۱. مجموعه ی $\mathbb{N}$ و خانواده ی T از زیرمجموعه های آن را که شامل $\varnothing$ و مجموعه های A_k به شکل زیر است را در نظر بگیرید:

$$A_k = \{k, k+1, k+2, ...\} \quad s.t \quad k = 1, 2, ...$$

ثابت کنید که T یک توپولوژی روی $\mathbb{N}$ است.

برهان:

طبق تعریف داریم $A_1 = \{1, 2, 3, ...\}$ پس $\varnothing \, , \, \mathbb{N} \, \in \, T$
حال نشان میدهیم که تحت اشتراک متناهی و اجتماع دلخواه بسته است:

فرض کنیم $A_m \, , \, A_n \in T$ بدون وارد شدن خللی به کلیت میتوانیم فرض کنیم که $m > n$ در اینصورت طبق تعریف به وضوح داریم:

$$\begin{aligned} A_m \subset A_n &\implies A_m \cap A_n = A_m \\ &\implies A_m \cap A_n \in T \end{aligned}$$

به طریق مشابه اگر I خانواده ای متناهی از اندیس هایی دلخواه از زیرمجموعه های T باشد خواهیم داشت:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = A_{max\{j\in I\}}$$

بنابراین تحت اشتراک متناهی بسته است.

برای اجتماع دلخواه به وضوح داریم:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_{min\{j\in I\}}$$

و چون برای خانواده های نامتناهی نیز مقدار مینیمم مشخص است I میتواند خانواده ای دلخواه (متنهایی یا نامتناهی) از اندیس ها باشد. ■

۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پوشا از X ناتهی به (Y, T_0) باشد. نشان دهید خانواده ی زیر یک توپولوژی برای X است.

$$T = \{f^{-1}(B) \;\mid\; B \in T_0\}$$

برهان:

$$
\begin{aligned}
\text{توپولوژی } T_0 &\implies \varnothing, Y \in T_0 \\
&\implies f^1(Y) = X, f^1(\varnothing) = \varnothing \quad (\text{پوشاست } f) \\
&\implies \varnothing, X \in T
\end{aligned}
$$

حال فرض کنید $A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma$ خانواده ای دلخواه در T باشد، آنگاه:

$$\forall\gamma \ : \ f^{-1}(B_\gamma) = A_\gamma \ , \ B_\gamma \in T_0$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\cup_\gamma A_\gamma = \cup_\gamma f^1(B_\gamma) = f^1(\cup_\gamma B_\gamma) &\implies \cup_\gamma B_\gamma \in T_0 \quad (\text{توپولوژی است } T_0) \\
&\implies \cup_\gamma A_\gamma \in T
\end{aligned}
$$

اشتراک را فقط برای دو مجموعه بررسی میکنیم:

فرض کنید A_1, A_2 در T آنگاه $B_1, B_2 \in T_0$ وجود دارند که

$$f^{-1}(B_1) = A_1, f^{-1}(B_1) = A_1$$

آنگاه

$$A_1 \cap A_2 = f^1(B_1) \cap f^1(B_2) = f^1(B_1 \cap B_2)$$

از آنجایی که T_0 توپولوژیست، $B_1 \cap B_2 \in T_0$ در نتیجه:

$$f^1(B_1 \cap B_2) \in T \ \ , \ \ A_1 \cap A_2 \in T$$

■

۳. نشان دهید برای مجموعه ی ناتهی X ، تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی زیر یک متر تعریف میکند.

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

سپس نشان دهید توپولوژی القایی این متر روی X همان توپولوژی گسسته است و گوی های باز این متر را معرفی کنید.

برهان:

ابتدا ثابت میکنیم که d متر است:

نامنفی بودن و تقارنی بودن d به وضوح طبق تعریف برقرارند. برای نشان دادن نامساوی مثلثی سه نقطه ی $x, y, z \in X$ را در نظر میگیریم.
$i)$ $x = z$: در اینصورت داریم:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$ii)$ $x \neq z$: در این صورت حداقل یکی از $d(x, y), d(y, z)$ برابر با 1 خواهد بود و در نتیجه:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$$

پس در هر دو حالت نامساوی مثلث را داریم.

حال نشان میدهیم که این متر توپولوژی گسسته را القا میکند. کافی است نشان دهیم که در این توپولوژی تک نقطه ای ها بازند. به این منظور گوی باز $B_d(x, 1)$ را در نظر میگیریم.
در اینصورت $x \in B_d(x, 1)$ و برای هر نقطه ی متمایز از x مانند y داریم: $d(x, y) = 1$
و بنابراین $y \notin B_d(x, 1)$ پس x تنها عضو گوی باز $B_d(x, 1)$ است. و در نتیجه چون $B_d(x, 1) \subseteq \{x\}$ و بنابر این تک نقطه ای ها بازند. و در نتیجه توپولوژی القا شده همان توپولوژی گسسته است.

گوی های باز با شعاع بیشتر از 1 کل X و گوی های باز با شعاع کمتر از 1 تک نقطه ای ها هستند. $\blacksquare$