حل تمارینی از کتاب ایده‌آل‌ها، واریته‌ها و الگوریتم‌ها

تهیه کننده: شایگان هوشیاری

تمرینات به کمک نرم افزار Mathemhatica حل شده‌اند ابتدا توضیحاتی درباره‌ی نرم افزار و دستورات استفاده شده مینویسم که خواندن کدها راحت تر باشد.

توضیحات

دستور تقسیم چندجمله‌ای‌ها

PolynomialReduce-Wolfram Language Documentation

PolynomialReduce[poly, {poly1, poly2, ...}, {x1, x2, ...}] yields a list representing a reduction of poly in terms of the polyi. The list has the form {{a1, a2, ...}, b}, where b is minimal and a1 poly1 + a2 poly2 + ... + b is exactly poly.

https://reference.wolfram.com/language/ref/PolynomialReduce.html

دستور رسم واریته آفین

ContourPlot-Wolfram Language Documentation

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] generates a contour plot of f as a function of x and y. ContourPlot[f == g, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] plots contour lines for which f = g. ContourPlot[{f1 == g1, f2 == g2, ...}, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] plots several contour lines.

https://reference.wolfram.com/language/ref/ContourPlot.html

دستور محاسبه پایه‌ی گروبنر کاهش یافته

GroebnerBasis-Wolfram Language Documentation

GroebnerBasis[{poly1, poly2, ...}, {x1, x2, ...}] gives a list of polynomials that form a Gröbner basis for the set of polynomials polyi. GroebnerBasis[{poly1, poly2, ...}, {x1, x2, ...}, {y1, y2, ...}] finds a Gröbner basis in which the yi have been eliminated.

https://reference.wolfram.com/language/ref/GroebnerBasis.html

در بعضی سوالات نیاز است که ترتیب یک جمله‌ای مشخص شود لیست ترتیبات موجود در نرم افزار به شرح زیر است:

`"Lexicographic", "DegreeLexicographic", "DegreeReverseLexicographic", "NegativeLexicographic", "NegativeDegreeLexicographic", "NegativeDegreeReverseLexicographic"`

دستور محاسبه ب.م.م چندجمله‌ای‌ها

PolynomialGCD-Wolfram Language Documentation

gives the greatest common divisor of the polynomials . In PolynomialGCD[poly 1 , poly 2 , ...] , all symbolic parameters are treated as variables. poly PolynomialGCD[poly i as independent variables. 1 , poly 2 , ...] will by default treat algebraic numbers that appear in the poly

https://reference.wolfram.com/language/ref/PolynomialGCD.html

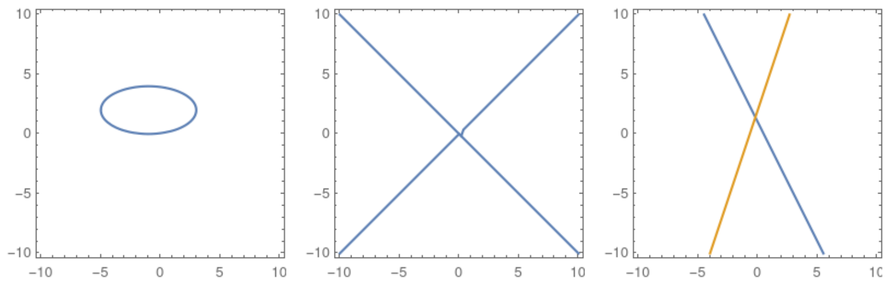
سوالات حل شده

بخش ۱.۱

سوال ۱: رسم واریته‌های آفین:

```
In[2]:= GraphicsGrid[{{ContourPlot[x^2 + 4 y^2 + 2 x - 16 y + 1 == 0, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}], ContourPlot[x^2 - y^2 == 0, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}],
   ContourPlot[{2 x + y - 1 == 0, 3 x - y + 2 == 0}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]}}]
```

Out[2]=



بخش ۵.۱

سوال ۸: محاسبه ب.م.م چندجمله‌ای

```
In[3]:= PolynomialGCD[x^3 + 2 x^2 - x - 2, x^3 - 2 x^2 - x + 2, x^3 - x^2 - 4 x + 4]
        PolynomialGCD[x^4 + x^2 + 1, x^4 - x^2 - 2 x - 1, x^3 - 1]
```

