توپولوژی عمومی

هادی زارع

این مجموعه یادداشتها صرفا برای استفاده دانشجویان به عنوان منبعی کمک درسی آماده شده است. دانشجویان و خوانندگان برای تمرین های بیشتر به کتابها توپولوژی عمومی بویژه کتاب Munkres مراجعه نمایند. ذکر مطالب با ارجاع یا بدون ارجاع به این یادداشتها و یا نام نویسنده آزاد و مایه دلگرمی خواهد بود. لطفا با بازخوردها و نظرات خود اینجانب را در بهتر کردن این یادداشتها یاری فرمایید.

فهرست مطالب

مقدمه

از منظر تاریخی توپولوژی (عمومی) شاخه ای از ریاضیات است که عوامل و انگیزه های متفاوتی از چند سوی گوناگون در پیدایش آن نقش داشته اند. این خود گویای چرایی اینست که "چرا نام افراد مختلفی که در شاخه های گوناگون ریاضی فعال بوده اند در فهرست افرادی که برخی از نخستین مفاهیم را در این شاخه از ریاضیات پایه گذاری کرده اند به چشم میخورد؟". از دیدگاه هندسی، این شاخه با کارهای ریاضیدان نامدار فرانسوی پوآنکاره آغاز شد، که احیانا تلاش برای پاسخ دادن به برخی سوالها در فیزیک خاستگاه این کارهای هندسی بوده است. اما افراد دیگری نیز از دیدگاه منطق ریاضی نیز در گسترش این شاخه از ریاضی دخیل بوده اند (هم اکنون نیز توپولوژی عمومی جزو ابزار مورد علاقه برخی از منطق دانان می باشد). از طرف دیگر، ابزار مورد استفاده هندسه دانان تحلیلی برای مطالعه پدیده های هندسی/فیزیک چیزی جز آنالیز ریاضی نبوده است. این دیدگاه، آنالیز ریاضی را نیز به عنوان یک خاستگاه توپولوژی عمومی پیشنهاد میکند. از دیدگاه منطقی (نه لزوما یک منطق دان) بسیار موجه است که تلاش کنیم این ابزار مفید را توسیع دهیم و مفاهیم آن را به صورت مجرد تر بیان کنیم. برای نمونه مفهوم متریک که در آنالیز ریاضی مورد استفاده است، یک مفهوم بنیادی می باشد و تلاش برای تعمیم متریک، یا توسعه مفهوم فضای متریک یک امر بدیهی است.

با مقدمه فوق، ما دیدگاه خود برای ورود به این شاخه از ریاضیات اینگونه بیان میکنیم که توپولوژی عمومی آنالیز ریاضی است که با استفاده از ابزار نظریه مجموعه ها بیان شده است. به همین دلیل است که آنالیز ریاضی یک منبع مهم و مفید از مثالها را برای درک و توضیح مفاهیم توپولوژی عمومی فراهم میکند.

این یادداشتها، حاصل چند سال تدریس توپولوژی عمومی در دانشگاه تهران می باشد که عمدتا بر پایه کتاب معروف Munkres بنا شده است، اما روایت مطالب بر اساس دید نگارنده این یادداشتهاست. بر همین پایه برخی مطالب که در کتاب یاد شده به آنها اشاره ای نشده است، یا فقط در حد یک تمرین به آنها اشاره شده است، در این یادداشتها مورد استفاده قرار گرفته اند. همچنین، این نگاه که دانشجو پس از این شاید به ادامه مطالعه در توپولوژی جبری یا دیفرانسیل بپردازد در بیان برخی مطالب دیگر موثر بوده است. با این حال تلاش این بوده است که ابتدا مفاهیم توپولوژی عمومی بیان شوند. برای همین، از برخی از مطالب که دانشجو آنها را در درس آنالیز ریاضی دیده است، مانند دنباله ها، نقاط حدی و غیره، خبری در این یادداشتها نیست. همچنین برخی مطالب بسیار مهم مانند توپولوژی ترتیبی را نیز مورد اشاره قرار نداده ایم. دلیل نیز گستردگی ساختارهای حاصل از فرض وجود یک ترتیب روی مجموعه است و ما آن را به یک درس زمینه منطق، مانند ساختارهای Oـ مینیمال واگذاشته ایم که در حیطه تخصص منطق دانان می باشد. تلاش در این یادداشتها است که تا قضیه های مهم متری پذیری، مانند قضیه اوریسون، در این درس به دانشجو آموزش داده شود به نحوی که در اثباتها از تکنیک نشاندن یک فضای توپولوژیک در یک فضای متریک پذیر استفاده شود.

فصل ۱

مفاهیم نخستین

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. از نماد $P(X)$ برای نمایش مجموعه زیرمجموعه های X استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. *منظور از یک توپولوژی روی مجموعه X عبارت است از $T \subseteq P(X)$ که دارای خواص زیر باشد*
الف. $X, \phi \in T$.
ب. T تحت اجتماع دلخواه بسته یاشد یعنی اگر I مجموعه اندیس گذار دلخواه باشد

$$\forall \{U_i\}_{i\in I} \subset T, \bigcup_{i\in I} U_i \in T.$$

پ. تحت اشتراک متناهی بسته باشد، یعنی

$$\forall U_1, U_2 \in T, U_1 \cap U_2 \in T.$$

به زوج (X,T) یک فضای توپولوژیک گفته می شود. **معمولا** *اگر یک توپولوژی روی X ثابت در نظر گرفته باشیم می گوییم که X یک فضای توپولوژیک است.*

به ازای فضای توپولوژیک (X,T) گوییم

$$U \in T \Longleftrightarrow U \subseteq X \text{ باز است}$$

و

$$X - C \text{ باز است} \Longleftrightarrow X - C \in T \Longleftrightarrow C \subseteq X \text{ بسته است}.$$

توجه کنید که بند پ. تعریف ۱.۱.۱ به همراه استقراء بسته بودن توپولوژی T تحت اشتراک متناهی را نتیجه میدهد. پیش از بیان هر مطلبی، توجه کنید که توپولوژی را می توان با معرفی مجموعه های بسته نیز معرفی نمود.

تمرین ۲.۱.۱. *فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $T^c \subseteq P(X)$ به قسمی که*
الف. $X, \phi \in T^c$.
ب. T^c *تحت اشتراک دلخواه بسته باشد.*
پ. T^c *تحت اجتماع متناهی بسته باشد.*
در این صورت

$$T = \{X - C : C \in T^c\}$$

یک توپولوژی روی X است.

مثالهای بسیاری برای یک توپولوژی روی یک مجموعه وجود دارند. ابتدا دو توپولوژی بدیهی را که روی هر مجموعه ای وجود دارند را مثال میزنیم.

مثال ۳.۱.۱. *به ازای هر مجموعه ناتهی X، توپولوژی پوچ یا بیمایه با ضابطه*

$$\mathcal{N} = \{X, \phi\}$$

معین می شود. همچنین توپولوژی گسسته با ضابطه

$$\mathcal{D} = P(X)$$

معین میشود. گاهی زوج $(X, \mathcal{D})$ را تحت عنوان یک فضای توپولوژیک گسسته می شناسیم. یعنی اگر بگوییم X یک فضای توپولوژیک گسسته است یعنی توپولوژی روی آن گسسته است. بنا بر تعریف فوق در یک فضای گسسته، هر زیر مجموعه هم باز است و هم بسته است.

حال سوال این است که آیا مجموعه ای ناتهی با توپولوژی وجود دارد. برای نمونه از نظریه مجموعه ها میدانیم

$$|X| = 1 \Longleftrightarrow |P(X)| = 2.$$

بنابر تعریف توپولوژی و با استفاده از قضیه برنستاین_ کانتور_شرودر اگر T یک توپولوژی روی X باشد، آنگاه

$$2 \leqslant |T| \leqslant |P(X)|.$$

این نشان میدهد

$$|X| = 1 \Longleftrightarrow T = \mathcal{D} = \mathcal{N}.$$

یعنی هر مجموعه تک عضوی فقط یک توپولوژی می توان تعریف کرد که همان توپولوژی گسسته است که در این حالت با توپولوژی پوچ یکی است. حال یکی از نخستین مثالهای نابدیهی را معرفی میکنیم که منسوب به سرپینسکی (Serpinski) می باشد.

