جلسه بیست و یکم

قضیه ۱۰,۱. فرض کنید G یک گراف ساده همبند n امی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱) G به طور مینیمال همبند است، به عبارت دیگر حرف هریال ^{G} ، گراف حاصل را ناهمبند می کند.
۲) G شامل دور نیست

تعریف ۱۰,۲. گراف ساده همبندی که در هر یک از گزاره های مذکور در قضیه قبلی(ودر نتیجه در هر دو گزاره) صدق کند را درخت می نامیم.

نتیجه ۱۰,۳. گراف همبند H یک درخت است اگر و تنها اگر به ازای هر دو رأس(x,y) شامل یک مسیر ازx بهy می باشد.

قضیه ۱۰,۴. هر درخت n رأس دارای ۱-n یال است. بر عکس هر گراف همبند n رأسی باn-1 یال یک درخت است. **اثبات:** با استقراء و به کمک لم زیر صورت می گیرد.

لم ۱۰,۵. فرض کنید T یک درخت n رأسی با $n\geq 2$ باشد. در این صورت T لا اقل دارای دو رأس درجه ۱ است.

جنگل گرافی است که هر مولفه همبندی آن یک درخت است.

گزاره ۱۰,۶. فرض کنید F جنگلی با n رأس و k مولفه همبندی باشد. در این صورت F دارای n-k یال است.

قضیه ۱۰,۷. (جهت اطلاع) به ازای هر عدد مثبت n ، تعداد هر درخت با مجموعه رأس های [n] برابر $A_n=n^{n-2}$.

نتیجه ۱۰۹. (جهت اطلاع) تعدادجنگل های ریشه دار روی [n] برای $(n+1)^{n-1}$ است .

مثال ۱۰,۱۰. فرض کنید G یک گراف همبند ساده باشد. فرض کنید $w: E(G) \to R^{+}$ یک تابع باشد. درخت فراگیر Tاز G را به گونه ای که$\sum_{eET} W(e)$ مینیمال باشد، بیابید.

جلسه بیست و یکم

توصیف الکوریتم آزمندانه کروسکال برای حل مسئله فوق: در مرحله: i اُم به دنبال $e^{یال}$ با خواص زیر میگردیم:

(i) یال e هنوز در T نیست.

(ii) اگر یال e را به T بیفزاییم دوری حاصل نمی شود!

(iii) وزن e در میان یال های صادق در (i),(ii) مینیمم است.

قضیه ۱۰,۱۲. الگوریتم آزمند کروسکال که دربالا توصیف شد همواره یک درخت فراگیر مینیمم پیدا می کند.

اثبات: بر اساس لم زیر و با یک روش غیرمستقیم انجام می شود.

لم ۱۰۱۱. فرض کنید F, F' در جنگل روی مجموعه رأسهای V باشند و F تعداد یالهای کمتری از'F داشته باشد در این صورت'F دارای یالی مانند E است به طوریکه افزودن آن به F یالی ایجاد نمیکند.

اثبات قضیه ۱۰۱۲. فرض کنید گراف G داده شده باشد و الگوریتم کروسکال درخت فراگیر Tرا ایجاد کند در حالیکه درخت فراگیر مینیمم H است. فرض کنید $h_1,\ldots,h_{n-1}$ یالهای Hباشند به گونه ای که $w(h_1)\leq\ldots\leq w(h_{n-1})$. به طور مشابه فرض کنید $t_1,\ldots,T_{n-1}$ یالهای T باشند به گونه ای که $w(t_1)\leq\ldots\leq w(t_{n-1})$.

فرض کنید i کوچکترین عدد صحیحی باشد که به ازای ان نامساوی$\sum_{j=1}^{i} w(h_j) < \sum_{j=1}^{i} w(t_j)$ برقرار است. داریم$w(h_i)< w(t_i)$ اجرا؟ فرض کنیدT_{i-1}جنگل حاصل شده از الگوریتم کروسکال بعد از اجرای مرحله i-1 ام الگوریتم باشد. یالهای T_{i-1} مساوی $t_1,\ldots,t_{i-1}$ است. حال فرض کنید H_iجنگل تولیدشده توسط یالهای $h_1,\ldots,h_i$ باشد.

با به کار بردن لم ۱۰,۱۱. در مورد H_i , T_{i-1} نتیجه می شود که یالی مانند H_j با $j\leq i$ وجود دارد که با افزودن آن به T_{j-1} دوری حاصل نمی شود. از سوی دیگرداریم $h_g\leq h_i<t_i$ لذا در مرحله i ام اجرای الگوریتم کروسکال باید یال h_j به جای t_i انتخاب می شد. این تناقض از فرض مینیمم نبودن درخت F, F' درجنگل روی مجموعه رأسهای V باشند و F تعداد یالهای کمتری از 'F داشته باشد. در این صورت 'F دارای یالی مانند e است بطوریکه افزودن آن به F دوری ایجاد نمی کند.