فصل اول: مقدمات ریاضی

تقریب تیلور:

قرارداد: اگر تابع f روی بازه‌ی I، n بار مشتق‌پذیر با مشتق‌های پیوسته باشد می‌نویسیم: $f \in C^n(I)$. همچنین اگر f روی بازه‌ی I پیوسته باشد می‌نویسیم: $f \in C^0(I)$.

اگر $\{x_0, \dots, x_n\}$ مجموعه‌ای از نقاط در $\mathbb{R}$ باشند منظور از $I(x_0, \dots, x_n)$ کوچکترین بازه‌ی شامل نقاط $x_0, \dots, x_n$ است. یعنی

$$I(x_0, \dots, x_n) = [x_{min}, x_{max}]$$

$$x_{min} = \min_{i=0,\dots,n} \{x_i\} \qquad x_{max} = \max_{i=0,1,\dots,n} \{x_i\}$$

قضیه تیلور: فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه و $f \in C^{n+1}[I]$. اگر $x, c \in I$ آنگاه $f(x) := P_n(x) + E_n(x)$ که در آن:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + f''(c)\cdot\frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\alpha_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

که در آن α_x مقداری بین x و c است. یعنی $\alpha_x \in I(x, c)$.

در این P_n را چندجمله‌ای تیلور مرتبه‌ی n ام f حول نقطه‌ی c می‌گوییم. و E_n را خطای چندجمله‌ای تیلور مرتبه‌ی n ام می‌گوییم.

کران بالا برای خطای تقریب تیلور:

$$M_{n+1} = \max_{t \in I(x,c)} |f^{n+1}(t)|$$

$$\Rightarrow |E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

مثال: الف) چند جمله‌ای تیلور مرتبه‌ی 2 حول نقطه‌ی $c=1$ را برای تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ تعیین کنید.

ب) اگر بخواهیم f را در $x=\frac{1}{2}$ با تقریب بالا تعیین کنیم کران بالای خطا را به کمک قضیه‌ی تیلور تعیین کنید.

الف)

$$f(x) = P_2(x) + E_2(x)$$

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2$$

$$c=1 \;; \quad f(1)=1 \quad f''(1)=2 \quad f'(1)=-1$$

$$f'''(t) = \frac{-6}{t^4}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1-(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2$$

ب)

$$|E_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}\left|\tfrac{1}{2}-1\right|^3$$

$$M_3 = \max_{t\in[\frac{1}{2},1]} |f'''(t)| = \max_{t\in[\frac{1}{2},1]} \left(\frac{6}{t^4}\right) = \frac{6}{\frac{1}{16}} = 96$$

* این تابع نزولی بود کران بالای آن به ازای $t=\frac{1}{2}$ بدست می‌آید. گاهی لازم است از تست مشتق اول و دوم و رسم تابع در آن بازه استفاده کرد. گاهی نیز کافی است یک کران بالا برای آن تقریب بزنیم، یک کران بالای دم دستی!

$$|E_2(\tfrac{1}{2})| \le 2$$

چند تقریب مهم تیلور (حول $c=0$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + E_{2n+1}$$

تقریب تیلور از مرتبه‌ی $(2n+1)$

* هرچی توان x باشد مرتبه‌ی تقریب تیلور توان آن است مگر اینکه جمله‌ی بعدی آن صفر باشد، در این صورت می‌توان گفت مرتبه‌ی تقریب تیلور یکی بیشتر است.

Subject
Date

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + E_n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + E_n$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + E_{2n}$$

* مشتق بسط تیلور یک تابع همان بسط تیلور مشتق آن تابع است

و به طور مشابه برای انتگرال داریم

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + E_{2n+1}$$

مثال. می خواهیم $\cos\left(\frac{2}{10}\right)$ را به کمک تقریب تیلور تابع $\cos 2x$ حول $c=0$ تقریب بزنیم.

چند جمله از تقریب تیلور را لازم داریم تا خطای این تقریب بیشتر از 10^{-3} نشود.

$$\begin{cases} c = 0 \\ x = 0{,}1 \end{cases} \qquad |E_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{|x - c|}_{0{,}1}^{n+1} \le 10^{-3}$$

$$M_{n+1} = \max_{t \in [0, 0{,}1]} |f^{(n+1)}(t)| \le 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow |E_n(0{,}1)| \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} (0{,}1)^{n+1} \le 10^{-3} \qquad n = 3 \checkmark$$

بنابراین کافی است P_3 را تعیین کنیم به عبارت دیگر 4 جمله از تقریب تیلور کافی است.

بیان دیگر از قضیه‌ی تیلور: فرض کنید $x, x+h \in I$ و $f \in C^{n+1}(I)$ آنگاه

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + E_n(h)$$

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

تقریب تیلور برای توابع دو متغیره:

قضیه: فرض کنید $I, J \subseteq \mathbb{R}$ بازه‌ها باشند و $f: I \times J \to \mathbb{R}$

و $f \in C^{n+1}(I \times J)$

یعنی مشتقات جزئی f تا مرتبه‌ی $n+1$ همگی پیوسته باشند آنگاه اگر

$x, x+h \in I$ & $y, y+k \in J$

آنگاه،

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) + E(h,k)$$

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k)$$

$$0 < \theta < 1$$

* معمولاً:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) = \left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right](x,y)$$

مثال

$$f(x,y) = \sin(xy) + x^2 y$$

الف) تقریب تیلور مرتبه‌ی اول را حول نقطه‌ی $(0, \pi/2)$ بنویسید

ب) برای تقریب $f(\pi/8, \pi/2 - \pi/8)$ از چند جمله‌ای تیلور قسمت الف استفاده کنید. کران بالا برای خطای این تقریب تعیین کنید.

$$f(0+h, \tfrac{\pi}{2}+k) = f(0, \tfrac{\pi}{2}) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0, \tfrac{\pi}{2}) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0, \tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}h$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy + x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$$

قضیه مقدار میانی: اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و β مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه $\exists \alpha \in (a,b)$ که: $f(\alpha) = \beta$.

* اثبات کتاب دکتر کمشایی مطالعه شود.

قضیه اکسترمم: اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه،
$\exists \alpha, \beta \in [a,b]$ ؛ $\forall x \in [a,b]$ ، $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

* $\alpha, \beta \leftarrow$ طول نقطه‌ی مینیمم و طول نقطه‌ی ماکسیمم.

قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها: فرض کنید u و v توابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ هستند و u در $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد (یعنی برای هر x عضو $[a,b]$، $u(x) \geq 0$ یا برای هر x، $u(x) \leq 0$) آنگاه، γ بین $[a,b]$ هست که

$$\int_a^b u(x)v(x)\,dx = v(\gamma)\int_a^b u(x)\,dx \quad (*)$$

* حالت دیگر: $f(\alpha) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Subject
Date

برهان: حالت اول: $u=0$ ، $u(x)=0$) $\forall x\in[a,b]$ (آنگاه حکم برقرار است
در واقع (*) برای هر $\alpha\in[a,b]$ برقرار است.

حالت دوم: $u\neq 0$ ($x\in[a,b]$ موجود است که $u(x)\neq 0$)
بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم $u(x)\geq 0$ ، $\forall x\in[a,b]$.
آنگاه $\int_a^b u(x)\,d(x)>0$.
چون f روی $[a,b]$ پیوسته است طبق قضیهٔ اکسترمم $\exists \alpha,\beta\in[a,b]$ که

$$\forall x\in[a,b]\ ; m=v(\alpha)\le v(x)\le v(\beta)=M \xrightarrow{\times u(x)}$$

$$m.u(x)\le u(x).v(x)\le M.u(x).$$

درنتیجه

$$m\int_a^b u(x)\,dx \le \int_a^b u(x)v(x)\,dx\le M\int_a^b u(x)\,dx$$

چون $\int_a^b u(x)\,dx>0$ پس

$$v(\alpha)=m\le \frac{\int_a^b u(x)v(x)\,dx}{\int_a^b u(x)\,d(x)}\le M=v(\beta)$$

طبق قضیهٔ مقدار میانی γ بین α و β وجود دارد که

$$v(\gamma)=\frac{\int_a^b u(x)v(x)\,dx}{\int_a^b u(x)\,dx} \Rightarrow \int_a^b u(x)v(x)\,dx=v(\gamma)\int_a^b u(x)\,dx$$

* سرعت همگرایی:

تعریف (سرعت همگرایی): فرض کنید $x_n\to\alpha$. گوییم مرتبهٔ همگرایی دنباله x_n حداقل خطی است اگر $N>0$ و $0\le c<1$ وجود داشته باشند که اگر

$$n>N \ ,\ |x_{n+1}-\alpha|<c|x_n-\alpha|$$

توجه: اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = c$ که $0 \leq c < 1$، آنگاه مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ حداقل خطی است (تمرین: اثبات کنید در حالتی که حد بالا وجود نداشته باشد را نیز ساپورت کند.) ($\limsup$)

همچنین اگر $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = c < 1$ آنگاه مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ حداقل خطی است

(* تعریف اصلی جنرال‌تر است به ترتیب ...)

تعریف: (Super linear • فراخطی) فرض کنید $x_n \to \alpha$، مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ حداقل فوق خطی است اگر دنباله‌ی $\{\epsilon_n\}$ و $N>0$ وجود داشته باشد که $\epsilon_n \to 0$ و اگر $n>N$ آنگاه $|x_{n+1}-\alpha| < \epsilon_n |x_n-\alpha|$.

(* حداقل فوق خطی سریع‌تر است نسبت به حداقل خطی)

← اگر در توجه بالا $c=0$ قرار دهیم دنباله فوق خطی می‌شود.

تعریف: فرض کنید $p \geq 1$، دنباله‌ی $\{x_n\}$، $x_n \to \alpha$، آنگاه مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ حداقل p است اگر $c \geq 0$ و $N>0$ وجود داشته باشند که اگر $n>N$ آنگاه $|x_{n+1}-\alpha| < c|x_n-\alpha|^p$

توجه: اگر $\lim \left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right| = c$ و $c \geq 0$ آنگاه مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ حداقل p است

(* مرتبه‌ی همگرایی $p+1$ سریع‌تر از p است چون اگر از مرتبه‌ی $p+1$ باشد، از مرتبه‌ی p هم هست.)

Subject
Date

مثال: فرض کنید $0<\theta<1$ نشان دهید $x_n = \frac{1+\theta^n a}{1+a\theta^{n-1}}$ دنباله‌ای همگرا

$x_n \to 1$ از مرتبه‌ی خطی است

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1+a\theta^{n+1}}{1+a\theta^n}-1}{\frac{1+a\theta^n}{1+a\theta^{n-1}}-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a\theta^n(\theta-1)(1+a\theta^{n-1})}{(1+a\theta^n)(a\theta^{n-1}(\theta-1))}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\theta(1+a\theta^{n-1})}{1+a\theta^n} = \theta \quad ; \quad 0<\theta<1 \quad \blacksquare$$

تمرین: آیا این دنباله می‌تواند مرتبه‌ی همگرایی بالاتری داشته باشد؟

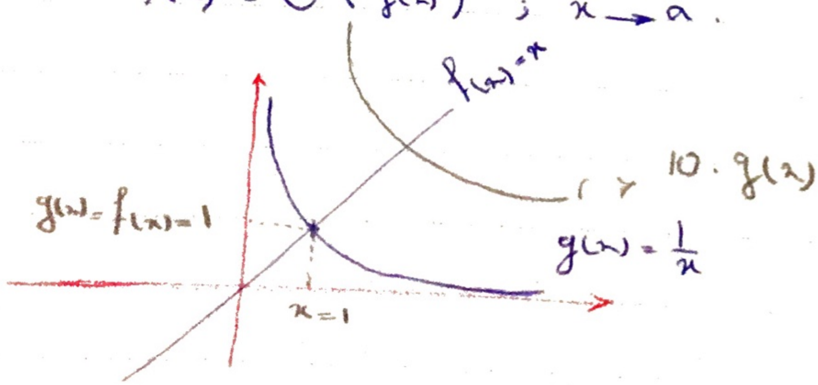
نمادهای O بزرگ و o کوچک:

تعریف: فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های مشترک D هستند و $a\in D$.
می‌گوییم $f(x)$ از $g(x)$ O است وقتی $x\to a$ اگر $M>0$ و $\delta>0$ موجود باشند که اگر $x\in D$ و $|x-a|<\delta$ آنگاه
$|f(x)| < M|g(x)|$.

و می‌نویسیم:

$f(x) = O(g(x))$; $x\to a$.

مثال:



سؤال:

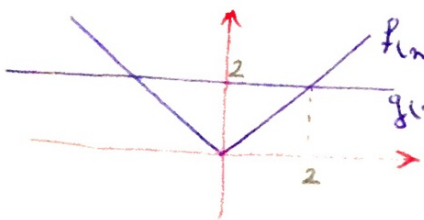
Date

۱- آیا می‌توان گفت: $(f(x) = O(g(x))\ ;\ x \to 2)$

$|f(x)| < M|g(x)|$

$|x| < M\frac{1}{|x|} \to |x^2| < M \ ; \ \delta = 1$

کافی است $M=10$ تا برقرار شود.



۲- $f(x) \neq O(g(x)) \ ; \ x \to 0$

برای اثبات $\forall\, \delta, M \ \exists x \ ; \ |x|<\delta \ \& \ 2 \nless M|x|$

نتیجه: اگر $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = M \neq 0$ آنگاه $(f(x) = O(g(x)) ; x \to a)$

تعریف: فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ هستند. اگر $M, N > 0$ موجود باشند که اگر $x > N$، آنگاه $|f(x)| < M|g(x)|$ می‌گوییم $f(x)$، O بزرگ $g(x)$ است اگر $x \to +\infty$ و می‌نویسیم $f(x) = O(g(x))\ x \to +\infty$

مثال:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + E_4(x).$$

$$E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\alpha x)}{5!} x^5 \Rightarrow |E_4(x)| < \frac{1}{5!}|x^5|$$

$$E_4(x) = O(x^5) \ ; \ x \to a \in \mathbb{R}$$

Subject جلسهٔ چهارم
Date 95 11 19

تعریف: فرض کنید f و g روی دامنه‌ی مشترک تعریف شوند. گوییم f، o کوچک g است
وقتی $x \to a$، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $|x-a| < \delta$
اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $|x-a| < \delta$ آنگاه، $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ در این صورت می‌نویسیم:
$f(x) = o(g(x))$

نتیجه:
$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0 \implies f(x) = o(g(x)).$$

مثال
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \underbrace{\frac{f^{(5)}(\alpha x)}{5!} x^5}_{O(x^5)} = E_5(x)$$

$f(x) = \sin x$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{E_5(x)}{5!} \right| \leq \frac{1}{5!} \qquad \lim_{x \to 0} \left| \frac{E_5(x)}{x^4} \right| = 0$$

PAPCO

فصل دوم: حساب های کامپیوتری

قضیه: فرض کنید β عددی طبیعی و زوج است و x عددی حقیقی است. آنگاه $m \in \mathbb{Z}$ و اعداد $0 \le \alpha_i < \beta$ که $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($i = m, m-1, \dots$) وجود دارند که

$$x = \pm\left[\alpha_m\beta^m + \alpha_{m-1}\beta^{m-1} + \cdots + \alpha_0\beta^0 + \alpha_{-1}\beta^{-1} + \cdots\right]$$

توجه: درصورتی که برای یک $k < m$ و $n \le k$ ، $\alpha_n = \beta - 1$
در این صورت دو بسط اعشاری برای x داریم.

مثال: $1 = \frac{0/9}{1-0/1} = 0/99\dots$ بنابراین دو نمایش برای 1 وجود دارد.

قرارداد: از این پس برای هر عدد حقیقی اگر دو نمایش وجود داشته باشد، نمایشی را در نظر می‌گیریم که بسط متناهی داشته باشد.

مثال:

$$123.56 = 1\times10^2 + 2\times10^1 + 3\times10^0 + 5\times10^{-1} + 6\times10^{-2}$$

$$(12.3)_{10} = (?)_2 = (1100/\underbrace{\alpha_{-1}\alpha_{-2}\cdots}_{?})_2$$

$$a = 0/3 = (0/\beta_1\beta_2\cdots)_2$$

طرفین رابطه را در 2 ضرب کنید.

$$2.a = 0/6 = (\beta_1/\beta_2\cdots)_2$$

چون $\beta = 2$ ، $\lfloor 2a \rfloor = \beta_1 = 0$ یا 1

$$2a - \lfloor 2a \rfloor = (0/\beta_2\cdots)_2$$

$$2a - \lfloor 2a \rfloor \rightarrow a \quad ; \quad 2a = (\beta_2/\beta_3\cdots)_2$$

Subject
Date

$\lfloor 2a \rfloor = \beta_2$

به همین ترتیب ادامه می دهیم.

i	a	$2a$	$\lfloor 2a \rfloor = \beta_i$	$2a - \lfloor 2a \rfloor$
1	0.3	0,6	0	0,6
2	0.6	1.2	1	0,2
3	0.2	0.4	0	0,4
4	0.4	0.8	0	0,8
5	0.8	1.6	1	0,6

$0,3 = (0,01\overline{0011})_2$

$12,3 = (1100,01\overline{0011})_2$

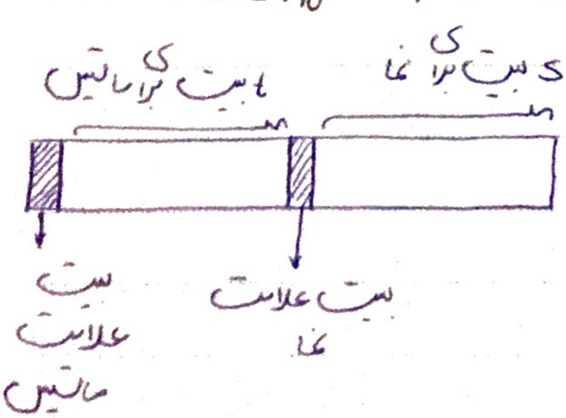
تمرین 12.3 را در مبنای 8 بنویسید.

نمایش علمی یک عدد در مبنای β :

$$a = \pm(\underbrace{0,\beta_1\beta_2\ldots}_{\text{ارقام مانتیس}}) \times \beta^e$$

$$0 \leqslant \beta_i \leqslant \beta - 1 \quad , \quad \beta_1 \neq 0$$

$$(12.3)_{10} = 0,123 \times 10^2$$



نمایش ممیز شناور در یک عدد حقیقی :

PAPCO

مثال: ماشینی را در نظر بگیرید که اعداد را در مبنای 10 با $t=5$ رقم مانتیس و $s=3$ رقم برای نما ذخیره می کند. نمایش اعداد زیر را در این ماشین بنویسید

$a = 148.2567$

نمایش علمی: 0.1482567×10^{3}

نمایش ماشینی: 0.14826×10^{3}

$b = 0.9999999 \times 10^{999} = 0.1 \times 10^{1000}$

در این حالت ماشین $+Inf$ یا 0.99999×10^{999} را نمایش می دهد.

۱- تعداد کل اعدادی که این ماشین نمایش می دهد؟ (ماشین فقط در مبنای 2 نمایش می دهد.)

حالت های مانتیس: 2^{5}

" " نما: 15

تعداد کل: $2^{5} \times 15 + 1$

عدد صفر جداگانه نمایش داده می شود

۲- کوچکترین عدد مثبت قابل نمایش:

$(0.10000)_2 \times 2^{(-111)_2} = (2^{-8})_{10}$

۳- بزرگترین:

$(0.11111)_2 \times 2^{(111)_2} = (124)_{10}$

۴- اختلاف دو عدد کوچکترین عدد و عدد بعدی:

$2^{-5} \times 2^{-7} = 2^{-12}$

۵- بزرگترین عدد و عدد قبلی:

2^{2}

Subject
Date

* گرد کردن یک عدد.

توجه: از این به بعد فرض می‌کنیم که در یک دستگاه ممیز شناور تعداد ارقام نمای (ی) محدودیتی ندارد
و همواره $fl(x)$ را نمایش ماشینی عدد x در یک دستگاه متغیر شناور در نظر بگیرید

- عدد x را با نماد علمی زیر در نظر بگیرید در مبنای β: $x = \pm 0/\beta_1 \ldots \beta_{t+1} \times \beta^e$
اگر دستگاه مورد نظر t جایگاه رقم مانتیس داشته باشد. آنگاه:

$$fl(x) = \begin{cases} (0/\beta_1 \ldots \beta_t + \beta^{-t}) \times \beta^e & \beta/2 \leq \beta_{t+1} \\ (0/\beta_1 \ldots \beta_t) \times \beta^e & \beta_{t+1} < \beta/2 \end{cases}$$

در واقع $fl(x)$ نزدیک‌ترین عدد ماشینی به عدد x است.

* توجه: $fl(x) - x \leq |q - x|$
برای $\forall q \in A$ که A مجموعه‌ی همه‌ی اعداد قابل نمایش با ماشین مورد نظر است.

تعریف خطای نسبی و خطای مطلق:

اگر $\tilde{a}$ تقریبی از a باشد، تعریف می‌کنیم:

خطای مطلق $\Delta a = \tilde{a} - a$

" نسبی $\delta a = \frac{\tilde{a} - a}{a}$

PAPCO

قضیه: یک دستگاه ممیز شناور در مبنای β را با t رقم مانتیس در نظر بگیرید. اگر $x \in R$ و $fl(x)$ نمایش ماشینی x باشد.

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

→ ε ماشین

eps ← دقت ماشین

دقت حسابی نسبی ماشین

* چرا بهش میگن Rd عدد 1 ؟!

برهان: فرض کنید:

$$x = 0/\beta_1\beta_2\cdots\beta_t\beta_{t+1}\cdots\times\beta^e$$

*(بدون کم شدن از کلیت $x>0$ است)

x^- $\quad x \quad$ x^+

فرض کنید x^+ کوچکترین عدد بزرگتر از x در نمایش ممیز شناور مورد نظر است و x^- بزرگترین عدد کوچکتر از x است.

$$|x-fl(x)| \leqslant \frac{x^+-x^-}{2} \quad ①$$

$$x^+ = (0/\beta_1\cdots\beta_t)\beta^e + \beta^{e-t}$$

$$x^- = (0/\beta_1\cdots\beta_t)\beta^e$$

بنابر ①

$$|x-fl(x)| \leqslant \beta^{e-t}\cdot\frac{1}{2} \quad ②$$

از طرفی چون $\beta_1>0$ بنابراین $|x| > (0/1\times\beta^e) = \beta^{e-1}$ ③

$$②,③ \Longrightarrow \frac{|x-fl(x)|}{|x|} \leqslant \frac{1}{2}\beta^{1-t}.$$

$eps = \min\{\varepsilon_1>0 \text{ و } fl(1+\varepsilon_1)>1\}$

تمرین: کوچکترین عددی که

$fl(1+\varepsilon_1)>1 \leftarrow 1+\varepsilon_1$

کرانه‌یابی ← مثال‌های بیشتر

فرض کنید $\frac{fl(x)-x}{x} = \varepsilon$

$x \neq 0$ ؛ $fl(x) - x = x.\varepsilon$

$fl(x) = x + x.\varepsilon = x(1+\varepsilon)$ ؛ $|\varepsilon| \leq eps$

محاسبات ماشینی: فرض کنید x, y دو عدد با نمایش ممیز شناور هستند (x و y اعداد ماشینی)

$fl(x \times y) = (x \times y)(1+\varepsilon_1) = x \times^* y$

$fl(x + y) = (x+y)(1+\varepsilon_2) = x +^* y$

$fl(x - y) = (x-y)(1+\varepsilon_3) = x -^* y$

$fl(\frac{x}{y}) = (x/y)(1+\varepsilon_4) = x /^* y$ ، $y \neq 0$

$fl(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\varepsilon_5) = \sqrt{x}^*$

* $\sqrt{x}$ باید طوری باشد که به طور دقیق محاسبه شود سپس گرد شود.

