cependant, il est faux de dire que $\forall p \in \mathbb{P}, p \in \mathbb{E}$ car la réciproque du petit théorème de Fermat n'est pas valable. En effet, $\mathbb{E}$ inclut aussi bien les nombres premiers que les nombres de Carmichael, qui sont des nombres absolument pseudo-premiers.
Pour obtenir d'avantage de nombres satisfaisant cette équation, il est possible de faire l'union de différentes solutions en fonction des différentes valeurs de a.



23 nombres premiers ou absolument pseudo-premiers ont été obtenus avec $a = 1$ jusqu'à $a = 6$. La droite d'équation $y = m - 1$ a été représentée. On peut remarquer que la base $a = 1$ admet toujours $\alpha = 1$. De plus la base $a = 0$, n'a pas été mentionnée, celle ci n'admettant aucune solution.
Autrement dit, la valeur α vérifie cette équation :

$$\frac{a^\alpha - 1}{m} - \left\lfloor \frac{a^\alpha - 1}{m} \right\rfloor = 0$$

De plus si l'on cherche une valeur telle que $\alpha \in \mathbb{E}$ alors on pose le système :

$$\begin{cases} \frac{a^\alpha - 1}{m} - \left\lfloor \frac{a^\alpha - 1}{m} \right\rfloor = 0 \\ \alpha = m - 1 \end{cases}$$

En remplaçant α par $m - 1$:

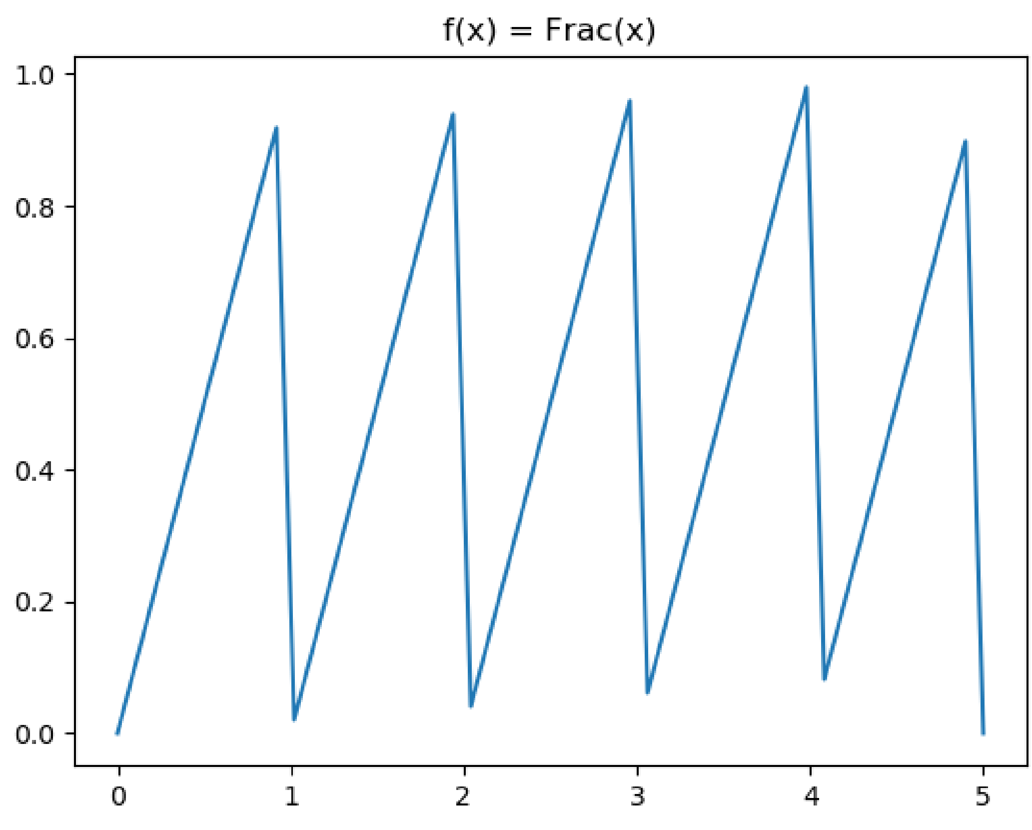
$$\frac{a^{m-1} - 1}{m} - \left\lfloor \frac{a^{m-1} - 1}{m} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow Frac\left(\frac{a^{m-1} - 1}{m}\right) = 0$$

