دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۵**

مروری بر مطالب درس:

- **تعریف mod' :**

$$A \, mod' \; p = \begin{cases} p & p|A \\ A \bmod p & O.W \end{cases}$$

- **تعریف دوره‌ی تناوب دوری:**

دوره‌ی تناوب دوری واژه‌ای مانند $A = a_1a_2 \ldots a_n$ مساوی کوچکترین عدد صحیح $0 < t \leq n$ به‌طوری که:

$$\forall \; 1 \leq i \leq n \;\; a_i = a_{(i+t)} \; mod' \; n$$

- **تعریف دوره‌ی تناوب عمومی:**

همان تعریف بالا اما شرط $0 < t \leq n$ را ندارد.

یک نتیجه‌ی بدیهی: برای تمای رشته‌ها، 0 یکی از اعداد ممکن برای دوره‌ی تناوب دوره‌ی عمومی آن‌ها است.

- **تعریف واژه‌ی اولیه(primitive) :**

اگر واژه‌ی $A = a_1a_2 \ldots a_n$ دارای دوره‌ی تناوب n باشد، آن را واژه‌ی اولیه می‌گوییم.

- **تعریف دنباله‌ی غالب(dominating) :**

دنباله‌ی متناهی از a, b را غالب گوییم اگر در هر پیشوند ناتهی آن تعداد ظهور حروف a اکیدا از تعداد ظهور حروف b بیشتر باشد.

- **لم دور:**

به ازای هر $w = p_1p_2 \ldots p_{n+m}$ که از m حرف a و n حرف b که $m > n$ تشکیل شده باشد، دقیقا تعداد $m - n$ انتقال دوری w وجود دارد که غالب باشد.

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) به چند طریق می‌توان n بازیکن و m مربی را دو یک میز گرد نشاند مشروط بر آنکه:

الف) بازیکن شماره ۱ و مربی شماره ۱ کنار هم نشینند.

ب) هیچ دو مربی کنار هم ننشینند.

۲) ثابت کنید دوره‌ی تناوب دوری یک واژه مقسوم علیه‌ای از طول آن است.

۳) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) چند واژه‌ی اولیه روی الفبای $\{a, b\}$ به طول ۶ وجود دارد؟

ب) اگر واژه‌ی اولیه بررسی شده در قسمت الف را به صورت گردنبندی در نظر بگیریم(یعنی دو واژه که با تبدیل دوری به هم تبدیل می‌شوند یکسان باشند) آنگاه تعداد واژه‌ها چندتاست؟

۴) به چند طریق می‌توان $n \geq 2$ نفر را دور دو میز گرد یکسان نشاند به طوری که میز خالی نماند.

۵) با استفاده از لم دور مسئله‌ی زیر را حل کنید:

دلقکی درست بر لبه‌ی یکی استخر پر از و پشت به آن ایستاده است. و گردنبندی شامل m مهره قرمز و $m+1$ مهره‌ی آبی در دست دارد. با شروع از یک مهره‌ی گردنبند وحرکت دادن به مهره‌ها در جهت عقربه‌های ساعت گام‌های خطرناک خود را آغاز می‌کند با دیدن مهره‌ی قرمز یک گام به به عقب و با دیدن مهره‌ی آبی یک گام به جلو می‌رود (گام‌ها هم اندازه فرض شوند) ضمنا با توجه به لغزنده بودن لبه‌ی استخر اگر به لبه‌ی استخر باز گردد داخل آب خواهد افتاد. احتمال آن را حساب کنید که دلقک پس $2m+1$ گام به داخل استخر نیافتد.

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

الف) $\frac{(n+m)!}{(n+m)} - \frac{2(n+m-1)!}{(n+m-1)} =$ حالات نامطلوب – حالات کل

ب) ابتدا بازیکنان را دور میز می چینیم و بعد با انتخاب k جایگاه از بین k جای بین آن ها را به مربی اختصاص می دهیم.

$$\frac{n!}{n} \times \binom{n}{m} \times m!$$

۲)

لم سوال ۲: اگر k یک دوره‌ی تناوب دوری عمومی برای دسته‌ی $A = a_1 a_2 \dots a_n$ باشد. هر ترکیب خطی آن نیز دوره‌ی تناوب عمومی برای رشته‌ی A خواهد بود.

اثبات لم: حکم را به وسیله‌ی استقرای قوی روی ضریب k ثابت می‌کنیم. طبق صحبت‌های استاد حکم اصل سوال برای $k = 0$ واضح است.