قرارداد: مسأله‌ی $y = \varphi(x)$ را در نظر بگیرید، $x \in \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$ که x ورودی مسأله و y خروجی مسأله است. اگر الگوریتم مسئله از حل مسأله معلوم باشد منظور از $fl(\varphi(x))$ یعنی جواب مسأله به طوری که همه عملیات برای محاسبه‌ی y در حساب ممیز شناور انجام بگیرد. (تک تک محاسبات ماشینی هستند.)

مثال ۱)

$\varphi(a,b,c) = (a+b)+c$

$k(a,b,c) = (b+c)+a$

مثال ۲ - فرض کنید a,b,c سه عدد مثبت در نمایش ماشینی هستند مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$\varphi(a,b,c) = (a+b)+c$

کران بالایی برای خطای نسبی در محاسبه $\theta = fl(\phi(a,b,c))$ تعیین کنید.

$$\alpha = fl(a+b) = (a+b)(1+\varepsilon_1) \qquad |\varepsilon_1| \leq eps$$

$$\theta = fl(\alpha + c) = [(a+b)(1+\varepsilon_1) + c](1+\varepsilon_2) \qquad |\varepsilon_2| \leq eps$$

$$\theta = ((a+b+c) + (a+b)\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$$

$$\theta = a+b+c + (a+b+c)\varepsilon_2 + (a+b)\varepsilon_1 + (a+b)\varepsilon_1\varepsilon_2$$

خطای نسبی
$$\frac{\theta - (a+b+c)}{a+b+c} = \left| \varepsilon_2 + \frac{a+b}{a+b+c}(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) \right|$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\theta - (a+b+c)}{a+b+c} \right| \leq eps + \frac{|a+b|}{|a+b+c|}(eps + eps^2)$$

کران بالای خطای نسبی

* نتیجه اینکه در جمع سه عدد بهتر است اول دو عدد کوچکتر را جمع کنیم زیرا مثلاً اگر b و c را اول جمع کنیم آن‌گاه کران بالای خطای نسبی $eps + \frac{|b+c|}{|a+b+c|}(eps + eps^2)$ می‌شود پس هرچه کران بالای خطای نسبی کوچکتر باشد بهتر است.

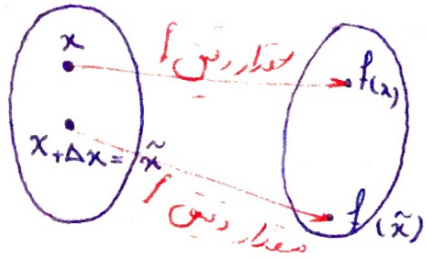
(بیان ۱: در آنالیز خطا از توان‌های بیشتر از 1 eps صرف‌نظر می‌شود و آنالیز خطا کلاً این طوری انجام نمی‌شود که دقیق‌تر آن را فوق لیسانس خواهید خواند.)
(بیان 2، الگوریتم هورنر.)

حالت یک مسئله :

مسئله‌ی $y = \phi(x)$ را در نظر بگیرید که x ورودی مسئله است و y خروجی. اگر بردار ورودی x را مقداری جزئی آشفته کنیم، مثلاً فرض کنید $\tilde{x} = x + \Delta x$ که Δx خیلی کوچک است. اگر $\tilde{y} = \phi(\tilde{x})$، اختلاف $\tilde{y}$ و y بسیار

Date

بزرگ شود آنگاه مسئله بد حالت است. در غیر این صورت مسئله خوش حالت است.



(بین wellcondition & illcondition problems.)

نقش اعداد حالت یک مسئله

مسئله $y = \varphi(x)$ را در نظر بگیرید که

$$x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y \in \mathbb{R}^m \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

فرض کنید $\tilde{x} = x + \Delta x = \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{bmatrix}$ ، $\tilde{x}_i - x_i = \Delta x_i \quad i = 1, \dots, n$

$$\tilde{y} = \varphi(\tilde{x} + \Delta x) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_m \end{bmatrix}$$

$$x_i \neq 0 \quad , \quad \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} = \varepsilon_{x_i}$$

$$\tilde{y}_i = \varphi(x + \Delta x) \doteq \varphi_i(x) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x)\Delta x_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(x)\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x)\Delta x_n$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 - y_1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m - y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{bmatrix}$$

در واقع $Dy(x)$ ماتریس ژاکوبی است و

$$\Delta y \doteq D\varphi(x)\,\Delta x$$

و در واقع

$$\Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\,\Delta x_j$$

$y_i \neq 0$ $\qquad \varepsilon_{y_{i_n}} = \frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \frac{\Delta x_j}{x_j} \qquad x_j \neq 0$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{x_j}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right] \varepsilon_{x_j} = \sum_{j=1}^{n} (\beta_{ij})\,\varepsilon_{x_j}$$

تعریف: $\beta_{ij} = \frac{x_j}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$ ، $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,m$ را اعداد حالت

مسأله $y=\varphi(x)$ برای ورودی x گویند. در واقع β_{ij} میزان

تأثیرگذاری خطای نسبی در ورودی j ام (x_j) به خطای نسبی در خروجی i ام ، y_i

است.

جلسه ششم ۱۱/۲۶

تعریف: $B_{ij}=\frac{x_j}{\varphi_i(x)}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$ ، $\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$ را اعداد حالت مسأله $y=\varphi(x)$ برای ورودی $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ می‌گویند. در واقع B_{ij} میزان تاثیر خطای نسبی در مولفه‌ی jام (x_j) به خطای نسبی در خروجی iام (y_i) است.

$$\frac{\dfrac{\|y(x+\Delta x)-y(x)\|}{\|y(x)\|}}{\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|}} \longrightarrow \frac{\|x\|}{\|y(x)\|}\,\|\varphi'(x)\|$$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

تعریف: مسأله $y=\varphi(x)$ که $\varphi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ برای یک ورودی $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$ خوش حالت است. اگر اعداد حالت مسأله در $\hat{x}$ یعنی

$$|B_{ij}|=\left|\frac{x_j}{\varphi_i(x)}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\hat{x})\right| \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

همگی مقادیر کوچکی باشند (10^2 یا 10^3) در غیر اینصورت مسأله بدحالت است.

مثال: مسأله $\varphi(x,y)=\begin{bmatrix} x^2y+y \\ x-y^2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ اعداد حالت را برای این مسأله تعیین کنید. برای چه ورودی‌های $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ مسأله خوش حالت و برای چه ورودی‌هایی بدحالت است.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) &= x^2y+y \\ \varphi_2(x,y) &= x-y^2 \end{aligned} \longrightarrow B_{11}=\frac{x}{\varphi_1(x,y)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y)=\frac{2x^2y}{x^2y+y}$$

$$B_{12}=\frac{y}{\varphi_1(x,y)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2y+y}{x^2y+y}=1$$

$$B_{21}=\frac{x}{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x-y^2}$$

$$B_{22}=\frac{y}{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y)=\frac{-2y^2}{x-y^2}$$

توجه کنید که

$$|B_{11}|=\left|\frac{2x^2y}{x^2y+y}\right|\le 2 \quad , \quad |B_{12}|=1$$

درصورتی که $y^2\simeq x$ آنگاه مسأله بدحالت است زیرا

$|B_{21}|\longrightarrow\infty$

$|B_{22}|\longrightarrow\infty$

Subject .... Date ....

تعریف خطای نسبی از حالت بالای eps صفر نظر می‌کنیم

قضیه:

$$\varepsilon_{x.y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$\varphi(x,y) = x.y \longrightarrow \varepsilon_{x.y} = \frac{x.y}{x.y}\varepsilon_x + \frac{y.x}{xy}\varepsilon_y = \underset{\beta_{11}}{1}\,\varepsilon_x + \overset{\beta_{12}}{1}\,\varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{x \pm y} = \underbrace{\frac{x}{x \pm y}}_{\beta_{11}}\varepsilon_x \pm \underbrace{\frac{y}{x \pm y}}_{\beta_{12}}\varepsilon_y$$

اگر x و y هم علامت باشند و $x \approx y$ آنگاه مسئله $x-y$ یک مسئله بدحالت است.

$$\varepsilon_{x/y} = \varepsilon_x - \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varepsilon_x = \frac{1}{2}\varepsilon_x$$

الگوریتم‌های پایدار و ناپایدار و انتشار خطا: می‌توانیم کمی بپردازیم که پایداری یا ناپایداری الگوریتم برای یک داده خاص پایدار یا ناپایدار است.

تعریف: اگر برای حل مسئله $y = \varphi(x)$ $(x \in D \subseteq \mathbb{R}^n)$ از الگوریتم A استفاده کنیم اگر در حین اجرای الگوریتم خطاهای رند شدن (ماشینی) اولیه انتشار پیدا کنند. بطوریکه خروجی بدست آمده تحت تأثیر انتشار خطا، مقادیری غیر معقول بدست دهد. الگوریتم A را برای این مسئله ناپایدار گوییم. در غیر اینصورت این الگوریتم را پایدار گوییم.

مثال: برای محاسبه مقدار $c = a^2 - b^2$ از دو الگوریتم متفاوت استفاده می‌کنیم

الگوریتم اول: $c_1 = fl\left((a)^2 - (b)^2\right)$

الگوریتم دوم: $c_2 = fl\left((a-b)(a+b)\right)$

سؤال: با فرض $a = 2b \neq 0$ کدام الگوریتم خطا را کمتر منتشر می‌کند

توضیح:

در اینجا می‌توانیم خطای نسبی تعیین c_1, c_2 را بدست آورده (کران بالای خطای نسبی) هر کدام که کمتر باشد خطا را کمتر منتشر کرده

① الگوریتم

$$c_1 = \left((a^2)(1+\varepsilon_1) - (b^2)(1+\varepsilon_2)\right)(1+\varepsilon_3) \qquad |\varepsilon_i| \leq eps$$

$$c_1 = (a^2 - b^2 + a^2\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

$$= (a^2 - b^2) + (a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + (a^2 - b^2)\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_{c_1} = \frac{c_1 - c}{c} = \varepsilon_3 + \left[\frac{a^2\varepsilon_1 - b^2\varepsilon_2}{a^2 - b^2}\right](1+\varepsilon_3)$$

$$\longrightarrow |\varepsilon_{c_1}| \leqslant eps + \left[\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right](eps + eps^2)$$

$$a=2b \longrightarrow |\varepsilon_a| \leqslant eps + \frac{5}{3}\,eps = 8/3\, eps$$

الگوریتم ② $c_2 = (a-b)(a+b)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \qquad |\delta_i| \leqslant eps$

$$c_2 \doteq (a^2-b^2)(1+\delta_1+\delta_2+\delta_3) = (a^2-b^2) + (a^2-b^2)(\delta_1+\delta_2+\delta_3)$$

$$\longrightarrow |\varepsilon_{c_2}| = \left|\frac{c_2-c}{c}\right| = |\delta_1+\delta_2+\delta_3| \leqslant 3eps$$

پایداری پیشرو ، پایداری پسرو :

پایداری پیشرو: مسأله $y=\varphi(x)$ ، $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید. با الگوریتم A این مسأله را حل می کنیم الگوریتم را برای حل این مسأله پایدار پیشرو گوییم اگر:

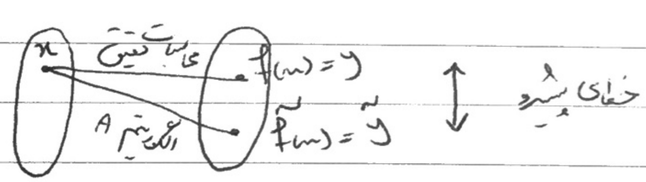
خروجی دقیق مسأله: y 　　　　 خروجی مسأله محاسبه شده با محاسبات ماشینی توسط الگوریتم A: $\tilde{y}$

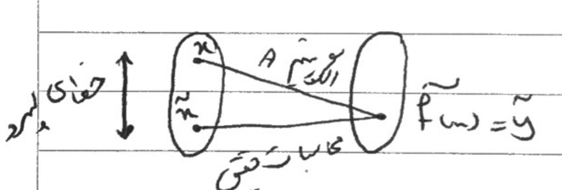
$$|y-\tilde{y}| \approx eps|y|$$
$$\approx 10^k\, eps|y| \qquad k \leqslant 2,3$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \longrightarrow |y| = \begin{bmatrix} |y_1| \\ \vdots \\ |y_m| \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ij}) \quad i = 1 \dots k, \; j = 1 \dots p$

$|A| = (|a_{ij}|) \quad i = 1 \dots k, \; j = 1 \dots p$





پایداری پسرو: مسأله $y=\varphi(x)$ ، $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید. فرض کنید مسأله را با الگوریتم A و حساب ماشینی $=\tilde{y}$ و فرض کنید $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ و $\tilde{x} \in D$ اگر

$$|x-\tilde{x}| \approx eps|x|$$

Subject .... Date ....

در اینصورت الگوریتم را پایدار پیشرو می‌گوییم در غیر اینصورت ناپایدار پیشرو گوییم.

تمرین: فرض کنید $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ و $y=(y_1,\dots,y_n)^T$ و $f(x,y)=x^Ty$ نشان دهید که این الگوریتم پایدار پیشرو یا پسرو هست یا خیر و برای چه ورودی‌هایی این پایداری برقرار است. و مسأله قبل را برای $g(x,y) = xy^T$ حل کنید.

Subject جلسه هفتم
Date 1395.12.01

* کوئیز تمرین های کلاس تا جلسه هفته بعد!

مثال: تعریف کنید $y_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ هدف، تعیین y_{100} است.

$$y_0 = \int_0^1 e^x dx = e-1$$

$$y_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - (n+1)\int_0^1 e^x x^n \, dx$$

$$\rightarrow y_{n+1} = e - (n+1) y_n \quad (*)$$

الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه y_{100}:

$$y_0 = e-1$$
$$y_1 = e - y_0 = 1$$
$$\vdots$$
$$y_{100} = e - 100 y_{99}$$

فرض کنید $\tilde{y}_n = f(y_n)$ یعنی مقدار محاسبه شده y_n با الگوریتم گفته شده با محاسبات ممیز شناور، همچنین فرض کنید که تنها در محاسبه y_2 خطا اتفاق بیفتد (خطای راندوف) و خطای دیگری در حین الگوریتم نداشته باشیم.

$$\tilde{y}_2 = e - 2y_1 + \varepsilon(e-2y_1) = y_2 + \varepsilon y_2$$
$$\tilde{y}_3 = e - 3\tilde{y}_2 = e - 3(y_2 + \varepsilon y_2) = (e - 3y_2) - 3\varepsilon y_2$$
$$\tilde{y}_4 = e - 4\tilde{y}_3 = e - 4y_3 + (4 \times 3 \varepsilon y_2)$$
$$\vdots$$
$$\tilde{y}_{100} = y_{100} + \frac{100!}{2} \varepsilon y_3 .$$

همین طور که می بینید خطای مطلق برای محاسبه y_{100}

$$\left| \frac{100!}{2} \varepsilon y_2 \right| , \quad |\varepsilon| \leq eps$$

که مقدار بسیار بزرگی است. بنابراین الگوریتم پیشنهادی خطا را به سرعت منتشر می کند.

Subject
Date

* الگوریتم دوم: از رابطه‌ی

$$y_n = \frac{e - y_{n+1}}{n+1}$$

از طرفی،

$$y_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$$

$$0 \le y_n \le e \int_0^1 x^n \, dx = \frac{e}{n+1} < 10^{-3}$$

بنابراین $\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$.

فرض کنید $10^{-3} > y_{100}$

$$\to y_{9999} = \frac{e - 0}{10000} \quad , \quad y_{9998} = \frac{e - y_{9999}}{9999} \quad \cdots \quad y_{100} = \frac{e - y_{101}}{101}$$

تمرین: نشان دهید الگوریتم دوم برای محاسبه‌ی y_{100} خطا را منتشر نمی‌کند.

مثال:

$$A = \sqrt{x^2+1} - x$$

x عددی مثبت و بسیار بزرگ است.

پ.ن:

$$\varepsilon_{x-y} = \frac{x}{x-y} \varepsilon_x + \frac{y}{x-y} \varepsilon_y$$

کوچک

بسیار بزرگ

خطا بزرگ می‌شود. →

پس به همان شکل نمی‌توان A را محاسبه کرد.

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

Subject
Date

فصل سوم:

- الگوریتم های عددی برای حل معادلات غیرخطی
روش دوبخشی (bisection)

یادآوری: فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a).f(b)<0$ آنگاه f یک ریشه در بازه‌ی (a,b) دارد. (قضیه مقدار میانی)

← تابع f پیوسته در $[a,b]$ با $f(a)f(b)<0$ را درنظر بگیرید.
0- $i=1$ و 1- $x(i)=c=\frac{a+b}{2}$

2- اگر c در شرط توقف صدق کند توقف کن (مثلاً اگر $|f(x)|<\varepsilon_1$)
در غیراین صورت اگر $f(a).f(c)<0$ آنگاه $c \leftarrow b$
در غیراین صورت $c \leftarrow a$ ، $i+1 \leftarrow i$ و برو به مرحله 1

- شرط توقف: 1- تعداد تکرارها: اگر $i \geq N$ توقف کند
2- اگر $|f(x(i))|<\varepsilon_1$ توقف کند.
3- $\left|\frac{x(i)-x(i-1)}{x(i)}\right|<\varepsilon_2$ " " .

تحلیل همگرایی روش دوبخشی:
فرض کنید $[a_0,b_0]=[a,b]$ ، اگر $c=\frac{a+b}{2}$ و $f(a).f(b)<0$
فرض کنید $[a_1,b_1]=[a,c]$ و به طور مشابه بازه های
$[a_0,b_0]$ ، ... ، $[a_n,b_n]$
را درنظر بگیرید.

واضح است که $[a_n,b_n] \subseteq [a_{n-1},b_{n-1}]$
در نتیجه $a_n \leq b$ و دنباله‌ای صعودی است و $a \leq b_n$ دنباله‌ای نزولی است.

Subject
Date

بنابراین $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌ها همگرا هستند، فرض کنید

$a_n \to \alpha$

$b_n \to \beta$

از طرفی

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

$\vdots$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

در نتیجه

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{1}{n} - \lim a_n = 0$$

$$\beta - \alpha = 0 \Longrightarrow \beta = \alpha$$

فرض کنیم r مقدار مشترک حد a_n و b_n است.

همچنین $f(a_n)f(b_n) < 0$ از طرفی، از طرفین حد می‌گیریم وقتی $n \to \infty$

$$f(r) \cdot f(r) \leq 0 \to (f(r))^2 \not< 0 \to f(r) \approx 0$$

قضیه: فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a) \cdot f(b) < 0$

همچنین با فرض $[a,b] = [a_0, b_0]$، $[a_i, b_i]$ را بازه‌های پیدا شده در روش دو بخشی در نظر بگیرید. $i = 1, 2, \dots$ و آنگاه f حداقل یک ریشه در بازه‌ی $[a,b]$ دارد و $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = r$ که r یک ریشه f در (a,b) است،

با فرض $C_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ (C_n تقریب n ام ریشه)

آنگاه در

$$|r - C_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Subject
Date

در واقع $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

$$|c_n - r| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

مثال: فرض کنید f روی $[5,10]$ پیوسته باشد و $f(5)f(10) < 0$
چند تکرار از روش دوبخشی لازم است تا تقریب n ام ریشه (c_n) خطای
نسبی اش 10^{-5} کمتر باشد .

خطای نسبی $\dfrac{|c_n - r|}{|r|}$

$$|c_n - r| \leq \frac{10-5}{2^{n+1}} = \frac{5}{2^{n+1}} \quad (1)$$

$$|r| \geq 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1,2} \left|\frac{c_n - r}{r}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-5}$$

n کمترین عدد طبیعی است که در رابطه‌ی فوق صدق کند .

«جلسه‌ی هشتم»

1395.12.03

- اشکالات روش در کشی :

1- ممکن است زمان زیادی نیاز باشد تا با این روش با دقت مناسب به تقریبی از ریشه همگرا شود.

(در عمل، زمان بر است.)

2- این الگوریتم تنها برای پیدا کردن ریشه‌ی ساده یک تابع قابل استفاده است و برای پیدا کردن ریشه‌ی چندگانه، نمی‌توان از این الگوریتم استفاده کرد

روش نیوتن - رافسون : برای پیدا کردن ریشه‌ی معادلات غیرخطی :

فرض کنید f تابعی است که 1- r ریشه‌ی ساده‌ی f است

2- f'' در اطراف r پیوسته است. (همسایگی از r وجود دارد که f'' در آن همسایگی پیوسته است.)

Subject
Date

فرض کنید x_0 تقریبی اولیه برای ریشه‌ی r است. در واقع h ای وجود دارد که $x_0+h=r$

$$f(r) = f(x_0+h) = f(x_0) + h(f'(x_0)) + \underbrace{o(h^2)}_{\text{صرفنظر}}$$

o بزرگ h^2

$$\Rightarrow h \simeq \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

فرض کنید

$$h_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

و قرار دهید:

$$x_1 = x_0 + h_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بنابراین x_1 تقریب جدیدی از ریشه r است.

با کمی مشابه فرض کنید $x_1 + h = r$

در نتیجه

$$f(r) = f(x_1+h) = f(x_1) + h f'(x_1) + o(h^2)$$

$$h \simeq \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)} \rightarrow h_1 = \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 + h_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

به همین ترتیب $x_2, x_4, \dots$ را تعیین می‌کنیم.

اکنون دنباله‌ی نیوتن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

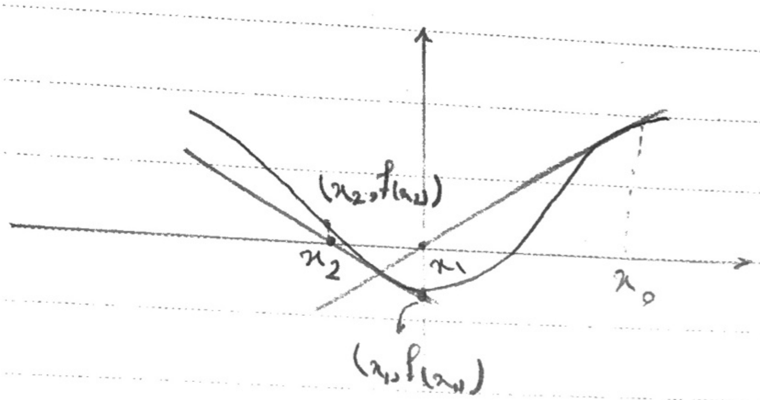
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x_0 یک تقریب اولیه‌ی ریشه‌ی r است.

Date

توجه : این الگوریتم تا زمانی پیش می‌رود که $f'(x_n) \neq 0$ باشد.

رویکرد هندسی :



اگر x_0 تقریبی اولیه از ریشه باشد ، خط مماس بر نمودار را در نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ رسم می‌کنیم که معادله این خط $y = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$ را با محور x قطع می‌دهیم و محل تقاطع این خط با محور x ها بدست می‌آید و آنرا x_1 می‌نامیم

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

اکنون در نقطه $(x_1, f(x_1))$ مماس بر نمودار تابع رسم می‌کنیم و ریشه‌ی آن را بدست می‌آوریم محل تقاطع مماس در نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$ و محور x ها را x_2 می‌نامیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم : $x_1, x_2, \ldots$

که دنباله‌ی بدست آمده به r همگراست.

