۱۳۹۷/۰۸/۲۱

مبانی ترکیبیات

جلسه سیزدهم

Sepehr Camidiari

«برنامه ریزی کلیتابی»

قضیه ۴: فرض کنید اعداد صحیح نامنفی $n_1, \dots, n_k, n$ در رابطه $n = n_1 + \dots + n_k$ صدق کنند. در این صورت تعداد راه های توزیع n شی متمایز در k جعبه متمایز به طوری که n_1 شی در جعبه ۱، n_2 شی در جعبه ۲ و ... و n_k شی در جعبه k قرار گیرند برابر است با

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

اثبات: تناظر یک به یک - ترکیبیاتی

توجه: به عبارت $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ که در آن n_i ها اعداد صحیح و نامنفی هستند و $n_1 + \dots + n_k = n$ ضریب چند جمله ای گفته شده، آن را با نماد $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ نمایش می دهند. توجه کنید که این ضریب، تعمیم ضریب دو جمله ای زیرا $\binom{n}{r} = \binom{n}{r, n-r}$ وجه تسمیه ضریب چند جمله ای از تساوی زیر که اثبات آن برای هر n صحیح نامنفی به عنوان گذار می شود می آید:

اثبات - ایده: استقرا روی k

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_1, \dots, n_k \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

تعمیم رابطه پاسکال

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n-1}{n_1 - 1, n_2, \dots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2 - 1, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, \dots, n_k - 1}$$

مثال:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + i_3 = n \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} \binom{n}{i_1, i_2, i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

$$n = 4 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4x_1^3 x_2 + \dots$$

مثال: به چند طریق می‌توان n شی متمایز را در k جعبه متمایز توزیع کرد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند؟

مثال: ۴ شی متمایز را چگونه در ۳ جعبه متمایز قرار دهیم به طوری که هیچ جعبه خالی نماند.

$$12+12+12=36$$

$$(x_1+x_2+x_3)^4 = x_1^4+x_2^4+x_3^4+4x_1^3x_2+4x_1^3x_3+4x_2^3x_1+4x_1x_3^3$$
$$+4x_2^3x_3+4x_2x_3^3+12x_1^2x_2x_3+12x_1x_2^2x_3+12x_1x_2x_3^2+6x_1^2x_2^2$$
$$+6x_2^2x_3^2+6x_1^2x_3^2$$

مسأله: تعداد جواب‌های صحیح معادله دیوفانتی $y_1+y_2+\dots+y_k=n$ را در هر یک از حالت‌های زیر بیابید.

الف) $y_1,\dots,y_k>0$

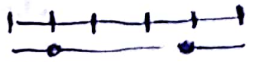
ب) $y_1,\dots,y_k\geq 0$

پ) $y_1\geq c_1,\ y_2\geq c_2,\ \dots,\ y_k\geq c_k$ که در آن $c_1,\dots,c_k$ اعداد صحیح دلخواهی هستند.

مثال: $y_1+y_2+y_3=5$

1	2	2
2	1	3
3	1	1

حالت الف) $\binom{n-1}{k-1}$ ← یک خط کش داریم می‌شکنیم



سه خط کش

حالت ب) با چوب و دایره $\dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

با قسمت الف

تناظر یک به یک: $y_1\geq 0,\dots,y_k\geq 0 \Rightarrow \underbrace{y_1+1}_{t_1}>0,\dots,\underbrace{y_k+1}_{t_k}>0 \Rightarrow t_1+\dots+t_k=n+k$

پ) ج

$y_1 > c_1, \ \dots \ , y_k > c_k$

$t_1 := y_1 - c_1, \ \dots \ t_k := y_k - c_k$

$t_1, \dots, t_k > 0$

$t_1 + t_2 + \dots + t_n = \sum_{i=1}^{k} y_i - \sum_{i=1}^{k} c_i$

$t_1 + \dots + t_k = n - \sum_{i=1}^{k} c_i \xrightarrow{\text{طبق الف}} \binom{n - \sum_{i=1}^{k} c_i - 1}{k-1}$

