دانشگاه تهران

پاسخ تمرین سری هفتم مبانی ترکیبیات **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** **نیمسال دوم تحصیلی ۰۰-۹۹**

---

۱) اعداد صحیح مثبت $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_m$ داده شده اند. داریم $mn > x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_m$. ثابت کنید با حذف کردن تعدادی از عوامل جمع در دوطرف تساوی می‌توان تساوی نابدیهی جدیدی بدست آورد.

پاسخ:

استقرار روی $m+n$ می‌زنیم.

پایه استقرا $m+n=4$ می باشد. در این‌صورت داریم $x_1+x_2 = y_1+y_2 < 4$. دو حالت زیر را خواهیم داشت. (توجه کنید که مقادیر متغیرهای اعداد طبیعی می‌باشند).

حالت اول: $x_1+x_2 = y_1+y_2 = 2$

در این حالت مقدار هر چهار متغیر برابر با ۱ می‌باشد، که بنابراین یک مساوی نابدیهی مثل $x_1 = y_1$ خواهیم داشت.

حالت دوم: $x_1+x_2 = y_1+y_2 = 3$

در این حالت یکی از x_i ها ۱ بوده و دیگری ۲ می باشد. همچنین یکی از y_iها نیز برابر ۱ و دیگری ۲ خواهد بود. بنابراین باز هم یک مساوی نابدیهی خواهیم داشت.

فرض استقرا: حکم مسئله برای $m+n$ کوچکتر از k برقرار است.

حکم استقرا: برای $m+n=k$ حکم مسئله را ثابت می کنیم.

برهان:

فرض کنید که $m \le n$ می‌باشد. همچنین داریم $A = x_1+x_2+\cdots+x_n \triangleq y_1+y_2+\cdots+y_m < m$

حال دو حالت زیر را در نظر بگیرید.

حالت اول: $A < m(n-1)$

می توانیم که به جای x_1+x_2، در مساوی بالا یک متغیر جدید به نام x' تعریف کنیم که مقداری بزرگ‌تر از صفر دارد. بنابراین داریم:

$$A = x' + x_3 \cdots + x_n = y_1+y_2+\cdots+y_m < mn$$

حال تعداد xها در طرف چپ تساوی برابر با $n-1$ خواهد بود. چون $m+n-1<k$ و $A<m(n-1)$ پس طبق فرض استقرا تساوی نابدیهی جدیدی خواهیم داشت. این تساوی نابدیهی جدید، اگر حاوی x' نباشد، بنابراین یک تساوی نابدیهی خواهیم داشت که از تساوی اولیه نتیجه شده و اگر شامل x' باشد، به جای آن x_1+x_2 را خواهیم گذاشت و باز هم یک تساوی نابدیهی جدید خواهیم داشت.

حالت دوم: $m(n-1) \le A < mn$

فرض کنید که بزرگ‌ترین x_i که $(1 \le i \le n)$، x_l بوده و بزرگ‌ترین y_i، که $(1 \le i \le m)$، y_b باشد.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge m(n-1)$ می‌باشد . اندازه بزرگ‌ترین x_i، بزرگ‌تر مساوی $\frac{m(n-1)}{n} = m - \frac{m}{n}$ می‌باشد.(اثبات با برهان خلف) پس داریم: $x_l \ge m-1$.

مشابه فوق، $y_1 + y_2 + \cdots + y_m \ge m(n-1)$ می‌باشد. بنابراین اندازه بزرگترین y_i بزرگ‌تر مساوی $n-1$ می باشد. پس $y_b \ge n-1$.

اگر $x_l = m-1$ باشد، آنگاه چون $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge m(n-1)$، بنابراین $x_1 = x_2 + \cdots = x_n = m-1$ می‌باشد.

پس داریم $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = n(m-1)$. حال اگر ثابت کنیم که جمع یک تعدادی از y_iها مضربی از $m-1$ می‌باشند، آنگاه تساوی نابدیهی جدیدی خواهیم داشت.

