جلسه هجدهم

تابع مولد

تعریف: تابع مولد (معمولی) دنباله $(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots)$ یک سری توانی به صورت زیر است:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر

i) (1,0,…,0,…) $\leftrightarrow$ 1

(ii) (0,….,0,1,0,…) $\leftrightarrow$ $\sum_{k\geq 0}[k=m]x^k = x^m$

تبصره: اگرمقادیر دنباله مورد نظر از جایی به بعد مساوی ۰ باشد، تابع مولد به یک چندجمله ای تبدیل می شود که به آن، چندجمله ای مولد می گوییم.

(iii) $(c, c, \ldots, c, \ldots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0} cx^k = \frac{c}{1-x}$

(iv) (1,0,1,0,1,0,…) $\leftrightarrow \sum_{k\geq 0}[2|k]\, x^k = \frac{1}{1-x^2}$

یادآوری: (کاربرد دستور ایورسون) در مورد عبارت فوق لازم به یادآوری است که به عنوان نمونه، با استفاده از نماد ایورسون داریم

$$\sum_{k\geq 0} x^{2k} = \sum_{k\geq 0,\, 2|k} x^k = \sum_{k\geq 0}[2|k]x^k = \sum_{k\epsilon\mathbb{Z}} [k \geq 0]\ [2|k]x^k$$

(v) (1,0,…,0,1,0,…,0,1,0,…) $\leftrightarrow \sum_{k\geq 0}[m|k]\, x^k = \frac{1}{1-x^m}$

(vi) (1,c, c^2,…,c^k, …) $\leftrightarrow \sum_{k\geq 0} c^k x^k = \frac{1}{1-cx}$

(vii) (1,2,3,…)$\leftrightarrow \sum_{k\geq 0}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$

(viii) $(1, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}, 0, \ldots) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k = (1+x)^m$

جلسه هجدهم

(ix) $(0,1,-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \log(1+x)$

(x) $(0,1,\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}x^k = \log\frac{1}{1-x}$

(xi) $(1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!} = exp(x)$

(xii) $(1,0,\frac{1}{2!},0,\frac{1}{4!}\ ,\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$

(xiii) $(0,1,0,\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!}\ ,\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sinh x$

(ixv) $(1,0,-\frac{1}{2!},0,\frac{1}{4!},\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$

(xv) $(0,1,0,-\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} = sin\ x$

(xvi) $(0,\sin\beta,\sin 2\beta,\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\sin(k\beta)\,x^k = \frac{x\sin\beta}{1-2x\cos\beta+x^2}$

(xvii) $(1,\cos\beta,\cos 2\beta,\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\cos(k\beta)\,x^k = \frac{1-x\cos\beta}{1-2x\cos\beta+x^2}$

(xviii) $(0,e^{\alpha}\sin\beta,\ e^{2\alpha}\sin 2\beta,\dots) \leftrightarrow \sum_{i\geq 0}e^{k\alpha}\sin(k\beta)\,x^k = \frac{xe^{\alpha}\sin\beta}{1-2x\,e^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}x^2}$

(ixx) $(1,e^{\alpha}\cos\beta,\ e^{2\alpha}\cos 2\beta,\dots) \leftrightarrow \sum_{i\geq 0}e^{k\alpha}\cos(k\beta)\,x^k = \frac{1-x\,e^{\alpha}\cos\beta}{1-2x\,e^{\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}x^2}$

(xx) $(1,3,6,\dots,\frac{(k+1)(k+2)}{2},\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k = \frac{1}{(1-x)^3}$

(xxi) $(1,m+1,\frac{(m+1)(m+2)}{2},\dots,\binom{m+k}{m},\dots) \leftrightarrow \sum_{k\geq 0}\binom{k+m}{m}x^k = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$

نکاتی درباره سری های توانی:

$$\sum_{k\geq 0}a_k x^k + \sum_{k\geq 0}b_k x^k = \sum_{k\geq 0}(a_k+b_k)\,x^k$$

$$\sum_{k\geq 0}a_k x^k.\sum_{j\geq 0}b_j x^j = \sum_{n\geq 0}c_n x^n$$

که در آن، دنباله $\{c_n\}$ حاصلضرب کوشی دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ است:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\,b_k$$

جلسه هجدهم

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right) = D\left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right) = \sum_{i\geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}x^k$$

حاصل ضرب کوشی یا کانولوشن (پیچش)

$$\mathrm{c_k} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{k}} \mathrm{a_i b_{k-i}} \;\Rightarrow\; \mathrm{c_k} = \sum_{\mathrm{i+j=k}} \mathrm{a_i b_j}$$

حاصل ضرب سه سری توانی

$$E(x) = \sum_{i\geq 0} f_i x^i \sum_{i\geq 0} g_i x^i \sum_{i\geq 0} h_i x^i,$$

$$e_k = [x^k]E(x) \Rightarrow \quad e_k = \sum_{i_1+i_2+i_3=k} f_{i_1} g_{i_2} h_{i_3}$$

ضرب یک چند جمله ای در یک سری توانی:

(یافتن فرمول واحد به کمک دستور ایورسون)

فرض کنید:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$$

$$G(x) = \sum_{i\geq 0} g_i x^i$$

$$H(x) = F(x)G(x)$$

$$h_k = [x^k]H(x)$$

در این صورت داریم

$$h_k = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{k-i}[k - i \geq 0]$$

جلسه هجدهم

ضرب یک چند جمله ای در یک سری توانی (مثال فیبوناچی)

مثال : فرض کنید $\{f_n\}_{n\geq 0}$ دنباله فیبوناچی باشد که با شرایط اولیه $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ و رابطه بازگشتی $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\quad n \geq 2$ تعریف می شود. اگر $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(1 - x - x^2)F(x) =?$$

