سوال ۱ +

(1) $\to$ $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) $\to$ $f_1 + f_2$:

که برای هر $x_0 \in \mathbb{R}$، ثابت‌ها k_1, k_2, L_1, L_2, r وجود دارند به طوری که

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq L_1 |x-y| \qquad |f_1(x)| < k_1$$

$$|f_2(x) - f_2(y)| \leq L_2 |x-y| \qquad |f_2(x)| < k_2$$

$$\forall x,y \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} \quad , \quad f(x) := f_1(x) + f_2(x)$$

داریم:

$$|f(x) - f(y)| = |f_1(x) - f_1(y) + f_2(x) - f_2(y)|$$

$$\leq L_1 |x-y| + L_2 |x-y| \leq (L_1 + L_2) |x-y|$$

(ii) $\to$ $f = f_1 f_2$:

$$|f(x) - f(y)| = |f_1(x) f_2(x) - f_1(y) f_2(y)|$$

$$= |f_1(x) f_2(x) - f_1(x) f_2(y) + f_1(x) f_2(y) - f_1(y) f_2(y)| \leq k_1 L_2 + k_2 L_1 |x-y|$$

$(iii) \to f := f_1 \circ f_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f_1(f_2(x)) - f_1(f_2(y))|$

$\leq L_1 |f_2(x) - f_2(y)| \leq L_1 L_2 |x - y|$

$\square$

سوال ۲ ← اگر $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد،

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad f(x) := \frac{1}{1 + g^T(x) g(x)} g(x)$$

⇐ f نیز به طور پیوسته ~~مشتق~~ دیفرانسیل پذیر است. ⇐ یکتایی و وجود $\dot{x} = f(x)$ به طور موضعی نتیجه قضیه (۳.۱) خواهد بود. به علاوه:

$$\|f(x)\| = \frac{\|g(x)\|}{1 + \|g(x)\|^2} \leq 1/2$$

$$\Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq \|x_0\| + 1/2 \, (t - t_0)$$

⇐ برای هر $t \geq t_0$ پاسخ تعریف شده است.

سوال ۳ ← اگر $V = x^2$ را داشته باشیم:

$$\Rightarrow \dot V = 2x\dot x = -2x^2 + \frac{2x \sin t}{1+x^2} \le -2V + 1$$

معادله دیفرانسیل $\begin{cases} \dot u = -2u + 1 \\ u(0) = 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

$$\Rightarrow V(t) \le u(t) = 2e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1 + 3e^{-2t}}{2}$$

$$\Rightarrow |x(t)| = \sqrt{V(t)} \le \sqrt{\frac{1 + 3e^{-2t}}{2}}$$

سوال ۴ ← پوشش متناهی $\{N(a_i, r_i)\}$ را برای که در نظر بگیریم:

در هر همسایگی داریم:

for $x, y \in N(a_i, r_i)$: $\quad \|f(x) - f(y)\| \le L_i \|x - y\|$

اگر $x, y \in S \cap N(a_i, r_i)$ باشند، شرط لیپشیتز با $L = L_i$ برقرار است.

در غیر این صورت $\|x-y\| \geq \min_i r_i$. از آنجا که f روی S که به طور سراسری کراندار است ، داریم :

$$\|f(x)-f(y)\| \leq C, \quad \forall x,y \in S \quad C>0$$

⇐ هرگاه داشته باشیم : $\|x-y\| \geq \min_i r_i$ ⇐

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \frac{C}{\min_i r_i}\|x-y\|$$

قرار دهیم : $L = \max\{L_1, \dots, L_k, \frac{C}{\min_i r_i}\}$?

∎

سوال ۵ ← قرار دهید : $0 \leq \alpha \leq 1$ $\quad g(\alpha) := f(\alpha x)$

از آنجا که D محدب است : $\alpha x \in D$ است .

$$g'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)\,\frac{\partial \alpha x}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)\, d\alpha x$$

سوال ۶ -

داریم: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ for all $x, y \in W$.

اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، قرار دهیم $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ بدین صورت: داریم:

$$\|f(x) - f(y)\| < L\delta = \varepsilon$$

در نتیجه پیوستگی یکنواخت است. $\square$