Soit $h(m) = Frac\left(\frac{a^{m-1}-1}{m}\right)$ et S_a l'ensemble de solutions de l'équation $h(m) = 0$ en fonction d'une base a. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{E}, p \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$$

4 Approximation de la fonction $Frac$ par un polynôme trigonométrique

La fonction $Frac$ utilisée précédemment dans la fonction h ainsi que ces généralités à n'importe quel modulo, trouvant ainsi l'ordre multiplicatif de a modulo m, se présente ainsi :



Cette fonction semble assez simple à approximer avec une série de Fourier car on remarque qu'il existe une fonction 1-périodique continue par morceaux admettant $f(t) = t$ sur l'intervalle $[0;1[$. On peut tout de suite indiquer que $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. On peut ainsi calculer les coefficients :

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{1}\int_0^T f(t)cos(k\omega t)dt \\
&= 2\int_0^1 t\cos(k\omega t)dt \\
&= 2\left[\left[\frac{t\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}dt\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{1.\sin(2k\pi)}{k\omega} - 0\right) - \frac{1}{k\omega}\int_0^1 \sin(k\omega t)dt\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{\sin(2k\pi)}{k\omega}\right) - \frac{1}{k\omega}\left[\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{0}{k\omega}\right) - \frac{1}{k\omega}\left(\frac{1.\sin(k\omega)}{k\omega} - 0\right)\right] \\
&= 2\left[0 - \frac{1}{k\omega}\left(\frac{\sin(2k\pi)}{k\omega} - 0\right)\right] \\
&= 2\left[0 - \frac{1}{k\omega}\frac{0}{k\omega}\right] = 2\left[0 - 0\right] = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{2}{1}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt \\
&= 2\int_0^1 t\sin(k\omega t)dt \\
&= 2\left[\left[\frac{-t\cos(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos(k\omega t)}{k\omega}dt\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{-\cos(2k\pi)}{k\omega} - 0\right) - \frac{1}{k\omega}\int_0^1 -\cos(k\omega t)dt\right] \\
&= 2\left[\frac{-1}{k\omega} - \frac{1}{k\omega}\left[\frac{-\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_0^1\right] \\
&= 2\left[\frac{-1}{k\omega} - \frac{1}{k\omega}\left(\frac{-\sin(2k\pi)}{k\omega} - \frac{-\sin(0)}{k\omega}\right)\right] \\
&= 2\left[\frac{-1}{k\omega} - \frac{1}{k\omega}\left(\frac{-0}{k\omega} + 0\right)\right] \\
&= 2\left[\frac{-1}{k\omega} - \frac{1}{k\omega} \times 0\right] \\
&= 2 \times \frac{-1}{k\omega} \\
&= \frac{-2}{k\omega} = \frac{-2}{2k\pi} = \frac{-1}{\pi k}
\end{aligned}
$$

Ainsi avec ces coefficients on peut obtenir la série de Fourier suivante :

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(k\omega x) + \beta_k \sin(k\omega x) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 \times cos(2k\pi x) + \left(\frac{-1}{\pi k} \times sin(2k\pi x)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\sin(2k\pi x)}{\pi k} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k}
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on peut facilement trouver une série de Fourier justifiant la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$, en effet on a :

$$
x = \lfloor x \rfloor + Frac(x) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = x - Frac(x)
$$

Soit donc la série de Fourier pour la fonction entière (floor) :

$$\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor = x - Frac(x) \\
\Leftrightarrow\ &\lfloor x \rfloor = x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k} \right) \\
\Leftrightarrow\ &\lfloor x \rfloor = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k}
\end{aligned}$$

5 Détermination réelle de l'ordre multiplicatif par un polynôme trigonométrique

L'équation vérifiant $y = f^{-1}(x)$ avec $y \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$ peut être désormais étendue à $\mathbb{R}$ par l'utilisation de polynômes trigonométriques des fonctions partie entière (floor) et partie décimale (frac).
On peut "forcer" x à être entier, par l'utiliation de floor dans un premier temps :

$$y = f(\lfloor x \rfloor) \Leftrightarrow y = \frac{\ln(m \lfloor x \rfloor + 1)}{\ln(a)}$$

