۱) رابطه زیر را با استقرا ثابت کنید.

$$(1+x)(1+x^2)\dots\left(1+x^{2^n}\right)=1+x+\dots+x^{2^{n+1}-1}$$

پاسخ:

پایه‌ی استقرا : برای $n=0$ داریم:

$$\left(1+x^{2^0}\right)=1+x=1+x^{2^{0+1}-1}$$

فرض استقرا: $k\ \in\mathbb{N}$ را بگیرید. فرض کنید رابطه برای $n=k$ صحیح است.

$$(1+x)\dots\left(1+x^{2^k}\right)=1+x+\dots+x^{2^{k+1}-1}$$

عبارت بالا را در $\left(1+x^{2^{k+1}}\right)$ ضرب می‌کنیم.

$$(1+x)\dots\left(1+x^{2^k}\right)\left(1+x^{2^{k+1}}\right)=(1+x+\dots+x^{2^{k+1}-1})(1+x^{2^{k+1}})$$
$$=1+x+\dots+x^{2^{k+1}-1}+x^{2^{k+1}}+x^{2^{k+1}+1}+\dots+x^{2^{k+1}-1+2^{k+1}}$$
$$=(1+x)\dots\left(1+x^{2^{k+1}}\right)=1+x+\dots+x^{2^{k+2}-1}$$

و خواسته‌ی سوال اثبات می‌شود.

۲) ثابت کنید اگر $2\cos\varphi=x+\frac{1}{x}$، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $2\cos n\varphi=x^n+\frac{1}{x^n}$.

پاسخ:

روی n استقرا می‌زنیم.

پایه‌ی استقرا: برای حالت $n=1$ و با توجه به فرض سوال رابطه درست است.

$$2\cos\varphi=x^1+\frac{1}{x^1}$$

فرض استقرا: $k\ \in\mathbb{N}$ را بگیرید. فرض کنید رابطه برای $n\le k$ صحیح است. (استقرای قوی) داریم:

$$2\cos k\varphi = x^k + \frac{1}{x^k}$$

با ضرب عبارت بالا در x^{-1} و x خواهیم داشت:

$$2x^{-1}\cos k\varphi = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

$$2x\cos k\varphi = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}}$$

با جمع دو عبارت خواهیم داشت:

$$x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} + x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} = 2(x + \frac{1}{x})\cos k\varphi$$

از فرض سوال به خاطر داریم که $2\cos\varphi = x + \frac{1}{x}$ و می‌دانیم $\cos a\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$. رابطه‌ی بالا را بازنویسی می‌کنیم.

$$x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = 4\cos\varphi\cos k\varphi$$

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + 2\cos(k-1)\varphi = 2\cos(k+1)\varphi + 2\cos(k-1)\varphi$$

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = 2\cos(k+1)\varphi$$

پس عبارت برای $n = k+1$ صحیح است و استقرا تکمیل می‌شود.

۳) دنباله $\{x_n\}_{n\geq 0}$ از اعداد صحیح، با شرط اولیه $x_0 = 2$ و رابطه بازگشتی $x_n = {x^2}_{n-1} - x_{n-1} + 1$ که به ازای $n \geq 1$ برقرار است، تعریف شده است. ثابت کنید به ازای هر دو مقدار متمایز m و n، مقادیر x_m و x_n نسبت به هم اول هستند.

پاسخ:

ابتدا یک لم را اثبات می‌کنیم.

لم: برای هر x_i و x_j که $i < j$. x_j به پیمانه‌ی x_i برابر یک است.

پایه استقرا:

$$x_{i+1} \equiv x_i^2 - x_i + 1 \equiv 1 \quad mod\ x_i$$

فرض استقرا:

$$x_{i+k} \equiv 1 \quad mod\ x_i$$

$$x_{i+k+1} \equiv x_{i+k}^2 - x_{i+k} + 1 \equiv 1 - 1 + 1 \equiv 1 \quad mod\ x_i$$

رابطه برای x_{i+k+1} اثبات می‌شود و استقرا تکمیل خواهد شد.

