جلسه سیزدهم

مسئله 49: تعداد جایگشت هایی را که می توان با به کار بردن همه مولفه های 1,1,2,2,...,n,n نوشت به طوری که مولفه های مجاور متمایز باشند a_n می نامیم. یک رابطه بازگشتی برای a_n بدست آورید.

تعریف: عدد استرلینگ نوع اول بدون علامت که آن را با $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ نمایش می دهند، مساوی تعداد راه های قرار گرفتن n شخص متمایز دور k میز یکسان است به طوری که هیچ میزی خالی نباشد.

مسئله 50: یک رابطه بازگشتی برای $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	2	3	1	0
4	0	6	11	6	1

مسئله 51: ثابت کنید :

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

نتیجه 53: ثابت کنید $\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!\,H_n$ که در آن $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

مسئله 54:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

$0 \le m < n \Rightarrow \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1}\left(H_n - \frac{1}{m+1}\right)$

$0 \le m \le n \Rightarrow \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m}(H_n - H_m)$

جلسه سیزدهم

نتیجه 55: ثابت کنید:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

مسئله 56: تعداد راه های فرش کردن یک مستطیل $1 \times (n-1)$ با موزاییک های 1×1 با r زنگ و موزاییک های 1×2 با s رنگ را u_n می نامیم. یک رابطه بازگشتی برای u_n بیابید سپس ثابت کنید در حالت $r = s = 1$ داریم $u_n = f_n$.

نتیجه 57: با استفاده از مسئله قبل رابطه ی زیر را به صورت ترکیبیاتی ثابت کنید.

$$f_{n+m+1} = f_{n+1} f_{m+1} + f_n f_m$$

تعریف: $P_k(n)$ تعداد افراز های عددی n به k جزء و $\overline{P_k}(n)$ تعداد افراز های عددی حداکثر به k جزء.

مسئله 58: ثابت کنید:

$$P_k(n) = \overline{P_k}(n-k)$$
$$\overline{P_k}(n) = P_k(n+k)$$

یادداشت: نمودار فررز برای افراز های عددی:

10 = 4 + 3 + 1 + 1 + 1

○ ○ ○ ○
○ ○ ○
○
○
○

مسئله 59: ثابت کنید $P_k(n) = P_{k-1}(n-1) + P_k(n-k)$

مسئله 60: رابطه ی بازگشتی برای T_n تعداد درخت های مرتب دودویی کامل با n برگ بنویسید.

جلسه سیزدهم

مسئله 61: اعداد wedderburn-etherington

اگر W_n تعداد درخت های نامرتب دودویی کامل n برگی باشد ثابت کنید:

$$W_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} W_i\, W_{n-i} & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} W_i\, W_{n-i} + W_{\frac{n}{2}}\right) & n \text{ زوج} \end{cases}$$