تحلیل همگرایی روش نیوتن - رافسون :

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ی تولید شده در روش نیوتن است و r ریشه‌ی f باشد و

۱- r ریشه‌ی ساده‌ی f است

۲- f' در یک همسایگی r پیوسته است.

تعریف می‌کنیم

$$e_n = x_n - r$$

$$\rightarrow e_{n+1} = x_{n+1} - r$$

$$e_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{I}$$

Subject
Date

$$r = x_n - e_n$$

$$f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\alpha_n)$$

که α_n بین x_n و r است

درنتیجه از (I) داریم:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha_n)}{f'(x_n)} e_n^2 \quad \text{(II)}$$

سؤال: چه شرایطی برای انتخاب نقطه‌ی شروع x_0 کافی است تا $e_n \to 0$ ؟ $(x_n \to r)$

$$|e_{n+1}| = \rho |e_n| \quad , \rho < 1 \ ; \forall n \quad \text{(III)}$$

$$\to |e_1| = \rho |e_0|$$

$$|e_2| = \rho^2 |e_0|$$

$\vdots$

$$|e_{n+1}| = \rho^n |e_0| \to \lim_{n \to \infty} e_n = 0$$

تعریف می‌کنیم:

$$c(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|t-r| \leq \delta} |f''(t)|}{\min_{|t-r| \leq \delta} |f'(t)|} \quad \text{(IV)}$$

$f'(r) \neq 0$ (زیرا r ریشه‌ی ساده‌ی f است.) چون f' در بازه‌ی شامل r پیوسته است بنابراین در بازه‌ی شامل r مخالف صفر است (فرض کنید f'' روی $\{t \ ; |t-r| \leq \delta\}$ پیوسته است و f' در این بازه صفر نیست.)

درنتیجه اگر $\delta \leq \delta$ گزاره‌ی (IV) خوش تعریف است، همچنین می‌توان نشان داد

$$\lim_{\delta \to 0^+} c(\delta) = \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f''(r)} \quad \text{(تمرین)}$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \delta c(\delta) = 0$$

Subject
Date

درنتیجه $\delta_1 > 0$ وجود دارد که اگر $\delta \leq \delta_1$ آنگاه
$\delta c(\delta) < 1$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$\delta^* = \min\{\delta_0, \delta_1\}$$

اکنون نشان می‌دهیم که اگر $|e_0| = |x_0 - r| \leq \delta^*$ آنگاه دنباله‌ی تولیدشده در روش نیوتن به ریشه‌ی r همگرا شود. یا به طور معادل $e_n \to 0$
از رابطه‌ی II

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha_n)}{f'(x_n)} e_n^2$$

اکنون فرض کنید $|e_0| \leq \delta^*$ طبق تعریف δ^* ، $\rho = \delta^* c(\delta^*) < 1$
بنابراین از رابطه‌ی II

$$|e_1| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha_0)}{f'(x_0)} \right| |e_0||e_0|$$

طبق تعریف $c(\delta)$ داریم که $|e_0| = |r - \alpha_0| < \delta^*$ و $|r - \alpha_0| < \delta^*$ زیرا در تعریف α_0 ، α_n بین x_n و r است. درنتیجه

$$|e_1| \leq \delta^* c(\delta^*) |e_0| \to |e_1| \leq \rho |e_0| < \delta^*$$

درنتیجه به طور مشابه

$$|e_2| \leq \rho |e_1| \leq \rho^2 |e_0|$$

به همین ترتیب مشابه آنچه در III گفته شد

$$|e_n| \leq \rho |e_{n+1}| \leq \rho^n |e_0|$$

چون $\rho < 1$ پس اگر $n \to \infty$ آنگاه $e_n \to 0$
درنتیجه $x_n \to r$

* از قسمت قبل سؤال داده شده در امتحان که نقطه‌ی اولیه چی باشه که دنباله‌ی نیوتن همگرا شه؟ باید اول $c(\delta)$ تعریف کنیم و ...

Subject
Date

سؤال : مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی نیوتن چیست ۱۴

$$II \longrightarrow |e_{n+1}| = \frac{1}{2}\frac{|f''(\alpha_n)|}{|f'(x_n)|} e_n^2$$

با فرض اینکه

$$|e_0| = |x_0 - r| \leq \delta^*$$

آنگاه

$$|e_{n+1}| \leq C(\delta^*) \, |e_n|^2$$

$$\longrightarrow \limsup \left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| = \limsup \left|\frac{x_{n+1}-r}{(x_n-r)^2}\right| \leq C(\delta^*)$$

بنابراین با فرضیات گفته شده دنباله‌ی نیوتن مرتبه‌ی همگرایی‌اش حداقل 2 است.

* قضیه : فرض کنید r ریشه‌ی ساده‌ی f باشد آنگاه اگر f'' در یک همسایگی r پیوسته باشد، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ی تولید شده در روش نیوتن باشد

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; ; \; n = 0, 1, \dots$$

و x_0 به اندازه‌ی کافی به ریشه نزدیک باشد، x_n به r همگرا می‌شود و این همگرایی از مرتبه‌ی 2 است، در واقع $C \geq 0$ وجود دارد برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|e_{n+1}| \leq C |e_n|^2$$

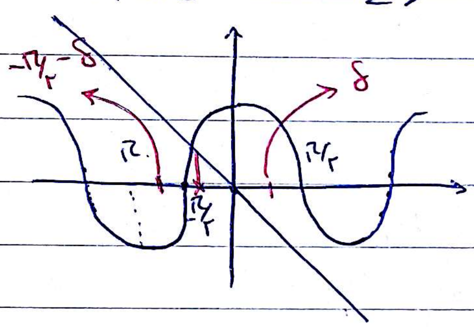
PAPCO

مثال: تابع $f(x)=x+\cos x$ را درنظر بگیرید.

الف) تعداد ریشه های تابع و کوچک ترین بازه ای که ریشه در آن وجود دارد را تعیین کنید.

ب) نقطه شروع از چه بازه‌ای انتخاب شود تا دنباله‌ی نیوتن به ریشه همگرا شود.

پاسخ الف) $x+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-x$



ریشه در بازه $[-\pi/2 , 0]$ قرار دارد.

ب) $f'(x)=1-\sin x$

هیچ گاه $f'(x)$ صفر نمی‌شود (در بازه مورد نظر)

$$d(\delta)=\frac{\frac{1}{2}\max_{t\in[-\pi/2-\delta , \delta]}|f''(t)|}{\min_{t\in[-\pi/2-\delta , \delta]}|f'(t)|}$$ محاسبه می‌کنیم

$f''=-\cos(x)$

$$\Rightarrow d(\delta)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-\sin\delta)}$$

برای همگرایی دنباله نیوتن به ریشه کافی است $\delta\, d(\delta)<1$

$$\frac{\delta}{2(1-\sin\delta)}<1 \rightsquigarrow \delta<2-2\sin\delta$$
$$\delta+2\sin\delta<2$$

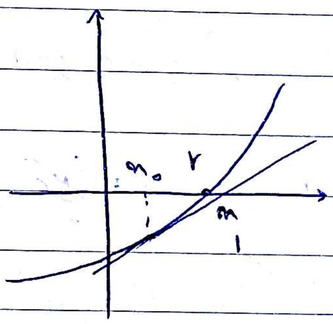
می‌توان $\delta=\pi/6$ را انتخاب کرد در این صورت ۱۰۰٪ همگرا می‌شود. بازه انتخاب نقطه شروع $=\left[-2\pi/3 , \pi/6\right]$

تمرین: بازه‌ای که همگرایی $f(x) = \arctan(x)$ را در نیوتن تضمین کند پیدا کنید.

قضیه: فرض کنید f تابعی است در $C^2(\mathbb{R})$ (دوبار مشتق پذیر و پیوسته روی $\mathbb{R}$) باشد و f صعودی

اکیداً و تقعر هم رو به سمت بالا باشد ($f'(x)>0$ و $f''(x)>0$ برای هر $x\in\mathbb{R}$) اگر f ریشه

داشته باشد (به وضوح یکتاست) و دنباله نیوتن با هر نقطه شروع به این ریشه همگرا می‌شود.



برهان: $e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha_n)}{f'(x_n)} e_n^2 > 0$

(حالتی که $e_{n+1}=0$ می‌شود همگرایی تضمین می‌شود زیرا به خود ریشه

رسیده‌ایم) $\Rightarrow x_{n+1} - r > 0 \Rightarrow x_{n+1} > r$

$\xrightarrow{f \text{ صعودی بودن}} \boxed{f(x_{n+1}) > f(r) = 0 \quad n=0,1,\dots}$ ①

از طرفی $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)>0}{f'(x_n)>0}}$ ②

بنابراین دنباله $\{x_n\}$ نزولی (اکیداً) است پس همگراست. $n\geq 1 \longrightarrow x_{n+1} < x_n$

اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ با حد گرفتن از ② وقتی $n\to+\infty$ و پیوستگی f و f' داریم

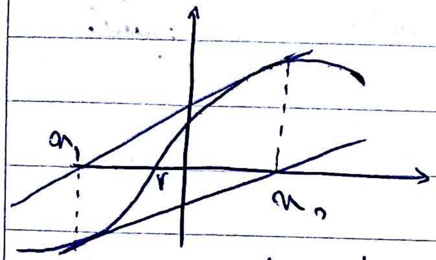
$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)>0} \Rightarrow f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha = r,\ x_n\to r$$

توجه: اشکالاتی که ممکن است در اجرای روش نیوتن برای تعیین ریشه پیش بیاید:

۱) بازه‌ی تضمین کننده همگرایی برای نقطه‌ی شروع همیشه قابل تعیین نیست. در واقع ابتدا از یک روش تکراری دیگر برای پیدا کردن تقریبی از ریشه کمک می‌گیریم و این تقریب را به عنوان نقطه‌ی شروع در روش نیوتن در نظر می‌گیریم.

۲_ اگر در تعیین دنباله نیوتن $f(x_n)=0$ برای یک n، از آن نقطه الگوریتم متوقف می‌شود.

۳_ ممکن است $\{x_n\}$ یک دنباله واگرای نوسانی شود.



۴_ دنباله نیوتن برای تعیین ریشه ساده یک معادله تضمین همگرایی دارد. (با فرضیات مناسب برای f)

اما برای تعیین ریشه‌های تکراری در حالت کلی قابل استفاده نیست.

تمرین: فرض کنید که r ریشه تکراری مرتبه k ام تابع f است. برای تعیین این ریشه از روش نیوتن تعمیم یافته استفاده می‌کنیم:

$$X_{n+1}=X_n-k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n=0,1,2,\ldots$

الف) فرضیات مناسب پیدا کنید (برای f و نقطه شروع) که دنباله x_n به r همگرا شود.

ب) اگر از دنباله نیوتن معمولی استفاده کنیم، چرا ممکن است این دنباله همگرا نشود

ج) نشان دهید در صورت همگرایی x_n به ۲، مرتبه همگرایی حداقل ۲ است.

مثال: برای پیدا کردن ریشه پنجم عدد A از روش نیوتن استفاده کردیم. دنباله نیوتن را تعیین کنید.

$$\sqrt[5]{A}=x \Rightarrow x^5=A \Rightarrow x^5-A=0$$

$$f(x)=x^5-A=0 \rightsquigarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^5-A}{5x_n^4}=\frac{4x_n^5+A}{5x_n^4}$$

subject :

date :

حل دستگاه های غیرخطی به روش نیوتن - رافسون :

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

دستگاه معادلات غیرخطی زیر را درنظر بگیرید.

می خواهیم (x,y) را طوری بیابیم که در دستگاه فوق صدق کند.

فرض کنید $X^{(0)}=(x^{(0)},y^{(0)})$ یک تقریب اولیه جواب باشد. فرض کنید $(x,y)=(x^{(0)}+h,y^{(0)}+k)$

کافی است تقریبی از h و k را بدست بیاوریم (در این جا $h^{(0)}$ و $k^{(0)}$ هستند)

از بسط تیلور مرتبه اول برای f_1 و f_2 را حول $(x^{(0)},y^{(0)})$ بنویسیم:

تقریب خطی

$$0=f_1(x,y)=f_1(x^{(0)}+h^{(0)},y^{(0)}+k^{(0)}) \doteq f_1(x^{(0)},y^{(0)})+h^{(0)}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x^{(0)},y^{(0)})+k^{(0)}\frac{\partial f_1}{\partial y}(x^{(0)},y^{(0)}) \quad (1)$$

و همین طور

$$0=f_2(x,y)=f_2(x^{(0)}+h^{(0)},y^{(0)}+k^{(0)}) \doteq f_2(x^{(0)},y^{(0)})+h^{(0)}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{(0)},y^{(0)})+k^{(0)}\frac{\partial f_2}{\partial y}(x^{(0)},y^{(0)}) \quad (2)$$

از (1) و (2) داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^{(0)},y^{(0)}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^{(0)},y^{(0)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^{(0)},y^{(0)}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^{(0)},y^{(0)}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h^{(0)} \\ k^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -f_1(x^{(0)},y^{(0)}) \\ -f_2(x^{(0)},y^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (*)$$

اکنون فرض کنید

$$X^{(1)}=(x^{(1)},y^{(1)})=(x^{(0)}+h^{(0)},y^{(0)}+k^{(0)})$$

که $k^{(0)}$ و $h^{(0)}$ از حل دستگاه $(*)$ نتیجه می شود. (اگر ماتریس ژاکوبی $J(x^{(0)},y^{(0)})$ معکوس پذیر باشد.)

به طور مشابه تقریب بعدی جواب را که $X^{(2)}=(x^{(2)},y^{(2)})=(x^{(1)}+h^{(1)},y^{(1)}+k^{(1)})$

MAXnote

subject : date :

با حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم .

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(1)}, y^{(1)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x^{(1)}, y^{(1)})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(1)}, y^{(1)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x^{(1)}, y^{(1)})}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^{(1)} \\ k^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ f_2(x^{(1)}, y^{(1)}) \end{bmatrix}$$

اگر $J(x^{(1)}, y^{(1)})$ معکوس پذیر باشد . $X^{(2)}$ تعیین می‌شود به همین ترتیب تقریب های بعدی $X^{(3)}$ و $X^{(4)}$ و ... بدست می‌آیند .

مثال. با استفاده از روش تکراری نیوتن - رافسون و با شروع از نقطه‌ی $X^{(0)}=(0,1)$ دستگاه زیر را حل کرده و تقریب $X^{(2)}$ را برای جواب تعیین کنید.

$$\begin{cases} 4x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow f_1(x,y) = 4x_1^2 - x_2^2 \\ 4x_1x_2^2 - x_1 = 1 \rightarrow f_2(x,y) = 4x_1x_2^2 - x_1 - 1 \end{cases}$$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 8x_1 & -2x_2 \\ 4x_2^2-1 & 8x_1x_2 \end{bmatrix} \qquad X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0,1)$$

$$J(0,1) \cdot \begin{bmatrix} h^{(0)} \\ k^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^{(0)} \\ k^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow h^{(0)} = 1/3$$
$$k^{(0)} = -1/2$$

$$X^{(1)} = (x_1^{(0)} + h^{(0)}, x_2^{(0)} + k^{(0)}) = (-1/2, 4/3)$$

اکنون برای تعیین $X^{(2)}$ دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$J(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \begin{bmatrix} h^{(1)} \\ k^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \\ f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{bmatrix}$$

این دستگاه را حل کنید. (تمرین) $X^{(2)} = (x_1^{(1)} + h^{(1)}, x_2^{(1)} + k^{(1)}) = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$

* کد مطلب این سئوال *

- روش خط قاطع برای حل معادلات غیرخطی (Secant Method)

اگر از دو نقطه‌ی شروع اولیه برای حل این معادله استفاده کنیم و در روش نیوتن به جای

$f'(x)$ از شیب خط قاطع نقاط $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ استفاده کنیم

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

و تعریف می‌کنیم :
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)}$$

یا به طور معادل
$$x_2 = \left(x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)\right) \Big/ f(x_1) - f(x_0)$$

به همین ترتیب با استفاده از x_2 ، x_1 و تعیین خط قاطع $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ تقریب سوم ریشه تعیین می‌شود.
$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

و در حالت کلی دنباله‌ی روش خط قاطع به صورت زیر تعیین می‌شود :
$$X_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad ; \; n = 1, 2, \dots$$

آنالیز همگرایی :

فرضیات زیر را در نظر بگیرید :

1. r یک ریشه‌ی ساده‌ی f باشد یا به عبارتی $f'(r) \neq 0$.
2. f'' در بازه‌ای شامل r پیوسته باشد .

تعریف می‌کنیم $e_n = x_n - r$. از (x) (دنباله‌ی روش خط قاطع)
داریم :
$$e_{n+1} = X_{n+1} - r = \frac{X_{n-1} f(x_n) - X_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - r$$

$$= \frac{(x_{n-1}-r) f(x_n) - (x_n - r) f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1} f(x_n) - e_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \left[\frac{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] e_n \cdot e_{n-1} \quad (I)$$

توجه کنید که

$$f(x_n)/e_n = \frac{f(x_n) - f(r)}{x_n - r} = F(x_n) \;\&\; \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = \frac{f(x_{n-1}) - f(r)}{x_{n-1} - r} = F(x_{n-1})$$

که $F(x) = \dfrac{f(x) - f(r)}{x - r}$.

در نتیجه از (I)

$$e_{n+1} = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (II)$$

طبق قضیه مقدار میانگین

$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = F'(\alpha_n)(x_n - x_{n-1}) \quad (III)$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x-r) - f(x) + f(r)}{(x-r)^2}$$ که

$$\Rightarrow F'(\alpha_n) = \frac{f'(\alpha_n)(\alpha_n - r) - f(\alpha_n) + f(r)}{(\alpha_n - r)^2} \quad (IV)$$

اگر بسط تیلور f را حول α_n بنویسیم آنگاه

$$f(r) = f(\alpha_n) + f'(\alpha_n)(r - \alpha_n) + \tfrac{1}{2} f''(\beta_n)(r - \alpha_n)^2$$

که β_n بین α_n و r است. بنابر (IV)

$$F'(\alpha_n) = \tfrac{1}{2} f''(\beta_n)$$

بنابر III و II

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\beta_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} e_n e_{n-1}$$

Subject
Date

کمدآ بنابر قضیه‌ی میانگین

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = f'(\gamma_n) \quad \text{،} \quad (\text{بین } x_n \text{ و } x_{n-1} \;\; \gamma_n)$$

$$\xrightarrow{*} \quad e_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\beta_n)}{f'(\gamma_n)}\, e_n e_{n-1} \qquad \text{(V)}$$

← که γ_n و β_n بین x_n و x_{n-1} است *

(تمرین) برای اثبات همگرایی مشابه نیوتن گام به گام پیش می‌رود.

قضیه: فرض کنید r ریشه‌ی ثابت f است و $f \in C^2(I)$ که I بازه‌ای شامل r است، آنگاه اگر x_0 و x_1 به اندازه‌ی کافی نزدیک به r انتخاب شوند آنگاه دنباله

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

به r همگرا می‌شود.

مرتبه‌ی همگرایی روش خط قاطع:

$$\text{(VI)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(r)}{f'(r)} \lim_{n\to\infty} e_{n-1} = 0$$

بنابر (VI) مرتبه همگرایی روش بیشتر از ۱ است (ابرخطی همگرایی!)

← لم: $\alpha > 1$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n^{\alpha}} \right| = C \gneq 0$$

(توجه کنید همگرایی در زمان متناهی مدنظر نیست!) (تمرین)

طبق (V) می‌دانیم:

$$\text{(VII)} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} \right| = \frac{1}{2}\,\frac{f''(r)}{f'(r)}$$

تعریف می‌کنیم:

Date

$$S_n := \left|\frac{e_{n+1}}{e_n^{\alpha}}\right| \Rightarrow |e_{n+1}| = S_n\,|e_n^{\alpha}|$$

$$S_{n-1} = \left|\frac{e_n}{e_{n-1}^{\alpha}}\right| \Rightarrow e_n = S_{n-1}\,|e_{n-1}^{\alpha}|$$

$$\Rightarrow |e_{n+1}| = S_n\,|S_{n-1}^{\alpha}\, e_{n-1}^{\alpha^2}|$$

با استفاده از رابطه‌ی (VII)

$$\left|\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n S_{n-1}^{\alpha}\, |e_{n-1}|^{\alpha^2}}{S_{n-1}\,|e_{n-1}|^{\alpha}\,|e_{n-1}|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_n S_{n-1}^{\alpha-1}\,|e_{n-1}|^{\alpha^2-\alpha-1}}{1}$$

بنابراین، اگر $\alpha^2-\alpha-1<0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n S_{n-1}^{\alpha-1}}{|e_{n-1}|^{-\alpha^2+\alpha+1}} = \infty$ پس $\alpha^2-\alpha-1\geq 0$

در واقع فقط در حالت خاص $\alpha^2-\alpha-1>0$. (زمانی که $f''(r)=0$)

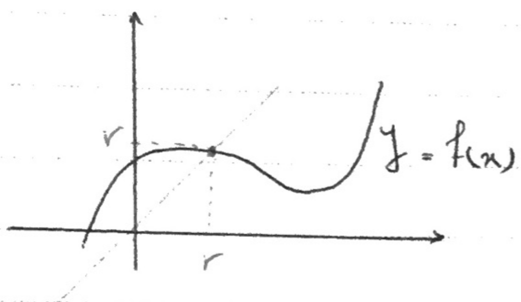
$$\alpha^2-\alpha-1=0 \rightarrow \alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \rightarrow \alpha = 1.6\,.$$

تبصره: اگر فرضیات همگرایی به ریشه در روش خط قاطع برقرار باشد مرتبه همگرایی روش حداقل $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ است.

Subject جلسه یازدهم
Date 1395 . 12 . 15

نقطه‌ی ثابت و تکرار تابعی :

تعریف : r را نقطه‌ی ثابت تابع f گویند اگر $r \in D_f$ ، $f(r) = r$



توجه : در روش نیوتن از دنباله‌ی زیر برای تعیین ریشه استفاده کردیم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

از طرفی اگر $f \in C'(r-\delta, r+\delta)$ $(\delta > 0)$ ، $f'(r) \neq 0$ آنگاه r

ریشه‌ی f است ($f(r) = 0$) اگر و تنها اگر $r = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$

بنابراین r ریشه‌ی f است ($f(r) = 0$) اگر و تنها اگر ، r نقطه‌ی ثابت

$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ است . ($r = F(r)$)

بنابراین می‌توانیم به جای پیدا کردن ریشه f ، نقطه‌ی ثابت F را پیدا کنیم .

در واقع اگر $x_n \to r$ ، (در روش نیوتن) آنگاه نقطه‌ی ثابت تابع F بدست آمده

است زیرا :

$$x_n \to r \quad ; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies r = r - \frac{f(r)}{f'(r)} = F(r) .$$

در روش نیوتن دنباله‌ی $x_{n+1} = F(x_n)$ را داریم که $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

و $x_n \to r$ (اگر فرضیات مناسب باشند.)

که r نقطه‌ی ثابت F است.

مثال: روش استیفنسون برای پیدا کردن ریشه‌ی یک معادله غیرخطی.

اگر در فرمول دنباله‌ی نیوتن به جای $f'(x)$ از تعریف زیر استفاده کنیم:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

دنباله‌ی استیفنسون به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(f(x_n))^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

(تمرین دلخواه)

قضیه: اگر r ریشه‌ی ساده f باشد و $f \in C^2$ در یک همسایگی r و x_0 به اندازه کافی به ریشه‌ی r نزدیک باشد آنگاه $x_n \to r$ و مرتبه‌ی همگرایی حداقل 2 است.