حال اثبات می‌کنیم که هر x_m و x_n نسبت به هم اول اند. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید که $m < n$. می‌دانیم که $(a, b) = (a, b\ mod\ a)$. از لمی که بالا اثبات کردیم استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(x_m, x_n) = (x_m, x_n \bmod x_m) = (x_m, 1) = 1$$

پس ب.م.م هر x_m و x_n برابر یک است. و هر x_m و x_n نسبت به هم اول اند.

۴) دنباله کنوث، با رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$k_0 = 1$$

$$k_{n+1} = 1 + min\left(2k_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 3k_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}\right) \quad ; \ n \geq 0$$

ثابت کنید به ازای هر $n \geq 0$، $k_n \geq n$.

پاسخ:

ابتدا ثابت می‌کنیم که $b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \geq a - b + 1$. عدد a را به کمک الگوریتم تقسیم به صورت $bq + r$ می‌نویسیم. داریم:

$$b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = b\left\lfloor \frac{bq + r}{b} \right\rfloor = b\left\lfloor q + \frac{r}{b} \right\rfloor = bq = a - r$$

می‌دانیم q یک عدد صحیح است پس می‌توان آن را از کف خارج کرد. و r اکیدا از b کمتر است.

$$a - r \geq a - (b - 1) = a - b + 1$$

حکم سوال را تغییر داده و حکم قوی تر $k_n \geq n + 1$ را اثبات می کنیم. روی اندیس k استقرا می‌زنیم.

پایه‌ی استقرا: از تعریف دنباله می‌دانیم که $k_0 = 1 \geq 0 + 1$ و پایه صحیح می‌باشد.

فرض استقرا: فرض کنید $k_n \geq n + 1$ برای همه‌ی n هایی که $n \leq m$ برقرار است(استقرای قوی). ثابت می‌کنیم که برای $n = m + 1$ رابطه صادق است. از فرض استقرا می‌دانیم $k_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \geq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1$ و همچنین $b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \geq a - b + 1$ با ادغام این دو خواهیم داشت:

$$2k_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \geq 2\left(\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + 1\right) \geq m + 1 - 2 + 1 + 2 = m + 2$$

$$3k_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor} \geq 3\left(\left\lfloor \frac{m+1}{3} \right\rfloor + 1\right) \geq m + 1 - 3 + 1 + 3 = m + 2$$

$$\min\left(2k_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}, 3k_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor}\right) \geq m + 2$$

$$k_{m+1} = 1 + min\left(2k_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}, 3k_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor}\right) \quad \geq 1 + (m + 2) \geq (m + 1) + 1$$

برای $n = m + 1$ رابطه صادق است و استقرا تکمیل می‌شود. ثابت کردیم $k_n \geq n + 1$ که نتیجه می‌دهد $k_n \geq n$.

۵) ثابت کنید برای تمام اعداد صحیح $n \geq 0$، $10 | (n^5 - n)$.

پاسخ:

پایه‌ی استقرا: برای $n = 0$ رابطه برقرار است.

$$10 \mid 0^5 - 0$$

فرض استقرا: $k \in \mathbb{N}$ را بگیرید. فرض کنید رابطه برای $n = k$ صحیح باشد.

$$10 \mid k^5 - k$$

ثابت می‌کنیم برای $n = k + 1$ نیز رابطه صحیح است. عبارت $(k+1)^5$ را گسترش می‌دهیم.

$$(k+1)^5 - (k+1) = 4k + 10k^2 + 10k^3 + 5k^4 + k^5$$

حال کافی است که ثابت کنیم $10 \mid 4k + 5k^4 + k^5$ به عبارت یک k اضافه و کم می‌کنیم.

$$10 \mid 5k + 5k^4 + k^5 - k$$

از فرض استقرا داریم $10 \mid k^5 - k$ پس باید ثابت کنیم $10 \mid 5k + 5k^4$ یا نشان دهیم $2 \mid k + k^4$. روی زوجیت k حالت بندی می‌کنیم. اگر زوج باشد که عبارت حتما درست است. پس فرض کنید k فرد است در نتیجه k^4 نیز فرد است. و جمع دو عدد فرد، زوج می‌باشد و درستی عبارت نتیجه می‌شود. ثابت کردیم $10 \mid (k+1)^5 - (k+1)$ و عبارت سوال برای $n = k + 1$ صحیح می‌باشد و استقرا تکمیل می‌شود.