مثال ۴.۱.۱. *فرض کنید $X = \{0, 1, \}$ و قرار دهید*

$$\mathcal{S} = \{X, \phi, \{0\}\}.$$

به راحتی میبینیم که این یک توپولوژی است و به آن توپولوژی سرپینسکی و به فضای توپولوژیک بدست آمده فضای سرپینسکی میگوییم. البته به راحتی میتوان دید که

$$\mathcal{S}' = \{X, \phi, \{1\}\}.$$

نیز یک توپولوژی می باشد.

به عنوان تمرین میتوان همه توپولوژی های ممکن روی یک مجموعه متناهی، با تعداد معقول عضو را نوشت.

تمرین ۵.۱.۱. *همه توپولوژی های ممکن روی یک مجموعه سه عضوی را بنویسید.*

البته توجه کنید که اگر T یک توپولوژی روی X باشد باید $T \subseteq P(X)$ یعنی باید $T \in P(P(X))$. میدانیم که

$$|X| = n \iff |P(X)| = 2^n \iff |P(P(X))| = 2^{2^n}.$$

این البته بهترین کران بالا روی تعداد توپولوژی های ممکن روی یک مجموعه متناهی نیست و با استفاده از خاصیت بسته بودن توپولوژی تحت عمل اشتراک تعداد متناهی می توان این کران بالا را بهتر نمود.

تمرین ۶.۱.۱. *فرض کنید $|X| = n > 1$. آیا یک کران بالای اکیدا کمتر از 2^{2^n} روی تعداد توپولوژی های ممکن این مجموعه وجود دارد؟ چرا؟*

همانگون که پیشتر نیز گفتیم، آنالیز ریاضی و بویژه مبحث فضاهای متریک منبع مهمی برای مثال در توپولوژی هستند. حال نخستین مثال از این دست را میبینیم.

مثال ۷.۱.۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای توپولوژیک باشد. از نماد $B_d(x, r)$ برای نمایش یک گوی باز به مرکز $x \in X$ و شعاع r نسبت به متریک d استفاده میکنیم. یادآوری میکنیم که در فضای متریک (X, d)*

$$U \subseteq X \text{باز است} \iff \forall x \in U \exists r > 0, B_d(x, r) \subseteq U.$$

توجه کنید که با این تعریف مجموعه ی X در حضور هر متریکی باز است. همچنین، بنابر انتفاع مقدم، مجموعه تهی در حضور هر متریکی باز است. قرار میدهیم

$$T_d = \{U \subseteq X : U \subseteq X \text{باز است}\}.$$

نشان میدهیم که T_d یک توپولوژی می باشد.
الف. بنابر آنچه بالا گفته شد، $\phi, X \in T_d$.
ب. فرض کنید $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq T_d$. باید نشان دهیم $\bigcup_{i \in I} U_i \in T_d$. یعنی باید نشان دهید $\bigcup_{i \in I} U_i$ در متریک d باز است، یعنی هر نقطه آن درونی است.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} U_i &\longrightarrow \exists j \in I, x \in U_j \\ &\xrightarrow{U_j \in T_d} \exists r > 0, B_d(x, r) \subseteq U_j \\ &\longrightarrow \exists r > 0, B_d(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i. \end{aligned}$$

این نشان میدهد که $\bigcup_{i \in I} U_i \in T_d$ ، یعنی T_d تحت عمل اجتماع دلخواه بسته است.
پ. حال فرض کنید $U_1, \dots, U_n \in T_d$. نشان میدهیم $\bigcap_{i=1}^n U_i \in T_d$.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^n U_i &\longrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x \in U_i \\ &\xrightarrow{U_i \in T_d} \exists r_i > 0, B_d(x, r_i) \subseteq U_i \end{aligned}$$

حال قرار دهید $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ *. بوضوح*

$$B_d(x,r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

این نشان میدهد که $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T_d$ *، یعنی* T_d *تحت عمل اشتراک تعداد متناهی بسته است. این ادعای ما را ثابت میکند.*

به T_d *توپولوژی القاء شده توسط متریک* d *میگوییم.*

توجه کنید که عموما یک متریک روی یک مجموعه یک وسیله بسیار مفیدی است. در واقع متریک به شما اجازه میدهد که روی مجموعه از ابزار آنالیز استفاده بکنید، یا حداقل اینکه استفاده از ابزار آنالیزی را مد نظر قرار داشته باشید. اما اینکه به ازای هر توپولوژی داده شده T روی یک مجموعه X حتما بتوان نتیجه گرفت که یک متریک d روی X وجود دارد که $T = T_d$ به هیچ عنوان یک امر بدیهی نیست، و در واقع میتوان مثالهای بسیار در این مورد ارائه داد. این امر منجر به تعریف زیر می شود.

تعریف ۸.۱.۱. *فضای توپولوژیک* (X,T) *را متریک پذیر گوییم هرگاه یک متریک* d *روی* X *موجود باشد به قسمی که* $T = T_d$ *.*

جهت گیری کلی ما در این درس حرکت به سمت و سویی است که برخی از قضایای متریک پذیری را بیان کنیم. در زیر یک مثال بدیهی از یک فضای متریک پذیر می آوریم.

مثال ۹.۱.۱. *فرض کنید* X *یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد که* $|X| > 2$ *. فضای توپولوژیک گسسته* $(X,\mathcal{D})$ *را در نظر بگیرید. توجه کنید که در این توپولوژی هر زیر مجموعه* X *باز می باشد. حال متریک گسسته* $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ *با ضابطه*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به ازای زیر مجموعه ناتهی دلخواه $Y \subseteq X$ *و* $x \in Y$ *و هر* $0 < r < 1$ *داریم*

$$B_d(x,r) \subseteq Y.$$

یعنی هر نقطه Y *یک نقطه درونی در متریک گسسته است. پس*

$$T_d = P(X) = \mathcal{D}.$$

پس $(X,\mathcal{D})$ *یک فضای متریک پذیر است.*

۲.۱ توپولوژی و توابع پیوسته

پس از معرفی فضاهای توپولوژیک، یکی از نخستین و در عین حال بنیادی ترین مسائل این است که بتوان دو فضای توپولوژیک را با هم مقایسه نمود. این امر با معرفی توابعی صورت می پذیرد که نسبت به توپولوژی خوش رفتار باشند. یعنی اگر (X, T_X) و (Y, T_Y) دو فضای توپولوژیک باشند، آن دسته از توابع برای ما مطلوب هستند که رابطه خوبی بین دو توپولوژی برقرار نمایند. البته باز، این مفهوم خوش رفتار بودن چندان واضح نیست و میتوان معانی مختلفی برای آن متصور بود. اما از آن جهت که در حالتهای مناسبی، یک فضای توپولوژیک با یک فضای متریک یکسان باشد، و با توجه به اینکه در رسته فضای متریک، توابعی مناسب با نام توابع پیوسته را داریم، یکی از نخستین انتخابها تعمیم این تعریف به فضاهای توپولوژیک خواهد بود.

تعریف ۱.۲.۱. *منظور ما از یک نگاشت پیوسته بین دو فضای توپولوژیک (X, T_X) و (Y, T_Y) عبارت است از یک تابع $f : X \to Y$ بین دو مجموعه به قسمی که*

$$\forall V \in T_Y, f^{-1}(V) \in T_X.$$

یعنی تصویر وارون هر مجموعه باز در Y در X نیز باز باشد. در این صورت میگوییم

$$f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$$

یک تابع پیوسته است. البته اگر توپولوژی مورد استفاده رو دامنه و همدامنه f برای ما واضح باشد، به سادگی می نویسیم $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته است.

یک تفاوت مهم این تعریف با تعریف آنالیز این است که معمولا در آنالیز پیوستگی ابتدا در یک نقطه تعریف می شود و سپس پیوستگی روی مجموعه تعریف می شود و معمولا تعریف فوق پس از چند مقدمه به عنوان یک قضیه بیان می شود. خواهیم دید که این تعریف توپولوژیکی، وقتی توپولوژی متریک پذیر باشد همان تعریف آنالیزی را نتیجه میدهد. نخست به جند نمونه از توابع پیوسته را معرفی میکنیم.

