است که در فصل ۲ و ۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

پ) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تفاضل مجموعه‌ای دو چندگونای آفین لزوماً یک چندگونای آفین نیست.

ت) فرض کنیم $V \subseteq k^n$ و $W \subseteq k^m$ دو چندگونای آفین باشند و فرض کنیم

$$V \times W = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in k^{n+m} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in V, (y_1, \ldots, y_m) \in W\}$$

حاصل‌ضرب دکارتی آنها باشد. نشان دهید که $V \times W$ یک چندگونای آفین در k^{n+m} است. راهنمایی: اگر V توسط $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ تعریف شود، دراین‌صورت می‌توانیم $f_1, \ldots, f_s$ را به‌عنوان چندجمله‌ای‌های در $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ درنظر بگیریم و به‌طور مشابه برای W. نشان دهید که این، معادلات تعریف حاصل‌ضرب دکارتی را به‌دست می‌دهد.

§۳ پارامتری‌سازی‌های چندگوناهای آفین

در این بخش، مسئلهٔ توصیف نقاط یک چندگونای آفین $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ را مورد بحث قرار خواهیم داد. این مسئله به این پرسش تحویل می‌یابد که آیا روشی برای «نمایش» جواب‌های دستگاه معادلات $f_1 = \cdots = f_s = 0$ وجود دارد. وقتی تعداد جواب‌ها متناهی است، هدف، صرفاً فهرست کردن تمام آنها است. اما وقتی تعداد جواب‌ها نامتناهی است، چه کاری می‌توان انجام داد؟ همچنان‌که خواهیم دید، این پرسش منجر به‌مفهوم پارامتری‌سازی یک چندگونای آفین می‌شود.

در آغاز، مثالی از جبرخطی را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی باشد و دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + 2y - z &= 3 \end{aligned} \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم. از لحاظ هندسی، این دستگاه یک خط در $\mathbb{R}^3$ را نمایش می‌دهد که اشتراک دو صفحهٔ $x + y + z = 1$ و $x + 2y - z = 3$ است. درنتیجه نامتناهی جواب وجود دارند. برای توصیف این جواب‌ها، اعمال سطری را روی معادلات (۱) به‌کار می‌بریم تا معادلات هم‌ارز

$$\begin{aligned} x + 3z &= -1, \\ y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

حاصل شوند. فرض $z = t$ که در آن t دلخواه است، ایجاد می‌کند که تمام جواب‌های (۱) توسط

$$\begin{aligned} x &= -1 - 3t, \\ y &= 2 + 2t, \\ z &= t \end{aligned} \tag{۲}$$

با تغییر t روی $\mathbb{R}$ داده شوند. t را یک *پارامتر* و بنابراین (۲) را یک *پارامتری‌سازی* برای جواب‌های (۱) می‌نامیم.

برای اینکه ببینیم چطور ایدهٔ پارامتری کردن جواب‌ها را می‌توان برای سایر چندگوناهای آفین به‌کار برد، دایرهٔ واحد

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{۳}$$

را به‌عنوان مثال درنظر می‌گیریم. یک روش متداول برای پارامتری کردن دایره استفاده از توابع مثلثاتی است:

$$\begin{aligned} x &= \cos(t), \\ y &= \sin(t). \end{aligned}$$

البته روش جبری‌تری برای پارامتری کردن این دایره نیز وجود دارد:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= \frac{2t}{1+t^2}. \end{aligned} \tag{۴}$$

می‌توان بررسی کرد که نقاط تعریف شده توسط این معادلات روی دایره (۳) قرار دارند. توجه به این نکته نیز جالب است که این پارامتری‌سازی کل دایره را توصیف نمی‌کند: زیرا $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ هیچ‌وقت -1 نمی‌شود و درنتیجه نقطهٔ $(-1,0)$ توسط این پارامتری‌سازی پوشانده نمی‌شود. در انتهای این بخش، خواهیم دید که چطور این پارامتری‌سازی به‌دست می‌آید.