پایه: طبق صورت لم ((فرض لم)) حکم برای ضریب $q = 1$ (($qk = k$)) لم برقرار است. فرض کنید حکم برای تمام اعداد صحیح از1 تا q برقرار باشد. می‌خواهیم برای $q+1$ حکم را نشان دهیم. ۳تایی xyz در حالت qk با اندیس‌های $a_i = x$ ، $a_{(i+k)} \ mod \ n = y$ و $a_{(i+2k)} mod \ n =$ z را در نظر بگیرید. میدانیم در مرحله ی قبلی یعنی برای $(q-1)k$ حکم برقرار بوده‌است یعنی داشته‌ایم $a_i = y$ و $a_{(i-k)} mod \ n = x$ و $a_{(i+k)} mod \ n = y$. از آنجایی که در هر دوی این حالت‌ها رشته روی خودش افتاده‌است. می‌توان نوشت$x = y$ و$y = z$. طبق خواص تساوی می‌توان نتیجه گرفت که $x = z$ در نتیجه اگر برای x درحالت qk، k تا بیشتر شیفت دهیم و به $(q+1)k$ می‌رسیم و مشکلی رخ نخواهد داد. به طریق مشابه از آنجایی که طول رشته‌ی ما محدود است می‌توان برای تمامی a_i و $a_{(i+2k) mod \ n}$ های ممکن این را نوشت و لم را ثابت کرد.

حکم را به وسیله‌ی برهان خلف ثابت می‌کنیم. به فرض خلف فرض می‌کنیم یک k وجود دارد که اگر کلمه را k تا شیفت دهیم کلمه روی خودش خواهد افتاد. یعنی k یک دوره‌ی تناوب دوری عمومی برای کلمه است. همچنین فرض کنید. که k طول رشته (n) را عاد نمی‌کند. بین تمام این اعداد کوچکترین آنها را در نظر می‌گیریم. داریم $k < n$ پس می‌توانیم بنویسیم $n = qk + r$ که r همان باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر k و q خارج قسمت آن هستند. از طرفی می‌دانیم n یک دوره‌ی تناوب عمومی است. از طرفی هم می‌دانیم به اندازه‌ی هر مضربی از k هم مه مسئله را برسی کنیم این عدد یک دوره‌ی تناوب عمومی می‌شود. حال اگر به اندازه ی qk رشته را شیفت دهیم طبق لم روی خودش خواهد افتاد. از طرفی چون $n = qk + r$ پس

اگر علاوه بر qk ما rتای دیگر هم شیفت دهیم رشته روی خودش خواهد افتاد این یعنی اگر از ابتدا هم r تا شیفت می‌دادیم رشته روی خودش قرار می‌گرفت می‌دانیم $r < k$ این با فرض اولیه که می‌گفت k کوچکترین است متناقض و حکم سوال صحیح است.

۳)

1) $aaaaaa$ **F**

2) $aaaaab$
$aaaaba$
$aaabaa$
$aabaaa$
$abaaaa$
$baaaaa$

3) $aaaabb$
$aaabba$
$aabbaa$
$abbaaa$
$bbaaaa$
$baaaab$

4) $abaaab$
$baaaba$

5) $baabaa$ **F**
$aabaab$
$abaaba$
$baabaa$

6) $aaabbb$
$aabbba$
$abbbaa$
$bbbaaa$
$bbaaab$
$baaabb$

7) $aabbab$
$ababba$
$bbabaa$
$babaab$
$abaabb$
$baabba$

8) $aababb$
$ababba$
$babbaa$
$abbaab$
$bbaaba$
$baabab$

9) $ababab$ **F**
$bababa$

الف) طبق اشکال بالا جواب واضح است توجه شود حالاتی که تعداد b بیشتر از a باشد مشابه حالت کمتر بودنشان است. جواب نهایی = ۵۴

ب) ۱۶ تا گروه هفت و هشت را در نظر بگیرید.

۴)

ابتدا همه را به $(n-1)!$ طریق دور یک میز قرار می‌دهیم سپس از نفر مبدا میز به سمت جلو حرکت کرده ابتدا ۱ نفر سپس ۲ نفر و ... در نهایت $n-1$ نفر را از این میز برداشته و به میز دیگر منتقل می‌کنیم از آنجایی که در صورت برداشتن k نفر و انتقال آنها به میز بعدی میز k حالت چرخش یکسان دارد در نتیجه جواب در این حالت در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود. پس جواب نهایی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

۵)

طبق لم دور می‌دانیم توالی از حروف را که بنویسیم با x حرف a و y حرف b دقیقا $x-y$ انتقال از آن هست که غالب باشد.

حالا اگر ما هر قدم جلوی دلقک را با حرف a و هر قدم رو به عقب دلقک را با حرف b نمایش دهیم مسئله مسئله به حالت اینکه تعداد رشته‌های غالب متشکل از x حرف a و y حرف b را بشماریم .که در آن در واقع $x = m + 1$ و $y = m$ است. می‌دانیم طبق لم دور در این حالت به ازای یک رشته نوشته شده با حروف مذکور $x-y$ رشته‌ی غالب و کلا $x+y$ رشته وجود دارند چون به اندازه‌ی طول رشته یعنی $x+y$ می‌توان آن را شیفت داد.

بنابرین احتمال در استخر نیافتادن دلقک برابر:

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{2m+1}$$