دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۲**

مروری بر مطالب درس:

- **ضرایب دوجمله ای (بدون تکرار)**

$$\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

- **ضرایب دوجمله ای (با تکرار)**

$$\binom{n}{r}_R = \frac{n^{\overline{r}}}{r!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}$$

- **افراز عددی مرتب (ترتیب مهم است- $\boldsymbol{composition}$)**

همان معادله های دیوفانتی یا نامعادله های قابل تبدیل به معادله دیوفانتی است.

- **افراز عددی(ترتیب اهمیتی ندارد)**

  - تعداد افرازهای عددی n به جمعوندهایی که از مجموعه $[r]$ انتخاب می‌شوند برابر تعداد r تایی‌های مرتب نامنفی صحیح است که در معادله $1y_1 + 2y_2 + \cdots + ry_r = n$ صدق می‌کنند.
  - $P(n)$: تعداد افرازهای عددی n
  - $P_r(n)$: تعداد افرازهای عددی n به دقیقا r جزء
  - $P_{\leq r}(n)$: تعداد افرازهای عددی n به حداکثر r جزء
  - نمودار فرز یانگ
  - فرض کنید n و k صحیح و مثبت باشند، آنگاه:

$$P_k(n) = P_{\leq k}(n-k) \ , \quad P_{\leq k}(n) = P_k(n+k)$$

  - تعداد افرازهای n به حداکثر k جزء برابر تعداد افرازهایی از n است که در آنها بزرگ‌ترین جزء، نابزرگ‌تر از k است.
  - تعداد افرازهای n به دقیقا k جزء، برابر تعداد افرازهایی از n است که در آن، بزرگ‌ترین جزء دقیقا برابر k است.

- **پیچیدگی**

  - $f(n) = o(g(n))$ بدین معنی است که $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ برقرار می‌باشد. به تعبیر دیگر می‌توان گفت رشد تابع f خیلی کمتر از تابع g است. مثال: $f(n) = n \, , g(n) = n^5$

- $f(n) = \Omega(g(n))$ بدین معنی است که $g(n) = O(f(n))$ برقرار می‌باشد. به تعبیر دیگر می‌توان گفت رشد تابع f حداقل به تندی تابع g است. مثال: $f(n) = n^5, g(n) = n$

- $f(n) = \Theta(g(n))$ بدین معنی است که $f(n) = O(g(n))$ و $f(n) = \Omega(g(n))$ برقرار می‌باشد. به تعبیر دیگر می‌توان گفت رشد تابع f و g در اوردری یکسان است. مثال: $f(n) = n , g(n) = 2n$

- $f(n) \sim g(n)$ بدین معنی است که $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ برقرار می‌باشد. به تعبیر دیگر می‌توان گفت $f(n)$ و $g(n)$ تقریبا یکسان‌اند. مثال: $f(n) = n^2 + 2n , g(n) = n^2 + 3n$

- به خواص زیر دقت کنید. این خواص در اثبات ها می توانند به ما کمک کنند.
  - بازتابی$(reflective)$: $f(n) = O(f(n))$
  - تقارنی$(symmetric)$: $f(n) = \theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \theta(f(n))$
  - تعدی$(transitive)$: $f(n) = \Omega(g(n))\ and\ g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) فرض کنید a و b اعداد صحیحی باشند که رابطه $0 \le a \le b$ برقرار است. تعداد جواب‌های صحیح نامعادله $a \le x_1 + x_2 + \cdots + x_r < b$ را در هر یک از حالت زیر محاسبه کنید.

الف) $x_i > 0$

ب) $x_i \ge 0$

۲) توابع زیر را به ترتیب افزایشی با ذکر دلیل مرتب کنید.

$$f_1 = 1.000001^n \quad , \quad f_2(n) = 10^{999}n \quad , \quad f_3 = \binom{n}{2}$$

۳) قضیه زیر را اثبات کنید.

$$f(n) = \theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n))\ and\ f(n) = \Omega(g(n))$$

۴) نشان دهید $\log(n!) = \theta(n \log n)$ برقرار است.

