جلسه نوزدهم

مثال:دانشجویی که شیشه ای خالی در اتاقش قرار داده است,هر روز یک دلار به داخل شیشه می اندازد یا یک دلار از آن را بر می دارد. به چند حالت ممکن است بعد از $2n$ روز شیشه خالی شود؟

حل: هر دلار که می اندازد یک واحد بالا می رویم و هر دلار که بر می دارد یک واحد به راست. فرض کنید نمودار رسم شده اولین دفعه بازگشت به خط $x=y$ در روز $2i$ -ام اتفاق افتد. $0<i<n$. از روز $2i+1$ام تا روز $2n$ام نمودار زیر خط $x=y$ واقع نمی شود. حال مسیر هایی را که از مبدا تا یک نقطه ی $(2i,2j)$ از مراحل حرکت بالا و راست تشکیل می شود در نظر بگیرید و آنهایی که را که در نقاط میانی اکیدا بالا ی خط $y=x$ قرار دارند مسیر های خیلی خوب و آنهایی را که در نقاط میانی هیچوقت زیر $y=x$ قرار نمی گیرند مسیر های خوب بنامیم. فرض کنید تعداد مسیر ای خوب به طول $2i$ برابر c_i باشد در اینصورت تعداد مسیر های خیلی خوب تا روز $2i$, مساوی c_{i-1} خواهد بود. در نتیجه اگرتابع مولد مورد نظر را $C(x)$ بنامیم یعنی $C(x)=\sum_{i\geq 1} C_i x^i$, برای مسیر های خیلی خوب تابع مولد برابر خواهد بود با:

$$xC(x)=\sum_{i\geq 1} C_{i-1}x^i$$

حال بنا بر قضیه حاصلضرب که در جلسه قبل بیان شد (قضیه8.5) داریم:

$$C(x)-1=xC(x)$$

رابطه بازگشتی:

$$C_n=\sum_{1\leq i\leq n} C_{i-1}C_{n-I} \qquad n>0$$

$$C(x)=\sum_{n\geq 0} C_n x^n=1+\sum_{x\geq 1} x^n\left(\sum_{1\leq i\leq n} C_{i-1}C_{n-i}\right)=$$

$$1+x\sum_{n\geq 1} x^{n-1}\left(\sum_{1\leq i\leq n} c_{i-1}c_{n-i}\right)=1+xC(x)C(x)$$

$$xC^2(x)-C(x)+1=0 \Rightarrow C(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

مقدار منفی $C(x)$ قابل قبول است زیرا مقدار مثبت آن C_0 را بی نهایت می کند.

جلسه نوزدهم

$C(x)=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})=\frac{1}{2}(1-(1-4x)^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2x}(1-\sum_{i\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{i}(-4x)^i)=\frac{1}{2x}(1-\sum_{i\geq 1}(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots(\frac{1}{2}-i+1)}{i})(-4)^i x^i$

$=\frac{1}{2x}(1-\sum_{i\geq 1}(\frac{(-1^{i-1})(-1)^i i\times 1\times 3\times\ldots\times(2i-3)}{2^i})4^i x^i=\sum_{i\geq 1} 2^{i-1}x^i\,\frac{1\times 3\times\ldots\times(2i-3)}{i}$

$\times\frac{2\times 4\times\ldots\times(2i-2)}{2^{i-1}(i-1)!}$

در نتیجه

$c_i=\frac{(2i)!}{(1+i)!i!}=\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}=\frac{1}{i}\binom{2i}{i+1}$

مساله:دانشجویی که شیشه ای خالی در اتاقش قرار داده است، هر روز یک دلار به داخل شیشه می اندازد یا یک دلار از آن را بر می دارد. به چند حالت ممکن است بعد از 3n روز شیشه خالی شود؟

ترکیب توابع مولد

تعریف:فرض کنید $F(x)=\sum_{n\geq 0} f_n x^n$ یک سری توانی صوری باشد. G یک سری توانی با ضریب ثابت 0 تعریف می کنیم.

$F(G(x))=f_0+f_1G(x)+f_2G^2(x)+\ldots$

قضیه: فرض کنید a_n تعداد راه های ساختن یک ساختمان مشخص روی یک مجموعه n عضوی باشد و فرض کنید $a_0=0$. فرض کنید f_n تعداد راه های شکستن مجموعه [n] به تعدادی نا مشخص از بازه‌های مجزای ناتهی و سپس ساختن یک ساختمان از نوع داده شده روی هر یک از این بازه ها باشد. قرار دهید $h_0=1$ و قرار دهید:

$A(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ و $H(x)=\sum_{n\geq 0} h_n x^n$. در اینصورت

$H(x)=\frac{1}{1-A(x)}$.