مثال ۲.۲.۱. *فرض کنید (X, T) فضای توپولوژیک دلخواه باشد. فرض کنید Y و Z مجموعه های ناتهی دلخواه باشند.*
الف. آنگاه هر نگاشت دلخواه

$$f : (X, T) \to (Y, \mathcal{N})$$

پیوسته است. این امر واضح است، چون $\mathcal{N} = \{Y, \phi\}$ و بوضوح داریم

$$f^{-1}(Y) = X \in T,\ f^{-1}(\phi) = \phi \in T.$$

پس f پیوسته است.
ب. هر نگاشت

$$g : (Z, \mathcal{D}) \to (X, T)$$

پیوسته است. چون $\mathcal{D} = P(Z)$ و داریم

$$\forall U \in T, g^{-1}(U) \subseteq Z \equiv \forall U \in T, f^{-1}(U) \in P(Z) = \mathcal{D}.$$

پس g پیوسته است.

دو مجموعه ناتهی X و Y و عضو ثابت $y \in Y$ را در نظر بگیرید. نگاشت ثابت

$$\begin{cases} c_y : X \to Y \\ c_y(x) = y \end{cases}$$

و نگاشت همانی $1_X : X \to X$ را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۲.۱. *الف. به ازای هر توپولوژی T_X روی X و هر توپولوژی T_Y روی Y، نگاشت ثابت $c_y : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ پیوسته است. چون به ازای هر $V \in T_Y$ داریم*

$$c_y^{-1}(V) = \begin{cases} X & y \in V, \\ \phi & y \notin V. \end{cases}$$

چون $X, \phi \in T_X$ پس همواره $c_y^{-1}(V) \in T_X$. پس c_y پیوسته است.
ب. به ازای هر توپولوژی دلخواه T روی X، نگاشت $1_X : (X, T) \to (X, T)$ بوضوح پیوسته است، چون به ازای هر $V \in T$ داریم

$$1_X^{-1}(V) = V \in T.$$

حال مثالی از یک نگاشت ناپیوسته میزنیم. این مثال از دو جهت قابل توجه است. نخست اینکه از تابع همانی استفاده میکنیم که معمولا پیوسته فرض میشود. دوم اینکه این مثال نشان میدهد تغییر توپولوژی روی یک فضا میتواند ویژگی پیوستگی را کاملا دگرگون کند و یک تابع پیوسته را ناپیوسته کند.

مثال ۴.۲.۱. *مجموعه $X = \{0, 1\}$ و تابع*

$$1_X : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{S}')$$

را در نظر بگیرید. بوضوح این یک نگاشت پیوسته نیست! توجه کنید که $\{1\} \in \mathcal{S}'$. اما داریم

$$1_X^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{S}.$$

این ادعای ما را ثابت میکند.

یکی از شیوه های مهم برای ساختن توابه جدید، ترکیب توابع (قابل ترکیب) است. بسیار مهم است که ترکیب دو نگاشت پیوسته پیوسته باشد. لم بعد نشان میدهد که چنین انتظاری درست است.

لم ۵.۲.۱. *اگر $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ و $g : (Y, T_Y) \to (Z, T_Z)$ پیوسته باشند، آنگاه*

$$g \circ f : (X, T_X) \to (Z, T_Z)$$

نیز یک تابع پیوسته است.

اثبات. توجه کنید که به ازای هر زیر مجموعه $C \subseteq Z$ داریم

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

حال بنابر تعریف

$$W \in T_Z \overset{\text{پیوسته } g}{\Longrightarrow} g^{-1}(W) \in T_Y \overset{\text{پیوسته } f}{\Longrightarrow} f^{-1}(g^{-1}(W)) \in T_X.$$

این گزاره را ثابت میکند. $\square$

گاهی استفاده از مجموعه های بسته به جای مجموعه های باز در بیان پیوستگی بسیار مفید و راهگشاست. لم زیر این تعریف را بیان میکند.

لم ۶.۲.۱. *نگاشت $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازی هر مجموعه بسته $D \subseteq Y$ مجموعه $f^{-1}(D)$ در X بسته باشد.*

اثبات. بنابر تعریف

$$D \subseteq Y \text{ بسته است} \iff \exists V \subseteq Y \text{ باز } , D = Y - V.$$

حال گزاره از این نکته که

$$f^{-1}(D) = X - f^{-1}(V)$$

نتیجه میشود. $\square$

۳.۱ همسانی توپولوژیک

مجموعه $X = \{0, 1\}$ را در نظر بگیرید. چه تفاوتی بین دو توپولوژی $\mathcal{S} = \{X, \phi, \{0\}\}$ و $\mathcal{S}' = \{X, \phi, \{1\}\}$ روی این مجموعه وجود دارد؟ در واقع از نظر صوری تفاوت چندانی نیست و اینجا 0 و 1 نمادهایی هستند. برای روشن تر شدن مساله، میتوان مجموعه $A = \{a, b\}$ و توپولوژی $\mathcal{S}_A = \{A, \phi, \{a\}\}$ را در نشر گرفت و پرسید که چه تفاوتی بین $(X, \mathcal{S})$ و $(A, \mathcal{S}')$ وجود دارد؟ گرچه در ظاهر این مجموعه ها و توپولوژی روی آنها از نظر نمادین متفاوت هستند، اما رفتار یکسانی دارند. ارتباط بین چنین فضاهای توپولوژیکی با مفهوم همسانریختی یا همسانی توپولوژیک توضیح داده می شود.

تعریف ۱.۳.۱. *نگاشت پیوسته $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ را یک همسانریختی (همسانی توپولوژیک/هومئومورفیسم) می نامیم، هرگاه f به عنوان یک تابع وارون پذیر باشد و نگاشت وارون $f^{-1} : (Y, T_Y) \to (X, T_X)$ نیز پیوسته باشد. دو فضای توپولوژیک (X, T_X) و (Y, T_Y) را همسانریخت (همسان توپولوژیک/هومئومورفیک) گوییم هرگاه یک همسانریختی بین آنها وجود داشته باشد. در این صورت می نویسیم $(X, T_X) \equiv (Y, T_Y)$ یا به اختصار $X \equiv Y$.*

حال میتوان پاسخی برای پرسش بالا ارائه نمود. جایگشت $\sigma : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ با ضابطه

$$\sigma(0) = 1, \ \sigma(1) = 0$$

را در نظر بگیرید. اگر $X = \{0,1\}$ آنگاه بوضوح نگاشت

$$\sigma : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{S}')$$

پیوسته است. همچنین، بوضوح تابع σ وارون پذیر است و داریم $\sigma^{-1} = \sigma$. براحتی دیده میشود که

$$\sigma : (X, \mathcal{S}') \to (X, \mathcal{S})$$

نیز یک نگاشت پیوسته است. پس

$$(X, \mathcal{S}) \equiv (X, \mathcal{S}').$$

یکی از مهم ترین و بنیادی ترین مساله ها در توپولوژی که منشاء پیدایش بسیاری از ناورداهای مهم بوده است، دسته بندی فضاهای توپولوژیک در حد همسانی توپولوژیک است. براحتی میتوان نشان داد که رابطه همسانی توپولوژیک یک رابطه هم ارزی بین همه فضاهای توپولوژیک است.

حال یک خاصیت تسبتا بدیهی و در عین حال مهم را ثابت میکنیم.

لم ۱.۳.۲. *فرض کنید $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ یک همسانریختی باشد. آنگاه گزاره های زیر برقرار هستند.*
الف. اگر U در X باز باشد آنگاه $f(U)$ در Y باز است.
ب. الف. اگر C در X باز باشد آنگاه $f(C)$ در Y باز است.

