



## دانشگاه تهران

تاریخ تحویل: جمعه ۲۷ فروردین

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

تمرین سری ششم مبانی ترکیبیات

(۱) رابطه زیر را با استقرا ثابت کنید.

$$(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n}) = 1+x+\dots+x^{2^{n+1}-1}$$

(۲) ثابت کنید اگر  $2 \cos \varphi = x + \frac{1}{x}$ ، آن گاه به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ،  $2 \cos n\varphi = x^n + \frac{1}{x^n}$ .

(۳) دنباله  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  از اعداد صحیح، با شرط اولیه  $x_0 = 2$  و رابطه بازگشتی  $x_n = x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1$  که به ازای  $n \geq 1$  برقرار است، تعریف شده است. ثابت کنید به ازای هر دو مقدار متمایز  $m$  و  $n$ ، مقادیر  $x_m$  و  $x_n$  نسبت به هم اول هستند.

(۴) دنباله کنوژ، با رابطه بازگشتی زیر تعریف می شود:

$$k_0 = 1$$

$$k_{n+1} = 1 + \min\left(2k_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 3k_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right) \quad ; \quad n \geq 0$$

ثابت کنید به ازای هر  $n \geq 0$ ،  $k_n \geq n$ .

(۵) ثابت کنید برای تمام اعداد صحیح  $n \geq 0$ ،  $10 \mid (n^5 - n)$ .