## جلسه سوم

استقرا با سه مقدمه :

$P(b) \wedge P(b+1) \wedge P(b+2)$

$\forall R\ ,\ b \leq k\ ,\ ((P(k) \wedge P(k+1) \wedge P(k+2)) \Rightarrow P(k+3)$

تعریف دنباله فیبوناتچی $\{t_n\}_{n\geq 0}$

$t_0=0\ ,\ t_1=1\ ,\ t_2=1$

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 13 |

تمرین: دنباله $\{t'_n\}_{n\geq 0}$ با شرایط اولیه $t'_0=t'_1= t'_2=1$ و با رابطه بازگشتی مشابه دنباله فیبوناتچی تعریف شده‌است. ثابت کنید به ازای $n\geq 5$ داریم : $t_{n+1}>t'_n>t_n$

تقویت استقرا : گاهی بهتر است برای حل مساله ابتدا حکم قوی‌تری را ثابت کنیم و حکم مساله را از آن نتیجه بگیریم.

مثال : ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم :

$$\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

راهنمایی : ابتدا ثابت کنید عبارت سمت چپ نابرابری از $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ کوچکتر یا مساوی است (که حکم قوی‌تری است). سپس از نابرابری $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$ حکم اصلی را نتیجه بگیرید.

روش جایگذاری و تکرار:

مثال: دنباله $\{t_n\}_{n\geq 0}$ با شرط اولیه $t_0=c$ و رابطه بازگشتی $t_n=2t_{n-1}+1\ ,\ n\geq 1$ برقرار است. با قرار دادن $2t_{n-2}+1$ به جای $t_{n-1}$ رابطه‌ی جدید به چه صورت درمی‌آید؟ با ادامه دادن این کار در روابط جدید چه الگویی حاصل می‌شود؟

$t_n=2t_{n-1}+1 \qquad \boxed{1}$

$=2(2t_{n-2}+1)+1$

$\Longrightarrow t_n= 2^2t_{n-2}+2+1 \qquad \boxed{2}$

## جلسه سوم

$=2^2(2t_{n-3}+1)+2+1$

$=2^3t_{n-3}+2^2+2+1$ $\boxed{3}$

الگوی مرحله $k$ام $\Rightarrow 2^kt_{n-k}+2^{k-1}+\ldots+2^1+2^0$ $n\geq k$ (اثبات با روش استقرای کراندار)

به ازای $n=k$ از رابطه $\boxed{k}$ حاصل می‌شود :

$tn=2^nc+2^{n-1}+\ldots+2^1+2^0=2^nc+2^n-1$

تمرین : تساوی مثال قبل را به صورت $t_n=t_{n-1}-1$ بازنویسی کنید. سپس عمل جایگذاری و تکرار را روی جمله‌ی $t_{n-1}$ انجام داده و این کار را ادامه دهید. الگوی تساوی‌های به دست آمده به چه صورتی است؟

تمرین : دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\geq 0}$ از اعداد صحیح با شرط اولیه $x_0=2$ و رابطه بازگشتی $xn=x_{n-1}^2+x_{n-1}+1$ که به ازای $n$های بیشتر یا مساوی ۱ برقرار است، تعریف شده‌است. ثابت کنید به ازای دو مقدار متمایز $m$ و $n$ جمله‌های $x_m$ و $x_n$ نسبت به هم اول هستند.

مثال : هر عدد صحیح $n\geq 2$ قابل تجزیه به اعداد اول است.

$\longleftarrow$ اثبات با استقرای قوی:

پایه استقرا : $P(2) : 2=2$

فرض استقرا : فرض کنیم $P(2)\wedge P(3)\wedge\ldots\wedge P(k)$ برقرار است.

باید ثابت کنیم $P(k+1)$ نیز برقرار است. یعنی $k+1$ قابل تجزیه به حاصلضرب اعداد اول است.

اگر $k+1$ اول باشد حکم برقرار است. در غیر این صورت برابر حاصلضرب اعدادی مانند $a$و$b$ است که $2\leq a\leq b<k+1$ و $k+1=ab$ . برای ادامه کار نیازمند دانستن درستی $P(a)$ و $P(b)$ هستیم و چون $a$و$b$ اکیدا از $k+1$ کوچکترند پس طبق فرض استقرا $P(a)$ و $P(b)$ برقرارند. درنتیجه هریک را می‌توان به شکل حا صل ضرب تعدادی عدد اول نمایش داد پس ضرب $a$ و $b$ را که همان $k+1$ ا ست را به صورت ضرب این اعداد اول می‌توان نمایش داد و حکم نتیجه می‌شود.