اثبات. الف. توجه کنید که چون f یک همسانریختی است پس f^{-1} نیز پیوسته است. پس تصویر وارون U تحت f^{-1} یعنی

$$(f^{-1})^{-1}(U) = \{y \in Y | f^{-1}(y) \in U\}$$

نیز در Y باز است. اما چون f و f^{-1} هر دو وارون پذیرند، داریم $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$. این گزاره را ثابت میکند.
ب. چون C بسته است پس $U = X - C$ در X باز است. از طرفی

$$f(C) = f(X - U) = f(X) - f(U) = Y - f(U).$$

حال گزاره از قسمت الف نتیجه میشود. □

به عنوان نمونه ای از قدرت این رابطه، حکمی در مورد فضاهای متریک پذیر ثابت میکنیم.

لم ۱.۳.۳. *فرض کنید $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ یک همسانریختی باشد. اگر (Y, T_Y) متریک پذیر باشد، آنگاه (X, T_X) نیز متریک پذیر است.*

اثبات. فرض کنید d یک متریک روی Y باشد که $T_Y = T_d$. برای نشان دادن اینکه (X, T_X) نیز متریک پذیر است باید یک متریک مناسب روی X تعریف کنیم و نشان دهیم که T_X را القاء میکند. تعریف کنید

$$\begin{cases} f^*d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ f^*d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)). \end{cases}$$

بوضوح این یک متریک روی X است. ادعا میکنیم $T_X = T_{f^*d}$. باید نشان دهیم هر مجموعه ای که در متریک f^*d باز است عضوی از T_X است و برعکس.

نخست فرض کنیم $U \in T_X$ و $x \in U$. نشان میدهیم وجود دارد $r > 0$ به قسمی که $B_{f^*d}(x,r) \subseteq U$. بنابر لم ۲.۳.۱ مجموعه $f(U)$ در توپولوژی $T_Y = T_d$ باز است. پس به ازای $f(x) \in f(U)$ وجود دارد $r > 0$ به قسمی که $B_d(f(x), r) \subseteq f(U)$. چون f^{-1} یک تابع است، پس

$$f^{-1}(B_d(f(x), r)) \subseteq f^{-1}(f(U)) = U.$$

بنا بر تعریف گوی باز و متریک f^*d داریم

$$y_1 \in B_d(x, r) \iff d(f(x), y_1)) < r \iff f^*d(x, f^{-1}(y_1)) < r \iff f^{-1}(y_1) \in B_{f^*d}(x, r).$$

این نشان میدهد که

$$f^{-1}(B_d(f(x), r)) = B_{f^*d}(x, r).$$

پس $U \in T_{f^*d}$. اثبات عکس را به عنوان تمرین به عهده خواننده میگذاریم. □

۴.۱ پایه یک توپولوژی

پیش از آنکه به هر مبحث دیگری بپردازیم، لازم است تا ابزاری جهت راحت تر کار کردن با توپولوژی رو معرفی بکنیم. توجه کنید که توپولوژی میتواند یک مجموعه ناشمارا باشد، و شاید اگر بتوان به مفهومی یک توپولوژی را تولید نمود، شاید به راحت تر کار کردن با توپولوژی نیز کمک نماید. برای روشن تر شدن منظورمان، یک فضای برداری حقیقی را در نظر بگیرید. به عنوان یک مجموعه، هر فضای برداری حقیقی ناشمارا می باشد. اما وقتی پایه ای برای آن در نظر میگیریم به کارکردن با آن فضای برداری بسیار کمک میکند. با این توجیهات، ما به دنبال معرفی یک پایه برای یک توپولوژی هستیم. یک مثال شاید بتواند کمک مان بکند. در خط حقیقی $\mathbb{R}$ درک ما از مجموعه های باز بر اساس بازه های باز می باشد. در حالت کلی نیز، گوی های باز در فضاهای متریک هستند که اجازه درک مجموعه های باز را میدهند. اما بیشتر از این میتوان گفت. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $U \subseteq X$ یک مجموعه ناتهی باز. در این صورت به ازای هر $x \in U$ وجود دارد $r_x > 0$ که $B_d(x, r_x) \subseteq U$. به ازای هر x یک چنین r_x را ثابت در نظر بگیرید. حال داریم

$$U = \bigcup_{x \in U} B_d(x, r_x).$$

یعنی هر مجموعه باز را میتوان به صورت اجتماعی از گوی های باز نوشت. به بیان دیگر، گوی های باز، همه مجموعه های باز در یک فضای متریک را تولید میکنند.حال تعریف خود از یک پایه برای یک توپولوژی را ارائه میدهیم. توجه کنید که در ابتدا وجود هیچ گونه توپولوژی ای بر روی مجموعه را فرض نمیکنیم.

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه های X ، یعنی $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ ، را یک پایه برای یک توپولوژی روی X گوییم هرگاه*

الف. به ازای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $B \in \mathcal{B}$ به قسمی که $x \in B$.

ب. اگر $x \in B_1 \cap B_2$ که $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ آنگاه وجود داشته باشد $B_3 \in \mathcal{B}$ به قسمی که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

مثال ۲.۴.۱. *فضای متریک (X,d) را در نظر بگیرید و قرار دهید*

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x,r) : x \in X, r > 0\}.$$

آنگاه $\mathcal{B}_d$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X است. برای مشاهده این مطلب توجه کنید که بوضوح، به ازای هر $x \in X$ و هر $r > 0$ داریم $x \in B_d(x,r)$. یعنی شرط اول پایه بودن بوضوح برقرار است. حال فرض کنید $x \in B_d(x_1,r_1) \cap B_d(x_2,r_2)$ فرض کنید $r > 0$ یک عدد حقیقی باشد که

$$r < \min\{d(x_1,x), r_1 - d(x_1,x), d(x_2,x), r_2 - d(x_2,x)\}$$

. آنگاه بوضوح

$$x \in B_d(x,r) \subseteq B_d(x_1,r_1) \cap B_d(x_2,r_2).$$

پس شرط دوم پایه بودن نیز بوضوح برقرار است.

تکرار میکنیم که در تعریف پایه، گرچه واژه توپولوژی در تعریف آمده است، اما وجود هیچ توپولوژی ای روی مجموعه داده شده را فرض نکردیم. حال بایستی بگوییم این کدام توپولوژی است. اگر $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X گردایه $T_{\mathcal{B}} \subseteq P(X)$ را با ضابطه زیر تعریف میکنیم

$$U \in T_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \forall x \in U \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U.$$

توجه کنید که بوضوح $\mathcal{B} \subseteq T_{\mathcal{B}}$. برای نمونه اگر (X,d) یک فضای متریک باشد آنگاه

$$T_{\mathcal{B}_d} = T_d$$

همان توپولوژی متریک است. میتوان پرسید، در حالت کلی و به ازای یک پایه برای یک توپولوژی روی X مانند $\mathcal{B}$ آیا مجموعه $T_{\mathcal{B}}$ یک توپولوژی روی X است؟ لم زیر به این مساله پاسخ میدهد.

لم ۳.۴.۱. *اگر $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی یک مجموعه باشد آنگاه $T_{\mathcal{B}}$ یک توپولوژی روی X می باشد.*

اثبات. توجه کنید که $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ یعنی

$$\forall B \in \mathcal{B}, B \subseteq X.$$

حال بنابر شرط اول پایه بودن داریم

$$\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq X \equiv X \in T_{\mathcal{B}}.$$

همچنین بنا بر انتفاع مقدم $\phi \in T_{\mathcal{B}}$. پس $T_{\mathcal{B}}$ در شرط اول توپولوژی بودن صدق میکند.
حال فرض کنیم I مجموعه اندیس گذار دلخواه باشد و $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq T_{\mathcal{B}}$. نشان میدهیم $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_{\mathcal{B}}$. داریم

$$x \in \bigcup_{i\in I} U_i \longrightarrow \exists j \in I, x \in U_j$$

چون $U_j \in T_{\mathcal{B}}$ بنابر تعریف $T_{\mathcal{B}}$ داریم

$$\exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U_j.$$

از طرفی $U_j \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ پس

$$\exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

این نشان میدهد که $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_{\mathcal{B}}$. پس مجموعه $T_{\mathcal{B}}$ تحت اجتماع دلخواه بسته است.
حال نشان میدهیم $T_{\mathcal{B}}$ تحت اشتراک متناهی نیز بسته است. ؛کافیست برای اشتراک دو عضو ثابت کنیم و حالت کلی از بسته بودن تحت اشتراک دو عضو و استقرای ریاضی ثابت می شود. فرض کنید $U_1, U_2 \in T_{\mathcal{B}}$ و $x \in U_1 \cap U_2$. پس به ازای $i = 1, 2$ وجود دارند $B_i \in \mathcal{B}$ به قسمی که $x \in B_i \subseteq U_i$. پس $x \in B_1 \cap B_2$. حال بنابر ویژگی دوم پایه بودن وجود دارد $B_3 \in \mathcal{B}$ به قسمی که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. از طرفی $B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. پس داریم

$$x \in B_3 \subseteq U_1 \cap U_2.$$

این نشان میدهد که $U_1 \cap U_2 \in T_{\mathcal{B}}$. این اثبات را تمام میکند. $\square$

قضیه بالا اجازه تعریف زیر را به ما میدهد.

