



تمرین سری سوم

مهلت تحویل: ۱۳ اردیبهشت ساعت ۲۴

۱. نشان دهید که مجموعه ی زیر پایه ای برای توپولوژی معمولی روی \mathbb{R}^2 است.

$$B = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

۲. اگر T_1 و T_2 دو توپولوژی روی فضای X باشند، ثابت کنید:
 T_1 ظریفتر از T_2 است اگر و تنها اگر تابع همانی $f : (X, T_1) \rightarrow (X, T_2)$ پیوسته باشد.

۳. فرض کنید $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ دارای توپولوژی زیرفضایی باشند. ثابت کنید توپولوژی حاصلضربی برای $A \times B$ همان توپولوژی زیرفضایی است که توسط $X \times Y$ روی $A \times B$ القا میشود.

۴. برای $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در \mathbb{R}^n تعریف کنید:

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

(I) ثابت کنید d یک متر روی \mathbb{R}^n است.

(II) ثابت کنید توپولوژی القایی توسط متر d همان توپولوژی حاصلضربی روی \mathbb{R}^n است.

۵. (I) ثابت کنید مجموعه ی زیر روی فضای X یک توپولوژی است:

$$T = \{U \mid X - U \text{ is finite}\}$$

(به این توپولوژی، توپولوژی متمم متناهی گفته میشود.)

(II) ثابت کنید فضای نامتناهی X با توپولوژی متمم متناهی، هاسدورف نیست.

(III) ثابت کنید فضای متناهی X با توپولوژی متمم متناهی، هاسدورف است.