۱۳۹۷/۰۹/۰۳

مبانی ترکیبیات

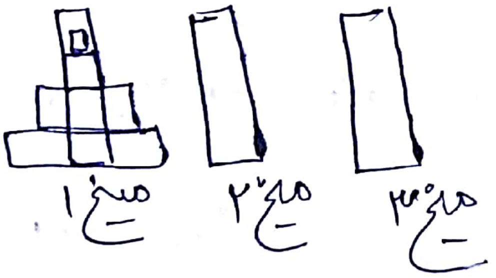
جلسه چهارم

Sepehr omidvar

«به نام یکتایی»

نوشتن معادلات بازگشتی

مثال: (مسأله برج‌های هانوی) در یک صفحه سه میخ به صورت عمودی نصب شده‌اند. تعدادی دیسک با اندازه‌های دو به دو متمایز داریم که در ابتدا همه دیسک‌ها روی یکی از میخ‌ها که آن را میخ شماره ۱ می‌نامیم، به نحوی سوار شده‌اند که هیچ دیسک کوچکتری پایین‌تر از دیسک بزرگتر قرار نگرفته است. هر حرکت عبارت است از خارج کردن یک دیسک از یک میخ و سوار کردن آن روی میخ دیگری با رعایت این قانون که هیچ گاه دیسک بزرگتر روی دیسک کوچکتر قرار نگیرد. برای انتقال دادن n دیسک از میخ شماره ۱ به میخ شماره ۳ با رعایت قانون مذکور، حداقل چند حرکت لازم است؟

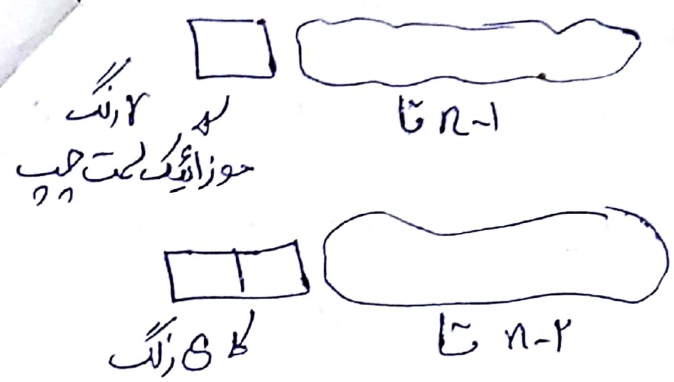


$$h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1}$$

$$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1}+1 \\ h_1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{?} h_n = 2^n - 1$$

با استقرا می‌شود ثابت کرد (روی n)

مثال: یک مستطیل $1\times n$ به صورت $\underbrace{\boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{n}}_{n}$ را می‌خواهیم با موزائیک‌های □ با ۲ رنگ و موزائیک‌های □□ با ۳ رنگ فرش کنیم. فرض کنید این کار را به a_n طریق قابل انجام باشد. یک رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورید.



$$a_n = r a_{n-1} + s a_{n-2} \qquad n \geq 3$$

$$a_1 = r$$

$$a_2 = r^2 + s$$

سوال: یک مستطیل $1\times(n-1)$ را به چند طریق می توان با موزائیک های 1×1 و 1×2 فرش کرد؟

در رابطه بالا $r = s = 1$ است.

$$a_n = f_n \quad , \quad n \geq 2$$

همان فیبوناتچی

کد مورس یا پله ۲ تائی یا یکی بروم هم مشابه این هستند.

تمرین: با استفاده از مسئله فوق اتحاد $f_{n+m+1} = f_{n+1}f_{m+1} + f_n f_m$ را ثابت کنید.