توجه شود که معادلات (۴) برحسب خارج‌قسمت‌های چندجمله‌ای‌ها بیان شده‌اند. اینها مثال‌هایی از *توابع گویا* هستند. قبل از اینکه مفهوم پارامتری‌سازی یک چندگونا را توضیح دهیم، لازم است مفهوم کلی یک تابع گویا را تعریف کنیم.

تعریف ۱. فرض کنیم k یک میدان باشد. یک **تابع گویا** از $t_1, \ldots, t_m$ با ضرایب در k، یک خارج‌قسمت f/g از دو چندجمله‌ای $f, g \in k[t_1, \ldots, t_m]$ است که در آن g چندجمله‌ای صفر نیست. به‌علاوه، دو تابع گویای f/g و f'/g' برابرند هرگاه در $k[t_1, \ldots, t_m]$، $g'f = gf'$. سرانجام، مجموعهٔ تمام توابع گویا از $t_1, \ldots, t_m$ با ضرایب در k با $k(t_1, \ldots, t_m)$ نمایش داده می‌شود.

نشان دادن اینکه جمع و ضرب توابع گویا خوش تعریف‌اند و اینکه $k(t_1, \ldots, t_m)$ یک میدان است، سخت نیست. درستی این حقایق را بدون اثبات می‌پذیریم.

اکنون فرض کنیم یک چندگونای $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \subseteq k^n$ داده شده است. دراین‌صورت یک *نمایش پارامتری گویا* برای V مرکب از توابع گویای $r_1, \ldots, r_n \in k(t_1, \ldots, t_m)$ است به‌طوری‌که نقاط داده شده توسط

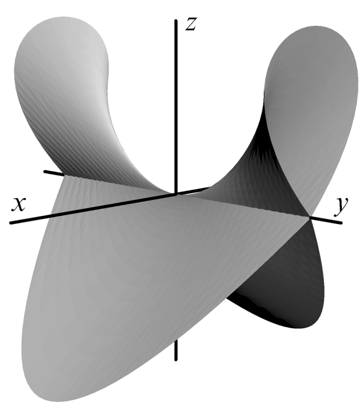
$$\begin{aligned} x_1 &= r_1(t_1, \ldots, t_m), \\ x_2 &= r_2(t_1, \ldots, t_m), \\ &\vdots \\ x_n &= r_n(t_1, \ldots, t_m) \end{aligned}$$

روی V واقع شوند. همچنین لازم است که V «کوچکترین» چندگونای شامل این نقاط باشد. همچنان‌که در مثال دایره دیدیم، این امکان وجود دارد که یک پارامتری‌سازی تمام نقاط V را پوشش ندهد. در فصل ۳، تعریف دقیق‌تری از مفهوم «کوچکترین» ارائه خواهیم کرد.

در بسیاری از مواقع، یک پارامتری‌سازی برای چندگونای V داریم که در آن $r_1, \ldots, r_n$ به‌جای آنکه توابع گویا باشند، توابع چندجمله‌ای‌اند. این همان چیزی است که آن را یک *نمایش پارامتری چندجمله‌ای* برای V می‌نامیم.

در مقابل، معادلات تعریف اصلی $f_1 = \cdots = f_s = 0$ از V *نمایش ضمنی* برای V نامیده می‌شود. در مثال‌های قبل، معادلات (۱) و (۳) نمایش‌های ضمنی چندگوناها هستند، درحالی‌که معادلات (۲) و (۴) نمایش‌های پارامتری‌اند.