۵) ثابت کنید تعداد راه‌های نوشتن n به صورت مجموعه‌ای از جمع‌وندهای $1,2,3$ بدون مهم بودن ترتیب جمع‌وندها، مساوی عبارت زیر است.

$$\left\langle \frac{(n+3)^2}{12} \right\rangle$$

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

کافیست تعداد جواب های نامعادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r < b$ را پیدا کرده، سپس تعداد جواب های نامعادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r < a$ را از آن کم کنیم. بنابراین سعی می‌کنیم با اضافه کردن متغیر جدید به نامعادله های دیوفانتی فوق، آن ها را به معادله تبدیل کنیم. پس خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r + y = b \quad , \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_r + z = a \qquad y, z > 0$$

الف) با استفاده از نکات گفته شده در مطالب تکمیلی۱، تعداد جواب های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r + y = b$ که در آن شرایط $x_i \, , y > 0$ برقرار است، برابر است با:

$$\binom{b - \left((r+1)(0)\right) - 1}{r + 1 - 1} = \binom{b-1}{r}$$

همچنین تعداد جواب های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r + z = a$ که در آن شرایط $x_i \, , z > 0$ برقرار است، برابر است با:

$$\binom{a - \left((r+1)(0)\right) - 1}{r + 1 - 1} = \binom{a-1}{r}$$

در نهایت داریم: $\binom{b-1}{r} - \binom{a-1}{r}$

ب) به طور مشابه قسمت الف عمل می‌کنیم. تعداد جواب های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r + y = b$ که در آن شرایط $x_i \geq 0 \, , y > 0$ برقرار است، برابر است با:

$$\binom{b - (-r + 0) - 1}{r + 1 - 1} = \binom{b + r - 1}{r}$$

همچنین تعداد جواب های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r + z = a$ که در آن شرایط $x_i \geq 0 \, , z > 0$ برقرار است، برابر است با:

$$\binom{a - (-r + 0) - 1}{r + 1 - 1} = \binom{a + r - 1}{r}$$

در نهایت داریم: $\binom{b+r-1}{r} - \binom{a+r-1}{r}$

۲)

ابتدا توجه کنیم اعداد خیلی بزرگ پشت متغیر، نباید ما را گول بزنند! زیرا بررسی ما در مقادیر خیلی بزرگ و $+\infty$ است. در نتیجه ثوابت را میتوانیم ندید بگیریم. بنابراین $f_2(n) = O(n)$

همچنین توابع را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و سپس پیچیدگی آن ها را بررسی می‌کنیم. f_3 را میتوان به صورت $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ نوشت. پس داریم: $f_3 = O(n^2)$. بنابراین نتیجه می‌شود $f_2 = O(f_3)$

به بررسی f_1 می‌پردازیم. دقت شود که میزان رشد توابع نمایی، بیشتر از توابع چند جمله ای است. بنابراین $f_3 = O(f_1)$

در نهایت به صورت مقابل مرتب می‌شوند: $f_2 < f_3 < f_1$

۳)

ابتدا به تعاریف ریاضیاتی مربوط به پیچیدگی دقت کنید. داریم:

$$f(n)=\theta(g(n)) \iff \exists_{c_1,c_2,n_0}\ \forall_{n>n_0}\quad 0<c_1 g(n)\le f(n)\le c_2\, g(n)\qquad (I)$$
$$f(n)=O(g(n)) \iff \exists_{c,n_0>0}\ \forall_{n>n_0}\quad 0<f(n)\le c(g(n))\qquad (II)$$
$$f(n)=\Omega(g(n)) \iff \exists_{c,n_0>0}\ \forall_{n>n_0}\quad 0<c(g(n))\le f(n)\qquad (III)$$

ابتدا طرف رفت قضیه را ثابت می کنیم:

$$f(n)=\theta(g(n)) \longrightarrow f(n)=O(g(n))\ and\ f(n)=\Omega(g(n))$$

اگر $f(n)=\theta(g(n))$ طبق نکات گفته شده، واضح است که $f(n)=O(g(n))$ برقرار است. زیرا در عبارت (II) می‌توان به جای c,n_0 همان c_2,n_0 در عبارت (I) را قرار داد. همچنین اگر c_1,n_0 عبارت (I) را در عبارت (III) قرار دهیم، واضح است که درستی عبارت دوم یعنی $f(n)=\Omega(g(n))$ نیز ثابت می‌شود. بنابراین طرف رفت قضیه اثبات شد.

