دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۶**

مروری بر مطالب درس:

- **استقراء ریاضی**

- **اصل استقراء**

فرض کنید p خاصیتی مربوط به اعداد صحیح مثبت است به طوریکه

الف) پایه یا مقدمه استقرا

$$p(1)$$

ب) مرحله استقرایی

$$p(k) \Rightarrow p(k+1)$$

در این صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم $p(n)$.

- **استقراء کراندار**

فرض کنید p خاصیتی مربوط به اعداد صحیح مثبت است به طوریکه

الف) پایه یا مقدمه استقرا

$$p(b)$$

ب) مرحله استقرایی

$$\forall((b \le k < c) \wedge p(k)) \Longrightarrow p(k+1)$$

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $b \le n \le c$ داریم $p(n)$.

- **استقراء با دو مقدمه**

فرض کنید p خاصیتی مربوط به اعداد صحیح مثبت است به طوریکه

الف) پایه یا مقدمه استقرا

$$p(b) \wedge p(b+1)$$

ب) مرحله استقرایی

$$(p(k) \wedge p(k+1)) \Longrightarrow p(k+2)$$

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \ge b$ داریم $p(n)$.

- **استقراء با m مقدمه**

فرض کنید p حکمی داده شده و b و $m \ge 1$ اعدادی صحیح هستند به طوریکه

الف) پایه یا مقدمه استقرا

$$p(b) \wedge p(b+1) \dots \wedge p(b+m-1)$$

ب) مرحله استقرایی

$$(\forall k \ge b)\left[\left(p(k) \wedge p(k+1) \wedge \dots \wedge p(k+m-1)\right) \Longrightarrow p(k+m)\right]$$

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq b$ داریم $p(n)$.

- **استقراء قوی**

فرض کنید p حکمی داده شده و b عددی صحیح باشد به طوریکه

الف) پایه یا مقدمه استقرا

$$p(b)$$

ب) مرحله استقرایی

$$[p(b) \wedge p(b+1) \wedge \dots \wedge p(k)) \Longrightarrow p(k+1)]$$

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq b$ داریم $p(n)$.

- **استقراء در مجموعه اعداد صحیح**

فرض کنید $p(n)$ حکمی درباره اعداد صحیح باشند به طوریکه

به ازای هر عدد صحیح داشته باشم $p(b)$

و همواره بتوان از $p(k)$، $p(k+1)$ و $p(k-1)$ را نتیجه گرفت.

آنگاه به ازای هر عدد صحیح n، $p(n)$ برقرار است.

- **استقراء قهقرایی**

فرض کنید $p(n)$ به ازای $n \geq m$ تعریف شده باشد به طوریکه

الف) به ازای هر $n > m$، اگر $p(n)$ آنگاه $p(n-1)$.

ب) مجموعه n هایی که $p(n)$ برقرار است، نامتناهی است.

در این صورت $p(n)$ به ازای هر n که $n \geq m$ برقرار است.

- **استقراء قوی در اعداد صحیح**

فرض کنید p حکمی داده شده و b عددی صحیح باشد به طوریکه

الف) پایه یا مقدمه استقرا

$$p(b)$$

ب) مرحله استقرایی

به ازای هر دو عدد صحیح k و k_1 که $k_1 \leq b \leq k$ داریم

$$(p(k_1) \wedge p(k_1+1) \dots \wedge p(k)) \Longrightarrow (p(k_1-1) \wedge p(k+1))$$

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) حاصل مجموع زیر را حدس بزنید و حدس خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = ?$$

۲) ثابت کنید اگر $x + \frac{1}{x}$ عددی صحیح باشد، به ازای هر عدد صحیح مثبت n، حاصل $x^n + \frac{1}{x^n}$ عددی صحیح است.

۳) دو بازیکن در یک بازی با دو دسته چوب کبریت که هر دسته مختص یک بازیکن است، شرکت کرده‌اند. بازیکنان به ترتیب بازی می‌کنند و در هر مرحله از بازی، بازیکن مربوطه به تعداد مثبت دلخواهی چوب کبریت از دسته متعلق به بازیکن دیگر برمی‌دارد و دور می‌ریزد. بازیکنی که آخرین چوب کبریت را دور بریزد، برنده است. ثابت کنید اگر تعداد چوب کبریت های دو دسته برابر باشد، بازیکن دوم می‌تواند برد خود را تضمین کند.