یکی از مزایای مهم نمایش پارامتری یک خم یا رویه آن است که ترسیم آن توسط رایانه آسان است. اگر فرمول‌های یک پارامتری‌سازی داده شده باشند، رایانه آنها را برای مقادیر گوناگون پارامتر ارزیابی می‌کند و سپس نقاط حاصل را ترسیم می‌کند. برای مثال، در ۲§ رویهٔ $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ را مشاهده کردیم:



شکل این رویه توسط نمایش ضمنی $x^2 - y^2z^2 + z^3 = 0$ ترسیم نشده است. درعوض، نمایش پارامتری داده شده توسط

$$
\begin{aligned}
x &= t(u^2 - t^2),\\
y &= u, \qquad\qquad (۵)\\
z &= u^2 - t^2
\end{aligned}
$$

را به‌کار برده‌ایم. دو پارامتر t و u وجود دارند زیرا یک رویه را توصیف می‌کنیم و شکل فوق برای مقادیر $-1 \leq t, u \leq 1$ رسم شده است. در تمرین‌ها، این پارامتری‌سازی را استخراج می‌کنیم و نشان می‌دهیم که کل رویهٔ $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ را می‌پوشاند.

درضمن، اغلب داشتن نمایشی ضمنی از یک چندگونا مفید است. برای مثال، فرض کنیم می‌خواهیم بدانیم که نقطهٔ $(1, 2, -1)$ روی رویهٔ فوق قرار دارد یا نه. اگر فقط نمایش پارامتری (۵) را در دست داشته باشیم،

دراین‌صورت برای پاسخ به این پرسش، لازم است که معادلات

$$\begin{aligned} 1 &= t(u^2 - t^2), \\ 2 &= u, \\ -1 &= u^2 - t^2 \end{aligned} \tag{۶}$$

را برای t و u حل کنیم. ازطرف دیگر، اگر نمایش ضمنی $x^2 - y^2z^2 + z^3 = 0$ را داشته باشیم، دراین‌صورت این موضوع صرفاً قرار دادن مختصات نقطه در این معادله است. از آنجاکه

$$1^2 - 2^2(-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 4 - 1 = -4 \neq 0,$$

نتیجه می‌شود که $(1, 2, -1)$ روی این رویه قرار ندارد [و درنتیجه، معادلات (۶) جواب ندارند].

شرایط مطلوب داشتن هر دو نوع نمایش، منجر به دو پرسش زیر می‌شود:

- (پارامتری‌سازی) آیا هر چندگونای آفین دارای یک نمایش پارامتری گویاست؟
- (ضمنی‌سازی) برای یک نمایش پارامتری مفروض از یک چندگونای آفین، آیا می‌توان معادلات تعریف را به‌دست آورد (یعنی، آیا می‌توان نمایش ضمنی را یافت)؟

پاسخ پرسش نخست منفی است. درحقیقت، بیشتر چندگوناهای آفین را نمی‌توان به مفهومی که در اینجا توصیف شد، پارامتری کرد. آنهایی که این امکان برایشان وجود دارد، یکسوگویا *می‌نامند*. در حالت کلی، تعیین اینکه یک چندگونای مفروض یکسوگویا است یا خیر، مشکل است. وضعیت برای پرسش دوم خیلی بهتر است. در فصل سوم خواهیم دید که جواب همواره مثبت است: برای یک نمایش پارامتری مفروض، همواره می‌توانیم معادلات تعریف آن را بیابیم.

اکنون با ارائهٔ مثالی نشان می‌دهیم که ضمنی‌سازی چگونه انجام می‌شود. نمایش پارامتری

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 1 + t^2 \end{aligned} \tag{۷}$$

را درنظر می‌گیریم. این نمایش، یک خم در صفحه را توصیف می‌کند. امّا در این مرحله، نمی‌توانیم مطمئن باشیم که روی یک چندگونای آفین قرار می‌گیرد. برای یافتن معادله‌ای که به دنبالش هستیم، می‌توانیم معادلهٔ نخست را برای t حل کنیم تا

$$t = x - 1$$

حاصل شود. با جانشانی این در معادلهٔ دوم، نتیجه می‌شود که

$$y = 1 + (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 2.$$

بنابراین معادلات پارامتری (۷)، چندگونای آفین $\mathbf{V}(y - x^2 + 2x - 2)$ را توصیف می‌کنند.