حال به طرف برگشت قضیه می‌پردازیم.

$$f(n)=O(g(n))\ and\ f(n)=\Omega(g(n)) \longrightarrow\ f(n)=\theta(g(n))$$

برای اثبات طرف برگشت، کافی است در عبارت های (II) و (III) به جای c، به ترتیب c_2 و c_1 در عبارت (I) را قرار دهیم، حکم نتیجه خواهد شد.

بنابراین درستی قضیه اثبات می‌شود.

۴)

$$log(n!)=log((n)(n-1)\cdots(1))=log(1)+log(2)+\cdots+log(n)\le log(n)+log(n)+\ldots+log(n)\le n\,log(n)$$
$$\Rightarrow\ log(n!)=O\,(n\,log(n))$$
$$log(1)+log(2)+\cdots+log(n)\ge log\left(\frac{n}{2}\right)+log\left(\frac{n}{2}+1\right)+\ldots+log(n)\ge\frac{n}{2}log\left(\frac{n}{2}\right)$$
$$log(n!)=\Omega\left(\frac{n}{2}log\left(\frac{n}{2}\right)\right)=\Omega\left(\frac{n}{2}log(n)-\frac{n}{2}log(2)\right)=\Omega\left(\frac{n}{2}log(n)-\frac{n}{2}\right)=\Omega\left(\frac{n}{2}log(n)\right)$$
$$\Rightarrow log(n!)=\Omega(n\,log(n))$$
$$\Rightarrow\ log(n!)=O\,(n\,log(n))\ \ and\ \ log(n!)=\Omega(n\,log(n))$$
$$\Rightarrow \log(n!)=\theta(n\log n)$$

۵)

به دنبال تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $1x_1+2x_2+3x_3=n$. به همین منظور می‌توانیم این معادله را به حالت زیر تبدیل کنیم.

تعریف می‌کنیم:

$$A=x_3\quad,\qquad B=x_2+x_3\quad,\qquad C=x_1+x_2+x_3$$

پس معادله ما تبدیل به $A+B+C=n$ می‌شود.

سه حالت مختلف پیش می‌آید:

حالت۱) هر سه مقدار A,B,C برابر باشند. بنابراین تنها در حالتی که n بخش پذیر بر ۳ باشد، معادله یک جواب دارد.

حالت۲) دو تا از مقادیر A,B,C برابر باشند. بنابراین به صورت زیر رخدادهایی وجود دارد:

$$A=n \qquad B,C=0$$
$$A=n-2 \qquad B,C=1$$
$$\vdots$$
$$A=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \qquad B,C=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

بنابراین $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$ جواب ممکن است داشته باشیم. توجه شود که این مقدار در کل حالات که $\binom{n+2}{2}$ می باشد، سه بار شمرده شده است. زیرا برای اینکه دو مقدار از سه مقدار A,B,C با هم باشند، $\binom{3}{2}=3$ حالت داریم.

حالت۳) هیچ کدام از مقادیر A,B,C با هم برابر نباشند. می دانیم تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $A+B+C=n$ برابر $\binom{n+2}{2}$ است. تنها کافیست حالت‌هایی که ممکن است دو مقدار یکسان باشند را از کل حالات کم کنیم. تعداد حالت‌هایی که دو مقدار یکسان دارند، در حالت۲ حساب شده است. پس تعداد جواب‌های حالت۳ به صورت زیر است:

$$\binom{n+2}{2}-3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)$$

دقت شود که چون برای ما ترتیب اهمیتی ندارد، جواب‌های تکراری شمرده شده است. پس کافیست بر جایگشت این سه مقدار یعنی ۶ تقسیم کنیم.

$$\frac{\binom{n+2}{2}-3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)}{6}$$

در نهایت، تعداد کل جواب ها از حاصل جمع این سه حالت به دست می‌آید و داریم:

$$\frac{\binom{n+2}{2}-3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)}{6}+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)=\frac{\binom{n+2}{2}+3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)}{6}$$

که اگر این عبارت را به صورت مقابل بنویسیم، می‌توانیم به عبارت بیان شده در سوال برسیم:

$$\frac{\binom{n+2}{2}-3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{6}+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1=\frac{\binom{n+2}{2}+3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+5}{6}$$

این مقدار، برابر با نزدیک ترین عدد صحیح نسبت به $\frac{(n+3)^2}{12}$ می باشد.