تعریف ۴.۴.۱. *الف. به ازای پایه $\mathcal{B}$ برای یک توپولوژی روی X ، توپولوژی $T_{\mathcal{B}}$ را توپولوژی تولید شده توسط پایه $\mathcal{B}$ می نامیم.*
ب. به ازای فضای توپولوژیک (X, T) یک پایه برای T عبارت است از یک پایه برای یک توپولوژی روی مجموعه X مانند $\mathcal{B}$ به قسمی که $T = T_{\mathcal{B}}$.

فرض کنید (X, T) باشد. توجه کنید که ما هیچ صحبتی از وجود و یکتایی یک پایه برای T نکرده ایم. مساله وجود تقریبا واضح است.

تمرین ۵.۴.۱. *فرض کنید T یک توپولوژی روی مجموعه X باشد. نشان دهید به ازای $\mathcal{B} = T$ داریم $T_{\mathcal{B}} = T$.*

در واقع بنابر تمرین فوق هر توپولوژی میتواند به عنوان یک پایه برای خودش در نظر گرفته شود. اما یکتایی اصلا بدیهی نیست، و در واقع در حالت کلی برقرار هم نیست. یعنی میتوان یک فضای توپولوژیک با دو پایه متفاوت برای توپولوژی آن فضا را مثال زد به قسمی که یک توپولوژی را تولید میکنند. تمرین زیر یکی از این مثالها را به ما میدهد.

تمرین ۶.۴.۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $Y \subseteq X$ یک زیر مجموعه چگال شمارا باشد، یعنی $\overline{Y} = X$ و Y در تناظر یک بیک با مجموعه اعداد طبیعی باشد. نشان دهید*

$$\mathcal{B}_c = \{B_d(y, r) : y \in Y, r > 0\}$$

یک پایه برای T_d می باشد. در این تمرین چگال بودن به معنی چگال بودن در فضای متریک و با معنی آنالیزی آن گرفته شده است. به عنوان مثال میتوانید $X = \mathbb{R}$ و $Y = \mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید.

پیش از ادامه مطلب، یک توصیف تسبتا بدیهی از توپولوژی تولید شده توسط یک پایه را ارائه میدهیم.

گزاره ۷.۴.۱. *فرض کنید $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد. آنگاه گزاره زیر برقرار است*

$$U \in T_{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \exists \{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}, U = \bigcup_{i\in I} B_i.$$

اثبات. $(\Leftarrow)$: فرض کنید $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ به ازای یک مجموعه اندیس گذار I. نشان میدهیم $\bigcup_{i\in I} B_i \in T_{\mathcal{B}}$. این مطلب تقریبا واضح است. فرض کنید $x \in \bigcup_{i\in I} B_i$. آنگاه وجود دارد $j \in I$ به قسمی که $x \in B_j$ و میدانیم $B_j \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. یعنی $x \in B_j \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. پس بنابر تعریف $\bigcup_{i\in I} B_i \in T_{\mathcal{B}}$.
$(\Rightarrow)$: فرض کنید $U \in T_{\mathcal{B}}$. بنابر تعریف

$$\forall x \in U \exists B_x \in \mathcal{B}, x \in B_x \subseteq U.$$

اگر به ازای هر x یک چنین B_x ی را انتخاب کنیم خواهیم داشت $U = \bigcup_{x\in U} B_x$ که ادعای ما را ثابت میکند. $\square$

حال نشان میدهیم که داشتن پایه برای یک توپولوژی میتواند بررسی درستی یا نادرستی برخی گزاره ها را ساده تر نماید. برای نمونه، فرض کنید

$$f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$$

یک نگاشت دلخواه باشد و پایه ای برای T_Y باشد. اگر $V \in T_Y$ آنگاه بنابر گزاره ۷.۴.۱ وجود دارد $\{V_i\}_{i\in I}$ به قسمی که $V = \bigcup_{i\in I} V_i$. از طرفی

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

لم زیر تقریبا واضح است.

لم ۸.۴.۱. *فرض کنید $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ یک نگاشت دلخواه و $\mathcal{B}_Y$ یک پایه برای T_Y باشد. آنگاه*

$$f \text{ پیوسته است} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}_Y, f^{-1}(V) \in T_X.$$

اثبات. $(\Rightarrow)$ بنابر تعریف، چون $T_{\mathcal{B}_Y} = T_Y$ ، داریم $\mathcal{B}_Y \subseteq T_Y$. حکم از تعریف پیوستگی ثابت می شود.
$(\Leftarrow)$ همانگونه که در بالا نیز گفته شد، بنابر گزاره ۷.۴.۱ ، اگر V در Y باز باشد، آنگاه وجود دارد $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}_Y$ که $V = \bigcup_{i\in I} V_i$. حال اگر $f^{-1}(V_i)$ ها باز باشند، آنگاه $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$ نیز باز است. پس f پیوسته است. $\square$

حال در موقعیتی هستیم که بتوانیم گزاره ای مشابه تعریف آنالیزی پیوستگی را نیز ثابت کنیم. برای این منظور نیاز داریم تا یک پایه برای توپولوژی X نیز در نظر بگیریم.

لم ۹.۴.۱. *فرض کنید $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ یک نگاشت دلخواه و $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ به ترتیب پایه هایی برای T_X و T_Y باشند. آنگاه f پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $f(x) = y \in Y$ گزاره زیر برقرار باشد*

$$\forall V \in \mathcal{B}_Y, y \in V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_X, x \in B \subseteq f^{-1}(V).$$

اثبات. فرض کنیم f پیوسته باشد. بنابر لم ۸.۴.۱ به ازای هر $V \in \mathcal{B}_Y$ مجموعه $f^{-1}(V)$ در X باز است. فرض کنیم $y \in Y$ و $y = f(x)$. فرض کنیم $y \in V$. آنگاه $x \in f^{-1}(V)$. چون $\mathcal{B}_X$ یک پایه برای T_X است پس $T_X = T_{\mathcal{B}_X}$. بنابر تعریف باز بودن مجموعه ها نسبت به توپولوژی $T_{\mathcal{B}_X}$ اگر $f^{-1}(V)$ در X باز باشد آنگاه وجود دارد $B \in \mathcal{B}_X$ به قسمی که $x \in B \subseteq f^{-1}(V)$. این اثبات لم را در یک جهت تمام میکند. اثبات در جهت دیگر را به عهده خواننده میگذاریم. $\square$

توجه کنید که گزاره

$$\forall V \in \mathcal{B}_Y, y \in V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_X, x \in B \subseteq f^{-1}(V)$$

مشابه تعریق پیوستگی یک تابع بین دو فضای متریک در نقطه ای خاص می باشد. این تشابه تعریف زیر را توجیه میکند.

تعریف ۱۰.۴.۱. *فرض کنیم $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ داده شده باشد. به ازای $x \in X$ گوییم f در x پیوسته است هرگاه گزاره زیر درست باشد*

$$\forall V \in T_Y, f(x) \in V \Rightarrow \exists U \in T_x, x \in U \subseteq f^{-1}(V).$$

این تعریف با فرض وجود پایه شکل آشناتری به خود میگیرد.