۴) ثابت کنید نامساوی زیر به ازای هر مقدار صحیح مثبت n برقرار است.

$$\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

۵) اگر $a, b > 0$، ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$(n-1)a^n + b^n \geq na^{n-1}b$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a = b$ یا $n = 1$ باشد.

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$$

پایه استقرا

$$1 = 1.1! = (1+1)! - 1 = 1$$

فرض استقرا

$$1.1! + 2.2! + \cdots + k.k! = (k+1)! - 1$$

حکم استقرا

$$1.1! + 2.2! + \cdots + k.k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$$

به طرفین فرض استقرا $(k+1)(k+1)!$ را اضافه می‌کنیم

$$1.1! + 2.2! + \cdots + k.k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$$

$$\Rightarrow 1.1! + 2.2! + \cdots + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$$

بنابراین حکم اثبات شد.

۲)

پایه استقرا

$$x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

فرض کنیم $p(n)$ برای $n = 1,2,3,\dots,k$ برقرار باشد. آنگاه

$$(x+\frac{1}{x})(x^k+\frac{1}{x^k}) \in \mathbb{Z}$$

ازآنجا که حاصل ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح است، داریم

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right) = \left(x^{k+1}+x^{\frac{1}{k+1}}\right) + (x^{k-1}+x^{\frac{1}{k-1}})$$

حال چون $p(k-1)$ درست است، $(x^{k-1}+x^{\frac{1}{k-1}})$ عددی صحیح است.

بنابراین

$$\left(x^{k+1}+x^{\frac{1}{k+1}}\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right) - (x^{k-1}+x^{\frac{1}{k-1}})$$

چون تفریق دو عدد صحیح، عددی صحیح است، پس

$$(x^{k+1}+x^{\frac{1}{k+1}}) \in \mathbb{Z}$$

بنابراین حکم ثابت شد.

۳)

حالت $1-1$ را به عنوان پایه در نظر می‌گیریم. به وضوح مشخص است که نفر دوم برنده می‌شود. حال فرض می‌کنیم برای هر تعداد چوب کبریت کوچک‌تر از k (به شرطی که هر دو بازیکن تعداد برابری چوب بگیرند)، نفر دوم برنده می‌شود. نفر اول در اولین مرحله بازی، i چوب کبریت که $1 \le i \le k$ بر می‌دارد و نفر دوم این حرکت را تکرار می‌کند، یعنی i چوب کبریت بر می‌دارد. حال هر کدام $k-i<k$ چوب کبریت دارند که طبق فرض، نفر دوم استراتژی برد دارد.

۴)

برای حل سوال اثبات می‌کنیم

$$A(n) = \frac{1\times 3\times \dots \times (2n-1)}{2\times 4\times \dots \times (2n)} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

پایه استقرا

$$A(1) = \frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{4}}$$

فرض استقرا

$$A(k) = \frac{1\times 3\times \dots \times (2k-1)}{2\times 4\times \dots \times (2k)} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

حکم استقرا

$$A(k+1) \le \frac{2k+1}{2k+2}.\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

داریم

$$\left(\frac{2k+1}{2k+2}.\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\right)^2 = \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2(3k+1)} = \frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4} = \frac{(2k+1)^2}{(12k^3+28k^2+19k+4)+k}$$
$$= \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k} \le \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)} = \frac{1}{3k+4}$$

درنتیجه

$$\Longrightarrow A(k) \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \le \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

۵)

اگر $a = b$ که واضح است. پس ثابت می‌کنیم اگر $a \neq b$ و $n > 1$، حکم برقرار است.

به ازای $n = 2$ حکم برقرار است زیرا

$$(a+b)^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab$$

حال طبق روش قهقرایی فرض می‌کنیم حکم استقرا درست باشد. یعنی

$$na^{n+1} + b^{n+1} > (n+1)a^n b = na^n b + a^n b$$

طبق فرض استقرا داریم $(n-1)a^n + b^n > na^{n-1}b$.

درنتیجه

$$na^{n+1} + b^{n+1} > (n-1)a^{n+1} + ab^n + a^n b$$

پس با ساده کردن طرفین داریم

$$a^{n+1} + b^{n+1} > a^n b + ab^n$$

با فاکتورگیری از طرفین نامساوی داریم

$$a(a^n - b^n) - b(a^n - b^n) > 0 \Longrightarrow (a-b)(a^n - b^n)$$

که نامساوی فوق درست است زیرا $a, b > 0$ و $a \neq b$. حال اگر استدلال را معکوس به عقب برگردانیم، اثبات کامل می‌شود.