



دانشگاه تهران

تمرین سری سوم مبانی ترکیبیات

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

تاریخ تحویل: جمعه ۲۹ اسفند

(۱) توپ فوتبال از قطعات چرمی سیاه و سفید ساخته شده است. قطعات سیاه، پنج ضلعی منظم و قطعات سفید، شش ضلعی منظم اند. هر پنج ضلعی با ۵ شش ضلعی و هر شش ضلعی با ۳ پنج ضلعی و ۳ شش ضلعی احاطه شده است. ۱۲ قطعه سیاه در توپ به کار رفته است. توپ چند قطعه سفید دارد؟

(۲) برنامه تمرین ماهانه یک تیم بسکتبال تنظیم شده است. این تیم در ماه ۳۰ روزه ای که در پیش است، هر روز قرار است حداقل یک بازی انجام دهد و همچنین در کل ماه حداکثر ۴۵ بازی انجام می دهد. ثابت کنید این برنامه با رعایت شرایط مذکور، به هر صورتی که چیده شود، چند روز متوالی وجود دارد که در آن روزها، تیم دقیقاً ۱۴ بازی انجام می دهد. بررسی کنید اگر به جای ۱۴ بازی، ۱۵ بازی باشد، پاسخ سؤال چه تغییری می کند.

(۳) فرض کنید $n \geq 3$ عددی فرد باشد. نشان دهید عددی در مجموعه $\{1, 3, 7, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ وجود دارد که بر n بخش پذیر است.

(۴) هر کدام از پاره خط هایی که ۹ نقطه مجزا روی محیط دایره را به هم وصل کرده اند، با قرمز یا آبی رنگ آمیزی می کنیم. هر مثلی که از ۳ نقطه از این ۹ نقطه تشکیل شده است، حداقل شامل یک ضلع قرمز است. ثابت کنید ۴ نقطه وجود دارد که تمام ۶ پاره خطی که آن ها را به هم وصل کرده است، قرمز باشد.

(۵) هر یک از اتحاد های ترکیبیاتی زیر را با استفاده از استدلالی ترکیبیاتی ثابت کنید.

$$a) \binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$b) \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$c) 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$