تمرین ۱۱.۴.۱. *فرض کنیم $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ داده شده باشد و $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ به ترتیب پایه هایی برای T_X و T_Y باشند. نشان دهید f در $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر*

$$\forall V \in \mathcal{B}_Y, f(x) \in V \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}_X, x \in B \subseteq f^{-1}(V)$$

در پایان به ازای فضای توپولوژی (X, T_X) سنجه ای برای تشخیص اینکه آیا یک گردایه $\mathcal{C} \subseteq T_X$ یک پایه برای T_X است را بیان میکنیم.

قضیه ۱۲.۴.۱. *فرض کنید که (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{C}$ گردایه ای از مجموعه های باز در X به قسمی که به ازای هر $U \subseteq X$ باز و هر $x \in U$ وجود دارد $C \in \mathcal{C}$ به قسمی که $x \in C \subseteq U$ آنگاه $\mathcal{C}$ یک پایه برای T است.*

اثبات. اثبات اینکه $\mathcal{C}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X است تقریبا واضح است که عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار میکنیم. نکته دیگر نشان دادن این مطلب است که $T_{\mathcal{C}} = T$. اما توجه کنید که بنابر فرض به ازای هر نقطه $x \in U$ میتوان یک $C \in \mathcal{C}$ یافت به قسمی که $x \in C \subseteq U$. چنین C ی را با C_x نمایش میدهیم. این نشان میدهد که $U = \bigcup_{x \in U} C_x$. حال گزاره ۷.۴.۱ نشان میدهد که $\mathcal{C}$ یک پایه برای T است یعنی $T_{\mathcal{C}} = T$. $\square$

۵.۱ زیر پایه یک توپولوژی

مفهوم زیر پایه یک مفهوم بسیار مهم و کلیدی در بیان و معرفی برخی از توپولوژی های مهم مانند توپولوژی القایی ، که در فصل بعد معرفی خواهد شد، می باشد. از نام مفهوم انتظار داریم که چیزی ضعیف تر از یک پایه مد نظر است. در اینجا ضعیف تر به این معنی است که همه شرایط پایه را ندارند، اما در عین حال میتوان با آن یک توپولوژی ساخت.

تعریف ۱.۵.۱. *فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. مجموعه $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ را یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی X گوییم هرگاه*

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X.$$

توجه کنید که یک زیرپایه لزوما یک افراز نیست، اما هر افراز حتما یک زیرپایه برای یک توپولوژی است. انگیزه ما برای این تعریف یک مثال بدیهی مانند توپولوژی گسسته است و باید گفت که این مفهوم و تعریف فوق لزوما ریشه در فضاهای متریک ندارد. توجه کنید که به ازای مجموعه ناتهی دلخواه X با توپولوژی گسسته، هر زیر مجموعه $A \subseteq X$ باز است و بوضوح داریم $A = \bigcup_{a \in A}\{a\}$. یعنی

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$$

یک پایه برای توپولوژی گسسته روی X مجموعه می باشد. اما در حالتی که X یک مجموعه بسیار بزرگ باشد، شاید این پایه از نظر محاسباتی کارآمد نباشد. برای همین اگر بتوان خود پایه یک توپولوژی را نیز به گونه ای از یک مجموعه کوچکتر تولید نمود، شاید به یک ابزار کارآمدتر دسترسی داشته باشیم. در مثال فوق، فرض کنید X مجموعه ای باشد که $|X| > 1$. عدد طبیعی n را به قسمی که $1 < n < |X|$ در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\mathcal{S} = P_n(X) := \{A \subseteq X : |A| = n\}.$$

این یک تمرین در نظریه مجموعه هاست که نشان دهیم

$$\forall x \in X \exists k \in \mathbb{N} \exists A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}, \{x\} = \bigcap_{i=1}^{k} A_i.$$

یعنی هر عضو $\mathcal{B}$ را میتوان به صورت اشتراک تعداد متناهی عضو $\mathcal{S}$ نوشت. این یک صورت از یک واقعیت کلی تری است که اکنون بیان میکنیم.

لم ۲.۵.۱. *فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی مجموعه ناتهی X باشد. مجموعه $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ را مجموعه تمام اشتراک های تعداد متناهی عضو $\mathcal{S}$ بگیرید. آنگاه $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X می باشد.*

اثبات. توجه کنید اشتراک تعداد متناهی عضو، شامل اشتراک یک مجموعه با خودش نیز هست، یعنی $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. چون $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ پس شرط اول پایه بودن به صورت بدیهی برقرار است. حال فرض کنید $B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ و $B_2 = \bigcap_{j=1}^{m} A'_j$. بوضوح $B_3 := B_1 \cap B_2$ نیز اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{S}$ است، یعنی $B_3 \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. حال شرط دوم پایه بودن براحتی از این مطلب نتیجه میشود، چون به ازای هر $x \in B_1 \cap B_2$ داریم

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

$\square$

۶.۱ مقایسه توپولوژی ها روی یک مجموعه

مطلب نهایی در این فصل در رابطه با مقایسه توپولوژی های ممکن روی یک مجموعه هستیم. البته، پیشتر مفهوم یکسانریختی را به عنوان ابزار برای تشخیص اینکه آیا دو توپولوژی رفتار مشابه دارند معرفی نمودیم. اما در این بخش با استفاده از ابزار نظریه مجموعه ها یک مفهوم دیگر معرفی میکنیم. توجه کنید که اگر T, T' دو توپولوژی روی مجموعه X باشند، آنگاه $T, T' \subseteq P(X)$ یا $T, T' \in P(P(X))$ و میدانیم که $(P(P(X)), \subseteq)$ یک مجموعه جزئی مرتب است. با این نگاه امکان مقایسه T, T' با رابطه شمول هست.

تعریف ۱.۶.۱. *به ازای دو توپولوژی T, T' روی مجموعه X گوییم T از T' ظریفتر است هرگاه $T' \subseteq T$.*

در واقع ظریفتر بودن T از T' به این معنی است که در توپولوژی T مجموعه های بیشتری امکان باز بودن دارند. یک روش بیان این مساله با استفاده از نگاشت های پیوست است.

لم ۲.۶.۱. *فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و T و T' دو توپولوژی روی این مجموعه باشند. گزاره های زیر معادل هستند.*
الف. توپولوژی T از توپولوژی T' ظریفتر است.
ب. نگاشت $1_X : (X, T) \to (X, T')$ پیوسته است.

با توجه به اینکه به ازای هر $A \subseteq X$ داریم $1_X^{-1}(A) = A$ اثبات بدیهی است و از جزییات صرف نظر میکنیم. صرف نظر از بدیهی بودن لم فوق، وقتی پایه ای برای توپولوژی ها داریم، یک سنجه برای آزمون اینکه کدام توپولوژی ظریفتر از دیگری است بدست می آوریم.

لم ۳.۶.۱. *فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و T و T' دو توپولوژی روی این مجموعه باشند، و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ به ترتیب پایه هایی برای این دو توپولوژی. در این صورت گزاره های زیر معادل هستند.*
الف. توپولوژی T از توپولوژی T' ظریفتر است.
ب. به ازای هر $B' \in \mathcal{B}'$ و هر $x \in B'$ وجود دارد $B \in \mathcal{B}$ به قسمی که $x \in B \subseteq B'$.