حل:

$$(1 - x - x^2)\sum_{i\geq 0} f_i x^i =$$

$$\sum_{i\geq 0}(f_i \text{-} f_{i-1}[i \geq 1] \text{-} f_{i-2}[i \geq 2])\, x^i =$$

$$x + \sum_{i\geq 2}(f_i \text{-} f_{i-1} \text{-} f_{i-2})\, x^i = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

مثال: تابع مولد دنباله زیر را به دست آورید و کسر حاصل را به کسرهای ساده تجزیه کنید. از بسط این کسرها چه نتیجه ای به دست می آید؟

$$([i|2])_{i\geq 0} = (1,0,1,0, \dots)$$

حل:

$$A(x) = \sum_{i\geq 0} x^{2i} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq 0} x^i + \sum_{i\geq 0}(-1)^i x^i\right)$$

$$\Rightarrow\ [i|2] = \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)$$

جلسه هجدهم

اثبات تابع مولد:

$\sum_{k\geq 0}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$

روش ۱:

$\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{(1-x)}$

$\sum_{k\geq 0} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{k\geq 0}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$

روش ۲:

A(x) = $\sum x^i$

B(x) = $\sum x^i$

A(x)B(x) = C(x) = $\sum_{n\geq 0} C_n x^n$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = n+1$$

$C_n = \sum_{n\geq 0}(x+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

بحث درباره xD و x^2 *(عملگر)*

$$xD \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k$$

$\sum_{k\geq 0} k a_k\, x^k \rightarrow$ xDxDA(x) = $\sum_{k\geq 0} k^2 a_k\, x^k$

$$x^2 D \sum_{k\geq 0} a_k\, x^k = x \sum_{k\geq 0} k a_k\, x^k \rightarrow \sum_{k\geq 0} k(k+1) a_k\, x^k$$

xD f(x), xDxDf(x) =xD(xf'(x))= x($f'(x) + f''(x)$)=xf'(x) + $x^2 f''$(x) =

(xD+x^2D^2)f(x) → $xD = xD + x^2D^2$ عدد های استرلینگ نوع دوم هستند که ظاهر میشوند.

جلسه هجدهم

تابع مولد i^2 (0<i)

$$(xD)^2\frac{1}{1-x} = xD\quad \frac{1}{1-x} + x^2D^2\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

مثال : با داشتن ژتون های ۱ و ۳ و ۵ و ۷ تومنی به چند طریق می توان ۱۲ تومن پرداخت کرد مشروط بر آنکه فقط (۲تا ۵ تونی) و (یکی ۷تومنی) ولی ۱ و ۳ تومنی به تعداد دلخواه باشند؟

$$(1+x+x^2+x^3\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\ (1+x^5+x^{10})(1+x^7)$$

$$x^{12}x^0x^0x^0$$

$$x^9x^3x^0x^0$$

$$x^6x^6x^0x^0$$

$$x^3x^9x^0x^0$$

$$x^0x^{12}x^0x^0$$

$$x^7x^0x^5x^0$$

$$x^4x^3x^5x^0$$

$$x^5x^0x^0x^7$$

$$x^2x^3x^0x^7$$

$$x^2x^0x^{10}x^0$$

$$x^0x^0x^5x^7$$

$$\downarrow$$

۱۱ حالت

$$f_n = \{\ (e_1, e_2, e_3, e_4): e_1 + 3e_2 + 5e_3 + 7e_4 = n$$

$$e_1, e_2 \ \geq 0\ ,\ 0 \leq e_3 \leq 2\ ,\ 0 \leq e_4 \leq 1\ \}$$

$$\rightarrow z = \{\ e_1, e_2, e_3, e_4 :\ \ e_1, e_2 \ \geq 0\ ,\ 0 \leq e_3 \leq 2\ ,\ 0 \leq e_4 \leq 1\}$$

جلسه هجدهم

$$f_n = \sum_{\substack{e \in z \\ |e|=n}} 1$$

$|e| = e_1 + 3e_2 + 5e_3 + 7e_4$

$F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{\substack{e \in z \\ |e|=n}} 1$

$\rightarrow \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{e \in z \\ |e|=n}} x^n \rightarrow \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{e \in z \\ |e|=n}} x^{|e|} = \sum_{\substack{e \in z \\ |e|=n}} x^{|e|}$

$\sum_{\substack{e_1, e_2 \geq 0 \\ 0\leq e_3 \leq 2 \\ 0\leq e_4 \leq 1}} x^{e_1+3e_2+5e_3+7e_4} = \sum_{e_1\geq 0} x^{e_1} + \sum_{e_2\geq 0} x^{3e_2} + \sum_{0\leq e_3\leq 2} x^{5e_3} +$

$+ \sum_{0\leq e_4 \leq 1} x^{7e_4}$

$F(x) = (1 + x + x^2+x^3+\ldots)(1+ x^3+ x^6 + x^9 + \cdots)\ (1 + x^5 + x^{10})(1+ x^7)$

$= \frac{1}{1-X} + \frac{1}{1-X^3}$

$1 + x^5 + x^{10} = x^{10} - x + x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x(x^9 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$

$\rightarrow F(x) = \frac{1}{1-X}\frac{1}{1-X^3}(x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)(1 + x^7)$

$= \frac{1}{1-X}\frac{1}{1-X^3}(x^{15} - x^{14} + x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^8 + x^7 - x^8 + x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$

$= \frac{1}{(1-X)^2}(x^{15} - x^{14} + x^{12} - x^{11} + x^{10} + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$