با فرض $G(x) = x - \frac{(f(x_n))^2}{\varepsilon + f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$ $(\varepsilon < 0)$ دنباله $x_{n+1} = G(x_n)$ اگر فرضیات قضیه برقرار باشد به ریشه‌ی f (r) همگراست. (r ریشه‌ی f است $\longleftrightarrow$ r نقطه‌ی ثابت G باشد)

پس $x_n \to r$

r نقطه‌ی ثابت G.

مثال: می‌خواهیم ریشه‌ی بزرگ $x^2 - 6x + 1 = 0$ را تعیین کنیم. (فرض کنید r ریشه‌ی مورد نظر باشد.)

$$r^2 - 6r + 1 = 0$$

r می‌تواند نقطه‌ی ثابت هریک از توابع F_1 و F_2 باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_1(x) = \frac{x^2+1}{6} \quad : \quad 6r = 1 + r^2 \rightarrow r = \frac{1+r^2}{6}$$

$$F_2(x) = \sqrt{6x-1} \quad : \quad r^2 = 6r - 1 \rightarrow r = \sqrt{6r-1}$$

سؤال: آیا می‌توانیم بگوییم دنباله‌های زیر به ریشه‌ی r همگرا می‌شود؟

x_0 نقطه‌ی شروع $\quad x_{n+1} = F_1(x_n) = \frac{x_n^2+1}{6}$

y_0 نقطه‌ی شروع $\quad y_{n+1} = F_2(y_n) = \sqrt{6y_n - 1}$

چون F_1 و F_2 پیوسته هستند مثلاً اگر $x_n \rightarrow \alpha$ که

$\Rightarrow \alpha = F_1(\alpha) \Rightarrow$ α نقطه‌ی ثابت F_1

در حالت کلی اگر r نقطه ثابت F باشد آنگاه با فرض

$x_{n+1} = F(x_n)$ $\quad$ x_0 نقطه‌ی شروع

۱- x_0 از چه محدوده ای انتخاب شود تا همگرایی تضمین شود.

۲- آیا انتخاب x_0 برای همگرایی کافیست یا برای F ویژگی‌های خاصی لازم است تا همگرایی تضمین شود؟

تعریف نگاشت انقباضی:

فرض کنید $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، F را یک نگاشت انقباضی گویند اگر $1 > \lambda > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in D$

$$|F(x) - F(y)| \leq \lambda |x - y|$$

ب.ن: هر تابع انقباضی، پیوسته است.

Date

توجه: اگر F مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in D$ ، $|F'(x)| \le \lambda < 1$

آنگاه F یک نگاشت انقباضی است. (D یک بازه)

برهان: $\dfrac{F(x) - F(y)}{x - y} = F'(\alpha)$ $\quad x \neq y \quad x, y \in D$

که α بین x و y است. (قضیه مقدار میانگین)

$$\to |F(x) - F(y)| = |F'(\alpha)||x - y| \le \lambda |x - y| \quad (\lambda < 1)$$

قضیه نگاشت انقباضی (قضیه همگرایی نقطه ثابت.)

فرضیات زیر را درنظر بگیرید:

1. C یک مجموعه بسته است.
2. $F : C \to C$ یک نگاشت انقباضی است
3. $x_{n+1} = F(x_n)$

پ.ن: این شرایط کافی است برای همگرایی و لازم نیست | یعنی ممکن است یکی از شروط برقرار نباشد ولی همگرایی برقرار باشد.

اگر این سه فرض برقرار باشد، F یک نقطه‌ی ثابت منحصربه‌فرد دارد و اگر $x_0 \in C$

آنگاه $\{x_n\}$ به این نقطه ثابت $r \in C$ همگراست.

برهان: $|x_{n+1} - x_n| = |F(x_n) - F(x_{n-1})|$

$$\xrightarrow[\exists \lambda < 1]{F \text{ انقباضی}} \le \lambda |x_n - x_{n-1}| = \lambda |F(x_n) - F(x_{n-1})|$$

$$\le \lambda^2 |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$\le \lambda^n |x_1 - x_0|$$

از طرفی

$$x_n = \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{\alpha_n} + \underbrace{(x_{n-1} - x_{n-2})}_{\alpha_{n-1}} + \cdots + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\alpha_1} + \underbrace{x_0}_{\alpha_0}$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$$

اکنون نشان می‌دهیم $\{x_n\}$ همگراست. یا به طور معادل سری $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i$ همگراست

وطبق قضیه‌ای در ریاضی عمومی کافیست نشان دهیم که سری همگرای مطلق است.

اما،

$$\sum_{i=0}^{n} |\alpha_i| \leqslant \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} |x_1 - x_0| \leqslant \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} |x_1 - x_0|$$

$$= \frac{|x_1 - x_0|}{1-\lambda} + \alpha_0 \quad (*)$$

با فرض $\beta_n = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|$ ، β_n یک دنباله‌ی صعودی وطبق * کراندار است

در نتیجه همگراست، بنابراین $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ نیز همگراست و درنتیجه $\{x_n\}$ نیز همگراست

فرض کنید $x_n \to \alpha$ که از $x_{n+1} = F(x_n)$ $(**)$ و $x_0 \in C$ پس $x_1 \in C$

(زیرا $F: C \to C$) و درنتیجه $x_n \in C \;;\; \forall n$ و از بسته بودن C داریم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \in C$$

چون F انقباضی است پس پیوسته است پس با حدگرفتن از ** وقتی $n \to \infty$ داریم: $F(\alpha) = \alpha$.

پس α نقطه‌ی ثابت F است. ($x_n \to \alpha$ & $\alpha \in C$)

اکنون نشان می‌دهیم که α تنها نقطه‌ی ثابت F است.

برهان خلف: اگر $\beta \neq \alpha$ نیز نقطه‌ی ثابت F باشد پس

$$|\beta-\alpha| = |F(\beta)-F(\alpha)| \leq \lambda|\beta-\alpha|$$

$$(\lambda<1)$$

$$\rightarrow |\beta-\alpha| < |\beta-\alpha| \quad \times$$

مثال: برای پیدا کردن ریشه بزرگتر $f(x) = x^2 - 6x + 1$ از 2 دنباله زیر

استفاده می‌کنیم:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+1}{6} \qquad y_{n+1} = \sqrt{6y_n - 1}$$

فرضیات همگرایی نقطه ثابت را برای این 2 دنباله بررسی کنید و درصورت امکان بازه‌ای

تعیین کنید که اگر نقطه شروع از این بازه انتخاب شود، همگرایی به جواب معادله (ریشه بزرگتر

معادله) تضمین شود.

$f(0)>0$ & $f(1)<0 \rightarrow$ ریشه ای بین $(0,1)$ وجود دارد.

$f(5)<0$ & $f(6)>0 \rightarrow$ " " " $(5,6)$ "

چون ما دنبال ریشه‌ی بزرگتر هستیم بازه‌ی $(5,6)$ را درنظر می‌گیریم.

ویژگی اول: آیا $F_1: C \to C$ است؟

$$5 \leq x \leq 6$$

$$\frac{26}{6} \leq F_1(x) \leq \frac{37}{6} \quad ; \quad F_1 : C \not\to C$$ نیست!

ویژگی دوم: انقباضی بودن:

$$|F_1'(x)| = \left|\frac{x}{3}\right| \qquad 5 \leq x \leq 6 \rightarrow \frac{5}{3} \leq \left|\frac{x}{3}\right| \leq 2$$

F_1 انقباضی هم نیست.

دنباله $\{y_n\}$

ویژگی اول : $5 \leqslant x \leqslant 6 \rightarrow 5 < \sqrt{29} \leqslant \sqrt{6x-1} \leqslant \sqrt{35} < 6$

در نتیجه ویژگی اول برقرار است .

ویژگی دوم : (انقباضی بودن .)

$F_2'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x-1}}$ $\quad \frac{3}{6} \leqslant |F_2'(x)| \leqslant \frac{3}{5}$

$\rightarrow |F_2'(x)| < \underbrace{\frac{3}{5}}_{\lambda} < 1$

بنابراین اگر $y_0 \in (5,6)$ دنباله‌ی $\{y_n\}$ قطعاً به ریشه f همگراست .

$\leftarrow$ مرتبه‌ی همگرایی n از مرتبه‌ی خطی است .

PAPCO

مثال: فرض کنید $a>0$، آیا $A=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}$ آیا همگرا است؟

اگر همگراست، مقدار همگرایی آن چیست؟

$$(*)\ x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\ ,\ x_0=0$$

برای اثبات همگرایی باید ثابت کنیم $\{x_n\}$ همگراست.

ابتدا فرض کنید $\{x_n\}$ همگراست و $\lim_{n\to\infty} x_n=l$.

از طرفین $(*)$ حد می‌گیریم:

$$l=\sqrt{a+l}\ \rightarrow\ l^2-l-a=0\ \rightarrow\ l=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگراست.

فرض کنید $F(x)=\sqrt{a+x}$ قرار دهید: $C=[0,+\infty)$

$$0\leq x<\infty\ \rightarrow\ \sqrt{a}\leq F(x)<\infty$$

پس $F:C\to C$ برقرار است. پس دو مورد از فرضیات قضیه‌ی نگاشت انقباضی برقرار است.

بررسی انقباضی بودن F:

$$|F'(x)|=\left|\frac{1}{2\sqrt{a+x}}\right|$$

اکنون دو حالت را در نظر می‌گیریم: ① $a\geq\frac{1}{2}$ ② $a<1$

در حالت اول: اگر $x\in[0,+\infty)$ پس $|F'(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

و در نتیجه $a\geq\frac{1}{2}$، $F(x)=\sqrt{a+x}$ روی $[0,+\infty)$ انقباضی است

و دنباله $x_0=0$ $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ به l همگراست

Subject .... Date ....

(دقت کنید برای هر $x \in [0, +\infty)$ نیز این دنباله قضیه نگاشت انقباضی به ℓ همگراست.)

حالت دوم: $a < \frac{1}{2}$،

دنباله‌ی $y_0 = 0$; $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$ را در نظر بگیرید که به وضوح دنباله‌ای اکیداً صعودی است، به علاوه با فرض $x_0 = 0$; $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n}$ طبق قسمت اول، x_n همگراست و چون $a < \frac{1}{2}$ پس $y_n < x_n$ اما $\{x_n\}$ هم تابعی صعودی و همگرا مثلاً به (S) است.

در نتیجه $|y_n| < \lim x_n = S$ بنابراین $\{y_n\}$ کراندار است و همچنین صعودی در نتیجه همگراست.

تحلیل خطای روش تکراری نقطه ثابت برای پیدا کردن نقطه ثابت تابع F.

فرض کنید $x_{n+1} = F(x_n)$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ ، F نقطه‌ی ثابت r که $e_n = x_n - r$

همچنین فرض کنید $F \in C^2(I)$ که I بازه‌ی باز شامل r است.

با فرض این که $x_n \to r$ داریم:

$$
* \begin{cases} e_{n+1} = x_{n+1} - r = F(x_n) - r \\ = F'(r) \cdot (x_n - r) + \frac{1}{2} F''(\alpha_n)(x_n - r)^2 \end{cases}
$$

که از قضیه تیلور حول نقطه‌ی r و در نقطه‌ی x_n بدست می‌آید. و α_n بین x_n و r است. طرفین * را در e_n تقسیم کرده، $n \to \infty$ میل می‌دهیم. و در نتیجه

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = |F'(r)|$$

بنابراین اگر $|F'(r)|<1$ آنگاه مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ حداقل خطی است

قضیه: فرض کنید $F\in C^k(I)$ که I بازه‌ی بازشامل نقطه‌ی r باشد

و r نقطه‌ی ثابت F، یعنی $r=F(r)$، اگر
$$F'(r)+\dots+F^{(k-1)}(r)=0$$
ولی $F^{k}(r)\neq 0$

آنگاه، در صورتی که دنباله‌ی $x_{n+1}=F(x_n)$ به r همگرا شود، این همگرایی

دقیقاً از مرتبه‌ی k است.

برهان:
$$e_{n+1}=x_{n+1}-r=F(x_n)-r=$$
$$F'(r)(x_n-r)+\frac{1}{2}F''(r)(x_n-r)+\dots+\frac{1}{(k-1)!}F^{(k-1)}(r)(x_n-r)^{k-1}$$
$$+\frac{1}{k!}F^{(r)}(\beta_n)(x_n-r)^{k}$$

که از بسط تیلور مرتبه‌ی $k=1$، F حول نقطه‌ی r در نقطه x_n نتیجه می‌شود و β_n

بین x_n و r است. از آنجا که $j=0,1,\dots,k-1$ و $F^{(j)}(r)=0$

خواهیم داشت:
$$e_{n+1}=\frac{1}{k!}F^{(k)}(\beta_n)e_n^{k} \quad **$$

در نتیجه چون β_n بین x_n و r است و $x_n\to r$ پس $\beta_n\to r$

و در نتیجه طبق **
$$\lim\left|\frac{e_{n+1}}{e_n^{k}}\right|=\frac{1}{k!}\left|F^{(k)}(r)\right|>0$$

بنابراین مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ دقیقاً برابر k است.

Subject .... Date ....

توجه: اگر در فرض قضیه $F^{(k)}(r) \neq 0$ را نداشته باشیم آنگاه مرتبه‌ی همگرایی حداقل k است.

توجه: اگر $x_n \to r$ ، $x_{n+1} = F(x_n)$ و $F(r) = r$

الف) اگر $F'(r) = 0$ مرتبه‌ی همگرایی حداقل 2 است.

ب) " $F'(r) = F''(r) = 0$ " " " 3 " .

ج) اگر $F'(r) = F''(r) = 0$ و $F'''(r) \neq 0$ مرتبه‌ی همگرایی دقیقاً 3 است.

مثال: دنباله‌ی نیوتن را در نظر بگیرید

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فرض می‌کنیم $x_n \to r$ که r ریشه‌ی ساده‌ی f است.

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

$$F(x) = x - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

با استفاده از قضیه بیان شده می‌خواهیم مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ را تعیین کنیم:

$$F'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow$$

$$F'(x) = \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} = 0$$

$$F'(r) = \frac{f(r).f''(r)}{(f'(r))} = 0 \longrightarrow$$ بنابراین مرتبه‌ی همگرایی حداقل 2 است.

Subject .... Date ....

مثال: دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2+3R)}{3x_n^2+R} \quad ; R>0$$

فرض کنید $\{x_n\}$ همگراست، مرتبه‌ی همگرایی آن را تعیین کنید.

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

$$F(x) = \frac{x(x^2+3R)}{3x^2+R}$$

چون حد وجود دارد، فرض کنید $x_n \to l$، پس

$$l = \frac{l^3+3Rl}{3l^2+R} \to 3l^3+Rl = l^3+3Rl \to 2l^3 = 2Rl$$
$$\to l = \sqrt{R}$$

$x_n \to R$ که $\sqrt{R}$ نقطه‌ی ثابت F است.

$$F'(\sqrt{R}) = 0 \quad \& \quad F''(R) = 0 \quad \& \quad F'''(R) \neq 0 \implies$$

مرتبه‌ی همگرایی دقیقاً 3 است.

Subject جلسه‌ی سیزدهم
Date 95.12.22

تقریب توابع

درون یابی توسط چند جمله ای ها:

فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاطی متمایز است و $y_0, y_1, \dots, y_n$ مقادیر حقیقی دلخواه، تابع جدولی زیر را درنظر بگیرید.

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n

P را چند جمله ای درونیاب از درجه حداکثر n برای این تابع جدولی گویند اگر 2 ویژگی زیر را داشته باشد:

1. P_n یک چند جمله ای از درجه‌ی حداکثر n است که
2. P_n از نقاط (x_i, y_i) و $i=0,1,\dots,n$ می گذرد

یعنی: $P_n(x_i)=y_i \quad i=0,1,\dots,n$.

قضیه: فرض کنید n عددی صحیح و نامنفی است، همچنین $x_0, \dots, x_n$ مقادیر حقیقی و متمایز دارد ($y_0, \dots, y_n$ مقادیر حقیقی دلخواه هستند.)

آنگاه، یک چند جمله ای درون یاب یکتا از درجه حداکثر n برای تابع جدولی زیر

x_i	x_0	$\dots$	x_n
y_i	y_0	$\dots$	y_n

وجود دارد.

برهان:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$P_n(x_i) = y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

در واقع مسأله پیدا کردن چند جمله‌ای درون یاب حاصل این دستگاه است و این دستگاه، جواب یکتا دارد. (تمرین)

برهان دوم:

برهان وجود: با استقرا روی n، قضیه را ثابت می‌کنیم، ابتدا نشان می‌دهیم برای $n=0$ حکم مسأله برقرار است، کافی است نشان دهیم که یک چند جمله‌ای از درجه‌ی صفر وجود دارد که تابع جدولی زیر را درون یابی کند. این چند جمله‌ای را P_0 می‌نامیم. P_0

x_i	x_0
y_i	y_0

می‌نویسیم که: $P_0(x) = y_0$.

اکنون فرض کنید حکم قضیه برای $n=k$ برقرار است و برای $n=k+1$ آن را ثابت کنید. بنابراین باید ثابت کنیم که برای هر تابع جدولی به فرم زیر:

x_i	x_0	$\cdots$	x_{k+1} (*)
y_i	y_0	$\cdots$	y_{k+1}

یک چند جمله‌ای P_{k+1} از درجه‌ی حداکثر $k+1$ وجود دارد که

$P_{k+1}(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1$

چون حکم قضیه برای $n=k$ برقرار است، در نتیجه یک چند جمله‌ای P_k از درجه‌ی حداکثر k وجود دارد که درون یاب تابع جدولی زیر است:

x_i	x_0	$\cdots$	x_k
y_i	y_0	$\cdots$	y_k

Subject
Date

در واقع

$P_k(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \dots, k$

اکنون P_{k+1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(**)\quad P_{k+1}(x) = P_k(x) + c_{k+1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

کافیست c_k را تعیین کنید به طوری که P_{k+1} چند جمله‌ای درون‌یاب برای جدول (*) باشد. به وضوح برای $i = 0, \dots, k$

$$P_{k+1}(x_i) = P_k(x_i) = y_i$$

با تعیین c_k مناسب P_{k+1} می‌تواند از (x_{k+1}, y_{k+1}) نیز بگذرد.

در (**)، $x = x_{k+1}$ قرار می‌دهیم، درنتیجه:

$$P_{k+1}(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1}) + \prod_{i=0}^{k}(x_{k+1} - x_i)$$

برای آن که P_{k+1} از (x_{k+1}, y_{k+1}) بگذرد

$$P_{k+1}(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$$c_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{\prod_{i=0}^{k}(x_{k+1} - x_i)}$$

درنتیجه،

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + c_{k+1}(x - x_0)\dots(x - x_k)$$

چند جمله‌ای درون‌یاب برای تابع جدولی زیر است:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_{k+1}
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_{k+1}

PAPCO

برهان یکتایی: فرض کنید p_n ، q_n هر دو چند جمله‌ای های درون یاب از درجه‌ی حداکثر n برای جدول زیر هستند

x_i	x_0	$\dots$	x_n
y_i	y_0	$\dots$	y_n

در نتیجه $\deg(p_n) = \deg(q_n) \leq n$ و

$$p_n(x_i) = y_i$$
$$q_n(x_i) = y_i \qquad i=0,1,\dots,n$$

در نتیجه،

$$Q(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

نیز یک چند جمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n است که

$$Q(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = 0 \qquad i=0,1,\dots,n$$

پس Q ، $n+1$ ریشه متمایز دارد که تناقض است.

تعریف: p_n را چند جمله‌ای درون‌یاب از درجه حداکثر n برای تابع در نقاط گرهی $x_0, \dots, x_n$ می‌گوییم، اگر p_n چند جمله‌ای درون یاب برای تابع جدولی زیر باشد

x_i	x_0	$\dots$	x_n
y_i	f_0		f_n

که $f(x_i) = y_i$ ، $i=0,1,\dots,n$.

تعیین چند جمله‌ای درون یاب تابع f به کمک تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

می‌خواهیم p_n (چند جمله‌ای درون یاب f) در نقاط $x_0, \dots, x_n$ (متمایز) را تعیین کنیم. مطابق با اثبات قضیه وجود پیش می‌رویم:

Subject
Date

تابع جدولی متناظر به صورت مقابل است :

x_i	x_0	x_1	$\dots$	y_n
y_i	f_0	f_1	$\dots$	f_n

$$P_0(x) = f_0 \longrightarrow$$ چندجمله‌ای درونیاب جدول

x_i	x_0
y_i	f_0

$$P_1(x) = P_0(x) + c_1(x - x_0) \longrightarrow$$ چندجمله‌ای درون‌یاب جدول

x_i	x_0	x_1
y_i	f_0	f_1

$$c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$P_2(x) = P_0(x) + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$c_2 = f[x, x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = f_0 + c_1(x - x_0)$$
$$+ c_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$\vdots$$
$$+ c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

که همان چند جمله‌ای مطلوب است.

$$c_n = f[x_0, \dots, x_n]$$
$$c_i = f[x_0, \dots, x_i]$$

در واقع ،

$$P_n = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0)$$
$$\vdots$$
$$+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$$f[x_0, \dots, x] = f[x, \dots, x_0]$$

$$\rightarrow \quad P_2 = f_0 + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$P_2 = f_2 + f[x_2, x_1, x_0](x - x_2) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_2)(x - x_0)$$

در 2 چند جمله‌ای تعین‌شده باید ضرایب x^2 در هر 2 برابر باشد

یعنی $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0]$

قضیه: مجموعه ای از نقاط متمایز $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ را در نظر بگیرید.

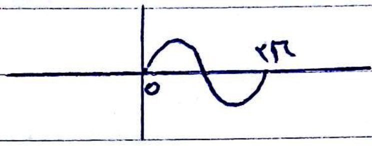
اگر $X = \{y_0, \dots, y_n\}$ جایگشتی از X باشد یعنی T (1-1) و پوشا از X به X داشته باشیم که $Tx_i := y_i$ $i = 0, 1, \dots, n$.

آنگاه، $f[x_0, \dots, x_n] = f[y_0, \dots, y_n]$. (تمرین)

جلسه چهاردهم ۱۵/۱/۹۶

Subject .... Date ....

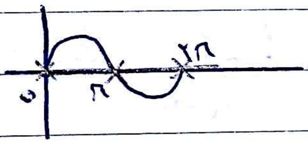
$f(x) = \sin x$



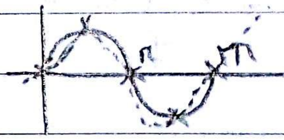
p_n را چندجمله‌ای درونیاب از درجه حداکثر n برای تابع f در نقاط متمایز $x_0, \dots, x_n$ گوییم اگر p_n چندجمله‌ای درونیاب برای جدول زیر باشد.

x_i	x_0	$x_1 \; \dots$	x_n
f_i	$f(x_0)$		$f(x_n)$

سؤال: چندجمله‌ای درونیاب از درجه حداکثر ۲ برای $f(x)=\sin x$ در نقاط $x_0=0,\ x_1=\pi,\ x_2=2\pi$ چیست؟



$p_2(x) = 0$

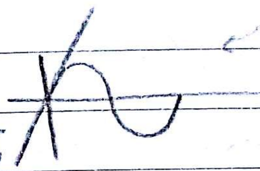


$p_4(x) =$

باید چندجمله‌ای شود.

مثلاً می‌تواند درجه ۳

$f(x) = \sin x \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$



تقریب خوبی نیست

Π_k: مجموعه همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر k

این قسمت مربوط به درس نیست!

نرم $\|\cdot\|$ ، $V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0$

$\|x\| = 0 \longleftrightarrow x = 0$

$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Subject .... Date ....