اثبات. یک اثبات از ترکیب دو لم ۲.۶.۱ و ۹.۴.۱ بدست می آید. اما اثبات مستقیم بسیار راحت تر است. بنابر فرض داریم $T' \subseteq T$. از طرفی

$$\mathcal{B}' \subseteq T_{\mathcal{B}'} = T' \subseteq T = T_{\mathcal{B}}.$$

پس هر عضو $\mathcal{B}'$ در $T = T_{\mathcal{B}}$ باز است. حال بنابر تعریف

$$B' \in T \equiv \forall x \in B' \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq B'.$$

همین روند اثبات وارون پذیر نیز هست. یعنی اگر

$$\forall x \in B' \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq B'$$

برقرار باشد، بنابر تعریف $B' \in T_{\mathcal{B}} = T$. این نتیجه میدهد که $\mathcal{B}' \subseteq T$. اما بنابر گزاره ۷.۴.۱ $T' = T_{\mathcal{B}'}$ چیزی جز اجتماع های دلخواه از اعضای $\mathcal{B}'$ نیست. چون T تحت عمل اجتماع دلخواه بسته است پس

$$\forall \{B'_i\}_{\in I} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq T \Rightarrow \bigcup_{i \in I} B'_i \in T.$$

این نشان میدهد که

$$T' = T_{\mathcal{B}'} \subseteq T.$$

یعنی T از T' ظریفتر است. $\square$

توجه کنید لزوما هر دو توپولوژی داده شده روی یک مجموعه با استفاده از مفهوم ظریفتر بودن قابل مقایسه نیستند. اما برخی اوقات این سنجه راهی است برای اینکه نشان دهید دو توپولوژی به ظاهر در متفاوت، تفاوت چندان در واقع ندارند و در واقع یکی هستند.

مثال ۴.۶.۱ *مجموعه $X = \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. به ازای متریک معمول اقلیدسی که با d نشان میدهیم، قرار دهید*

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}.$$

همچنین به ازای $x \in \mathbb{R}^n$ سلول باز $C(x, r)$ را با ضابطه

$$C(x, r) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - r, x_i + r).$$

قرار دهید

$$\mathcal{B}_{\text{cell}} = \{C(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}.$$

به راحتی میتوان نشان داد که $\mathcal{B}_{\text{cell}} = \{C(x, r) : r > 0\}$ پایه ای برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}^n$ است. نشان میدهیم که این پایه همان توپولوژی تولید شده با متر اقلیدسی را تولید میکند.
از هندسه اقلیدسی میدانیم که به ازای گوی باز $B_d(x, r)$ وجود دارد $r' < r$ به قسمی که $C(x, r') \subseteq B_d(x, r)$.
برای مثال در حالت $n = 2$ کافیست $0 < r' < \sqrt{2}r/2$ انتخاب کنیم. این نشان میدهد که $T_{\mathcal{B}_{\text{cell}}}$ ظریفتر از T_d یا همان توپولوژی اقلیدسی است، یعنی

$$T_d \subseteq T_{\mathcal{B}_{\text{cell}}}.$$

از طرفی دوباره از هندسی اقلیدسی می دانیم به ازای هر سلول nـ بعدی $C(x, r)$ وجود دارد $r'' < r$ به قسمی که $B_d(x, r'') \subseteq C(x, r)$. برای مثال در حالت $n = 2$ کافیست $0 < r'' < \sqrt{2}r/2$ انتخاب کنیم. پس توپولوژی اقلیدسی ظریفتر از $T_{\mathcal{B}_{\text{cell}}}$ است، یعنی

$$T_{\mathcal{B}_{\text{cell}}} \subseteq T_d.$$

این دو رابطه ظریفتر بودن، با هم نتیجه میدهند که

$$T_{\mathcal{B}_{\text{cell}}} = T_d$$

یعنی اگر پایه ای شامل گوی های باز در یک فضای اقلیدسی در نظر بگیریم، این همان توپولوژی را القاء میکند که پایه ای شامل سلول های باز.

۷.۱ مقدمه ای بر ویژگیهای توپولوژیک

در بحث مقایسه دو فضای توپولوژیک، داشتن ویژگیها و ناورداهایی که اجازه تمایز قائل شدن بین دو فضای توپولوژیک را بدهند بسیار مفید و کمک کننده است. منظور ما از تمایز قائل شدن بین دو فضای توپولوژیک، تمایز قائل شدن در حد همسانریختی می باشد. تعریف زیر، بیان دقیق تر این مفهوم است.

تعریف ۱.۷.۱. *خاصیت P را یک خاصیت توپولوژیک گوییم، هرگاه تحت همسانریختی ها ناوردا باشد، یعنی به ازای هر دو فضای همسانریخت X و Y داشته باشیم*

$$Y \text{ خاصیت } P \text{ را دارد} \Longleftrightarrow X \text{ خاصیت } P \text{ را دارد}.$$

حال فرض کنید X ویژگی توپولوژیک P را دارد و Y این ویژگی را ندارد. این نتیجه میدهد که هیچ همسانریختی بین این دو فضا وجود ندارد. ابتدا مثالی از یک خاصیت که توپولوژیک نیست ارائه میدهیم.

مثال ۲.۷.۱. *مجموعه $\mathbb{R}$ را با توپولوژی متریک القاء شده توسط متریک اقلیدسی را در نظر بگیرید. تحدید این متریک به روی مجموعه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ خود یک متریک است و یک توپولوژی متریک روی این مجموعه القاء میکند. تابع $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ یک همسانریختی است. به ازای هر فضای متریک (A, d) قطر آن با ضابطه*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$$

تعریف میشود. فضای متریک (A, d) را کراندار گوییم هرگاه $\operatorname{diam}(A) < +\infty$. بوضوح $\mathbb{R}$ کراندار نیست در حالیکه $\operatorname{diam}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \pi < +\infty$ نشان میدهد که $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یک فضای متریک کراندار است. این نشان میدهد که خاصیت کرانداری تحت همسانریختی ناوردا نیست، پس یک ویژگی توپولوژیک نیست.

در ادامه دو ویژگی مهم توپولوژیک، به نامهای هاسدورف بودن و همبند مسیری بودن، را معرفی میکنیم.

۱.۷.۱ هاسدورف بودن

هدف ما در این بخش، معرفی یک ویژگی توپولوژیک مهم است. البته در فصلهای آینده، این ویژگی را به عنوان یکی از اصول جداسازی معرفی و مطالعه خواهیم نمود. اما به دلیل اهمیت و کاربرد آن، از همین الان این ویژگی را معرفی میکنیم.

تعریف ۳.۷.۱. *فضای توپولوژیک X را هاسدورف (Hausdorff) گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ وجود داشته باشند مجموعه های باز $U_1, U_2 \subseteq X$ به قسمی که*

$$x_i \in U_i (i = 1, 2), U_1 \cap U_2 = \phi.$$

نشان میدهیم هاسدورف بودن یک ویژگی توپولوژیک است.

لم ۴.۷.۱. *هاسدورف بودن یک فضای توپولوژیک یک ویژگی توپولوژیک است.*

اثبات. فرض کنید X یک فضای هاسدورف است و Y یک فضای توپولوژیک به قسمی که یک همسانریختی مانند $f : X \to Y$ وجود دارد. کافیست نشان دهیم Y نیز هاسدورف است. فرض کنید $y_1, y_2 \in Y$ دو نقطه متمایز باشند. چون f یک تناظر یک بیک است، پس اعضای یکتای $x_1, x_2 \in X$ وجود دارند به قسمی که $f(x_i) = y_i$ به ازای $i = 1, 2$. چون X هاسدورف است، بنابر تعریف وجود دارند مجموعه های باز $U_1, U_2 \subseteq X$ به قسمی که

$$x_i \in U_i (i = 1, 2), U_1 \cap U_2 = \phi.$$

حال قرار میدهیم $V_i = f(U_i)$. بوضوح

$$y_i \in V_i (i = 1, 2), V_1 \cap V_2 = \phi.$$

توجه کنید بنا بر ۲.۳.۱ V_i در Y باز است. این اثبات را تمام میکند. □

همچنین بنابر لم ۳.۳.۱ متریک پذیری نیز یک خاصیت توپولوژیک است. حال یک مثال کلی از فضاهای هاسدروف ارائه میدهیم.

لم ۵.۷.۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد باشد. آنگاه (X, T_d) یک فضای هاسدورف است.*

اثبات. به ازای دو عضو مجزای به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $0 < r < d(x_1, x_2)/2$ بوضوح داریم

$$B_d(x_1, r) \cap B_d(x_2, r) = \phi.$$

چون گوی های باز در توپولوژی متریک باز هستند، این ادعای ما را ثابت میکند. □

حال از اینکه متریک پذیری و هاسدورف بودن دو خاصیت توپولوژیک هستند، محک زیر برای متریک پذیر نبودن یک توپولوژی بدست می آید.