Out[3]= $-1 + x$

Out[4]= $1 + x + x^2$

بخش ۳.۲:

سوال ۲،۱ و ۵ تقسیم چندجمله‌ای

```
In[17]:=
f = x^7 y^2 + x^3 y^2 - y + 1;
p = {x y^2 - x, x - y^3};
{q, r} = PolynomialReduce[f, p, {x, y}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

Out[19]= $\{\{x^2 + x^6, 0\}, 1 + x^3 + x^7 - y\}$

```
In[20]:= f = x^7 y^2 + x^3 y^2 - y + 1;
p = {x - y^3, x y^2 - x};
{q, r} = PolynomialReduce[f, p, {x, y, z}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

Out[22]= $\{\{0, x^2 + x^6\}, 1 + x^3 + x^7 - y\}$

```
In[23]:= f = x^3 - x^2 y - x^2 z + x;
p = {x^2 y - z, x y - 1};
{q, r} = PolynomialReduce[f, p, {x, y, z}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

Out[25]= $\{\{-1, 0\}, x + x^3 - z - x^2 z\}$

```
In[26]:= f = x^3 - x^2 y - x^2 z + x;
p = {x y - 1, x^2 y - z};
{q, r} = PolynomialReduce[f, p, {x, y, z}, MonomialOrder → DegreeLexicographic]
```

Out[28]= $\{\{-x, 0\}, x^3 - x^2 z\}$

بخش ۵.۲

سوال ۷۱و ۸۱: بررسی برابر بودن ۲ ایده‌آل

```
In[30]:= GroebnerBasis[{x^2 - y , y + x^2 - 4}, {x, y}]
GroebnerBasis[{x^2 - y , x^2 - 2}, {x, y}]
```

Out[30]= $\{-2 + y, -2 + x^2\}$

Out[31]= $\{-2 + y, -2 + x^2\}$

طبق قضیه‌ای که داشتیم دو ایده‌آل برابرند اگر پایه‌ی گروبنر کاهش یافته‌ی آنها برابر باشد پس این دو برابرند

بخش ۶.۲

سوال ۰۱: بررسی پایه‌ی گروبنر بودن یک ایده‌آل

با محاسبه‌ی اس چندجمله‌ای اول و دوم و محک باخبرگر داریم:

```
(* 10 *)
s = y z^2 - x z + y;
p = {x y^2 - x z + y, x y - z^2, x - y z^4};
PolynomialReduce[s, p, {x, y, z}, MonomialOrder → Lexicographic]
```

Out[44]= $\{\{0, 0, -z\}, y + y z^2 - y z^5\}$

پس این پایه‌ی گروبنر نیست

بخش ۸.۲

سوال ۱: بررسی عضویت ایده‌آل با استفاده از پایه‌ی گروبنر

```
g = GroebnerBasis[{-x^3 + y, x^2 y - z}, {x, y}];
f = x y^3 - z^2 + y^5 - z^3;
PolynomialReduce[f, g, {x, y, z}, MonomialOrder -> Lexicographic]

Out[50]= {{1, 0, 1, 0, 0}, 0}
```

که نشان میدهد عضو ایده‌ال نیست

سوال ۲: مشابه سوال قبل

```
In[56]:= (* 2 *)

g = GroebnerBasis[{z + 2 z^2, y - z, -z + x z}, {x, y}];
f = x^3 z - 2 y^2;
PolynomialReduce[f, g, {x, y, z}, MonomialOrder -> Lexicographic]


Out[58]= {{-1, -2 y - 2 z, 1 + x + x^2}, 2 z}
```

سوال ۶ و ۷: ضمنی سازی

```
In[59]:= (* 6 *)
GroebnerBasis[{x - t - u, y - t^2 - 2 t u,
  z - t^3 - 3 t^2 u}, {t, u, x, y, z}]


Out[59]= {-3 x^2 y^2 + 4 y^3 + 4 x^3 z - 6 x y z + z^2,
 2 u y^3 + x y^3 - 4 x^2 y z + 5 y^2 z - 2 u z^2 - 2 x z^2, -2 u y^2 -
   x y^2 + 2 u x z + 2 x^2 z - y z, u x y - x^2 y + 2 y^2 - u z - x z,
  2 u x^2 - 2 x^3 - 2 u y + 3 x y - z, u^2 - x^2 + y, t + u - x}
answer = -3 x^2 y^2 + 4 y^3 + 4 x^3 z - 6 x y z + z^2
```