$f \in C^0[0, 2\pi]$ $\qquad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$

به دنبال نزدیک‌ترین تابع به ... می‌گردیم:

$$\min \|\sin x - A_4 x^4 + \dots + A_1 x + A_0\|_\infty$$

$A_0, A_1, \dots, A_4$ را به عنوان ضرایب ... حاصل کنیم.

$$\|f\|_2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

یادآوری

نحوه تعیین چندجمله‌ای درونیاب

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1		f_n

$P_0(x) = f_0$

$P_1(x) = f_0 + c_1(x - x_0)$

$P_1(x_1) = f_1 \longrightarrow f_1 = f_0 + c_1(x_1 - x_0)$ $\qquad c_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

$P_2(x) = P_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$ $\qquad c_2 = \dfrac{f_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$

$\vdots$

P_{n-1}

$P_n(x) = P_{n-1}(x) + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$

$$P_n(x) = f_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

تمرین: اگر $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ جایگشتی از $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = X$ باشد یعنی $T: X \to X$ یک به یک (1-1) و پوشا است که $Tx_i = y_i$, $i = 0, \dots, n$ نشان دهید

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[y_0, y_1, \dots, y_n]$$

تفاضلات تقسیم شده نیوتن :

$$f[x_i, x_j] = \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i}$$

$P_0 = f_i$

$P_1 = f_i + \alpha(x - x_i)$

$$\downarrow$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i}$$

مثال

$f[x_i, x_j, x_k] = ?$

$f[x_i, x_j, x_k, x_p] = ?$

قضیه : فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، a و b نقاط متمایز هستند و f تابعی دلخواه است آنگاه

$$f[a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[a, x_1, \ldots, x_n] - f[b, x_1, \ldots, x_n]}{a - b}$$

مثال :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

برهان قضیه : فرض کنید P چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و a و b

Q_1 " " " " " $a, x_n, \ldots, x_2, x_1$

و Q_2 " " " " " $b, x_n, \ldots, x_2, x_1$ باشد .

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x) + f[a, b, x_1, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)(x - a) \\ P(x) = Q_2(x) + f[a, b, x_1, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)(x - b) \end{cases}$$

رابطه دوم را از رابطه اول کم می‌کنیم

$$* \quad \underbrace{Q_2(x)}_{\text{درجه } n} - \underbrace{Q_1(x)}_{\text{درجه } n} = f[a, b, x_1, \ldots, x_n]\underbrace{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{n \text{ جمله}}(b - a)$$

ضریب بزرگترین جمله هر دو طرف برابر است .

طرفین این رابطه چندجمله‌ای های از درجه حداکثر n هستند و $Q_1(x) = f(x_1) + f[x_1, x_2](x - x_1)$

$+ \ldots + f[x_1, x_2, \ldots, x_n, a](x - x_1)\ldots(x - x_n)$

$$Q_2(x) = f(x_1) + \dots + f[x_1, \dots, x_n, b](x - x_1) \dots (x - x_n)$$

در رابطه * ضریب بزرگترین درجه چندجمله‌ای سمت راست = ضریب بزرگترین درجه چندجمله‌ای سمت چپ

$$f[b, x_1, \dots, x_n] - f[a, x_1, \dots, x_n] = f[a, b, x_1, \dots, x_n]\,(b - a)$$

$$\longleftrightarrow \quad f[a, b, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[b, x_1, \dots, x_n] - f[a, x_1, \dots, x_n]}{b - a}$$

نحوه تعیین تفاضلات تقسیم شده نیوتن مورد نیاز در تعیین چندجمله‌ای درونیاب :

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \alpha$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \beta$	$\frac{\beta - \alpha}{x_3 - x_0}$

Scanned by CamScanner

و در نتیجه چندجمله‌ای درونیاب از درجه حداکثر ۳ به صورت

$$P_3(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

مثال: برای تابع جدولی زیر چندجمله‌ای درونیاب از درجه حداکثر ۳ را بدست آورید.

x_i	-1	1	2	3
f_i	0	1	2	-1

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
-1	0			
1	1	$\frac{1}{2}$		
2	2	1	$\frac{1-\frac{1}{2}}{2-(-1)} = \frac{1}{6}$	
3	-1	-3	$\frac{-3-1}{3-1} = -2$	$\frac{-2-\frac{1}{6}}{3-(-1)} = -\frac{13}{24}$

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{6}(x+1)(x-1) - \frac{13}{24}(x+1)(x-1)(x-2)$$

Subject جلسهٔ پانزدهم
Date 96 . 01 . 20

مثال ۵: چند جمله ای درون یاب از درجه‌ی حداکثر 3 را به کمک معادلات تقسیم شده برای تابع جدولی زیر بنویسید .

x_i	-2	1	0	3
f_i	0	-1	2	1

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-2	0		
1	-1	$f[x_0,x_1] = \frac{-1-0}{1-(-2)} = \frac{-1}{3}$	
0	2	$f[x_1,x_2] = \frac{2-(-1)}{0-1} = 3$	$^{*}f[x_0,x_1,x_2] = \frac{-3-(\frac{-1}{3})}{0-(-2)} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$
3	1	$f[x_2,x_3] = \frac{1-2}{3-0} = \frac{-1}{3}$	$^{**}f[x_1,x_2,x_3] = \frac{-1/3+3}{3-1} = \frac{4}{3}$
			$^{***}f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{8}{15}$

$$* \quad f[x_0, x_1, x_2) = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$** \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$*** \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$\Rightarrow P_3(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$= 0 + \frac{1}{3}(x+2) - \frac{8}{6}(x+2)(x-1) + \frac{8}{5}(x+2)(x-1)x$$

دقیق چند جمله ای درون یاب با استفاده از چند جمله ای های لاگرانژ .

تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

را در نظر بگیرید . می خواهیم

چند جمله ای های از درجه n ، $l_0(x)$ ، $l_1(x)$ ، ... ، $l_n(x)$ را تعیین کنیم

به طوری که
$$P_n(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \dots + f_n l_n(x)$$

Subject

Date

چند جمله ای درونیاب از درجه ی حداکثر n برای تابع جدولی باشد ،
در این صورت کافی است ، $l_i(x)$ برای هر $i = 0, \dots, n$ به صورت زیر
تعریف شود .

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

در واقع $l_i(x)$ ؛ $i = 0, 1, \dots, n$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)}$$

$1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0,\dots,n \\ j \neq i}} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) .$$

$$l_n(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_{n-1})}$$

ونهایتاً

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, l_i(x)$$

مثال : با کمک چند جمله ای های لاگرانژ جمله ای درونیاب از درجه ی حداکثر 2 را
برای تابع جدولی زیر تعین کنید .

x_i	0	1	3
f_i	-1	4	6

Subject
Date

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{3}$$

$$l_1(x) = \frac{x(x-3)}{-2}$$

$$l_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$P_2(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x) = \frac{-1}{3}(x-1)(x-3) + \left(\frac{-4}{2}\right)(x-3)x + \frac{6}{2}(x-1)x$$

سؤال : نشان دهید ، $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$.

* تابع جدولی زیر را درنظر بگیرید ،

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_i	1	1	$\dots$	1

به دو طریق چندجمله‌ای درون‌یاب برای این تابع جدولی را تعیین کنید .

* نکته : اگر q چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n باشد و $m \geq n$ آنگاه ، چندجمله‌ای درون‌یاب از درجه حداکثر m برای q در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_m$ دلخواه ، خود q است یعنی $P_m(x) = q(x)$.

** بنابر نکته گفته شده چندجمله‌ای درون‌یاب P_n برای جدول * ، $P_n(x) = 1$ است.

اما اگر بخواهیم چندجمله‌ای درون‌یاب را با استفاده از چندجمله‌ای های لاگرانژ استفاده کنیم ، خواهیم داشت :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \quad ***$$

از یکتایی چندجمله‌ای درون‌یاب ، ** و *** خواهیم داشت : $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$.

Subject
Date

خطای چندجمله ای درون یاب :

تعمیم قضیه رل: فرض کنید $f \in C^n[a,b]$ و $x_0, x_1, \dots, x_n$ ، $n+1$ ریشه‌ی متمایز f در $[a,b]$ هستند. آنگاه $\alpha \in I(x_0, \dots, x_n)$ وجود دارد که

$$f^{(n)}(\alpha) = 0$$ (تعمیم قضیه رل)

تمرین : قضیه را با استفاده از استقرا ثابت کنید.

قضیه خطای چندجمله‌ای درونیاب : فرض کنید $f \in C^{n+1}[a,b]$ و $x_0, \dots, x_n$ نقاطی متمایز در $[a,b]$ هستند ، اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در این نقاط باشند ، آنگاه برای هر $x \in I(x_0, \dots, x_n)$ ، $\alpha_x \in I(x_0, \dots, x_n)$ وجود دارد به طوریکه

$$* \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

برهان : دو حالت را درنظر میگیریم ، حالت 1. x یکی از نقاط گرهی است
2. x نقطه‌ی گرهی نیست.

در حالت اول به وضوح طبق تعریف چندجمله ای درونیاب $f(x) = P_n(x)$. درنتیجه سمت راست و چپ $*$ ، به ازای هر α_x برابر صفر است ، و درنتیجه رابطه‌ی $*$ برقرار است .

حالت دوم : x نقطه‌ی گرهی نباشد تابع کمکی φ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$** \quad \varphi(t) = f(t) - P_n(t) - c(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)$$

به وضوح $x_0, x_1, \dots, x_n$ ریشه‌های φ هستند . با تعریف

$$*** \quad c = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}$$

درنتیجه φ ، $n+2$ ریشه $x, x_0, \dots, x_n$ دارد .

Subject
Date

بنابر قضیه رل تعمیم یافته وجود دارد که :

$$\alpha_x \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi^{(n+1)}(\alpha_x) = 0$$

از ** نتیجه می‌گیریم :

$$f^{(n+1)}(\alpha_x) - c\,(n+1)! = 0$$

$$\rightarrow \quad c = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!} \quad (****)$$

در نتیجه بنابر *** و **** :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}(x - x_0)\dots(x - x_n).$$

سوال ۳) $X_{n+1} = 2-(1+C)X_n + CX_n^3$ ، به ازای مقادیری از C دنباله به α همگرا می شود. $C=?$

پاسخ: $\alpha = F(\alpha)$, α , $X_0, X_1, \dots, X_n$, $X_{n+1} = F(X_n)$, $n=0,1,\dots$

α_n بین α و x_n می باشد:

$$\underbrace{F(X_n)}_{X_{n+1}} = \overbrace{F(\alpha)}^{\alpha} + F'(\alpha_n)(x_n-\alpha)$$

$$X_{n+1}-\alpha = F'(\alpha_n)(x_n-\alpha) \qquad F'(\alpha_n) \le \lambda < 1$$

$$|e_{n+1}| = |F'(\alpha_n)|\,|e_n| \to |e_{n+1}| \le \lambda |e_n|$$

$$\left.\begin{aligned} &|e_1| \le \lambda |e_0| \\ &|e_2| \le \lambda^2 |e_0| \\ &\quad\vdots \\ &|e_n| \le \lambda^n |e_0| \\ &n\to\infty \quad e_n \to 0 \end{aligned}\right\} \quad |F'(1)|<1 \qquad \begin{aligned} F(x) &= 2-(1+C)x+Cx^3 \\ F'(x) &= -(1+C)+3Cx^2 \\ F'(1) &= -(1+C)+3C \\ F'(1) &= 2C-1 \end{aligned}$$

$$\to |2C-1|<1$$

$$\to -1<2C-1<1 \to 0<C<1$$

$$x\in\left[\tfrac{3}{4}, \overset{1}{\downarrow}, \tfrac{4}{3}\right] \xrightarrow[?]{\text{مطلوب}} |f'(x)|<1 \to -1<f'(x)<1$$

$$\tfrac{3}{4} \le x \le \tfrac{4}{3}$$

$$\tfrac{9}{16} \le x^2 \le \tfrac{16}{9} \to -1< \tfrac{27}{16}C-1-C \le \underbrace{3Cx^2-1-C}_{f'(x)} \le \tfrac{48}{9}C-1-C$$

$$\tfrac{27}{16} \le 3Cx^2 \le \tfrac{16}{3} \to \tfrac{13}{3}C-1<1$$

$$\tfrac{13}{3}C<2 \to C<$$

$$C>0$$

Subject: Date:

$F(x) = 2 - (1+C)x + Cx^3$ نشان دهید اگر $0 < C < \frac{6}{13}$ آنگاه

$F : [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}] \longrightarrow [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ درستی یا نادرستی این نتیجه را بررسی کنید.

سوال ۱) تعریف eps :

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| < eps$$

تعریف دیگر

$$\varepsilon = \min \{ \alpha > 0 , fl(1+\alpha) > 1 \}$$

۹۶/۱/۲۷

جلسه ۱۶

نتیجه : اگر فرضیات قضیه خطای چندجمله‌ای درونیاب برقرار باشند و

$$M_{n+1} = \max_{t \in I(x_0, \dots, x_n)} |f^{(n+1)}(t)| \longrightarrow |E_n| = |f(x) - P_n(x)|$$

$$\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \rightarrow$$ کران بالای خطای چندجمله‌ای درونیاب

مثال) تابع $f(x) = \sin 2x$ را درنظر بگیرید.

الف) چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0 = 0$ ، $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ، $x_2 = \frac{\pi}{2}$ را بدست آورید

ب) کران بالای خطای درونیاب را به کمک قضیه خطای درونیاب در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ تعیین کنید

پ) کران بالای خطای درونیاب را به کمک قضیه تعیین کنید.

پاسخ) الف)

	x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$
x_0	0	0	
x_1	$\pi/4$	$4/\pi$	
x_2	$\pi/2$	$-4/\pi$	

$$\frac{-8/\pi}{\pi/2} = -\frac{16}{\pi^2}$$

$$P_2 = \frac{4}{\pi}x - \frac{16}{\pi^2}x(x-\pi/4)$$

ب)

$$M_3 = \max_{t\in[0,\pi/2]} |f'''(t)| = 2^3 = 8, \quad f'''(t) = -2^3\cos 2x$$

$$\Rightarrow |E_2(x)| \le \frac{8}{3!}\left|x(x-\pi/4)(x-\pi/2)\right|$$

$$|E_2(\pi/6)| \le \frac{4}{3}\left|(\pi/6)(\pi/4-\pi/6)(\pi/2-\pi/6)\right|$$

$$|E_2(x)| \le \frac{4}{3}\max_{x\in[0,\pi/2]}\left|x(x-\pi/4)(x-\pi/2)\right|$$

اگر بخواهیم مناسب ترین کران بالا را تعیین کنیم،

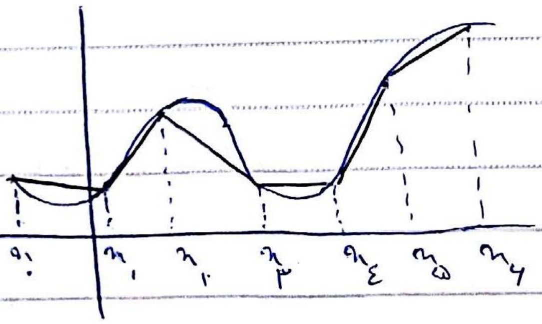
$$g(x) = x(x-\pi/4)(x-\pi/2) \rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow \text{نقاط بحرانی} \rightarrow y_0, y_1$$

$$\max\left|x(x-\pi/4)(x-\pi/2)\right| = \max\{|g(y_0)|, |g(y_1)|\}$$

اما در حالت کلی می‌توان یک کران بالای معقول بدون حل مسأله بهینه سازی پیدا کرد.

$$|E_2(x)| \le \frac{4}{3}(\pi/2)(\pi/4)(\pi/2) = \frac{4}{48}\pi^3$$

درونیابی تکه تکه خطی (اسپلاین خطی)



فرض کنید $S = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$، و $f \in C^2[a,b]$ آنگاه $L(x)$ را

اسپلاین خطی f روی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$i=0,\dots,n-1$, $x\in[x_i, x_{i+1}]$ ، $L(x)=f_i+f[x_i,x_{i+1}](x-x_i)$

$$=f_i+\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)$$

خطای اسپلاین خطی $\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$|L(x)-f(x)|\leq\frac{M_2^i}{2}\max\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| \quad (*)$$

$$M_2^i=\max_{t\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(t)|$$

اما فرض کنید

$$g(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$g'(x)=x-x_i+x-x_{i+1}$$

$$g'(x)=0 \longrightarrow x=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$$ نقطه بحرانی

در نتیجه بنابر $(*)$

$$|L(x)-f(x)|\leq\frac{M_2^i}{2}(x_{i+1}-x_i)/4$$

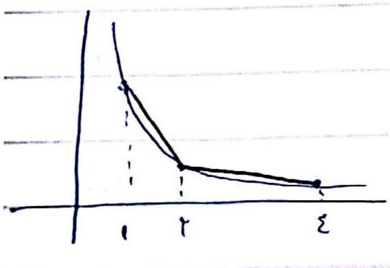
$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

در نتیجه

$$|L(x)-f(x)|\leq\frac{M_2^i}{8}(x_{i+1}-x_i)^2$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

مثال) تابع $f(x)=1/x$ را در نظر بگیرید. کران بالای خطای اسپلاین خطی درونیاب نقاط $x_0=1$ ، $x_1=2$ و $x_2=4$ را با کمک قضیه درونیاب تعیین کنید.



$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$x \in [1,2]$, $M_2^0 = 2 \longrightarrow |L(x) - f(x)| \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$x \in [2,4]$, $M_2^1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \longrightarrow |L(x) - f(x)| \leq \frac{4}{4 \times 8} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow |L(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4}$; $x \in [1, 4]$

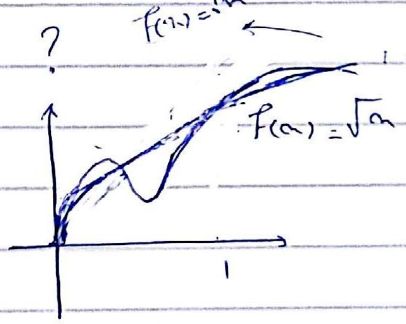
توجه: فرض کنید $\Delta_m = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$, $f \in C^\infty[a,b]$

$h_m = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{m}$

اگر P_m چندجمله‌ای درونیاب f در Δ_m باشد. آیا می‌توان گفت برای هر $x \in [a,b]$ ،

$\lim_{m \to \infty} P_m(x) = f(x)$?

خیر! مثال نقض:



قضیه: فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز در $[a,b]$ هستند و P چندجمله‌ای درونیاب f در این نقاط است، آنگاه برای هر $x \in [a,b]$ ؛

$$f(x) - P(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}$$

$x \neq x_j$; $j = 0, \dots, n$

برهان: فرض کنید Q چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ و x است پس

(*) $Q(t) = P(t) + f[x, x_0, \dots, x_n](t - x_0) \cdots (t - x_n)$

Subject: Date:

بنابراین چون x یکی از نقاط درونی است پس $f(x) = Q(x)$

در $(*)$ ، $t = x$ قرار دهید.

$$f(x) = Q(x) = P(x) + f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

$$\rightarrow f(x) - P(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

جلسهٔ هفتم

96 , 01 , 29

نتیجه: فرض کنید $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ نقاطی متمایز هستند و $f \in C^n[a,b]$ آنگاه $\alpha \in [a,b]$ وجود دارد به طوریکه

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\bar{\alpha})}{n!}$$

برهان: فرض کنید P_{n-1} چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, \ldots, x_{n-1}$ باشد

(1) بنابراین داریم:

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_{n-1}] \times (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-2})$$

از قضیه در قبل

$$+ f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

(2) همچنین بنابر قضیه خطا در چندجمله‌ای درونیاب

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_{n-1}](x - x_0) \ldots (x - x_{n-2})$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n\ \ )!}(x - x_0) \ldots (x - x_{n-})$$ $\alpha_x \in I(x_0, \ldots, x_{n-1})$

در رابطه‌ی (1) و (2)، $x = x_n$ قرار دهیم:

در نتیجه:

$$(1) \rightarrow f(x_n) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x_n - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_{n-1}] \times (x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-2})$$

$$+ f[x_0, \ldots, x_n](x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1}).$$

$$(2) \rightarrow f(x_n) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!}(x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1}).$$

$\alpha_x \in I(x_0, \ldots, x_{n-1})$

Subject .... Date ....

با مقایسه‌ی ۲ تساوی نتیجه می‌شود:

$$\frac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} = f[x_0, \dots, x_n].$$

تعمیمات تقسیم شده تفهیم یافته

$f[x_0, x_0] = ?$ حال ؛ $f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ $x_0 \neq x_1$ می‌دانیم

قضیه: فرض کنید $f \in C^n[a,b]$ و $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز در $[a,b]$ باشند، آنگاه:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-2} \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}[t_n(x_n - x_{n-1}) + t_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + t_1(x_1 - x_0) + x_0]\, dt_n \quad ⊛$$

کلیات اثبات: اثبات به استقرا روی n، ابتدا نشان می‌دهیم که رابطه برای $n=1$ صحیح است سپس فرض می‌کنیم که برای $n=k$ صحیح باشد و برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ باید نشان دهیم:

$$f[x_0, x_1] = \int_0^1 f'[t_1(x_1 - x_0) + x_0]\, dt_1$$

$u = t_1(x_1 - x_0) + x_0$

$du = (x_1 - x_0)\, dt_1 \longrightarrow dt_1 = \frac{du}{x_1 - x_0}$

$$\int_0^1 f'[t_1(x_1 - x_0) + x_0]\, dt_1 = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f'(u)\, du = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= f[x_1, x_1]$$

* ادامه‌ی برهان به عنوان تمرین.

قضیه: سمت راست رابطه‌ی ⊛ تابعی پیوسته روی R^{n+1} است.

تعریف: فرض کنید $x_0, \dots, x_n$ نقاطی در $[a,b]$ باشند که لزوماً متمایز نیستند.

Scanned by CamScanner

Subject .... Date ....

آنگاه $f[x_0, \ldots, x_n]$ را با تابع سمت راست ⊛ تعریف می‌کنیم.

توجه: با توجه به اینکه تابع تعمیم یافته $f[x_0, \ldots, x_n]$ روی $\mathbb{R}^{n+1}$ پیوسته است

اگر $\{y_j^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای باشد که $j=0,\ldots,n$ ، $\lim\limits_{k\to\infty} y_j^{(k)} = x_j$

آنگاه،
$$\lim_{k\to\infty} f[y_0^{(k)}, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}] = f[x_0, \ldots, x_n]$$

قضیه: فرض کنید x_0 ، x_1 ، ... ، x_n نقاطی نه لزوماً متمایز در $[a,b]$ باشند
و $f \in C^n[a,b]$ آنگاه $\alpha \in [a,b]$ وجود دارد که
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

برهان: چون $f^{(n)}$ در $[a,b]$ پیوسته است پس Max و Min خود را در این بازه می‌پذیرد. فرض کنید
$$f^{(n)}(\beta) = m \leq f^{(n)}(t) \leq M = f^{(n)}(\mu) \quad t\in[a,b]$$

بنابراین:
$$m\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \leq f[x_0, \ldots, x_n] \leq M\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n$$

$$\frac{m}{n!} \leq f[x_0, \ldots, x_n] \leq \frac{M}{n!}$$

$$\rightarrow f^{(n)}(\beta) = m \leq n!\, f[x_0, \ldots, x_n] \leq M = f^{(n)}(\mu)$$

$\rightarrow$ در نتیجه طبق قضیه مقدار میانی α بین β و μ وجود دارد که
$$f^{(n)}(\alpha) = n!\, f[x_0, \ldots, x_n]$$

یعنی
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

Subject .... Date ....

