جلسه هفتم

شمارش

اصل جمع: اگر کار w_1 به n_1 طریق و کار w_2 به n_2 طریق انجام شود، کار «w_1 یا w_2» به $n_1 + n_2$ طریق قابل انجام است.

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \rightarrow |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$$

اصل ضرب: اگر کار w_1 به n_1 طریق و پس از انجام آن، نتیجه هر چه باشد کار w_2 به n_2 طریق قابل انجام باشد، کار $\underline{w_1w_2}$ (یعنی انجام w_1 و سپس انجام w_2) به $n_1 \times n_2$ طریق قابل انجام است.

اصل تناظر ۱-۱ (bijection): اگر A مجموعه‌ای متناهی و $f: A \rightarrow B$ تابعی ۱-۱ و پوشا باشد، آن گاه:

$$|A| = |B|$$

مثال ۱: چند تابع f از یک مجموعه‌ی m عضوی مانند $[m]$ به یک مجموعه‌ی n عضوی ($[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$) مانند n عضوی مانند $[n]$ وجود دارد؟

پاسخ: n^m.

مثال ۲: در مثال قبل، اگر f، ۱-۱ باشد، پاسخ چیست؟

پاسخ:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = (n)_m = n^{\underline{m}}$$

مثال ۳: چند تابع $f: D \rightarrow [n]$ با دامنه‌ی D وجود دارد؛ به طوری که $D \subseteq [m]$؟

پاسخ: $(n + 1)^m$

مثال ۴: تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضوی چند تاست؟ (با اصل تناظر ۱-۱)

پاسخ: 2^n.

اثبات: بدون کاستن از کلیت، n مجموعه‌ی مورد نظر را $[n]$ در نظر می‌گیریم. به هر زیرمجموعه مثل P از $[n]$ یک بردار n تایی (n تایی مرتب) با مؤلفه‌های $0, 1$ نسبت می‌دهیم، به طوری که:

$$i \in P \leftrightarrow x_i = 1$$

$$i \notin P \leftrightarrow x_i = 0$$

جلسه هفتم

اکنون به آسانی دیده می‌شود که بردارهای مشخصه‌ی $(x_1, \ldots, x_n)$ با مؤلفه‌های 0, 1 در تناظر ۱-۱ با زیرمجموعه‌های P از n هستند. پس کافی است که تعداد بردارهای مشخصه‌ی ذکرشده را بشماریم. اما بنا بر اصل ضرب، تعداد مساوی است با 2^n.

مثال ۵: تعداد رابطه‌های R از [m] به [n] چند است؟

پاسخ: هر زیرمجموعه از $[m] \times [n]$ پاسخ است: 2^{nm}.

مثال ۶: اگر $n > 0$، با ارائه‌ی یک تناظر ۱-۱ از فرد-زیرمجموعه‌های [n] به زوج-زیرمجموعه‌های [n]، ثابت کنید تعداد هر یک از دسته‌های مذکور 2^{n-1} است.

مثال ۷: چند رشته بیت (bit string) دودویی (0,1) به طول ۴ وجود دارد که شامل دو 1 متوالی نباشد؟

مثال ۸: مجموعه‌ی $A \subseteq [n]^2$ شامل زوج مرتب‌های (i, j) صحیح است؛ به طوری که $i \neq j$. تعداد اعضای A برابر است با $n^2 - n$. تحقیق کنید نگاشت $f: [n][n-1] \to A$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = (x, y + [y \geq x])$ یک تناظر ۱-۱ است.

مثال ۹: الف) مجموعه‌ی مکرر $A = \{m_1 x_1, \ldots, m_n x_n\}$ دارای چند زیرمجموعه‌ی مکرر است؟

پاسخ: هر زیرمجموعه‌ی مکرر از مجموعه‌ی مکرر خود به صورت $\{m_1 x_1, \ldots, m_n x_n\}$ است که $0 \leq a_i \leq m_i$ با شرط ($i = 0, \ldots, n$). بنابراین جواب این، با استفاده از اصل ضرب برابر است با: $(m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_n+1)$.

ب) چند تا از زیرمجموعه‌های مکرر در نظر گرفته شده در قسمت الف، دارای محملی با اندازه ی k هستند؟

پاسخ:

$$C_{n,k}(m_1, \ldots, m_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} m_{i_1} m_{i_2} \ldots m_{i_k}$$

مثال ۱۰: فرض کنید A مجموعه‌ی m تایی‌های مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ با مؤلفه‌های صحیح صادق در نامعادله‌ی

$$1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq n$$

و S مجموعه ی m-زیرمجموعه های [n] باشد، آیا می‌توان یک تناظر ۱-۱ بین S و A تعریف کرد؟

جلسه هفتم

پاسخ:

$(x_1, \dots, m_n) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$m = 2, n = 4:$

$$(1,2) \leftrightarrow \{1,2\}$$
$$(1,3) \leftrightarrow \{1,3\}$$
$$(1,4) \leftrightarrow \{1,4\}$$
$$(3,2) \leftrightarrow \{3,2\}$$
$$(4,2) \leftrightarrow \{4,2\}$$
$$(3,4) \leftrightarrow \{3,4\}$$

مثال ۱۱: با استفاده از مثال قبل، دنباله‌های اکیدا صعودی $x_1 < \dots < x_n$ را که $x_i \in [n]$ و شامل دو عدد متوالی نیستند، به دست آورید.

پاسخ: با شرایط مسئله، $1 < x_{i+1} - x_i$، می‌توان دنباله‌ی $1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_m \le n$ را در تناظر ۱-۱ با دنباله‌ی $1 \le x_1 < x_2 - 1 < \cdots < x_m - m + 1 \le n$ قرار داد. در نتیجه، بنابر مثال ۱۰، جواب این مسئله برابر است با: m-ترکیبهای [n-m+1].

مثال ۱۲:یک m-ترکیب باتکرار مجموعه $\{x_1, \dots, x_m\}$ عبارت است از انتخاب m عضو از اعضای مجموعه فوق، مشروط بر آن که ترتیب انتخاب مهم نباشد و تکرار جایز باشد.

می‌توان هر m-ترکیب باتکرار از نوع فوق را به عنوان یک زیرمجموعه‌ی مکرر مجموعه‌ی مکرر $\{\infty x_1, \dots, \infty x_m\}$ به صورت $\{a_1 x_1, \dots, a_m x_m\}$ در نظر گرفت که $a_1 + \cdots + a_n = m$.

با در نظر گرفتن مثال‌های قبلی، در مورد تعداد m-ترکیب‌های باتکرار مورد بحث، چه می‌توانید بگویید؟

$$1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots < x_n \le n \equiv x_1 < x_2 + 1 < \cdots < x_n + m - 1 \le n + m - 1$$

بنابراین، پاسخ مسئله را می‌توان مساوی تعداد m-ترکیب‌های (بدون تکرار) یک (n + m - 1)-مجموعه دانست.