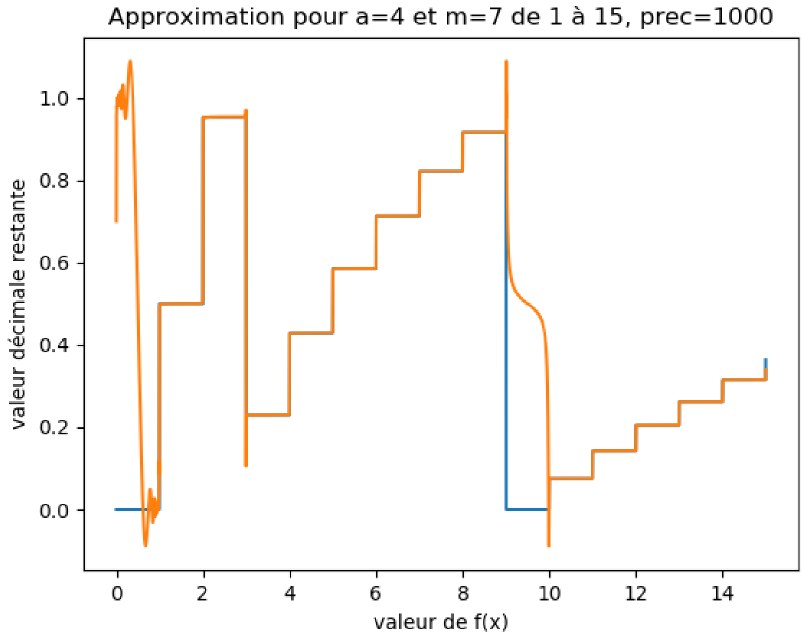
Dans un second temps, sachant que $\forall x \in \mathbb{R}/Frac(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}$:

$$Frac(y) = 0 \Leftrightarrow Frac(f(\lfloor x \rfloor)) = 0 \Leftrightarrow Frac\left(\frac{\ln(m \lfloor x \rfloor + 1)}{\ln(a)}\right) = 0$$

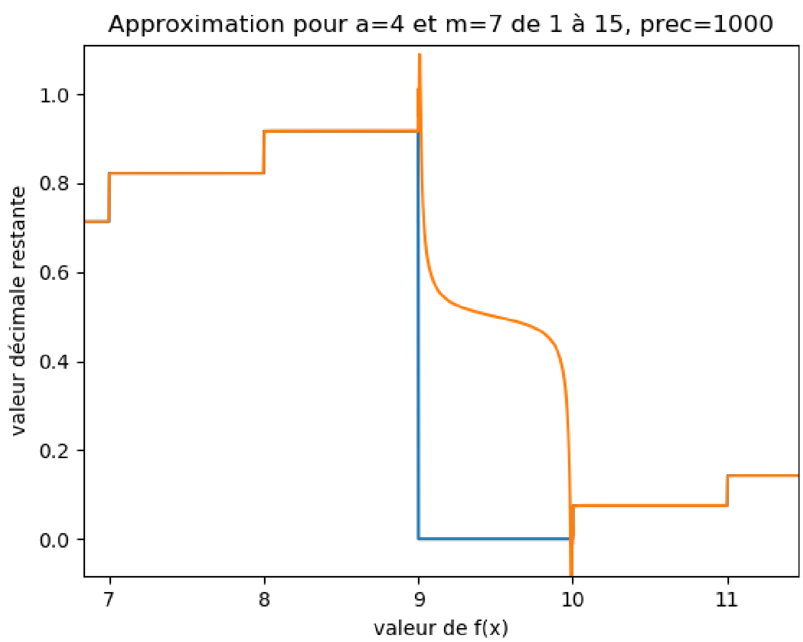
Soit l'équation $E : Frac\left(\frac{\ln(m\lfloor x \rfloor+1)}{\ln(a)}\right) = 0$, alors en remplaçant les différentes fonctions par leur polynôme trigonométrique associé on a donc :

$$E : \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left[\frac{2k\pi}{\ln(a)} \ln\left[m\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k}\right) + 1\right]\right] = 0$$