نتیجه: فرض کنید $f \in C^n(I)$ که I بازه‌ای شامل x_0 است آنگاه

$$f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n+1 \text{ بار}}] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

برهان: آسان. ■

قضیه: فرض کنید $f \in C^n[a,b]$ ، $x_0, \dots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز $[a,b]$ باشند، آنگاه اگر $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ جایگشتی از $\{x_0, \dots, x_n\}$ باشد،

$$f[y_0, \dots, y_n] = f[x_0, \dots, x_n]$$

برهان:

$y_j = x_{m_k}$ $\quad m_k : \{0, 1, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots, n\}$

که m_k تابعی (1-1) است.

فرض کنید $\{x_j^{(s)}\}_{s \in \mathbb{N}}$ یک دنباله است که $\lim_{s \to \infty} x_j^{(s)} = x_j$

$j = 0, \dots, n$ ، به علاوه فرض کنید اگر $j \neq i$ ، آنگاه $x_j^{(s)} \neq x_i^{(s)}$

طبق قضیه مشابه برای نقاط متمایز، واضح است که

$$f[x_0^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}] = f[x_{m_0}^{(s)}, \dots, x_{m_n}^{(s)}]$$

اکنون از طرفین حد می‌گیریم $s \to \infty$

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{m_0}, \dots, x_{m_n}] = f[y_0, \dots, y_n]$$

تمرین: فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n, a, b \in [c,d]$

و $f \in C^{n+2}[c,d]$ ، $x_0, \dots, x_n$ دو به دو متمایز نیستند.

در $a \neq b$ آنگاه

$$f[a, b, x_0, \dots, x_n] = \frac{f[a, x_0, \dots, x_n] - f[b, x_0, \dots, x_n]}{a - b}$$

Subject جلسهٔ هجدهم

Date 96 . 02 . 10

چندجمله‌ای درون یاب هرمیت :

مثال : فرض کنید f تابعی است با ویژگی های زیر :

$f(0)=1$ $\quad$ $f(1)=1$ $\quad$ $f(3)=-2$

$f'(0)=2$ $\quad$ $f'(1)=0$

$f''(1)=4$

پایان‌نامهٔ مثال ها هست که ویژگی هایی می دهد که می خواهید درون یابی کنید ولی درون یابی مشخص نیست بلکه باید بسازید (درون یابی را).

اکنون به دنبال چندجمله‌ای P از درجه‌ی حداکثر 5 هستیم که

$f(0)=1$ $\quad$ $f(1)=1$ $\quad$ $f(3)=-2$

$f'(0)=2$ $\quad$ $f'(1)=0$

$f''(1)=4$

فرض کنید $x_n, \dots, x_0$ نقاطی متمایز هستند . به دنبال یک چندجمله ای P ، با ویژگی های زیر هستیم.

① $P^{(k)}(x_i)=y_{ik}$ $\qquad$ $i=0,\dots,n$ $\quad$ $k=0,\dots,m_i-1$

که y_{ik} ها مقادیری حقیقی هستند . فرض کنید

$$1+m=\sum_{i=0}^{n} m_i$$

② $P=\pi_m$ (P حداکثر از درجهٔ m است .)

توجه : می دانیم که اگر P چندجمله ای از درجه‌ی حداکثر n باشد و بیش از n ریشه داشته باشد ، آنگاه $P=0$.

در واقع در این قضیه نقاط ریشه می توانند تکراری هم باشند .

Date

قضیه: چند جمله‌ای درون‌یاب هرمیت (با ویژگی های گفته‌شده) وجود دارد و یکتاست.

برهان: باید ثابت کنیم که چند جمله‌ای یکتای از درجه‌ی حداکثر m وجود دارد که

$$P = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$$

و در ویژگی های گفته‌شده صدق می‌کند. بنابراین مسئله معادل است با وجود و یکتایی ضرایب a_j ، $j = 0, \dots, m$.

اگر p ویژگی های چند جمله‌ای درون‌یاب هرمیت را داشته باشد، مجهولات $a_0, \dots, a_m$ باید در دستگاه زیر صدق کنند.

$$p^{k}(x_i) = y_{ik} \longrightarrow m(m-1)\dots(m-k+1)\, a_m x^{m-k} + \dots + k!\, a_k = y_{ik}$$

$$i = 0, \dots, n$$

$$k = 0, \dots, m_i - 1$$

$$a_m x_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_{00}$$

$$m a_m x_0^{m} + (m-1) a_{m-1} x_0^{m-2} + \dots + a_1 = y_{01}$$

$$\vdots$$

$$m(m-1)\dots(m-m_n) x_n^{m-m_n+1} + \dots + (m_n-1)!\, a_{m_n-1} = y_{n m_n}$$

این یک دستگاه $(m+1)\times(m+1)$ است، اگر ماتریس ضرایب این دستگاه را B درنظر بگیریم، دستگاه به‌صورت:

$$B \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{01} \\ \vdots \\ y_{n m_n} \end{bmatrix}$$

کافیست نشان دهیم B ماتریس معکوس پذیر است، بنابراین دستگاه فوق جواب یکتا دارد و قضیه اثبات می‌شود و درنتیجه کافیست نشان دهیم دستگاه متناظر همگن آن یعنی

$$* \quad B \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Date

جواب یکتای $a=0$ دارد.

اما حل این دستگاه معادل است با حل مسأله درونیابی هرمیت با $f_{i_k}=0$ برای همه k ها.

یعنی تعیین چندجمله‌ای:

$$P = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$$

با ویژگی:

$$P^{k}(x_i)=0 \qquad i=0,\dots,n$$
$$k=0,\dots,m_i$$

و این بدان معناست که x_0 ریشه‌ی تکراری از مرتبه‌ی m_0 ، P است.

x_1 " " " m_1 ، P است.

$\vdots$

x_n " " " m_n P است.

طبق تعریف $\sum_{i=0}^{n} m_i = m+1$ پس P ، $m+1$ ریشه اعم از تکراری و غیر تکراری است. در حالتی خود یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر m است و این امکان پذیر نیست مگر اینکه P چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. یعنی

$$a_0 = \dots = a_m = 0$$

و معادلاً دستگاه * جواب یکتای صفر دارد.

تعیین چندجمله‌ای درونیاب هرمیت:

تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید.

	x_i	f_0	f_i'	f_i''	$\dots$	$f_i^{(m_i-1)}$
$i=0$	x_0	f_0	f_0'	f_0''	$\dots$	$f_0^{m_i-1}$
$i=1$	x_1	f_1	f_1'	f_1''		
$i=2$	x_2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$i=n$	x_n	f_n	f_n'	f_n''		$f_n^{m_i-1}$

Date

با فرض اینکه $\sum_{i=0}^{n} m_i = m+1$ به دنبال چندجمله‌ای P از درجه‌ی حداکثر m هستیم که

$$f^{(k)}(x_i) = f_i^k \qquad i=0,\dots,n$$
$$k=0,\dots,m_i-1$$

جدول زیر را در نظر بگیرید.

α_{00}	α_{01}	α_{02}	$\dots$	α_{0m_0-1}
α_{10}	α_{11}	α_{12}	$\dots$	α_{1m_1-1}
$\vdots$				$\vdots$
α_{n0}	α_{n1}	α_{n2}	$\dots$	α_{nm_n-1}

اکنون چندجمله‌ای درون‌یاب برای این جدول را می‌نویسیم سپس حد می‌گیریم به شکلی که

$$\alpha_{0j} \longrightarrow x_0 \qquad j=0,\dots,m_0$$
$$\alpha_{1j} \longrightarrow x_1 \qquad j=0,\dots,m_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{nj} \longrightarrow x_n \qquad j=0,\dots,m_n$$

در این صورت به چندجمله‌ای زیر می‌رسیم.

$$\bar{p}(x) = f(\alpha_{00}) + f[\alpha_{00},\alpha_{01}](x-\alpha_{00}) + \dots + f[\alpha_{00},\dots,\alpha_{0m_0}](x-\alpha_{00})\dots(x-\alpha_{0m_0-1})$$
$$+ f[\alpha_{00},\alpha_{01},\dots,\alpha_{0m_0},\alpha_{10}](x-\alpha_{00})\dots(x-\alpha_{0m_0-1})$$
$$+$$
$$\vdots$$
$$+ f[\alpha_{00},\alpha_{01},\dots,\alpha_{1m_1},\dots,\alpha_{nm_n}](x-\alpha_{00})\dots(x-\alpha_{nm_n-2})$$

دو حد مورد نظر را اعمال می‌کنیم:

Date

$$\lim \bar{P} = P$$

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 + \dots +$$

$$+ f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{m \text{ تا}}](x - x_0)^{m-1} + \dots + f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{m_0 \text{ تا}}, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1 \text{ تا}}, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{m_n \text{ تا}}]$$

$$\times (x - x_0)^{m_0} \times (x - x_1)^{m_1} \times \dots \times (x - x_n)^{m_n - 1}$$

قضیه: چند جمله‌ای بدست آمده (P بالا) چند جمله‌ای درونیاب هرمیت مورد نظر است.

برهان: نشان می‌دهیم

$$p^{k}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, \dots, m_0 - 1$$

اولاً که P از درجه حداکثر $m = \sum_{i=0}^{n} m_i - 1$ است. همچنین

$$p^{k}(x_0) = k!\, f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k+1 \text{ تا}}] = k! \times \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, \dots, m_0 - 1$$

با توجه به اینکه چند جمله‌ای P را می‌توان با شروع از هر نقطه بنویسیم

مثلاً با شروع از نقطه x_5

$$P(x) = f(x_5) + \dots +$$

$$k = 0, \dots, m_5 - 1 \qquad p^{(k)}(x_5) = f^{(k)}(x_5)$$

برای هر $s = 0, \dots, n$ به طور مشابه برقرار است.

۹۶/۲/۱۲

مثال: می‌خواهیم یک چندجمله‌ای P از درجه m پیدا کنیم که:

$$P^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)} \qquad \begin{cases} i=0,\dots,n \\ k=0,\dots,m_i-1 \end{cases}$$

x_i	f_i	f_i'	f_i''	f_i'''
x_0	-1	2		
x_1	1			
x_2	0	3	1	

در مثال فوق به دنبال یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر ۵ هستیم که

$P(-1) = -1 \qquad P(0) = 1 \qquad P(2) = 0 \qquad P''(2) = 1$

$P'(-1) = 2 \qquad P'(2) = 3$

برای مثال گفته شده داریم:

(*)
$$P(x) = f(x_0) + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2$$
$$+ f[x_0,x_0,x_1,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_0,x_1,x_2,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ f[x_0,x_0,x_1,x_2,x_2,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)^2$$

سوال: تفاضلات تقسیم شده تعمیم یافته $f(x_0)$ و $f[x_0,x_0]$ و ... و $f[x_0,x_0,x_1,x_2,x_2,x_2]$ را چطور تعریف کنیم؟

مشابه آنچه در تفاضلات تقسیم شده معمولی انجام می‌دهیم.

	x_i	f_i	$f[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$	$f[\alpha_j,\alpha_{j+1},\alpha_{j+2}]$
x_0 α_0	-1	-1		
α_1	-1	-1	$f[x_0,x_0]=f'(x_0)=2$	
x_1 α_2	0	1	$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{2}{1}$	$f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0}=$
α_3	2	0	$f[x_1,x_2]=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-\frac{1}{2}-2}{2-(-1)}=\frac{-5}{6}$
x_2 α_4	2	0	$f[x_2,x_2]=f'(x_2)=3$	$f[x_1,x_2,x_2]=\frac{3-(-\frac{1}{2})}{2-0}=\frac{7}{4}$
α_5	2	0	$f[x_2,x_2]=f'(x_2)=3$	$f[x_2,x_2,x_2]=\frac{f''(x_2)}{2}=\frac{1}{2}$

α_0

α_1

α_2

α_3 $\quad f[x_0,x_0,x_1,x_2]=\frac{-\frac{5}{6}-0}{2-(-1)}=-\frac{5}{18}$

α_4 $\quad f[x_0,x_1,x_2,x_2]=\frac{31}{24}$ $\qquad f[x_0,x_0,x_1,x_2,x_2]=\frac{41}{108}=\alpha$

α_5 $\quad f[x_1,x_2,x_2,x_2]=\frac{-5}{8}$ $\qquad f[x_0,x_1,x_2,x_2,x_2]=\beta$

$$f[x_0,x_0,x_1,x_2,x_2,x_2]=\frac{\beta-\alpha}{2-(-1)}=\gamma$$

بنابر (*)

$$P(x)=-1+2(x+1)+0(x+1)^2-\frac{5}{18}(x+1)^2x$$

$$+\frac{41}{108}(x+1)^2(x)(x-2)+\gamma(x+1)^2(x)(x-2)^2$$

خطای چندجمله‌ای درونیاب هرمیت :

فرض کنید $f\in C^{m+1}[a,b]$ و $x_0,\dots,x_n$ نقاط متمایز در $[a,b]$ هستند

و P چندجمله‌ای درونیاب هرمیت از درجه‌ی حداکثر m است که $f^{(k)}(x_i)=P^{(k)}(x_i)$

$0\le i\le n$ ، $0\le k\le m_i-1$ و $\sum_{i=0}^{n} m_i=m+1$

آنگاه برای هر $x \in [a,b]$ ، $\alpha_x \in [a,b]$ وجود دارد که

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(m+1)}(\alpha_x)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_n)^{m_n}$$

x_i	f_i	f_i'
x_0	f_0	f_0'
x_1	f_1	f_1'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	f_n'

$$\longrightarrow f(x) - P(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\alpha_x)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

اسپلاین‌های مکعب (Cubic splines)

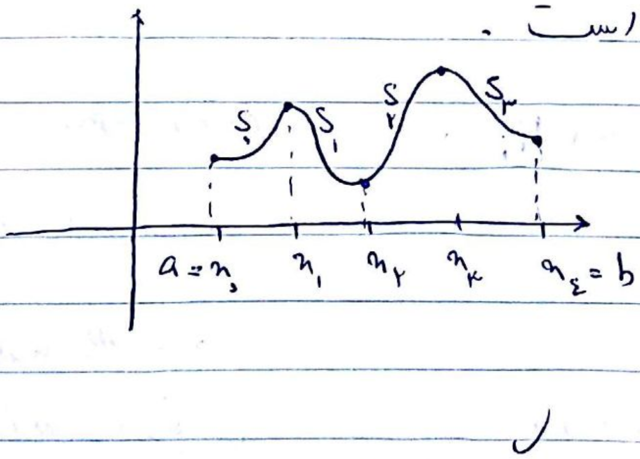
تعریف: فرض کنید $k \geq 0$ ، $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ ،

را یک اسپلاین مرتبه k روی Δ می‌گوییم اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:

① $S \in C^{k-1}[a,b]$ یعنی S ، تا $k-1$ بار مشتق پیوسته روی $[a,b]$ دارد.

② $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $S(x) \in \Pi_k$ یعنی $S\Big|_{[x_i,x_{i+1}]}$ (S محدود شده) یک

چند جمله‌ای از درجه حداکثر k است.



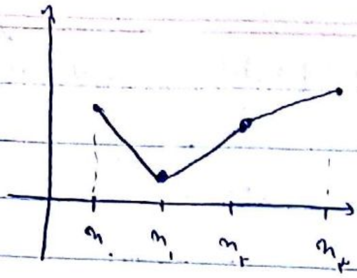
فرض کنید $S\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} = S_i$

به عبارتی S یک اسپلاین مرتبه k است اگر $S_i \in \Pi_k$ ، $i = 0, \ldots, n-1$

$S_{i-1}^{(p)}(x_i) = S_i^{(p)}(x_i)$ $\quad i = 1, \ldots, n-1$

$p = 0, \ldots, k-1$

مثال: یک تابع اسپلاین مرتبه ۱ (خطی) روی



$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ است.

اسپلاین مکعبی درونیاب:

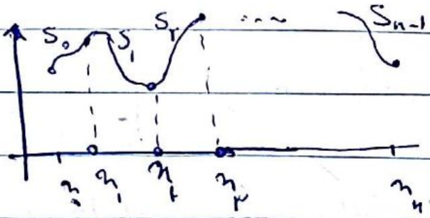
$Y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ و $\Delta = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$

$S_\Delta(Y; x)$ را اسپلاین مکعبی درونیاب گویند اگر

① $S_\Delta(Y, x)$ یک اسپلاین مکعبی روی $[a, b]$ باشد.

② $S_\Delta(Y, x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, n$

سوال: مسأله تعیین اسپلاین مکعبی درونیاب چند معادله و چند مجهول دارد؟



در هر بازه

S_i یک چندجمله‌ای درجه ۳ است. $i = 0, \dots, n-1$

$$S_i = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \eta_i \qquad i = 0, \dots, n-1$$

تعداد مجهولات: $4n$

تعداد معادلات:

معادلات درونیابی: $S(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n \longrightarrow n+1$ معادله

معادلات پیوستگی اسپلاین: $S_{i-1}^{(k)}(x_i) = S_i^{(k)}(x_i)$

$i = 1, \dots, n-1$

$k = 0, 1, 2$

$\longrightarrow 3(n-1)$ معادله

کل تعداد معادلات : $3(n-1)+n+1=4n-2$

بنابراین لازم است ۲ معادله به معادلات گفته شده اضافه شود تا مجموعا $4n$ معادله و $4n$ مجهول داشته باشیم. بسته به اینکه این دو معادله به چه صورت باشند، نوع اسپلاین متفاوت است.

۱- اسپلاین طبیعی (مشتق دوم در نقطه ابتدایی و انتهایی صفر شود) $S''(\underbrace{x_0}_{a}) = S''(\underbrace{x_n}_{b}) = 0$

۲- اسپلاین متناوب :

$$S^{(k)}(x_0) = S^{(k)}(x_n)$$

$$k = 0, 1, 2$$

توجه : دقت کنید چون S اسپلاین درونیاب است پس : $\begin{cases} S(x_0)=y_0 \\ S(x_n)=y_n \end{cases}$

در واقع پیش شرط اسپلاین متناوب این است که $y_0=y_n$

۳- not & not

$\begin{cases} S'(x_0)=y'_0 \\ S'(x_n)=y'_n \end{cases}$ که y'_0 و y'_n مقادیری حقیقی و دلخواهند.

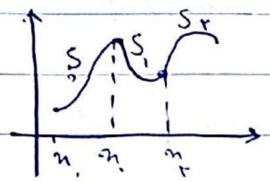
۹۶/۲/۱۷

نحوه ساختن اسپلاین مکعبی درونیاب :

فرض کنید $\Delta = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$ و $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$

فرض کنید $S''(x_i) = M_i$ ، $i = 0, \dots, n$ که پیوستگی مشتق دوم تضمین می‌شود.

اکنون می‌خواهیم $S''(x)$ یا $S_i(x)$ را تعیین کنیم. $x \in [x_i, x_{i+1}]$



اگر $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ،

$$S''(x) = S_i''(x) = \frac{M_i (x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} + \frac{M_{i+1} (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

فرض کنید $\begin{cases} x_{i+1} - x_i = h_{i+1} \\ i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$ و

x_j	$S''(x_j)$
x_i	M_i
x_{i+1}	M_{i+1}

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \longrightarrow S'(x) = S_i'(x) = \frac{-M_i (x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + \frac{M_{i+1} (x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + A_i$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\rightarrow \boxed{S(x) = S_i(x) = \frac{M_i (x_{i+1} - x)^3}{6 h_{i+1}} + \frac{M_{i+1} (x - x_i)^3}{6 h_{i+1}} + A_i (x - x_i) + B_i \quad (1)}$$

با صدق دادن فرضیات درونیابی :

$$\begin{cases} S(x_i) = y_i \\ S(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \longrightarrow \frac{M_i}{6} h_{i+1}^2 + B_i = y_i$$

$$\longrightarrow \boxed{B_i = y_i - \frac{M_i}{6} h_{i+1}^2 \quad (2)}$$

$$\frac{M_{i+1} h_{i+1}^2}{6} + A_i h_{i+1} + B_i = y_{i+1}$$

$$\longrightarrow A_i h_{i+1} = y_{i+1} - B_i - \frac{M_{i+1} h_{i+1}^2}{6}$$

$$\longrightarrow A_i = \frac{y_{i+1} - B_i - \frac{M_{i+1} h_{i+1}^2}{6}}{h_{i+1}} = \boxed{\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{6}\left[M_i - M_{i+1}\right] \quad (3)}$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S(x) = \underbrace{\frac{M_i(\overbrace{x_{i+1} - x_i}^{h_{i+1}} - (x - x_i))^3}{6 h_{i+1}}}_{T} + \frac{M_{i+1}(x - x_i)^3}{6 h_{i+1}} + \sim$$

$$T = \frac{M_i h_{i+1}^2}{6 h_{i+1}} - \frac{M_i (x - x_i)^3}{6 h_{i+1}} - \underbrace{\frac{\cancel{3} M_i h_{i+1}^{\cancel{2}} (x - x_i)}{\cancel{6}\, \cancel{h_{i+1}}}}_{\frac{M_i h_{i+1} (x - x_i)}{2}}$$

$$+ \frac{M_i (x - x_i)^2}{2}$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\boxed{S_i(x) = \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_{i+1}}(x-x_i)^3 + \frac{M_i}{2}(x-x_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}\left[2M_i + M_{i+1}\right]\right)(x-x_i) + y_i}$$

درنتیجه

ضرایب

$$\alpha_i = \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_{i+1}} \qquad \beta_i = \frac{M_i}{2}$$

$$\gamma_i = \left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1})\right] \qquad (۴)$$

$$\eta_i = y_i$$

نشان دهیم اس $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$S(x) = S_i(x) = \alpha_i(x-x_i)^3 + \beta_i(x-x_i)^2 + \gamma_i(x-x_i) + \eta_i$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$

فرض پیوستگی مشتق اول :

$$S_i'(x) = 3\alpha_i(x-x_i)^2 + 2\beta_i(x-x_i) + \gamma_i$$

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i) \quad ; \quad n = 1, \dots, n-1$$

$$\gamma_i = 3\alpha_{i-1}h_i^2 + 2\beta_{i-1}h_i + \gamma_{i-1}$$

بنابر ٤ داریم:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} = \frac{h_{i+1}}{6}\left(2M_i + M_{i+1}\right)$$

$$= \frac{M_i - M_{i-1}}{2} h_i + \cdots$$

با جایگذاری عبارات بدست می آید:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = \frac{M_{i-1}h_i}{6} + \frac{M_i(h_i+h_{i+1})}{3}$$

$$+ \frac{M_{i+1}h_{i+1}}{6} \qquad i=1,\dots,n-1$$

طرفین رابطه فوق را در $\frac{6}{h_i+h_{i+1}}$ ضرب می کنیم و در نتیجه داریم:

$$\overbrace{\left[\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\right]}^{\alpha_i} M_{i+1} + 2M_i + \overbrace{\boxed{\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}}}^{\beta_i} M_{i+1}$$

$$= \frac{6}{h_i+h_{i+1}} \underbrace{\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]}_{d_i} \qquad i=1,\dots,n-1$$

از این n-1 معادله به دستگاه زیر می رسیم:

$$
\begin{bmatrix}
\boxed{} \\
\alpha_1 & 2 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \ddots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\
\boxed{}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}
$$

توجه : در اسپلاین طبیعی دو معادله به معادلات گفته شده اضافه می‌شود

یعنی

$$S''(x_0) = M_0 = 0$$

$$S''(x_n) = M_n = 0$$

که با سطر اول و آخر نشان داده شده در کادر زیر و گذاشتن آن در سطر اول و آخر ماتریس

$$\boxed{2 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0} \qquad d_0 = 0$$

$$\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 2} \qquad d_n = 0$$

مربوط این ۲ فرض نیز برقرارند.