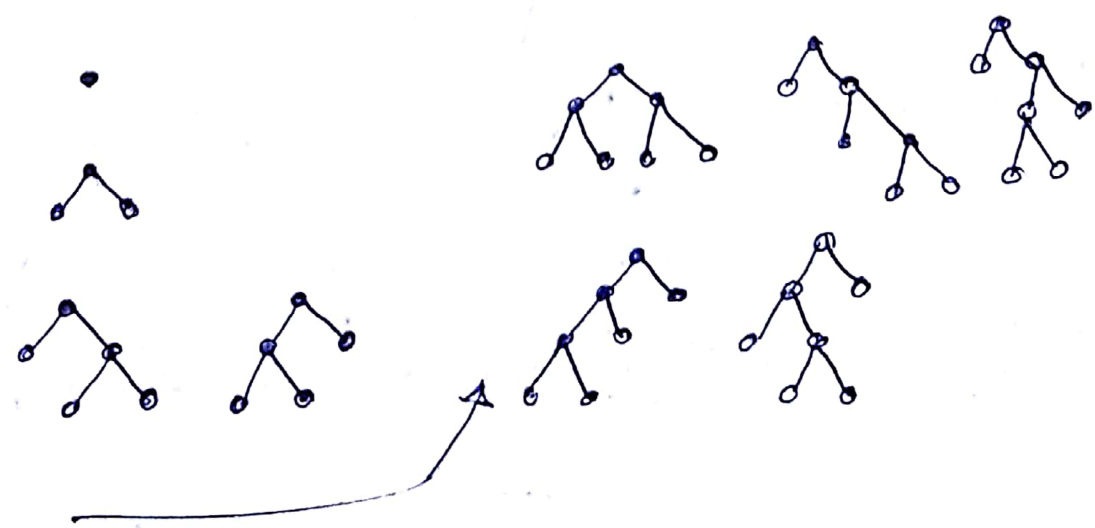
شمارش تعداد درخت ها دودویی کامل با n برگ

$T_1 = 1$

$T_2 = 1$

$T_3 = 2$

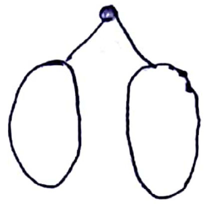
$T_4 = 5$



$T_1 = 1 \qquad T_3 = T_1T_2 + T_2T_1$

$T_2 = T_1T_1 \qquad T_4 = T_1T_3 + T_2T_2 + T_3T_1 = 5$

$$n>1 \Rightarrow T_n = \sum_{i=1}^{n-1} T_n T_{n-i}$$



مثال قبل ← غیرمرتب بگیرید و حل کنید.

$\omega_1 = 1 \qquad \omega_3 = 1$

$\omega_2 = 1 \qquad \omega_4 = 2$

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{n-i} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \\ \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le i\le n-1 \\ i\neq \frac{n}{2}}} \omega_i \omega_{n-i} + \omega_{\frac{n}{2}}^{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

$\omega_1 = 1 \qquad \omega_3 = \omega_2\omega_1 = 1$

$\omega_2 = \omega_1^2 = 1 \qquad \omega_4 = \omega_1\omega_3 + \omega_2^2 = 1+1 = 2$

$\omega_5 = \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3 = 2+1 = 3$

افرازهای مرتب یک عدد:

فرض کنید $n = x_1 + \dots + x_m$ افراز مرتب یک عدد صحیح مثبت n به m جزء صحیح مثبت باشد که در آن، ترتیب عوامل مهم است.
یک رابطه بازگشتی برای تعداد این افرازها $f_{n,m}$ بدست آورید.
حال اگر در قسمت قبل تعداد اجزاء افراز مرتب مشخص شده باشد برای تعداد افرازها، a_n، یک رابطه بازگشتی بنویسید.

اگر $x_1 = 1$ آن‌گاه $n-1 = x_2 + \cdots + x_m$

$$n = x_1 + \cdots + x_m \begin{cases} \xRightarrow{x_1 = 1} n = 1 + x_2 + \cdots + x_m \rightarrow n-1 = x_2 + \cdots + x_m & f_{n-1,m-1} \\ \xRightarrow{x_1 > 1} n-1 = (x_1 - 1) + x_2 + \cdots + x_m & f_{n-1,m} \end{cases}$$

قسمت بعد:

$$u_n = 1 + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1 \qquad n \geq 2$$