دنباله اعداد $y_1,\ y_1 + y_2,\ y_1 + y_2 + y_3, \cdots,\ y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m$ را در نظر بگیرید. این دنباله یک دنباله اکیدا صعودی با m عضو می باشد. حال طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل دو تا از اعضای این دنباله وجود دارند که در پیمانه $m-1$ مساوی باشند. حال اگر این دو عضو را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$y_i + y_{i+1} + y_{i+2} + \cdots + y_{i+k} = l(m-1) \quad , \qquad i > 1 \quad , \ l < n$$

بنابراین تساوی نابدیهی زیر را خواهیم داشت:

$$y_i + y_{i+1} + y_{i+2} + \cdots + y_{i+k} = x_1 + x_2 + \cdots + x_l \quad , \qquad l < n$$

حال اگر $y_b = n-1$ باشد باز هم با استدلال مشابه بالا می‌توان ثابت کرد که تساوی جدیدی بدست می آید. (اثبات برعهده شما)

پس حال حالت $y_b > n-1\ , x_l > m-1$ در نظر بگیرید. سه حالت خواهیم داشت:

الف: $x_l = y_b$، در این حالت تساوی نابدیهی موردنظر را خواهیم داشت.

ب. $x_l > y_b$، در این حالت تساوی جدید زیر را در نظر بگیرید:

$$A' = A - y_b = x_1 + x_2 + \cdots + (x_l - y_b) + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_{b-1} + y_{b+1} + \cdots + y_m$$

y_b را به طرف سمت چپ تساوی اولیه برده و تساوی بالا بدست می‌آید. در این حالت $A' = A - y_b < mn - n = n(m-1)$

حال با توجه به اینکه تعداد y_iها $m-1$ تا بوده و تعداد x_i ها n می باشد پس طبق فرض استقرا برای تساوی بالا یک تساوی نابدیهی وجود دارد. حال اگر این تساوی شامل $(x_l - y_b)$ نباشد، یک تساوی نابدیهی را از تساوی اولیه نتیجه گرفته‌ایم، اما اگر شامل $(x_l - y_b)$ بود، کافی است y_b را به طرف دیگر تساوی ببریم.

ج. $x_l < y_b$ بر عهده شما!

۲) پارلمان کشور فرضی قلمستان از مجلس تشکیل شده است که در آن هر نماینده، حداقل سه مخالف دارد. با استفاده از خوش‌ترتیبی، ثابت کنید می‌توان مجلس مذکور را چنان به دو مجلس افراز کرد که هر عضو حداکثر یک مخالف در مجلس خود داشته باشد.

پاسخ:

اگر تعداد نمایندگان را ۵ درنظر گرفته و هر نماینده دقیقا با ۴ نماینده دیگر مخالف باشد، مثال نقضی برای این سوال خواهد بود.

اگر حداقل را به حداکثر در صورت سوال تبدیل کنیم، مسئله با اصل خوش‌ترتیبی حل می‌شود.

برهان: یک زیرمجموعه از نمایندگان را در نظر بگیرید. تعداد جفت نمایندگانی که در این زیر مجموعه با هم مخالف هستند را عدد مخالفت این زیر مجموعه تعریف می‌کنیم. برای هر افراز مجموعه نمایندگان به دو مجموعه ناتهی یک عدد مخالفت تعریف کرده که برابر با جمع اعداد مخالفت دو زیر مجموعه افراز شده می‌باشد. حال می‌دانیم که مجموعه‌ی اعداد مخالفت هر افراز، زیر مجموعه اعداد صحیح مثبت می‌باشند. پس طبق اصل خوش‌ترتیبی دارای کوچکترین عضو می‌باشد. پس افرازی که کوچک‌ترین عدد مخالفت را دارد، انتخاب می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که در این دو زیر مجموعه، هر عضو حداکثر یک مخالف دارد.