اثبات به صورت خلاصه:

$H(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty} A^k(x)=\frac{1}{1-A(x)}$

اثبات دوم (لطفا بررسی شود):

$H(x)-1=A(x)H(x) \Rightarrow H(x)(1-(A(x))=1 \Rightarrow H(x)=\frac{1}{1-A(x)}$

جلسه نوزدهم

مثال: با در اختیار داشتن سکه های 2 و 3 و 5 تومانی که قرار است داخل دستگاهی فروشنده ریخته شود (ترتیب ریختن سکه ها در دستگاه مهم است) به چند طریق می توان n تومان پرداخت؟

بازگشتی:

$a_n=a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-5}$

$a_0=1$ $a_1=0$ $a_2=1$ $a_3=1$ $a_4=1$ $a_5=3$

$H(x)=\sum_{i\geq 0} h_i x^i=1+x^2+x^3+x^4+\sum_{i\geq 5} h_{i-2}x^i+\sum_{i\geq 5} h_{i-3}x^4+\sum_{i\geq 5} h_{i-5}x^i$

$H(x)=1+x^2+x^3+x^4+x^2\sum_{i\geq 5} h_{i-2}x^{i-1}+x^3\sum_{i\geq 3} h_{i-3}x^{i-3}+x^5\sum_{i\geq 5} h_{i-5}x^{i-5}=$

$1+x^2+x^3+x^4+x^5+(H(x)-1-x^2)+x^2(H(x)-1)+x^5H(x)=1+x^2+x^3+x^4-x^3-x^4-x^3+(x^2+x^3+x^5)H(x)$

$=>H(x)(1-x-x^3-x^5)=1$

راه حل دوم همچنان بدون استفاده از قضیه 8.13

فرض کنید دقیقا از kسکه استفاده کرده باشیم.تابع مولد مربوطه (به صورت شهودی یا طبق قضیه حاصلضرب) به صورت $(x^2+x^3+x^5)$ است. باید تابع زیر را روی k جمع ببتدیم تا جواب مساله به دست آید

$H(x)=1+\sum_{k\geq 1}(x^2+x^3+x^5)^k=\frac{1}{1-(x^2+x^3+x^5)}$

راه حل سوم: با استفاده از قضیه 8.13 (لطفا دقیقا بررسی شود)

مطالعه مثال 8.14کتاب Rossen نیز توصیه می شود.

مثال: تمام n سرباز یک گروه از سربازها در یک خط ایستاده‌اند. افسر مسوول این خطها را در بعضی از نقاط می شکند و واحد های کوچکتری (ناتهی) ایجاد می کند. سپس از هر یک از واحد ها یک زیر مجموعه محتملا تهی را برای ماموریت شبانه بر می گزینند. اینکار به جند طریق مختلف قابل انجام است؟

قضیه 8.15: فرض کنید a_nبرابر است با تعداد راه های ساختن یک ساختمان مشخص روی یک مجموعه n عضوی و $a_0=0$. فرض کنید وb_n برابر تعداد راه های ساختن ساختمان از نوع دوم روی یک مجموعه n عضوی باشد و $b_0=1$. فرض کنید g_n تعداد راه های شکستن [n] به تعدادی غیر مشخص بازه نا تهی ساختن یک ساختمان از نوع داده شده روی هر یک از بازه ها و ساختن ساختمانی از نوع دوم روی مجموعه بازه

جلسه نوزدهم

ها باشد. قرار دهید $G_0=1$. اگر توابع مولد نظیر $\{b_n\}$و$\{a_n\}$و $\{g_n\}$را به ترتیب با A(X)وB(X)وG(X)نشان دهیم

داریم: G(x)=B(A(x))

ضرایب دوجمله ای توسیع یافته:

فرض کنید α عددی حقیقی و m عددی صحیح و نامنفی باشد.آنگاه:

$\alpha^{\underline{m}}=\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-m+1)$

$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha^{\underline{m}}}{m!}$

اگر در تعریف فوق یک عدد صحیح منفی باشد مثلاد n- α داریم:

$\binom{\alpha}{m} = \binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{m!}=(-1)^m \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}$

مثال:

1. $\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4$
2. $\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})}{6}=\frac{1}{16}$
3. $\binom{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{(\frac{3+\sqrt{2}}{2})(\frac{1+\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(\frac{\sqrt{3}-3}{2})}{4!}$

قضیه دو جمله ای توسیع یافته:

