۱۳۹۷/۱۰/۱۰

# مباحث ترکیبیات

## جلسه بیست و چهارم

"پایانی"

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

گراف H زیرگراف G نامیده می‌شود. اگر مجموعه‌ی راس‌های آن زیر مجموعه‌ی مجموعه راس‌های G و یال‌های آن زیرمجموعه مجموعه یال‌ها G باشد. گراف H زیرگراف القایی G نامیده می‌شود اگر زیرگراف G باشد و به علاوه هر یالی از G که دو راس H را به هم وصل می‌کند، یالی از H نیز باشد. دور n راسی را با $C_n$ و مسیر n راسی را با $P_n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف درخت: گراف همبند بدون دور درخت نامیده می‌شود.

قضیه ۴.۳: بین هر دو راس درخت دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

اثبات ← مطالعه شود

لم ۴.۴: حذف یک یال از درخت منجر به ایجاد گرافی با دو مولفه همبندی می‌شود که هر یک از آن مولفه‌ها یک درخت است.

قضیه ۴.۵: به ازای هر عدد صحیح $V \geq 1$، هر درخت $V$ راسی دارای $V-1$ یال است.

نتیجه ۴.۶: هر درخت متناهی با بیش از یک راس حداقل دارای یک راس درجه یک است.

درختی که مجموعه‌ی یال‌های آن، زیرمجموعه‌ی یال‌ها گراف G و مجموعه راس‌های آن مساوی مجموعه راس‌های G باشد، یک درخت فراگیر گراف G است.

قضیه ۴.۷: هر گراف همبند متناهی دارای یک درخت فراگیر است.

الگوریتم BFS:

BFS PanTree

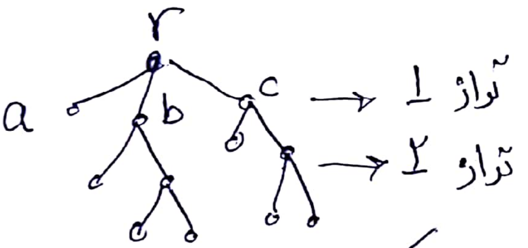
```
Intree = an array of length v with each entry initialized
                                               to "False"
S = {x0}
n = 1
E' = Ø   // E' is a set of edges
Q = Ø    // Q is a queue
Intree[x0] = true
Enqueue x0 onto Q
While there is at leaste one vecter on Q
     Deque the first element from Q and assign it to y
     for each element x of the list E[y]
          if (!Intree[x])
               Enqueue x onto Q
               S = S ∪ {x}
               Intree[x] = true
               E' = E' ∪ {x,y}
               n = n+1
if n == v
     stop
else
     Print("The vector set of the connected Componente
     Containing x0 is obtained")
```

قضیه ۹٫۹ : در گراف G مسیر یکتایی که در درخت BFS شروع شده از راس $x_0$

راس $x_0$ را به راس دلخواه $y$ وصل می کند، کوتاه ترین مسیر از $x_0$ به $y$ در گراف $G$ است بنابراین فاصله ی $x_0$ تا $y$ در گراف $G$ مساوی فاصله این دو راس در درخت BFS مربوطه است.

اثبات ← استقرا نسبت به $l$ (مطالعه شود.)

درخت ریشه دار: یک درخت $v$ مشخص از آن درخت که به عنوان ریشه از سایر راس ها متمایز شده است.




در یک درخت ریشه دار با ریشه $v$ می گوییم $x$ یک نیای $y$ و $y$ یک نواده $x$ است اگر راس $x$ روی $y-v$ مسیر یکتای موجود در درخت باشد

اگر $x$ تنها همسایه $y$ در $y-v$ مسیر یکتای موجود در درخت باشد

اگر $x$ تنها همسایه $y$ در $y-v$ مسیر یکتایی موجود در درخت باشد آن گاه $x$ پدر $y$ و $y$ نیز فرزند $x$ است.

راسی بدون فرزند یک برگ یا راس خارجی نامیده می شود و هر راس غیر برگ یک راس داخلی است

مدار اویلری و تور اویلری با هم یکی هستند اما تور $\neq$ مدار

گراف اویلری ـ همیلتنی: تورها، گذرها اویلری

گذر: گشتی که فاقد یال تکراری باشد.

تور: گشت بسته ای که از هر یال گراف لااقل یکبار عبور می کند.

مدار: گشت بسته ای در گراف $G$ است.

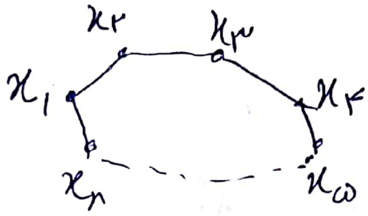
مدار اویلری: گشت بسته ای که از هر یال گراف دقیقاً یکبار عبور کند

تور اویلری: توری که از هر یال گراف دقیقاً یکبار عبور کنند.

قضیه ۱۰: یک گراف متناهی دارای یک تور اویلری است اگر و تنها اگر همبند باشد و درجه هر راس آن زوج باشد.

اثبات: مطالعه شود

دور:




یک دور دنباله ای از راس های متمایز مانند $x_1, x_2, \ldots, x_n$ است که $x_i$ با $x_{i+1}$ مجاور است و $x_n$ با $x_1$ مجاور است.

یک دور همیلتنی در گراف عبارت است از دوری که شامل همه راس های گراف باشد.

قضیه ۶.۱۳ (قضیه Ore): اگر یک گراف ساده $v$ راسی باشد و $v \geq 3$ و به ازای هر دو راس غیر مجاور $x$ و $y$ جمع درجات دو راس مذکور لااقل برابر $v$ باشد، $G$ دارای یک دور همیلتنی است.