برهان خلف: عضوی در یکی از دو زیر مجموعه قرار دارد به طوریکه در آن زیر مجموعه دو مخالف دارد. با توجه به اینکه این عضو حداکثر ۳ مخالف دارد، پس در مجموعه دیگر حداکثر یک مخالف دارد. حال اگر این عضو را به مجموعه دیگر انتقال دهیم، افرازی بدست می‌آید که دارای عدد مخالف کوچک‌تری است (با حداقل اختلاف ۱ از این افراز).

۳) یادآوری: آرایه $a_{m,n} = \begin{cases} 0 & m<0 \quad or \quad n<0 \\ 1 & m=n=0 \\ na_{m,n-1}+ma_{m-1,n}(*) & O.W \end{cases}$، در کلاس مورد بررسی قرار گرفت $(a_{m,n}=(m+n)!)$.

اگر در ضابطه بازگشتی سطر سوم تعریف فوق، به‌جای عبارت $(*)$، عبارت $ma_{m,n-1}+na_{m-1,n}$ را قرار دهیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور کامل شرح دهید، مقادیر دنباله را به‌دست آورید و بگویید چه تغییرات احتمالی‌ای لازم است تا همان آرایه قبل حاصل شود؟

پاسخ:

با جایگذاری $ma_{m,n-1}+na_{m-1,n}$ به جای ستاره، تمامی خانه های جدول به غیر از خانه $(0,0)$، صفر خواهند شد.

برای اینکه مقادیر آرایه به اندازه $a_{m,n}=(m+n)!$ برگردد، آرایه زیر را تعریف می کنیم:

$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & m,n<0 \\ m\times a_{m-1,0} & n=0 \\ n\times a_{0,n-1} & m=0 \\ 1 & m=n=0 \\ ma_{m,n-1}+na_{m-1,n} & m,n>0 \end{cases}$$

اثبات اینکه $a_{m,n}$ در آرایه بالا برابر با $(m+n)!$ می‌باشد برعهده شما!

۴) موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $(m-1)\binom{n}{m} = (n-1)\binom{n-1}{m-1} - \binom{n-1}{m} \qquad ; \qquad (1\le m\le n)$

ب) $\binom{n}{m}\binom{n-m}{p-q}\binom{m}{q} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{m-q}\binom{p}{q}$

پاسخ:

الف)

$$\binom{n-1}{m-1}-\binom{n}{m}=\frac{(n-1)!}{(m-1)!\times(m-n)!}-\frac{n!}{m!\times(n-m)!}=\frac{(n-1)!\,(m-n)}{m!\times(n-m)!}=\frac{(n-1)!}{m!\times(n-m-1)}$$
$$=\binom{n-1}{m}$$

$$(m-1)\binom{n}{m}=m\times\binom{n}{m}-\binom{n}{m}=m\times\frac{n}{m}\times\binom{n-1}{m-1}-\binom{n}{m}=(n-1)\times\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m-1}-\binom{n}{m}=$$
$$(n-1)\times\binom{n-1}{m-1}-\binom{n-1}{m}$$

ب)

راه حل اول: ابتدا از n شیء، m شیء انتخاب کرده و سپس از m شیء انتخاب شده، q شیء انتخاب می‌کنیم. حال طی این دو انتخاب، دو دسته از nشیء ساخته می‌شوند. دسته اول $m-q$ شیء که بار اول انتخاب شدند اما بار دوم انتخاب نشدند و دسته دوم q شیء که هم بار اول انتخاب شدند و هم بار دوم. حال از $n-m$ شیء که در بار اول انتخاب نشدند، $p-q$ شیء انتخاب می‌کنیم. حال این انتخاب نیز دو دسته دیگر به همان روش مشابه با اندازه‌های $n-m-p+q$ و $p-q$ ایجاد می‌کند (دسته های سوم و چهارم). پس عبارت سمت چپ در واقع حالات مختلف ایجاد ۴ دسته متمایز با n شیء با اندازه_های بالا می‌باشد.