```
In[60]:= (* 7 *)
GroebnerBasis[{x - t u, y - 1 + u,
  z - t - u + t u}, {t, u, x, y, z}]


Out[60]= {1 - 2 y + x y + y^2 - z + y z, -1 + u + y,
 1 + t - x - y - z}
answer = 1 - 2 y + x y + y^2 - z + y z
```

بخش ۱.۳

سوال ۲

برای محاسبه ایده‌آل حذفی از پایه‌ی گروبر استفاده میکنیم:

```
(* 2 *)
GroebnerBasis[{x^2 + 2 y^2 - 3, x^2 + x y + y^2 - 3}, {y, x}]
GroebnerBasis[{x^2 + 2 y^2 - 3, x^2 + x y + y^2 - 3}, {x, y}]

Out[64]= {3 - 4 x^2 + x^4, -3 x + x^3 + 2 y}

Out[65]= {-y + y^3, x y - y^2, -3 + x^2 + 2 y^2}
```

با تغییر تربیت به ترتیب ایده‌ال حذفی دوم و اول را بدست میاوریم

سوال ۴

مانند سوال ۲ عمل میکنیم

```
In[66]:= (* 4 *)
GroebnerBasis[{x^2 + y^2 + z^2 - 4, x^2 + 2 y^2 - 5,
  x z - 1}, {x, y, z}]

Out[66]= {1 - 3 z^2 + 2 z^4, -1 + y^2 - z^2, x - 3 z + 2 z^3}
```

جملات دوم و سوم ایده‌آل حذفی اول و جمله‌ی اول ایده‌آل حذفی دوم هستند.

سوال ۷

```
In[70]:= (* 7 *)
GroebnerBasis[{t^2 + x^2 + y^2 + z^2,
  t^2 + 2 x^2 - x y - z^2, t + y^3 - z^3}, {t, x, y, z}]

Out[70]= {5 y^4 + 5 y^8 + y^12 + 13 y^2 z^2 + 6 y^6 z^2 -
  10 y^5 z^3 - 4 y^9 z^3 + 9 z^4 - 12 y^3 z^5 + 5 y^2 z^6 +
  6 y^6 z^6 + 6 z^8 - 4 y^3 z^9 + z^12, -5 y^3 - 5 y^7 - y^11 +
  3 x z^2 - 7 y z^2 - 3 y^5 z^2 + 10 y^4 z^3 + 4 y^8 z^3 + 6 y^2 z^5 +
   x z^6 - 3 y z^6 - 5 y^5 z^6 + 2 y^2 z^9,
```

```
 x y + 2 y^2 + y^6 + 3 z^2 - 2 y^3 z^3 + z^6,
 x^2 + y^2 + y^6 + z^2 - 2 y^3 z^3 + z^6, t + y^3 - z^3}
```

پایه‌ی گروبنر ایده‌آل رو حساب کردیم حال برای پایه‌های خواسته شده کافی است اشتراک این پایه را با میدان خواسته شده در نظر بگیریم.

بخش ۲.۳

سوال ۲ برای بررسی برابر بودن ایده‌آل ها پایه‌ی گروبنر را مقایسه میکنیم:

```
In[72]:= (* 2 *)
GroebnerBasis[{x y - 1, x z - 1}, {x, y, z}]
GroebnerBasis[{x z - 1, y - z}, {x, y, z}]

Out[72]= {y - z, -1 + x z}

Out[73]= {y - z, -1 + x z}
```

پس این دو ایده‌آل برابرند

بخش ۳.۳

سوال ۶

طبق قضیه‌ی کوچکترین واریته شامل یک رویه باید پایه‌ی گروبنر را برای این ایده‌آل حساب کنیم

```
In[74]:= (* 2 *)
GroebnerBasis[{x - u v , y - u^2 , z - v^2}, {u, v, x , y , z}]

Out[74]= {x^2 - y z, v^2 - z, -v x + u z, u x - v y, u v - x, u^2 - y}
```

در اینجا کوچکترین واریتهV x^2 - y z است