یا

$$u_n = \sum_{m=1}^{n} f_{n,m} \rightarrow$$ یک جزء دو جزء تا ... n جزء

در مثال قبل $\rightarrow$ افراز غیر مرتب عدد صحیح مثبت n به حداکثر m جزء صحیح مثبت. $\rightarrow$ $P_m(n)$ تعداد افرازها

$$P_m(n) = P_m(n-m) + P_{m-1}(n-1)$$

$$P_1(n) = 1$$

$$P_n(n) = P(n)$$

۱۳۹۷/۰۹/۰۵

مبانی ترکیبیات

جلسه پانزدهم

Sepehr Omidvar

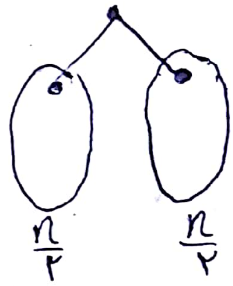
«به نام یکتایی»

ادامه مثال جلسه قبل:

Wedderburn_Etherington

$$W_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} W_i W_{n-i} & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} W_i W_{n-i} + W_{\frac{n}{2}}\right) & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$n \text{ زوج} \Rightarrow W_n = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} W_i W_{n-i} + \frac{1}{2}\left(W_{\frac{n}{2}}^2 + W_{\frac{n}{2}}\right)$$



$$\binom{W_{\frac{n}{2}}}{2} + W_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\left(W_{\frac{n}{2}}^2 + W_{\frac{n}{2}}\right)$$

یا

$$K\left(W_{\frac{n}{2}}, 2\right) = \binom{W_{\frac{n}{2}}+1}{2}$$

مثال: با رسم n بیضی در صفحه که دو به دو متقاطع اند و هیچ دوتای آن‌ها با هم مماس نیستند، صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 8$

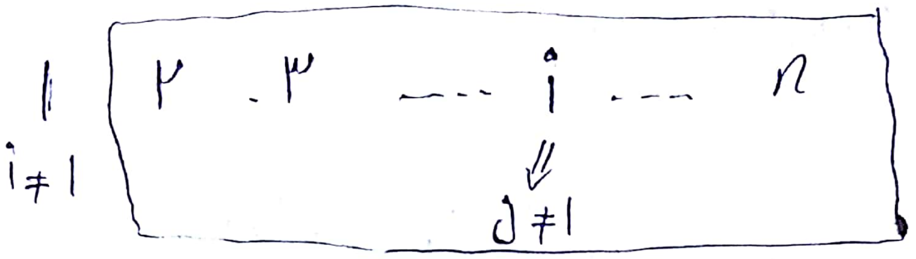
توجه شود که دقیقاً دو نقطه قطع کنند.

$$x_n = x_{n-1} + (2n-2)$$

سوال: n خط غیر موازی در صفحه چند ناحیه ایجاد می‌کنند؟

سوال: n خط متقاطع و k خط موازی در صفحه داریم و حالت دیگری از خطوط موازی در صفحه وجود دارد. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

مثال: n فرد داریم روی پیراهن آن‌ها شماره گذاری شده با ۱ تا n روی صندلی آن‌ها هم از ۱ تا n شماره گذاری شده و شماره پیراهن و صندلی هر فرد یکسان است. این n فرد از اتاق خارج شده و دوباره وارد می‌شوند به چند طریق می‌توانند بنشینند که هیچ کس سر جای خود ننشیند.



$$d_n = (n-1)\left(d_{n-2} + d_{n-1}\right)$$

$$d_1 = 0 \qquad d_2 = 1$$

مثال: اگر تعداد راه‌های افراز $[n]$ به k جزء را $\left\{ n \atop k \right\}$ بنامیم (عدد استرلینگ نوع دوم) یک رابطه بازگشتی برای $\left\{ n \atop k \right\}$ بدست آورید.

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k\left\{ n-1 \atop k \right\}$$

مثال: برای نوع اول استرلینگ

مثال: اگر تعداد راه‌های افراز $[n]$ را $B(n)$ بنامیم یک رابطه بازگشتی برای $B(n)$ بدست آورید.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-1}$$