حال این ۴ دسته ایجاد شده را با ترتیب دیگر نیز می‌توان ایجاد کرد. فرض کنید ابتدا p شیء از n شیء را انتخاب و از این p شیء q شیء انتخاب کنیم. در طی این دو انتخاب، دو دسته با اندازه های q و $p-q$ را ایجاد کرده‌ایم. حال از $n-p$ شیء انتخاب نشده، $m-q$ شیء انتخاب می‌کنیم. طی این انتخاب نیز دو دسته با اندازه‌های $m-q$ و $n-m-p+q$ ایجاد می‌شوند. پس عبارت سمت راست هم تعداد حالات ایجاد ۴ دسته متمایز با n شی با اندازه‌های ذکر شده می‌باشد.

پس دو عبارت مساوی هستند.

راه حل دوم:

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{p-q}\binom{m}{q}=\frac{n!\times(n-m)!\times m!}{m!\times(n-m)!\times(p-q)!\times(n-m-p+q)!\ \times q!\ \times(m-q)!}$$

$$=\frac{n!}{(p-q)!\times(n-m-p+q)!\ \times q!\ \times(m-q)!}\qquad (I)$$

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{m-q}\binom{p}{q}=\frac{n!\times(n-p)!\times p!}{p!\times(n-p)!\times(m-q)!\times(m-q-n+p)!\times q!\times(q-p)!}$$

$$=\frac{n!}{(m-q)!\times(m-q-n+p)!\times q!\times(q-p)!}\qquad (II)$$

بنابراین $(I)=(II)$ و حکم ثابت می‌شود.

۵) بستنی‌فروشی که فقط یک نوع بستنی به قیمت ۱۰ تومان می‌فروشد، دارای طرفداران زیادی در منطقه شده است. یک روز صبح که دیر به محل کارش می‌رسد، مشاهده می‌کند که کارت‌خوان مغازه خراب است و $a+b$ نفر جلوی مغازه صف کشیده‌اند. بستنی‌فروش هیچ پولی همراه خود یا در کشوی مغازه ندارد. اگر بدانیم b نفر از خریداران فقط دارای اسکناس ۲۰ تومانی و a نفر دیگر فقط دارای اسکناس ۱۰ تومانی هستند...

الف) چقدر احتمال دارد که پس از شروع کار، همیشه (به جز در ابتدا) حداقل یک ۱۰ تومنی در کشوی میزش داشته باشد؟

ب) چقدر احتمال دارد که پس از شروع کار، هیچکس برای دریافت پول خود معطل نشود؟

پ) اگر $a=b=n$، در این حالت، پاسخ الف و ب را بررسی کنید.

پاسخ:

الف)

این مسئله دقیقا شرایط مسئله رای‌گیری برتراند که با لم دور حل می شود دارد:

احتمال اینکه همواره یک ۱۰ تومانی در دخل فروشنده موجود باشد = $\frac{a-b}{a+b}$

ب) ابتدا مسئله را برای $a>b$ حل می کنیم.

برای اینکه هیچ فرد خریداری در صف معطل نشود، بستنی فروش باید همواره ۱۰ تومان در دخلش داشته باشد و یا اینکه اگر زمانی دخل بستنی فروش خالی شد، اولین نفری که بستنی می‌خرد، ۱۰ تومان همراه داشته باشد.

زمانی دخل بستنی فروش خالی می‌شود که بستنی‌فروش تعدادی برابر بستنی به افراد ۱۰ تومانی و ۲۰ تومانی فروخته باشد. حال مسئله را به حالات مختلف افراز می‌کنیم. افراز را بر روی تعداد بستنی هایی که بستنی فروش به افراد ۱۰ تومانی یا ۲۰ تومانی قبل از آخرین باری که دخلش خالی شده، انجام می دهیم. این تعداد را k در نظر بگیرید.($0 \le k \le b$ ، $k=0$ متناظر با تعداد حالاتی است که دخل بستنی فروش هیچ گاه خالی نشود، یعنی اتفاق بخش الف بیفتد.)