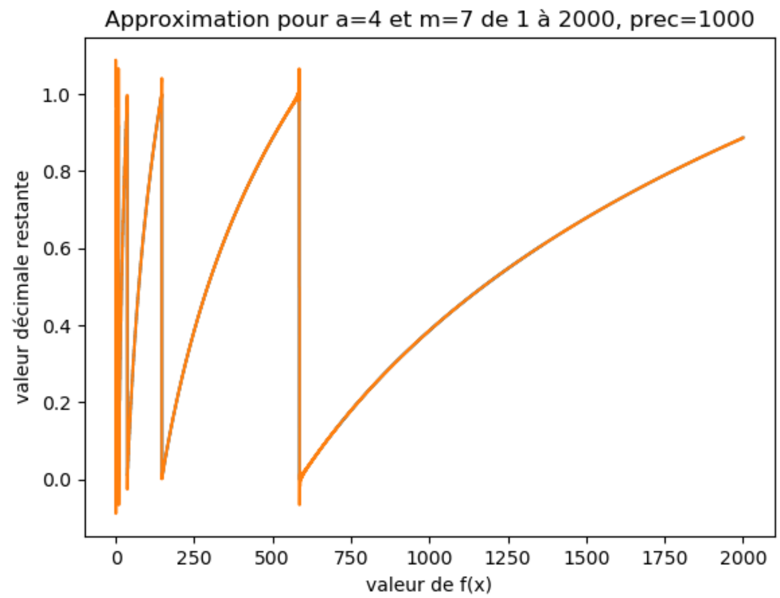
Soit T l'ensemble des solutions de E en fonction d'une valeur de a et de m, on peut déjà constater qu'une valeur $f(\alpha)$ obtenue, s'étend sur un intervalle de part la partie entière : $[f(\alpha); f(\alpha) + 1[\in T$, il faudra ainsi prendre la valeur minimum de cet intervale, ou prendre : $\forall x \in T, q\alpha = \lfloor x \rfloor \, \forall q \in \mathbb{N}$ Par ailleurs, par le même procédé, l'on peut obtenir une équation pour obtenir les élements de $\mathbb{E}$. Il suffit simplement de résoudre $h(\lfloor x \rfloor) = 0$. *L'utilisation de "simplement" laisse à désirer.*
Par exemple, prenons pour $a = 4$, $m = 7$, ayant une précision (cela correspond au calcul d'une série partielle jusqu'à une borne maximale), ici *1000.*

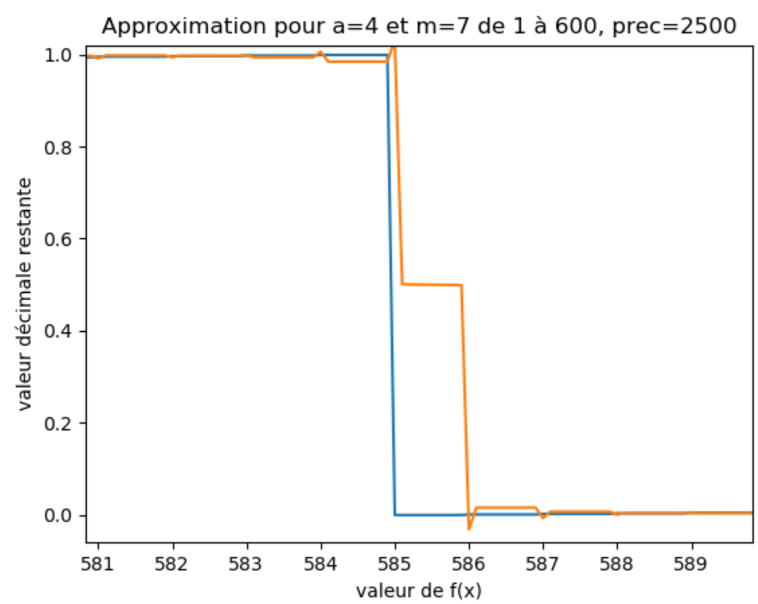


La courbe bleue correspond à la fonction utilisant la "vraie" fonction $floor$ et $frac$, celle en orange correspond à l'approximation.



Cependant, l'on peut constater un décalage de la courbe orange par rapport à la véritable fonction. Ce décalage prend forme à toutes les valeurs où E admet des solutions. Soit S_1 cette ensemble de solutions. On peut donc conjecturer que les véritables solutions de l'ensemble S_2 admettent $\forall s \in S_1, s - 1 \in S_2$.





Une solution en $x = 585$ existe, on remarque qu'elle apparaît en $x = 586$ par l'approximation, toujours avec ce fameux décalage inexpliqué.

6 Conclusion

La détermination exacte par un calcul algébrique des valeurs α reste encore un long travail par la résolution de E qui semble loin d'être triviale. La détermination des nombres premiers n'est pas abordée ici, par la réciproque fausse du petit théorème de Fermat. Cependant, serait-il possible d'avoir comme même une fonction de répartition des nombres premiers à travers l'ensemble $\mathbb{E}$? Aussi, la force de l'approximation peut laisser à désirer, de part le phénomène de Gibbs pouvant rendre les calculs faux, mais ce phénomène ne semble pas impacter grandement la validité des résultats. Enfin, comment expliquer le décalage de 1 des solutions de la fonction approximée, et surtout peut-on résoudre E ?