تمرین : اسپلاین مکعبی درونیاب طبیعی برای تابع جدولی زیر را بیابید.

x_i	0	1	3
y_i	1	-1	2

Subject جلسه

Date 96, 02, 14

تمرین : اسپلاین مکعبی درونیاب طبیعی برای تابع جدولی زیر را تعیین کنید .

x_i	0	1	3
y_i	1	-1	2

$S(x) = S_0(x) \qquad x \in [0,1]$

$S(x) = S_1(x) \qquad x \in [1,3]$

$S''(0) = M_0 = 0 \qquad S''(3) = M_2 = 0 \qquad S''(1) = M_1$

x	S''
0	0
1	M_1

$S_0''(x) = M_1 x$

$S_1''(x) = \dfrac{M_1(3-x)}{2}$

x	S''
1	M_1
3	0

$S_0'(x) = \dfrac{x^2}{2} M_1 + A_0$

$S_1'(x) = \dfrac{-M_1}{4}(3-x)^2 + A_1$

$S_0(x) = \dfrac{x^3}{6} M_1 + A_0(x) + B_0$

$S_1(x) = \dfrac{M_1}{12}(3-x)^3 + A_1(x-1) + B_1$

$$\begin{cases} S_0(0) = 1 \to B_0 = 1 \\ S_0(1) = -1 \to \dfrac{M_1}{6} + A_0 + B_0 = -1 \to A_0 = -2 - \dfrac{M_1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(1) = -1 \to \dfrac{2}{3} M_1 + B_1 = -1 \to B_1 = -1 - \dfrac{2}{3} M_1 \\ S_1(3) = 2 \to 2A_1 + B_1 = 2 \to A_1 = \dfrac{2 - B_1}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} M_1 \end{cases}$$

پیوستگی مشتق اول :

$S_0'(1) = S_1'(1) \to \dfrac{M_1}{2} + A_0 = -M_1 + A_1$

$\dfrac{M_1}{2} - 2 - \dfrac{M_1}{6} = -M_1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} M_1 \to M_1 = \dfrac{7}{2}$. ▨

تمرین :

۹۶,۲,۱۹

تمرین: همین سوال را با فرض اینکه $\begin{cases} S''(x_0) = -1 \\ S''(x_2) = 2 \end{cases}$ حل کنید و اسپلاین مکعبی آن را بیابید:

یادآوری: برای تعیین اسپلاین مکعبی در دو نیاب

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n

که $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 2 & \beta_3 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (*)$$

فرض کنید $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S_i = S(x) = \frac{M_{i+1}(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + \frac{M_i(x - x_{i+1})^3}{6h_{i+1}}$$

$$+ \frac{A_i(x - x_i)^2}{2} + B_i(x - x_i)$$

$$A_i(\{M_i\}) = ? \qquad B_i(\{M_i\}) = ?$$

قضیه: دستگاه (*) جواب یکتا دارد.

برهان: فرض کنید دستگاه (*) به شکل $AM=d$ است، کافی است ثابت کنیم دستگاه معادل همگن آن یعنی $AM=0$ تنها جواب یکتای $M=0$ دارد.

اثبات با برهان خلف: فرض کنید دستگاه $AM=0$ جواب غیر صفر به صورت

$$M=\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}$$

دارد، فرض کنید: $0 < |M_s| = \max_{i=1,\dots,n-1} |M_i|$ ، $s=\{1,\dots,n-1\}$

معادله s ام دستگاه به صورت زیر است:

$$|\alpha_s M_{s-1} + 2M_s + \beta_s M_{s+1}| = 0$$

نامساوی مثلثی: $|a \pm b| > |a| - |b|$

$$|\alpha_s M_{s-1} + 2M_s + \beta_s M_{s+1}| \geqslant |2M_s| - |\alpha_s M_{s-1} + \beta_s M_{s+1}|$$

$$\geqslant 2|M_s| - \alpha_s |M_{s-1}| - \beta_s |M_{s+1}|$$

$$\geqslant 2|M_s| - \alpha_s |M_s| - \beta_s |M_s|$$

از طرفی می‌دانیم $\alpha_s + \beta_s = 1$ در نتیجه

$$= |M_s| \implies 0 > 0 \quad \times$$

که یک تناقض است در نتیجه دستگاه همگن تنها جواب یکتای صفر دارد و دستگاه $AM=d$ تنها یک جواب دارد.

توجه: به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که اگر اسپلاین درون‌یاب مورد نظر علاوه بر فرضیات اسپلاین طبیعی یعنی $M_0 = M_n = 0$ به هر یک از دو حالت زیر

حالت ①

$$\begin{cases} M_0 = S''(x_0) = y''_0 \\ M_n = S''(x_n) = y''_n \end{cases}$$

حالت ②

$$\begin{cases} S^{(k)}(x_0) = S^{(k)}(x_n) \\ k = 0, 1, 2 \\ y_0 = y_n \quad \text{پیش فرض} \end{cases}$$

باشد، باز هم دستگاه خطی متناظر جواب یکتا دارد.

« فصل پنجم » مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی.

مشتق‌گیری عددی:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

چه کار کنیم دقیق شود؟

$$f \in C^2[a,b], \quad x, x+h \in [a,b]$$

طبق تیلور:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha_x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\alpha_x)$$ خطا

اصطلاحاً گفته می‌شود این روش مشتق‌گیری خطا از مرتبه $O(h)$ دارد.

در حالت کلی

$$f'(x) = G(h) + O(h^k)$$

که $G(h)$ تقریبی از $f'(x)$ است. می‌گوییم خطای روش مشتق‌گیری از

مرتبه $O(h^k)$ است. ($h \to 0$ و $O(h^k)$)

اما تقریبی دیگر از مشتق داریم:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

به بیان دقیق‌تر $x, x+h, x-h \in [a,b]$ ، $f \in C^4[a,b]$

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^5) \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^5) \end{cases}$$

جمله بعدی خود به خود صفر می‌شود.

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \overbrace{\frac{h^2}{6}[f'''(x)]}^{\alpha_2} + O(h^4) \quad (*)$$

در واقع

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

خطای این روش مشتق‌گیری از مرتبه $O(h^2)$ است.

فرض کنید

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

طبق $(*)$

$$\varphi(h) = f'(x) + \alpha_2 h^2 + O(h^4)$$

$$\varphi(h/2) = f'(x) + \frac{\alpha_2}{4}h^2 + O(h^4)$$

جمله دوم را در ۴ ضرب کرده و جمله اول را از آن کم می‌کنیم سپس عبارت را بر ۳ تقسیم می‌کنیم!

$$\frac{4\varphi(h/2)-\varphi(h)}{3}=f'(x)+O(h^4)$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\Rightarrow^{*} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \underbrace{\frac{h^2}{6}[f'''(x)] + O(h^4)}$$

خطا ← مرتبهٔ خطا : $O(h^2)$.

در واقع $\quad f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$

فرض کنید $\quad \varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

طبق * $\quad \varphi(h) = f'(x) + \alpha_2 h^2 + O(h^4)$

$$\varphi(h/2) = f'(x) + \frac{\alpha_2}{4} h^2 + O(h^4)$$

جملهٔ دوم را در 4 ضرب کرده و جمله اول را از آن کم می‌کنیم سپس عبارت را بر 3 تقسیم می‌کنیم

$$\frac{4\varphi(h/2)-\varphi(h)}{3} = f'(x) + O(h^4)$$

جلسهٔ بیست دوم

1396,02,24

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \approx f'(x) \qquad f\in C^5(a,b)$$

$$x,\ x+h,\ x-h \in [a,b]$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\alpha_x)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(\beta_x)$$

$$\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}_{\varphi(h)} = f'(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \underbrace{\frac{h^4}{2(5!)}\left(f^{(5)}(\alpha_x)+f^{(5)}(\beta_x)\right)}_{O(h^2)}$$

$f \in C^5[a,b]$ $\qquad$ $f'(x) = \varphi(h) + \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4$

$$\begin{cases} ① \; f'(x) = \varphi(h/4) + \alpha_2 \dfrac{h^2}{4} + O(h^4) \\ ② \; f'(x) = \varphi(h) + \alpha_2 h^2 + O(h^4) \end{cases}$$

$$\frac{4 \times ① - ②}{3} \Rightarrow \psi(h) = \frac{4\varphi(h/2) - \varphi(h)}{3}$$

$$f'(x) = \psi(h) + O(h^4) \quad ⊛$$

به طور مشابه با فرض $f \in C^7[a,b]$, $x, x+h, x-h \in [a,b]$
می‌توانیم رابطه‌ی ⊛ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} ① \; f'(x) = \psi(h) + \alpha_4 h^4 + O(h^6) \\ ② \; f'(x) = \psi(h/2) + \dfrac{1}{16}\alpha_4 h^4 + O(h^6) \end{cases}$$

$$\frac{16 \times ② - ①}{15} \longrightarrow f'(x) = \frac{4^2 \psi(h/2) - \psi(h)}{4^2 - 1} + O(h^6).$$

فرض کنید f به قدر کافی مشتق‌پذیر باشد در بازه‌ی $[a,b]$, h طول گام اولیه‌ی مورد نظر باشد و داده‌هایی از مقادیر f' در نقاط $x \pm \frac{h}{2^k}$ ، $k = 0,1,\dots,N$ داشته باشیم. جدول زیر تشکیل می‌دهیم:

error	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$\varphi(h)$	$=T_{00}$		
$\varphi(h/2)$	$=T_{10}$	$\psi(h) = \dfrac{4T_{10} - T_{00}}{3} = T_{11}$	
$\varphi(h/4)$	$=T_{20}$	$\psi(h/2) = \dfrac{4T_{20} - T_{10}}{3} = T_{21}$	$T_{22} = \dfrac{16T_{21} - T_{11}}{15}$
$\varphi(h/8)$	$=T_{30}$	$\psi(h/4) = \dfrac{4T_{30} - T_{20}}{3} = T_{31}$	$T_{32} = \dfrac{16T_{31} - T_{21}}{15}$

$$O(h^8):\quad T_{33} = \frac{4^3 T_{32} - T_{22}}{4^3 - 1} \Longrightarrow T_{i,k} = \frac{4^k T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}$$

$$T_{i,0} = \frac{f(x+\frac{h}{2^i}) - f(x-\frac{h}{2^i})}{2(h/2^i)}.$$

مثال : به کمک برون یابی ریچاردسون با فرض این که تابع متناظر با تابع جدولی زیر به اندازه‌ی کافی مشتق پذیر پیوسته است. مناسب ترین تقریب را برای $f'(1)$ پیدا کنید.

x_i	-3	-1	0	1	2	3	5
f_i	0	1	2	-1	3	0	1

$x=1$
$h=4$

$$\varphi(h) = T_{00} = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(5)-f(-3)}{8} = 1/8$$

$$\varphi(h/2) = T_{10} = \frac{f(3)-f(-1)}{4} = -1/4$$

$$\varphi(h/4) = T_{20} = \frac{f(2)-f(0)}{2} = 1/2$$

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
T_{00}	$1/8$	$T_{11} = \frac{9}{21} = \frac{-3}{8}$	
T_{10}	$-1/4$	$T_{21} = \frac{9}{12} = 3/4$	$T_{22} = \frac{16T_{21} - T_{11}}{15}$ بهترین تقریب ممکن
T_{20}	$1/2$		

* تا ، تابع از درجه‌ی حداکثر 8 ، T_{22} بهترین تقریب ممکن است.

، مشتق گیری با استفاده از چندجمله‌ای های درونیاب :

فرض کنید P چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, \dots, x_n$ باشد

$$f(x) = P(x) + E(x)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

بنابراین ،

Subject
Date

تمرین : ثابت کنید مشتق پذیر است!

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i'(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}\right)(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!} \times \frac{d}{dx}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]$$

اگر بخواهیم f' را در یکی از نقاط گرهی x_i $(i=0,1,\dots,n)$ تقریب بزنیم،

خواهیم داشت : (مثلاً در x_α).

$$f'(x_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i'(x_\alpha) + \frac{d}{dx}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]_{x=x_\alpha} \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}$$

که در آن

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right] = \sum_{j=0}^{n}\prod_{\substack{i=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_i).$$

مثال 3 فرض کنید $x_0 < x_1 < x_2$ به کمک تقریب درونیاب در این سه نقطه برای تابع $f\in C^3[x_0,x_1]$، تقریبی مناسب برای $f'(x_1)$ همراه با جمله‌ی خطا بدست آورید.

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \rightarrow l_0'(x_1) = \frac{x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \rightarrow l_1'(x_1) = \frac{(x_1-x_0)+(x_1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \rightarrow l_2'(x_1) = \frac{x_2-x_0}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)}$$

$$f'(x_1) = f_0\left(\frac{x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right) + f_1\left(\frac{(x_1-x_0)+(x_1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)$$

$$+ f_2\left(\frac{x_1-x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right) + (x_1-x_0)(x_1-x_2)\frac{f'''(\alpha_x)}{3!} \qquad \alpha_x\in[x_0,x_2]$$

Subject
Date

توجه : اگر $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$ آنگاه فرمول مشتق گیری $f'(x_1)$ در شکل قبل به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$f'(x_1) = -f_0\left(\frac{1}{2h}\right) + f_2\left(\frac{1}{2h}\right) - \frac{h^2}{6} f'''(\alpha_x)$$

$$= \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f''(\alpha_x).$$

روش های انتگرال گیری عددی :

تعریف : فرض کنید $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ آنگاه

$$\circledast \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

را یک روش انتگرالگیری عددی می گویند.

w_i ها ، n و x_i ها مستقل از f هستند.

تعریف : روش انتگرال گیری $\circledast$ را از دقت درجه n می گوییم اگر برای هر $f \in \Pi_n$ (چند جمله ای های از درجه ی حداکثر n)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \quad **$$

و برای حداقل یک $f \in \Pi_{n+1}$ تساوی فوق برقرار نباشد.

این تعریف معادل است با اینکه برای $f = 1, \dots, x^n$ رابطه ی $**$ برقرار است و برای $f = x^{n+1}$ رابطه ی $**$ برقرار نیست.

نماد :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - I(f).$$

$$\{a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \,,\, w_i \,,\, i=0,\dots,n\}$$

می‌دانیم

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

تعریف: اگر برای $f = 1, x, \dots, x^k$ تساوی در رابطه * برقرار باشد و برای $f = x^{k+1}$ تساوی برقرار نباشد آنگاه روش انتگرال گیری از درجه دقت n است.

روش انتگرال گیری درونیاب:

فرض کنید چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ است.

روش انتگرال گیری درونیاب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$① \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P(x)\,dx + \int_a^b E(x)\,dx$$

که $E(x)$ جمله خطای درونیابی است یعنی $f(x) = P(x) + E(x)$:

از طرفی:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

بنابر ① داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b L_i(x)\,dx\right] f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\left[\int_a^b f^{(n+1)}(\alpha_x)(x-x_0)\cdots(x-x_n)\,dx\right]$$

درنتیجه

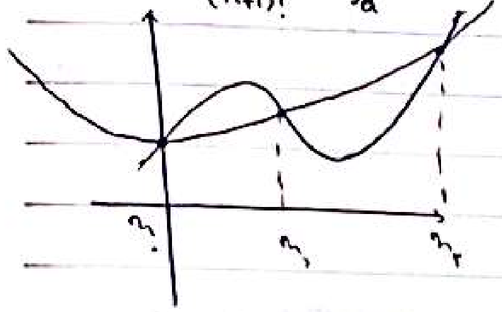
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

روش انتگرال گیری درونیاب

$$w_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$$

توجه: روش انتگرال‌گیری درونیاب در نقاط $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ از درجه دقت حداقل n است زیرا:

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\alpha_x)(x-x_0)\dots(x-x_n)\,dx = 0 \qquad \forall f \in \Pi_n$$



تعریف: روش انتگرال‌گیری درونیاب در نقاط $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

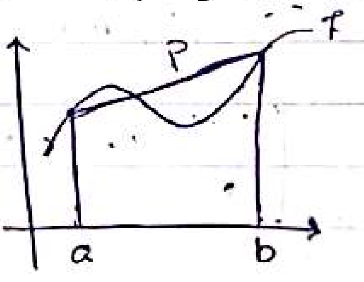
$$x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0, \dots, n-1$$

را روش انتگرال‌گیری نیوتن-کاتس بسته می‌گوییم (نیوتن کاتس بسته $n+1$ نقطه‌ای)

اگر $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$ ،
$$\begin{cases} x_{i+1} - x_i = h, & i = 0, \dots, n-1 \\ x_0 - a = b - x_n = h \end{cases}$$

روش انتگرال‌گیری درونیاب متناظر را روش نیوتن-کاتس باز $n+1$ نقطه‌ای می‌گویند.

مثال: روش انتگرال‌گیری عددی نیوتن-کاتس بسته ۲ نقطه‌ای را مشخص کنید. جمله خطای آن را بنویسید.



$$b - a = h \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

روش ذوزنقه‌ای

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b P_1(x)\,dx}_{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)} + \int_a^b E_1(x)\,dx$$

$$P_1(x) = f(a)L_0(x) + f(b)L_1(x)$$

$$\omega_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{b-a}{2} = h/2$$

$$\omega_1 = \int_a^b L_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{2} = h/2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

خطای انتگرال گیری ذوزنقه‌ای :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$= \int_a^b E_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\alpha_x)\,\overbrace{(x-a)(x-b)}\,dx$$

* به وضوح $u(x) = (x-a)(x-b)$ پیوسته است و در (a,b) تغییر علامت نمی‌دهد

همچنین $f''(\alpha_x)$ برحسب x تابعی پیوسته در $[a,b]$ است. در نتیجه بنابر قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها:

$$\frac{1}{2}\int_a^b f''(\alpha_x)(x-a)(x-b)\,dx = \frac{1}{2} f''(\alpha)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \quad ; \alpha \in [a,b]$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x-a=\alpha & , h=b-a \\ x-b=\alpha-h & \end{array}}$$

Subject: Date:

$$= \frac{1}{2} f''(\alpha) \int_0^h x(x-h)\,dx = \frac{1}{2} f''(\alpha) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{h x^2}{2} \Big|_0^h \right]$$

$$= \boxed{-\frac{1}{12} h^3 f''(\alpha)}$$ خطای روش انتگرال گیری ذوزنقه ای

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}_{\text{روش ذوزنقه ای}} - \underbrace{\frac{h^3}{12} f''(\alpha)}_{\text{خطای روش ذوزنقه ای}}$$

درنتیجه روش انتگرال گیری ذوزنقه ای برای چندجمله ای های خطی فقط دقیق است

(از درجه دقت 1 است)

تمرین: روش انتگرال گیری عددی نیوتن-کاتس باز دونقطه ای را همراه با خطا تعیین کنید.

قضیه: فرض کنید $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ روش انتگرال گیری

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \quad (*)$$ را درنظر بگیرید

الف) اگر این روش انتگرال گیری روش درونیاب باشد آنگاه از درجه دقت حداقل n است.

ب) اگر این روش انتگرال گیری از درجه دقت حداقل n باشد آنگاه یک روش انتگرال گیری

برهان: (الف) قبلاً بررسی شده است.

(ب) فرض کنید این روش انتگرال گیری از درجه دقت حداقل n است. یعنی برای $f = 1, x, \dots, x^n$ رابطه * به صورت تساوی برقرار است یعنی

$$f=1 \rightarrow b-a = \sum_{i=0}^{n} w_i$$

$$f = x \longrightarrow \frac{b^2 - a^2}{2} = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i$$

$$\vdots$$

$$f = x^n \longrightarrow \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^n$$

که این خود معادلات یک دستگاه خطی به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \frac{b^3 - a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^n - a^n}{n} \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب این دستگاه معکوس پذیر است زیرا اگر این ماتریس را با A نشان دهیم کافی است بررسی کنیم A^t معکوس پذیر است زیرا $|A| = |A^t|$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

کافی است نشان دهیم دستگاه همگن متناظر با A^t تنها جواب بدیهی صفر را دارد ولی

$A^t \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0$ معادل است با $\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = 0 \qquad k = 0, \dots, n$

برهان خلف: اگر دستگاه جواب غیرصفر $\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ داشته باشد یعنی $A^T \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

یعنی چندجمله‌ای $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$، $n+1$ ریشه $x_0, \dots, x_n$ دارد و این یک تناقض است.

Subject: Date:

بنابراین نشان دهیم جواب یکتای $w_0, \dots, w_n$ دارد. الگوریتم نشان می‌دهیم:

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \qquad i=0,\dots,n$$

در واقع باید نشان دهیم $\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^k = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$ ، $k=0,\dots,n$

یعنی:

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b l_i(x)\,dx\right] x_i^k = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x)\right) dx \;\dots$$

$$= \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

اما $\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع $h(x) = x^k$

در نقاط $x_0, \dots, x_n$ است ولی چون $k \leq n$ پس چندجمله‌ای درونیاب h

با خودش برابر است یعنی

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k$$

در نتیجه رابطه برقرار می‌شود و متناظر آن

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \qquad i=0,\dots,n$$

Subject: جلسه بیست و چهارم
Date: 1396.02.31

یادآوری :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

روش انتگرال گیری فوق حداقل از درجه ی n است اگر و تنها اگر این روش انتگرال‌گیری ، درونیاب باشد . (درونیاب باشد یعنی $\omega_i = \int_a^b L_i(x)dx$)

مثال : به کمک قضیه ی بیان شده روش نیوتن - کاتس دو نقطه‌ای بسته را تعیین کنید.
قبلاً این روش به صورت مستقیم بیان شده .

$$\omega_0 = \int_a^b L_n(x)\,dx = h/2$$

$$\omega_1 = \int_a^b L_1(x)\,dx = h/2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) = h/2\,[f(a)+f(b)]$$

روش دوم : به کمک قضیه ی قبل این روش برای چندجمله‌ای های از درجه ی حداکثر 1 دقیق است .

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=x \end{array}\right\} \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

$$\begin{array}{l} f(x)=1 \rightarrow \\ f(x)=x \rightarrow \end{array}\begin{cases} b-a = \omega_0+\omega_1 \\ \dfrac{b^2-a^2}{2} = \omega_0 a + \omega_1 b \end{cases} \longrightarrow \omega_0=\omega_1=\frac{b-a}{2}=h/2$$

$$\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx h/2\,[f(a)+f(b)]$$

مثال : روش انتگرال‌گیری نیوتن-کاتس سه نقطه‌ای بسته را برای تقریب انتگرال $\int_0^2 f(x)dx$ تعیین کنید.

روش اول :

$$\omega_0(x) = \int_0^2 \frac{(x-1)(x-2)}{2}\,dx$$

$$\omega_1(x) = \int_0^2 -x(x-2)\,dx$$

$$\omega_2(x) = \int_0^2 \frac{x(x-1)}{2}\,dx$$

$w_0 = 1/3 \qquad w_1 = 4/3 \qquad w_2 = 1/3$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \underbrace{\tfrac{1}{3}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right]}_{\text{روش انتگرال گیری سیمپسون .}}$$

روش دوم : (این یک روش دردیاب است پس درجه ی دقت آن حداقل 2 است
پس برای $f = 1, x, x^2$ دقیق است)

$f=1 \longrightarrow 2 = w_0 + w_1 + w_2$

$f=x \longrightarrow 2 = w_1 + 2w_2$

$f=x^2 \longrightarrow \frac{8}{3} = w_1 + 4w_2$

$w_0 = 1/3 \qquad w_1 = 4/3 \qquad w_2 = 1/3$

تغییر بازه در روش انتگرال گیری عددی :

روش انتگرال گیری عددی زیر را درنظر بگیرید .

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

اکنون می خواهیم این روش انتگرال گیری را برای تقریب از

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

$x \longrightarrow \lambda(t) \;;\; t \in [c, d]$

به کار ببریم .

