جلسه بیستم

گراف – راس – یال –یال چندگانه – طوقه

گراف بدون یال چندگانه و طوقه گراف ساده نامیده می شود.

به دنباله ی یال های متمایز $e_1e_2 \ldots e_k$ یک گذر گفته می شود اگر انتهای یال e_i بر انتهای یال e_{i+1} منطبق باشد.

تعریف گشت هم مانند گذر است با این تفاوت که متمایز بودن یال ها لازم نیست.

اگر راس شروع گذر $e_1e_2 \ldots e_k$ بر راس پایان آن منطبق باشد به آن گذر بسته می گوییم.

اگر یک گذر از تمام یال های گراف استقاده کند به آن گذر اویلری گویند.

گذری که در آن هیچ راسی دوبار مورد استفاده قرار نگرفته مسیر نامیده می شود.

تعریف: اگر گراف G دارای این خاصیت باشد که به ازای هر دو راس x,y ، مسیری از x به y در G موجود است. گراف G همبند نامیده می شود.

در حالتی که G همبند باشدُ فرض کنید k کوچکترین عددی باشد که G را بتوان به عنوان اجتماع K گراف همبند در نظر گرفت در این صورت گوییم گراف G دارای K مولفه ی همبندی است.

همچنین گوییم u,v در یک مولفه ی همبندی قرار دارند اگر مسیری از u به v موجود باشد.

قضیه:یک گراف همبندی G دارای یک گذر بسته ی اویلری است اگر و تنها اگر همه ی رئوس G دارای درجه ی زوج باشند.

قضیه:فرض کنید G یک گراف همبند باشد. در این صورت G دارای یک گذر اوئیلری است که از راس S شروع می شود و به راس T متمایز از S ختم می شود اگر و تنها اگر S و T دارای درجه ی فرد باشند و همه ی راس های دیگر G دارای درجه ی زوج باشند.

قضیه:در گراف بدون طوقه ی G ،تعداد راس های درجه G زوج است.

اثبات: فرض کنید G دارای e یال باشد .راس های G را $v_1,v_2,\ldots,v_n$ درجه های آن های را به ترتیب $d_1,d_2,\ldots,d_n$ بگیرید . ادعا می کنیم $d_1,d_2,\ldots,d_n=2e$ پس تعداد رئوس درجه ی فرد در سمت چپ زوج خواهد بود.

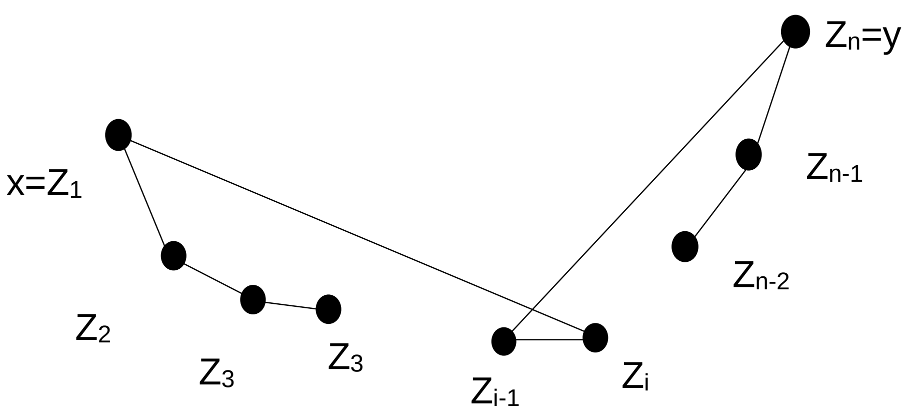
جلسه بیستم

دورهای همیلتونی:شامل همه ی راس های گراف باشند.

مسیر همیلتونی: مسیری شامل همه ی راس های گراف باشند.

قضیه:فرض کنید $n≥3$ و G یک گراف ساده روی n راس باشد و همه ی راس های G دارای درجه حداقل $\frac{n}{2}$ هستند. در این صورت G دارای یک دور همیلتونی است.

اثبات: فرض کنید گراف G در شرایط مسئله صدق کند ولی فاقد دور باشد. فرض کنید تا حد امکان یال هایی به گراف G بیفزاییم بدون اینکه شرط عدم وجود دور همیلتونی گراف به هم بخورد. گراف موجود در این وضعیت را G’ می نامیم. بنابراین در گراف G’ درجه ی هر راس لاقل $\frac{n}{2}$ است. G’ فاقد دور همیلتونی است،افزودن یک یال به G’ گرافی دارای دور همیلتونی ایجاد خواهد کرد.
فرض کنید x,y راس هایی در G’ باشند که با یک یال به هم وصل نشده باشند. باتوجه به اینکه افزودن یک یال xy یک دور همیلتونی ایجاد می کند نتیجه می شود گراف G’ هم داری یک مسیر همیلتونی از x به y است.
به فرض دنباله ی راس ها ی این مسیر به صورت $x = z_1 ,z_2 ,\dots ,z_n = y$ باشد راس های x,y روی هم دارای لاقل n همسایه هستند.
بنابراین اندیسی مانند i ، $2≤i≤n-1$ وجود دارد به طوریکه xz_i و $z_{i-1}y$ یال هایی از گراف هستند(چرا؟) شکل زیر :



$A= \{3≤i≤n: z_{i-1}y \in E (G’)\}$

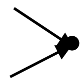
$B= \{2≤i≤n: xz_i \in E (G’)\}$

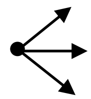
$|A\cup B|< n \qquad |A|= d(y) \geq \frac{n}{2}| \qquad |B|= d(x) \geq \frac{n}{2}$

$|A\cap B|= |A|+|B| -|A\cup B|\geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}-(n-1) = 1$

جلسه بیستم

گراف های جهت دار:یک گراف جهت دار ، قویاً همبند نامیده می شود، اگر به ازای هر دو راس a,b ، مسیری جهت دار از a به b در آن گراف جهتدار موجود باشد.

درجه ی ورودی in degree 

درجه ی خروجی out degree 

به گراف جهتدار H ، متعادل یا متوازن گویند اگر هر راس v از H داشته باشیم،

$$\text{in degree}(v) = \text{out degree}(v)$$

قضیه: گراف جهتدار G دارای یک گذر اویلری است اگر و تنها اگر متوازن و قویاً همبند باشد.

گراف کامل(تورنمنت): به گراف کامل ساده جهت‌دار، تورنمنت می‌گویند. به عبارت دیگر بین هر دو راس آن دقیقا یک یال جهت دار وجود دارد.

قضیه: هر تورنمنت دارای یک مسیر همیلتونی است.

اثبات: استقرا روی n :

برای تورنمنت 1 یا 2 راسی درستی حکم واضح است .

حال فرض کنید حکم برای هر تورنمنت n-1 راسی درست باشد.

فرض کنید T یک تورنمنت دلخواه n راسی باشد. راس دلخواه v را جدا کنید و فرض کنید گراف باقی مانده روی n–1 راس دیگر ، T’ نامیده می شود.

باتوجه به فرض استقرا، T’ دارای یک مسیر همیلتنی $h=h_1h_2 \dots h_{n-1}$ است. سوال این است که چطور راس v را می توانیم در h وارد کنیم؟