جلسه دوازدهم

مساله ۴۳. فرض کنید d_n معرف تعداد دنباله های **n** تایی متشکل از مولفه های ۰و۱و۲ باشد بطوریکه دنباله مورد نظر نه شامل دو مولفه متوالی ۱ باشد و نه شامل دو مولفه متوالی ۲ یک رابطه بازگشتی d_n به دست آورید.

حل:

$\mathbf{d_{n-1}}$

0							

x_n

1							

x_n

2							

$$d_n = d_{n-1} + 2x_n$$

$$x_n = x_{n-1} + d_{n-2}$$

x_n

1	0						

&

0	1						

$$2x_n = d_n - d_{n-1}$$

$$2x_n - 2x_{n-1} = 2d_{2n-2}$$

جلسه دوازدهم

$$d_n - d_{\ n-1} - (d_{n-1} \ - d_{n-2}) = 2d_{n-2}$$

$$\mathrm{d_n} = 2d_{\ n-1} + d_{\ n-2}\ , n \geq 2$$

$$d_1 = 3\ , d_0 = 1$$

تمرین۴۴.بنابر تعریف یک پرچم متشکل از $\boldsymbol{n}$ نوار افقی است که در آن هر نوار یکی از $\boldsymbol{3}$ رنگ قرمز ،سفید و آبی را داراست ، هیچ دو نوار مجاوری یک رنگ نیستند و رنگ نوار فوقانی متفاوت از رنگ نوار تحتانی است. اگر $\mathbf{a_n}$ معرف تعداد پرچمهای دارای $\boldsymbol{n}$ نوار رنگی باشد رابطه ای بازگشتی برای $\boldsymbol{a_n}$ بیابید.

تمرین۴۵.(رابطه بازگشتی برای تعداد نقاط دیسک $\boldsymbol{(Dq(x, n, d)}$

n>0 و ***q>2*** را اعداد صحیح مفروض در نظر بگیرید و کلیه نقاط $\boldsymbol{x \in A^n}$ که $\boldsymbol{A = \{0, 1, \dots, q-1\}}$ را مورد توجه قرار دهید . فاصله همینگ دو نقطه $\boldsymbol{x, y \in A^n}$ بنابر تعریف ، مساوی تعداد مولفه های متمایز آن دو نقطه تعریف می شود و یک $\boldsymbol{Dq(x, n, d)}$ بنابر تعریف به صورت:

$$\boldsymbol{Dq(x, n, d) \coloneqq \{y \in A^n : d(x, y) \leq d\}}$$

مشخص میشود.

فرض کنید $\boldsymbol{Aq(n\ , r) \coloneqq |Dq(x, n, r)|}$ و رابطه ای بازگشتی برای $\boldsymbol{Aq(n, r)}$ به دست آورید.

(شرط اولیه $\leftarrow$ $\boldsymbol{Aq(0, r) = [r \geq 0])}$

جلسه دوازدهم

تمرین ۴۶ .رابطه بازگشتی برای عدد استرلینگ نوع دو$\boldsymbol{S(n,k)} = \left\langle{n \atop k}\right\rangle$ (تعداد راه های افراز به $\boldsymbol{k}$جز را پیدا کنید)

$$\left\langle{\mathbf{n} \atop \mathbf{k}}\right\rangle = \left\langle{\mathbf{n-1} \atop \mathbf{k-1}}\right\rangle + \left\langle{\boldsymbol{n-1} \atop \boldsymbol{k}}\right\rangle$$

	$\left\langle{n \atop 0}\right\rangle$	$\left\langle{n \atop 1}\right\rangle$	$\left\langle{n \atop 2}\right\rangle$	$\left\langle{n \atop 3}\right\rangle$	$\left\langle{n \atop 4}\right\rangle$
0	***1***	***0***	***0***	***0***	***0***
1	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***
2	***0***	***1***	***1***	***0***	***0***
3	***0***	***1***	***3***	***1***	***0***
4	***0***	***1***	***7***	***6***	***1***
5	***0***	***1***	***15***	***25***	***10***

تمرین ۴۷. ثابت کنید

$$\boldsymbol{x^n} = \sum_{0\le h\le n} \left\langle{n \atop h}\right\rangle \boldsymbol{x}^{\underline{h}}$$

حل: $\sum_{h} \boldsymbol{h}!\left\langle{n \atop h}\right\rangle\binom{n}{h} = \sum_{h}\left\langle{n \atop h}\right\rangle \boldsymbol{x}^{\underline{h}}$

اثبات به استقرا روی $\boldsymbol{n}$:

$\boldsymbol{P(0)}$بر قرار است

فرض استقرا $\boldsymbol{P(n-1)}$

$$\boldsymbol{x^{n-1}} = \sum_{h} \left\langle{\boldsymbol{n-1} \atop \boldsymbol{h}}\right\rangle \boldsymbol{x}^{\underline{h}}$$

جلسه دوازدهم

$$x^n = x\, x^{n-1} = \sum_h \left\langle {n-1 \atop h} \right\rangle x^{\underline{h}} x = \sum_h \left\langle {n-1 \atop h} \right\rangle x^{\underline{h}}$$

$$\sum_h \left\langle {n-1 \atop h} \right\rangle x^{\underline{h}}\ (x-h) + \sum_h h \left\langle {n-1 \atop h} \right\rangle x^{\underline{h}} = \sum_h \left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle x^{\underline{h}}$$

$$+ \sum_h h \left\langle {n-1 \atop h} \right\rangle x^{\underline{h}} = \sum_h (\left\langle {n-1 \atop h-1} \right\rangle + h \left\langle {n-1 \atop h} \right\rangle) x^{\underline{h}}$$

تمرین ۴۸. $B(n)$ عدد بل برابر است با تعداد افراز های $[n]$ به عبارت دیگر:

$B(n) = \sum_{0 \le k \le n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle$

یک رابطه بازگشتی است.