$\lambda(t) = \alpha t + \beta$ $\qquad \begin{cases} \lambda(c) = a \\ \lambda(d) = b \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \lambda(c) = \alpha c + \beta = a \\ \lambda(d) = \alpha b + \beta = b \end{cases}$

$\alpha(d - c) = b - a$

$\alpha = \frac{b-a}{d-c}$ $\qquad \beta = a - \alpha c = a - \left(\frac{b-a}{d-c}\right)c = \underbrace{\frac{ad - bc}{d-c}}_{\beta}$

$$\lambda(t) = \alpha t + \beta = \left(\frac{b-a}{d-c}\right)t + \frac{ad-bc}{d-c}$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{d-c}\right)\int_c^d g(\lambda(t))\,dt$$

$$dx = \lambda'(t)\,dt = \frac{b-a}{d-c}\,dt \approx \frac{b-a}{d-c}\left[\sum_{i=0}^{n} \omega_i\, g(\lambda(x_i))\right]$$

مثال: روش انتگرال گیری نیوتن کاتس بسته‌ی سه نقطه‌ای برای تقریب

$\int_a^b f(x)\,dx$ را تعیین کنید.

$$\lambda(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)t +$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \lambda(x_0) = a \\ x_1 = 1 & \lambda(x_1) = \frac{a+b}{2} \\ x_2 = 2 & \lambda(x_2) = b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

تعریف: روش انتگرال گیری نیوتن - کاتس بسته‌ی سه نقطه‌ای را روش سیمپسون (Sympson) که به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right] \qquad c = \frac{a+b}{2}$$

* برای چند جمله‌ای های از درجه‌ی حداکثر 3 دقیق است!

یادآوری: روش دو نقطه‌ای ⟵ $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \underbrace{- \frac{h^3}{12} f''(\alpha)}_{\text{خطا}}$

$$f(x) = P(x) + E_1(x)$$

$$\int_a^b E_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{f''(\alpha)}{2}(x-a)(x-b)\,dx$$

PAPCO

Date

خطای روش انتگرال گیری سیمپسون :

$$f(x) = P_2(x) + E_2(x)$$

$a \quad h \quad b \quad h \quad a+2h$

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = \int_a^{a+2h} P_2(x)dx + \int_a^{b} E_2(x)dx$$

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right] + \int_a^{b} E_2(x)$$

$$E_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\alpha_x)(x-a)(x-b)(x-c)$$

برای تعیین خطای روش سیمپسون مشابه آنچه برای روش ذوزنقه‌ای انجام داده‌ایم عمل نمی‌کنیم

بلکه با فرض

$$E = \int_a^{a+2h} f(x)dx - \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right]$$

فرض کنید $f \in C\,[a, a+2h]$

ابتدا بسط تیلور f را حول $x=a$ می‌نویسیم :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{6}$$

$$+ \frac{f^{(4)}(a)(x-a)^4}{24} + \cdots$$

بنابراین :

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = 2h f(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{8}{6} h^3 f''(a) + \frac{16}{24} h^4 f'''(a) + \frac{32}{5\times 24} h^5 f^{(4)}(a) + \cdots$$

همچنین چون

$$\frac{h}{3} f(a)$$

$$\frac{4h}{3}(f(a+h)) = \frac{4h}{3}\left[f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(a) + \cdots\right]$$

$$\frac{h}{3} f[a+2h] = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2h f'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4h^3}{3} f'''(a) + \frac{16}{24} f^{(4)}(a) + \cdots\right]$$

Subject :
Date

$$E = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha) \quad ; \quad \alpha \in [a, a+2h]$$

اگر f چند جمله‌ای درجه 3 باشد خطا صفر
است . پس دقیق است . پس روش سیمپسون
از دقت دقیقاً 3 است .

روش انتگرال گیری سیمپسون و جمله‌ی خطا :

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(5)}(\alpha)$$

روش انتگرال گیری ذوزنقه‌ای مرکب :

می‌خواهیم $\int_a^b f(x)\,dx$ را تقریب بزنیم ، فرض کنیم $h = \frac{b-a}{n}$
که $n \in \mathbb{N}$ ، و فاصله‌ی انتگرال گیری را به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم .
فرض کنید $x_n = b$ و $x_0 = a$ و $x_i = a + ih$ به $i = 1, \dots, n-1$
اکنون در هر زیر بازه از روش انتگرال گیری ذوزنقه‌ای برای تقریب استفاده می‌کنیم .

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] - \frac{h^3}{12} f''(\alpha_i)$$

تساوی فوق را برای $i = 0, 1, \dots, n-1$ جمع می‌زنیم .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]}_{T(h)} \underbrace{- \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\alpha_i)}_{E(h)} \quad (*)$$

$T(h)$: تقریب انتگرال به روش ذوزنقه‌ای

$E(h)$: خطای 〃 〃 〃 〃

توجه : باید فرض کنیم $f \in C^2[a,b]$. چون f'' روی $[a,b]$ پیوسته
است پس ماکسیمم و مینیمم خود را در $[a,b]$ اختیار می‌کند . فرض کنید :

$$\max f''(x) = f''(t) = M$$

$$\min f''(x) = f''(s) = m$$

پس برای هر $x \in [a,b]$

$$m = f''(s) \le f''(x) \le f''(t) = M$$

با مراجعه به (*) :

$$nm \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f''(\alpha_i) \leqslant nM$$

$$f''(s) = m \leqslant \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f''(\alpha_i)}{n} \leqslant M = f''(t)$$

طبق قضیه‌ی مقدار میانی β ای بین t و s وجود دارد که

$$f''(\beta) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f''(\alpha_i)}{n}$$

در (*) قرار می‌دهیم :

$$\sum_{i=0}^{n} f''(\alpha_i) = n f''(\beta)$$

که β بین a و b است.

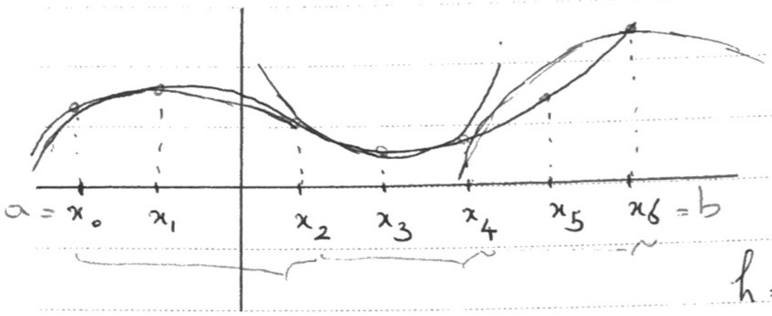
در نتیجه :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{-nh^3}{12} f''(\beta)\right)}_{\underbrace{\frac{-(b-a)h^2}{12} f''(\beta)}_{E(T(h))}}$$

Subject: جلسه بیست و پنجم
Date 1396,03,02

روش انتگرال گیری سیمپسون مرکب :



فرض کنید n زوج $\qquad h=\frac{b-a}{n}$

$x_{i+1}=x_i+h \qquad i=0,\dots,n$

همانطور که دیدیم روش سیمپسون ساده در بازهٔ $[x_i, x_{i+2}]$ به صورت زیر است :

$i=0,\dots,\frac{n}{2}-1$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\right] + \left(-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\alpha_i)\right)$$

در نتیجه $\int_a^b f(x)\,dx$

$$=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-2}\left[f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\right]-\frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{n-2}f^{(4)}(\alpha_i)$$

در نتیجه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} 4f(x_{2i+1})+2f(x_{2i})+f(x_n)\right]$$

با فرض اینکه $f\in C^4[a,b]$ آنگاه $f^{(4)}$ ماکسیمم و مینیمم خود را در $[a,b]$ اختیار می‌کند یعنی $t,s\in[a,b]$ وجود دارند که

$$\left.\begin{aligned}\max f^{(4)}(x) &= f^{(4)}(t)=M\\ \min f^{(4)}(x) &= f^{(4)}(s)=m\end{aligned}\right\} \rightarrow \sum_{i=0}^{n/2-1} m \leqslant \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\alpha_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n/2-1} M$$

$x\in[a,b]$

$$\Longrightarrow m\left(\frac{n}{2}\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\alpha_i) \leqslant M\left(\frac{n}{2}\right)$$

Subject:
Date

درسته

$$f^{(4)}(s) = m \leq \frac{2\sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\alpha_i)}{n} \leq M = f^{(4)}(t)$$

طبق قضیه مقدار میانی β بین s و t وجود دارد که

$$f^{(4)}(\beta) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\alpha_i)$$

پس در ادامه‌ی مطالب داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + \sum_{i=0}^{n/2-1}\left(4f(x_{2i+1}) + 2f(x_{2i})\right) + f(x_n)\right]$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\beta)\right)}_{E(S(h))} \qquad \beta \in [a,b]$$

مثال: می‌خواهیم به روش سیمپسون $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ را تعیین کنیم.

فاصله‌ی نقاط (تعداد زیر بازه‌ها) چقدر باشد تا خطای روش انتگرال‌گیری بیشتر از 10^{-8} نشود؟

$$|E(S(h))| \leq 10^{-5}$$

$f(x) = \sin x^2 \qquad f'(x) = 2x\cos x^2$

$f''(x) = -4\sin x^2 \times x^2 \qquad f'''(x) = -4x\sin x^2 - 8x\sin x^2 - 8x^3 C$

$f^{(4)}(x) = -4\sin x^2 - 8x^2\cos x^2 - 8\sin x^2 - 16x^2\cos x^2 - 24x^2 C$

$+16x^4\sin x^2$

Subject :
Date

کافیست طول بازه‌ها (h) را طوری در نظر بگیریم که

$$\frac{(b-a)h^4}{180} \max |f^{(4)}(x)| \leq 10^{-8} \qquad x \in [0,1]$$

و کافیست

$$\frac{h^4}{180}(76) \leq 10^{-8} \rightarrow h^4 \leq \frac{180}{76} \times 10^{-8}$$

$$\bar{h} \leq \sqrt[4]{\frac{180}{76}(10^{-8})} = 10^{-2}\left(\sqrt[4]{\frac{180}{76}}\right) = 0.0\overline{12}$$

$$\rightarrow \bar{h} \leq 0.0\overline{12}$$

$$\bar{n} = \frac{b-a}{\bar{h}} = 83.\bar{3}$$

کافیست $n = 84$.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{84}$$

★ تمرین : روش دو نقطه‌ای نیوتن - کاتس باز .

رفع سوال

ابتدا الگوریتم رو برای ساده‌ترشده آن بدست می‌آوریم :

$0 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad 3$

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx w_0 f(1) + w_1 f(2)$$

① برای پیدا کردن w_0 ، w_1 ، L_1 و L_0 را بدست آوریم و ...

② با استفاده از قضیه $\begin{cases} f=1 \\ f=x \end{cases}$ ← معادله ← جواب :

سپس با استفاده از روش تغییر متغیر در انتگرال در $[a,b]$ بدست می‌آوریم

برای خطا :

$$\int_a^{a+3h} f(x) \approx w_0 f(x_0+2h)$$ ← بسط تیلور انتگرال خطا

Date

برای روش سیمپسون الگوریتم را می‌نویسیم. خطا: مجموع خطاها.

تمرین: (صورت کامل شده تمرین بالا) روش نیوتن-کاتس باز 2 نقطه‌ای را برای تقریب انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را تعیین کنید سپس جمله‌ی خطای آن را بدست آورید. روش انتگرال مرکب این روش را همراه با جمله‌ی خطا بدست آورید.

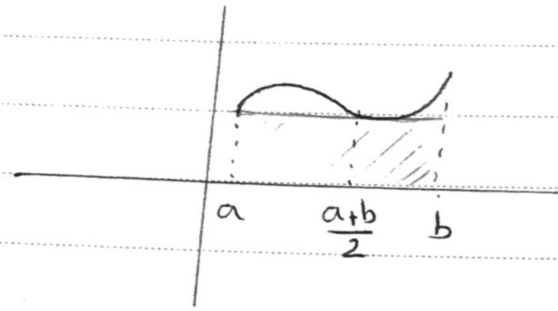
روش های انتگرال‌گیری نیوتن کاتس $n+1$ نقطه‌ای بسته:

تعداد نقاط	2	3	4	$2k-1$
نام روش	ذوزنقه	سیمپسون	سیمپسون $\frac{3}{8}$	
خطا	$\frac{-h^3}{12} f'(\alpha_2)$	$\frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\alpha_3)$	$k_4 h^5 f^{(4)}(\alpha_4)$	$k_n h^{2k+1} f^{(2k)}(\alpha_n)$

تعداد نقاط: $n=2k$ $\longrightarrow$ خطا: $k_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\alpha'_n)$

PAPCO

تمرین (روش انتگرال گیری نقطه میانی)



$b - a = h$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$h\, f(a + h/2)$$

خطای آن را پیدا کنید و روش ترکیبی نقطه میانی را به همراه خطای آن بدست آورید.

خطا:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h^3}{24} f''(\alpha)$$

$\alpha \in [a, b]$

Subject: بیست و ششم
Date 1396,03,07

روش انتگرال‌گیری گاوسی

روش انتگرال‌گیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

که x_i ها، نقاطی در $[a,b]$ هستند، $w_i(x)>0$ تابع وزن است و علاوه پیوسته هستند.

هدف پیدا کردن نقاط x_i، $i\in\{0,\dots,n\}$ و w_i ها است به طوری که این روش انتگرال‌گیری از درجه دقت حداقل $2n+1$ باشد.

مراحل تعیین نقاط و ضرایب در انتگرال‌گیری گاوسی برای روش $n+1$ نقطه گاوس،

۱- نقاط گرهی مورد نظر $x_n, \dots, x_0$ را پیدا کنیم (به طریقی که بعداً گفته می‌شود.)

2- ضرایب w_i، $i=0,\dots,n$ را پیدا می‌کنیم، هدف این بود که این روش انتگرال‌گیری از درجه دقت حداقل $2n+1$ باشد پس از درجه دقت حداقل n نیز هست: بنابراین، روش مورد نظر یک روش انتگرال‌گیری درونیاب است که برای تعیین w_i، دو روش داریم:

روش اول:
$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \qquad i=0,1,\dots,n$$

روش دوم:

$$f=1 \rightarrow \int_a^b w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i$$

$$\vdots$$

$$f=x^n \rightarrow \int_a^b x\, w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i^n$$

یک دستگاه $n+1$ معادله، $n+1$ مجهول حل می‌شود تا w_i ها تعیین شود.

PAPCO

تعیین نقاط گرهی در روش انتگرال‌گیری گاوسی :

تعریف : فرض کنید V یک فضای برداری باشد ، عملگر ضرب داخلی روی این فضا تابعی است به صورت :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow k = \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

که ویژگی های زیر را دارند :

1) $\forall u \in V \quad \langle u , u \rangle \geq 0$

2) $\langle u , u \rangle = 0 \iff u = 0$

3) $w , u , v \in V \ , \ \alpha , \beta \in k :$

$$\langle \alpha u , v \rangle = \alpha \langle u , v \rangle$$

$$\bar{\beta} \langle u , v \rangle = \langle u , \beta v \rangle$$

$$\langle u , \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u , v \rangle + \bar{\beta} \langle u , w \rangle$$

$$\langle \alpha u + \beta v , w \rangle = \alpha \langle u , w \rangle + \beta \langle v , w \rangle$$

4) $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle}$

تعریف : یک فضای برداری که برای آن عملگر ضرب داخلی تعریف شود را یک فضای ضرب داخلی گویند.

توجه : برای هر فضای ضرب داخلی می‌توان تابعی به صورت

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

تعریف کرد که برای هر $u \in V$

$$\underbrace{\| u \|}_{\text{نرم } u} = \sqrt{\langle u , u \rangle}$$

PAPCO

Subject:
Date

ویژگی های نرم

1) $\|u\| = 0 \longleftrightarrow u = 0 \quad (\|u\| \geq 0)$

2) $\alpha \in k \quad , \quad \|\alpha u\| = \|\alpha\| \|u\| = |\alpha| \|u\|$

3) $u, v \in V \quad , \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

مثال: فضای $\mathbb{R}^n$ یک فضای ضرب داخلی است:

$$u, v \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \langle u, v \rangle = u^T . v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

مثال: فضای همه ی توابع پیوسته در فاصله ی $[a,b]$: $c[a,b]$

$$f, g \in c[a,b] \quad , \quad k = \mathbb{C}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

تعریف: در فضای ضرب داخلی V گوییم $u, v \in V$ ، $u \perp v$ اگر $\langle u, v \rangle = 0$.

اکنون می خواهیم $n+1$ نقطه $x_0, x_1, \ldots, x_n$ را در $[a,b]$ پیدا کنیم به طوریکه

روش انتگرال گیری

$$\int_a^b f(x) w(x) \, dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

از درجه ی دقت $2n+1$ باشد ، خواهیم دید اگر $g \in \Pi_{n+1}$ به گونه ای باشد که $g \perp f$

برای هر $f \in \Pi_n$ ، یا به عبارتی $g \perp \Pi_n$ آنگاه g ، $n+1$ ریشه ی ساده

در (a,b) دارد که این ریشه ها ، همان $x_0, \ldots, x_n$ هستند.

$$g \perp f \longleftrightarrow \int_a^b f(x) g(x) w(x) \, dx = 0$$

PAPCO

تمرین: فرض کنید $0 \neq q \in \Pi_{n+1}$ ، $q \perp \Pi_n$ یعنی برای هر $f \in \Pi_n$

$$\int_a^b f(x)\, q(x)\, w(x)\, dx = 0$$

آنگاه q ، $n+1$ ریشه ساده و حقیقی در (a,b) دارد.

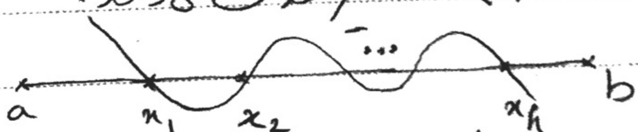
برهان: ابتدا نشان می‌دهیم f حداقل یک ریشه در (a,b) دارد. اما چون
به وضوح $q \perp 1$ یعنی $\int_a^b q(x)\, w(x)\, dx = 0$

اما $w(x) > 0$ روی (a,b) ، اگر f در (a,b) ریشه نداشته باشد، آنگاه
$q(x)w(x) > 0$ روی (a,b) یا $q(x)w(x) < 0$ روی (a,b) بنابراین

$\int_a^b q(x)w(x)\,dx > 0$ یا $\int_a^b q(x)w(x)\,dx < 0$ که تناقض است.

اکنون نشان می‌دهیم که q دقیقاً در $n+1$ نقطه در بازه‌ی (a,b) تغییر علامت می‌دهد

فرض کنید q فقط در k نقطه، $k < n$ تغییر علامت می‌دهد.



که نقاط $x_1, x_2, \dots, x_k$ هستند. تعریف کنید

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$$

واضح است که یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

① $q(x)P(x) > 0$ ، $\forall x$ ، به جز ریشه‌های q

② $q(x)P(x) < 0$ ، برای هر x به جز ریشه‌های q
(که در این نقاط $q(x)P(x) = 0$)

در نتیجه $\int_a^b p(x)q(x)w(x) > 0$ یا < 0

از طرفی p یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n است زیرا $k \le n$ و در نتیجه از $q \perp \Pi_n$ داریم:

$$\int_a^b p(x)q(x)w(x)\,dx = 0$$

که این تناقض است بنابراین فرض اینکه q تنها در $k \le n$ نقطه تغییر علامت می‌دهد باطل است، و چون $q \in \Pi_{n+1}$ پس دقیقاً در $n+1$ نقطه در بازه‌ی (a,b) تغییر علامت می‌دهد.

قضیه: فرض کنید $q \in \Pi_{n+1}$ ، $q \perp \Pi_n$ اگر $a < x_0 < \dots < x_n < b$ ریشه‌های q باشند (که طبق قضیه قبل موجود هستند) آنگاه روش انتگرال‌گیری درونیاب

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

که از دقت $2n+1$ است.

برهان: فرض کنید $p \in \Pi_{2n+1}$ ، ثابت می‌کنیم

$$\int_a^b p(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i p(x_i)$$

p را بر g تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & g(x) \\ \cline{2-2} & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

یعنی $q, r \in \Pi_n$ و

(1) $$\int_a^b p(x)w(x)\,dx = \int_a^b q(x)g(x)w(x)\,dx + \int_a^b r(x)w(x)\,dx = \int_a^b r(x)w(x)\,dx.$$

چون روش انتگرال‌گیری سوود نظر یک روش درونیاب است پس از درجه‌ی دقت حداقل n است ولی چون $r(x) \in \Pi_n$ پس این روش برای انتگرال‌گیری از $r(x)$ دقیق است.

$$② \quad \int_a^b r(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i\, r(x_i)$$

از طرفی $P(x_i) = q(x_i)g(x_i) + r(x_i)$. ③

در نتیجه از ۱ و ۲ و ۳

$$\int_a^b P(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b r(x)w(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} w_i\, r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i)$$

بنابراین روش انتگرال‌گیری از درجه دقت حداقل $2n+1$ است.

توجه: برای تعیین نقاط گرهی $x_0, x_1, \dots, x_n$ در انتگرال‌گیری گاوسی $n+1$ نقطه‌ای باید $q = \Pi_{n+1}$ که $q \perp \Pi_n$ را بیابیم و ریشه‌های آن در بازه‌ی (a,b)، همان نقاط گرهی مورد نظر است.

روش متعامد سازی گرام اشمیت برای تعیین پایه‌های متعامد یک فضای ضرب داخلی

فرض کنید V یک فضای برداری و فضای ضرب داخلی باشد، با پایه‌ی شمارای $\{v_1, v_2, \dots\}$ می‌خواهیم پایه $\{V_1, \dots\}$ را طوری تعیین کنیم که $i \neq j$ $\;V_i \perp V_j$

$$\langle V_i, V_j \rangle = 0$$

مرحله‌ی ۱. $V_1 = u_1$

۲. $V_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, V_1\rangle}{\langle V_1, V_1\rangle} V_1$

Subject:
Date

$$v_k = u_k - \frac{\langle u_k, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \dots - \frac{\langle u_k, v_{k-1}\rangle}{\langle v_{k-1}, v_{k-1}\rangle} v_{k-1}$$ مرحله‌ی k

$$= u_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

مثال: روش دو نقطه‌ای گاوس را برای تعیین انتگرال

$$\int_0^1 x f(x)\, dx$$

را بدست آورید.

مرحله‌ی 1) تعیین $g \in \Pi_2$ به طوریکه $g \perp \Pi_1$

پایه‌ی اولیه‌ی Π_2 = $\{1, x, x^2\}$

پایه‌ی متعامد را تعیین می‌کنیم $\{P_0, P_1, P_2\}$

$P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = 1/2 \qquad \langle x, 1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

پس

$$P_1(x) = x - 2/3$$

$$P_2(x) = x - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} - \frac{\langle x^2, x - 2/3\rangle}{\langle x - 2/3, x - 2/3\rangle}(x - 2/3)$$

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^3\,dx = 1/4$$

$$\langle x^2, x - 2/3\rangle = \frac{1}{30} = \int_0^1 \left(x^4 - \frac{2x^3}{3}\right) dx$$

$$\langle x - 2/3, x - 2/3\rangle = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{4}{9}x - \frac{4}{3}x^2\right) dx = 1/36$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{36}{30}\left(x - \frac{2}{3}\right) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}$$

$x_0, x_1 \in (0,1)$ ریشه های P_2

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

$$f=1 \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \omega_0 + \omega_1 \\ \frac{1}{3} = \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 \end{cases} \longrightarrow \omega_0, \omega_1 = ?$$