تمرین‌های فصل سوم سیستم‌های دینامیکی

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران

زمستان ۱۳۹۹ - بهار ۱۴۰۰

سوال ۱) نشان دهید اگر $f_1 : R \to R$ و $f_2 : R \to R$ موضعا لیپ‌شیتز باشند، $f_1 + f_2$ ، $f_1 f2$ و $f_1 o f2$ موضعا لیپ‌شیتز هستند.

سوال ۲) اگر $g : R^n \to R^n$ به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر باشد، $f(x)$ را به صورت

$$f(x) = \frac{1}{1+g^T(x)g(x)} g(x)$$

تعریف می‌کنیم، نشان دهید $\dot{x} = f(x)$ که در آن $x(0) = x_0$ دارای یک جواب یکتا است که به ازای هر $t \geq 0$. تعریف شده است.

سوال ۳) با استفاده از لم قیاس، کران بالایی برای جواب‌های معادله زیر پیدا کنید.

$$\dot{x} = -x + \frac{\sin t}{1+x^2}, \quad x(0) = 2$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + ax_2 - bx_1x_2 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -(a+b)x_1 + bx_1^2 - x_1x_2$$

سوال ۴) اگر $f : R^n \to R^n$ روی دامنه $D \subset R^n$ لیپ‌شیتز موضعی باشد، و اگر $S \subset D$ یک مجموعه فشرده باشد، نشان دهید یک ثابت مثبت مثل L وجود دارد، به طوری که برای هر $x, y \in S,$ داشته باشیم

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

سوال ۵) نشان دهید که اگر $f : R^n \to R^n$ روی $W \subset R^n$ لیپ‌شیتز باشد، آنگاه روی W پیوسته یکنواخت است.

سوال ۶) اگر $f(x)$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد، که دامنه محدب $D \subset R^n$ را به R^n تصویر می‌کند، اگر D شامل مبدا باشد، و داشته باشیم $f(0) = 0$. نشان دهید

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) d\sigma x, \quad \forall x \in D$$