فرض کنید α عددی حقیقی باشد و $|x| < 1$ آنگاه

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{i\geq 0}\binom{\alpha}{i}x^i$

مثال:(تعمیم رابطه واندرموند)

به ازای عدد حقیقی αوβ و هر عدد صحیح مثبتm داریم :

$$\binom{\alpha+\beta}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{m-k}$$

جلسه نوزدهم

$$\binom{\alpha+\beta}{m} = [m^k](1+x)^\alpha[x^{m-k}](1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{m}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{m-k}$$

تمرین :(قضیه دو جمله ای) ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی α و β و به ازای هر عدد صحیح نامنفی x داریم :

$$(\alpha+\beta)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^{\underline{k}}\beta^{\underline{m-k}}$$

$$(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\alpha^{\overline{k}}\beta^{\overline{m-k}}$$

نتیجه: اگر n عددی صحیح و مثبت باشد:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k\geq 0}\binom{-n}{k}x^k = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{n}x^k$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} = x^n(1-x)^{-(n+1)} = x^n\sum_{k\geq 0}\binom{-(n+1)}{K}(-x)^k = x^n\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n+k}{k}(-1)^k x^k$$

$$= \sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}x^{n+k} = \sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}x^{n+k} = \sum_{k\geq n}\binom{k}{n}x^k$$

تمرین: از قسمت دوم قضیه قبلی نتیجه بگیرید به ازای اعداد صحیح نامنفی m و x و k داریم:

$$\binom{k+1}{\mathrm{m}+\mathrm{n}+1} = \sum_{i=0}^{k}\binom{i}{m}\binom{k-i}{n}$$

تمرین: هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک سری توانی بسط دهید.

1. $\sqrt{1-4x} =$
2. $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} =$

قضیه: فرض کنید a_n تعداد راه های ساختن یک ساختمان مشخص n عضوی باشد و b_n تعداد راه های ساختن یک ساختمان دیگر n عضوی باشد .فرض کنید c_n تعداد راههای جداکردن [n] به دو مجموعه S= [i] و $T = \{i+1,\ldots,n\}$ و سپس یک ساختمان نوع اول روی S و یک

جلسه نوزدهم

ساختمان نوع دوم روی Tباشد.

فرض کنید $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ توابع مولد متناظر با $\{a_n\}$ و$\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ باشند در این صورت داریم:

$$A(x)B(x)=C(x)$$

مثال :در یک دانشگاه علمی کاربردی یک نیمسال از n روز تشکیل شده است و رییس دانشگاه یک نیمسال را به صورت زیر طراحی میکند:

او یک نیمسال را به دو بخش تقسیم می کند . اولین k روز نیمسال به مطالب نظری اختصاص می یابد سپس در n-k روز باقی مانده روی مطالب آزمایشگاهی کار می شود . در **1<=k<=n-2** اینجا

سپس او در یک روز تعطیل در بخش اول ترم و دو روز تعطیل در بخشدوم ترم در نظر میگیرد.با این محدودیت ها نیمسال را به چند طریق میتواند طراحی کند .

حل:

$f_n=\sum_{k=1}^{n-2} k\binom{n-k}{2}$

$A(x)=\sum_{k\geq 1} kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$

$B(x)=\sum_{k\geq 1}\binom{k}{2} x^k=\frac{x^2}{(1-x)^3}$

$C(x)=A(x)B(x)=\frac{x^3}{(1-x)^5}=x^3\sum_{k\geq 0}\binom{k+4}{k}x^k=\sum_{k\geq 0}\binom{k+4}{k}x^{k+3}=\sum_{n\geq 3}\binom{n+1}{4}x^n=$
$\sum\binom{k+4}{k}x^k \rightarrow fn=\binom{n+1}{4}$

مثال :

$$\sum_{n\geq 0}\overline{P_k(n)}x^n=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-x^i)}$$

$$\sum_{i_1\geq 0} x^{i_1}\sum_{i_2\geq 0} x^{i_2} \dots \sum_{i_k\geq 0} x^{i_k}=\frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x^2)}\dots\frac{1}{(1-x^k)}$$

$\sum_{n\geq 0} P(n)x^n=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^2}$ $n=i_1+2i_2+\cdots+ki_k$

جلسه نوزدهم

تمرین:ثابت کنید به ازای R ثابت داریم : $P_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$

توجه :میتوان دید $P(n)=\overline{P_n(n)} = P_n(2n)$ (چرا؟) با این حال نمیتوان با استفاده از رابطه بالا رابطه مجانبی برای $P(n)$ بدست آورد .