مثال : ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت $n$ را می‌توان به صورت مجموع توان‌های نامنفی متمایز عدد ۲ نوشت.

$\longleftarrow$ می‌دانیم برای هر $k$ عدد صحیحی مثبت $m$ وجود دارد به طوری که : $2^m\leq k<2^{m+1}$

## جلسه سوم

$\Rightarrow k=2^m+(k-2^m)$

حالا $k'$ را برابر $k-2^m$ قرار می‌دهیم. می‌دانیم $0\leq k'<2^m$ . با ا ستدلال م شابه بالا همین روند را برای $k'$ نیز تکرار می‌کنیم و الگوریتم را تا جایی که به صفر برسیم ادامه می‌دهیم. (استقرای پسرو یا قهقرایی).

مثال: اگر $x_1,\dots,x_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

→ اثبات:

$P(2) : \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2 \geq 0 \Rightarrow$ این نابرابری به وضوح برقرار است

ابتدا با استفاده از $P(k)$، $P(2k)$ را اثبات می‌کنیم.

$$P(k) : \frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k}$$

$$P(2k) : \quad \frac{x_1+x_2+\dots+x_{2k}}{2k} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\dots+\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}}{k} \geq \sqrt[k]{\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}+\dots+\sqrt{\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}}} = \sqrt[2k]{\frac{x_1+x_2}{2}+\dots+\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}}$$

از طرفی می‌دانیم بر اساس $P(2)$ داریم : $\sqrt{x_{2i}x_{2i-1}} \leq \frac{x_{2i}+x_{2i-1}}{2}$ . بنابر این،

$$\sqrt[2k]{\frac{x_1+x_2}{2}+\dots+\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}} \geq \sqrt[2k]{x_1 x_2 \dots x_{2k}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_{2k}}{2k} \geq \sqrt[2k]{x_1 x_2 \dots x_{2k}}$$

حالا ثابت می‌کنیم که از $P(k)$ می‌توان $P(k-1)$ را نتیجه گرفت و با استقرای قهقرایی مساله را حل می‌کنیم.

$s$ را $x_1+x_2+\dots+x_{k-1}$ تعریف می‌کنیم و $x_k$ را برابر $\frac{s}{k-1}$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$P(k) : \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_{k-1}\frac{s}{k-1}} = \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \leq \frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k} = \frac{s+\frac{s}{k-1}}{k} = \frac{s}{k-1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 \dots x_{k-1}\frac{s}{k-1} \leq \left(\frac{s}{k-1}\right)^k$$

## جلسه سوم

$$\Leftrightarrow \sqrt[k-1]{x_1 x_2 \dots x_{k-1}} \leq \frac{s}{k-1}$$

که همان P(k-1) است.

همین اثبات را می‌توانیم با روش دیگری از تغییر متغیر کامل کنیم. برای این منظور $m_0$ و $m_1$ را به شـــکل زیر تعریف می‌کنیم:

$M_0=\sqrt[k-1]{x_1 x_2 \dots x_{k-1}}$ , $M_1=x_1+x_2+\dots+x_{k-1}$

اگر در نامســاوی صــورت ســوال که به ازای تمامی مقادیر نامنفی متغیرها برقرار اســت، قرار دهیم $x_k=m_1$، داریم:

$$M_1 = \frac{(k-1)M_1 + M_0}{k} \geq \sqrt[k]{{M_0}^{k-1} M_1}$$

$$\Leftrightarrow {M_1}^k \geq {M_0}^{k-1} M_1 \Leftrightarrow M_1 \geq M_0$$

از طرفی $M_1 \geq M_0$ همان P(k-1) است.

■

استقرا در مجموعه اعداد صحیح:

مثال: فرض کنید a و b اعدادی ناصــفر هســتند و $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. ثابت کنید به ازای هر عدد صــحیح n داریم : $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

می‌دانیم P(1) به وضوح برقرار است. می‌خواهیم از P(k) به P(k+1) برسیم.

$$P(k): A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$$

$$AA^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{bmatrix} = P(k+1)$$

*توجه :* اگر بخواهیم با استقرای قوی مساله را اثبات کنیم، داریم:

$$P(k): A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$$

$$A^{k-1} = A^{-1}A^k = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k-1} & 0 \\ 0 & b^{k-1} \end{bmatrix} = P(k-1)$$