فرض کنید تعداد چیدمان های مختلف $2k$ نفر ابتدایی صف که قبل از آخرین بار خالی شدن دخل خرید خود را انجام می‌دهند، (k نفر ۱۰ تومانی و k نفر ۲۰ تومانی) برابر با E_k باشد. $a-k$ و $b-k$ نفر دیگر که بعد از این $2k$ نفر در صف هستند باید به ترتیبی بایستند که هیچ‌گاه دخل خالی نشود. تعداد حالات ایستادن آن ها شبیه مسئله تعداد واژه های غالب می‌باشد. پس در کل در این حالت $E_k \times \binom{\text{a+b−2k}}{a-k} \times \frac{a-b}{a+b-2k}$ چینش مختلف برای افراد در صف وجود دارد.

حال اگر تعداد حالات مختلف هر افراز را با هم جمع کنیم، تعداد کل حالات بدست می آید.

$$\text{تعداد کل حالات} = \sum_{k=0}^{b} E_k \times \binom{\text{a+b−2k}}{a-k} \times \frac{a-b}{a+b-2k}$$

حال E_k را محاسبه میکنیم. E_k تعداد حالت چینش $2k$ فرد (kتا ۲۰ تومانی و k فرد ۱۰ تومانی) در صف بستنی است به‌طوری‌که هیچکس معطل نشود. حال مسئله را به حالات مختلف افراز می‌کنیم. افراز را بر روی تعداد بستنی‌های که بستنی فروش به افراد ۱۰ تومانی یا ۲۰ تومانی قبل از اولین باری که دخل خالی شده فروخته، انجام می‌دهیم. این تعداد را m در نظر بگیرید($1 \le m \le k$) $2m$ نفر ابتدای صف(m نفر ۲۰ تومانی و m نفر ۱۰ تومانی) باید به شکلی چیده شده باشند که دخل تا بعد از خرید بستی نفر $2m$ام هیچگاه خالی نشده باشد. بنابراین باید همواره حداقل ۱۰ تومان در دخل موجود باشد و نفر $2m$ام نیز باید فرد ۲۰ تومانی باشد. بنابراین تعداد حالات چینش آن $2m-1$ نفر بقیه مانند پیدا کردن تعداد واژه‌های غالب با m تا a و $m-1$ تا b می‌باشد. بنابراین چینش این $2m$ نفر ابتدا صف $\frac{1}{2m-1} \times \binom{2m-1}{m-1}$ حالت دارد.

پس در کل:

$$E_k = \sum_{m=1}^{m=k} \binom{2m-1}{m-1} \times \frac{1}{2m-1} * E_{k-m} \quad , \qquad E_0 = 1$$

برای محاسبه احتمال باید تعداد کل حالات را بر $\binom{a+b}{a}$ تقسیم کنیم.

برای حالت $a = b$ نیز همان E_a را باید محاسبه کرده و بر $\binom{a+b}{a}$ تقسیم می‌کنیم.

راه حل دوم:

فرض کنید یک صف با $a-1$ فرد ۱۰ تومانی و b فرد ۲۰ تومانی داشته باشیم. افراد در این صف طوری قرار گرفته‌اند که هیچ‌گاه هیچ کسی معطل نمی شود. یعنی ممکن است که دخل خالی شود اما نفر بعدی حتما ۱۰ تومان همراه دارد. حال اگر در ابتدای این صف یک فرد ۱۰ تومانی اضافه کنیم، آنگاه دخل هیچ‌گاه خالی نمی‌شود و حالت مطلوب قسمت الف اتفاق میفتد. بنابراین رابطه زیر را داریم:

احتمال آنکه a ۱۰ تومانی و b ۲۰تومانی در صف دخل خالی نشود = احتمال $a-1$ نفر ۱۰ تومانی و b نفر ۲۰ تومانی در صف بدون معطلی × احتمال اولین نفر a باشد

$$\frac{a}{a+b} \times X(a-1,b) = \frac{a-b}{a+b}$$

$$X(a-1,b) = \frac{a-b}{a} \rightarrow X(a,b) = \frac{a-b+1}{a+1}$$

ج)

احتمال برای الف صفر می باشد. احتمال برای ب نیز $\frac{1}{n+1}$ می باشد.