



تمرین سری اول

مهلت تحویل: ۱۳ اسفند ساعت ۲۴

۱. الف) نشان دهید که اشتراک هر خانواده ی دلخواه از توپولوژی های روی X یک توپولوژی روی X است.
ب) نشان دهید اجتماع توپولوژی ها لزوما یک توپولوژی نیست.

۲. $X = \{a, b\}$ و توپولوژی روی آن $T = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ است. مجموعه ی $[0, 1]$ را با توپولوژی متر معمولی در نظر بگیرید:

۱. اگر $f : X \rightarrow [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد که $f(b) = 0$ نشان دهید $f(a) = 0$
۲. تابعی پیوسته و غیر ثابت مانند $g : [0, 1] \rightarrow X$ پیدا کنید. (پیوستگی را ثابت کنید.)

۳. فرض کنید $T = \emptyset, X, A, B$ یک توپولوژی روی X است و $A, B \subsetneq X$ و ناتهی اند. مشخص کنید که A, B باید چه شرایطی داشته باشند.

۴. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f : X \rightarrow Y$ تابع باشد. نشان دهید گزاره های زیر معادلند.

الف) f پیوسته است.

ب) برای هر زیرمجموعه ی X مانند A داریم: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

ج) برای هر زیرمجموعه ی بسته از Y مانند B مجموعه ی $f^{-1}(B)$ در X بسته باشد.

۵. فرض کنید X یک مجموعه ی نا تهی و $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ یک متر روی X باشد. و T توپولوژی القا شده توسط متر d روی X است. نگاشت $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه ی

$$d'(x, y) = 2d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

در نظر بگیرید، نشان دهید:

الف) d' یک متر روی X است.

ب) توپولوژی القا شده توسط d' روی مجموعه X همان T است.

پ) با کمک دو قسمت قبل نشان دهید که اگر X فضای توپولوژیک متریک پذیر باشد آنگاه بیشمار متر توپولوژی X را القا میکنند.

(این مساله نشان میدهد که در یک فضای توپولوژیک می توان فاصله را بدون تغییر دادن توپولوژی به صورت های متفاوت تعریف کرد)