لم ۶.۷.۱. *اگر فضای توپولوژیک (X, T) هاسدورف نباشد، آنگاه متریک پذیر نیست.*

برای مثال به ازای $X = \{0, 1\}$ واضح است که (X, S) هاسدورف نیست، پس متریک پذیر نیست. این نکته که متریک پذیری و هاسدورف بودن از توپولوژی روی مجموعه نشات میگیرند در همین مثال قابل مشاهده است. چون همین مجموعه $X = \{0, 1\}$ با توپولوژی گسسته یک فضای توپولوژیک متریک پذیر است.

این بخش را با ذکر یک ویژگی جالب فضاهای هاسدورف به پایان میبریم.

لم ۷.۷.۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $x \in X$. در این صورت $\{x\}$ در X بسته است.*

اثبات. به ازای هر $x_1 \in X$ که $x \neq x_1$ بنابر هاسدورف بودن X مجموعه های باز $U_x, U_{x_1} \subseteq X$ وجود دارند که

$$x \in U_x, x_1 \in U_{x_1}, U_x \cap U_{x_1} = \phi.$$

در حالت خاص داریم $x \notin U_{x_1}$. حال بوضوح داریم

$$X - \{x\} = \bigcup_{x_1 \in X - \{x\}} U_{x_1}.$$

از باز بودن U_{x_1} ها نتیجه میشود که $X - \{x\}$ در X باز است، پس $\{x\}$ در X بسته است. $\square$

۲.۷.۱ همبند بودن

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. ابتدا یک فضای ناهمبند را تعریف میکنیم و تعریف همبندی از آن بدست می آید.

تعریف ۸.۷.۱. *فضای توپولوژیک X را ناهمبند گوییم هرگاه مجموعه های باز نابدیهی $U_0, U_1 \subseteq X$ موجود باشند به قسمی که $X = U_0 \cup U_1$. در اینصورت به $\{U_0, U_1\}$ یک جداسازی فضای X گوییم. در اینجا $U \subseteq X$ یک مجموعه باز نابدیهی است هرگاه $U \neq X, \phi$.*

فضای توپولوژیک X را همبند گوییم، هرگاه ناهمبند نباشد.

برای نمونه، مجموعه $X = \mathbb{R} - \{0\}$ را با توپولوژی زیر فضایی القاء شده از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. در اینصورت

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

یک جداسازی برای این فضا معین میکند. پس این فضا همبند نیست. توجه کنید که اگر X ناهمبند باشد و $X = U_0 \cup U_1$ یک جداسازی برای آن باشد، آنگاه $U_0 = X - U_1$ در X بسته نیز هست. پس یک تعریف معادل همبند بودن این است که

$$X \text{ همبند } \equiv \forall U \subseteq X, (U \text{ باز }) \wedge (U \text{ بسته }) \Rightarrow U \in \{X, \phi\}.$$

حال نشان میدهیم این خاصیت، یک خاصیت توپولوژیک است.

لم ۹.۷.۱. *فرض کنید $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد. اگر X همبند باشد، آنگاه Y نیز همبند است.*

اثبات. فرض کنید Y همبند نباشد و $Y = V_0 \cup V_1$ یک جداسازی برای Y معین کند. در این صورت به ازای $U_i = f^{-1}(V_i)$ یک جداسازی برای X بدست می آوریم که با همبند بودن X تناقض دارد. پس Y نمیتواند ناهمبند باشد. پس همبند است. $\square$

۳.۷.۱ همبند مسیری بودن

مجموعه $I=[0,1]$ را در نظر بگیرید. به عنوان زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}$ این مجموعه دارای متریک می باشد و بنابر این میتوان توپولوژی حاصل از این متریک را روی این مجموعه در نظر گرفت.

تعریف ۱۰.۷.۱. *فضای توپولوژیک X را همبند مسیری گوییم هرگاه*

$$\forall x_0, x_1 \in X \exists \alpha : I \to X \text{ پیوسته } , \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1.$$

معمولا به هر تابع پیوسته $\alpha : I \to X$ یک مسیر در X گفته میشود.

تذکر ۱۱.۷.۱. *گاهی در تعریف مسیر بازه $[0,1]$ جای خود را به بازه بسته دلخواه $[a,b]$ میدهد. اما توجه کنید که از نظر ریاضی این نکته مهمی نیست. به ازای هر بازه بسته $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ تابع خطی*

$$\begin{cases} l_{a,b} : [0,1] \to [a,b] \\ l_{a,b}(t) = (1-t)a + tb \end{cases}$$

یک تابع یک بیک و وارون پذیر است. همچنین، اگر $[a,b]$ را نیز با متریک القایی در نظر بگیریم، این تابع یک همسانی توپولوژیک بدست خواهد داد. پس در نظر گرفتن بازه $[0,1]$ در تعریف فوق کافیست.

براحتی میتوان نشان داد که همبند مسیری بودن، یک ویژگی توپولوژیک است. لم زیر این مطلب را ثابت میکند.

لم ۱۲.۷.۱. *فرض کنید $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد و X یک فضای توپولوژیک همبند مسیری باشد. در این صورت Y همبند مسیری است.*

اثبات. فرض کنیم $y_0, y_1 \in Y$. در این صورت، چون f پوشاست، وجود دارند $x_0, x_1 \in X$ به قسمی که به ازای $i \in \{0,1\}$ داشته باشیم $y_i = f(x_i)$. چون X همبند مسیری است، پس وجود دارد تابع پیوسته $\alpha : I \to X$ به قسمی که $\alpha(0) = x_0$ و $\alpha(1) = x_1$. حال تابع

$$f \circ \alpha : I \to Y$$

یک تابع پیوسته است که

$$f \circ \alpha(0) = y_0, \ f \circ \alpha(1) = y_1.$$

این اثبات را تمام میکند. □

۴.۷.۱ فشرده بودن

این ویژگی، یکی از ویژگی های توپولوژیک مهم می باشد که پیشتر در فضاهای متریک دیده ایم. مهم بودن این ویژگی به این دلیل هست که نتایج مهم و قدرتمندی را میتوان در مورد فضاهای توپولوژیک فشرده ثابت کرد. در این بخش چند نکته مهم در مورد فضاهای فشرده را مرور میکنیم و مطالعه عمیق تر را به یک فصل جداگانه وامیگذاریم. ابتدا با یک تعریف شروع میکنیم.

تعریف ۱۳.۷.۱. *فرض کنید (X,T) یک فضای توپولوژیک باشد. منظور ما از یک پوشش باز X عبارت است از گردایه $\mathcal{U} \subseteq T$ به قسمی که*

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U.$$

اگر بگوییم $\mathcal{U}_1$ یک زیر پوشش $\mathcal{U}$ است یعنی

$$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}, X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_1} U.$$

یعنی $\mathcal{U}_1$ خود یک پوشش باز X است به قسمی که $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$.

مساله پوشاندن یک فضای توپولوژیک با تعدادی مجموعه باز نابدیهی، یعنی X جزو پوشش نباشد، جزو مسائل مهم در توپولوژی می باشد. از مسائل بسیار مهم داشتن یک زیر پوشش متناهی است. امروزه، یافتن پوشش های متناهی با کمترین عضو ممکن، و محاسبه تعداد اعضای چنین پوششی، جزو مسائل بسیار مهم و بنیادی در توپولوژی و کاربردهای آن در دیگر زمینه ها می باشد. اما در این قسمت، هدف ما فقط مطالعه جنبه های ریاضی این ویژگی است.

تعریف ۱۴.۷.۱. *فضای توپولوژیک X را فشرده گوییم، اگر به ازای هر پوشش باز $\mathcal{U}$ یک زیر پوشش متناهی $\mathcal{U}_1$ موجود باشد.*

حال نشان میدهیم این ویژگی، یک ویژگی توپولوژیک است.

لم ۱۵.۷.۱. *فرض کنید $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد و X فشرده باشد. آنگاه Y نیز فشرده است.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز Y باشد، یعنی V_i به ازای هر $i \in I$ در Y باز باشد و

$$Y = \bigcup_{i\in I} V_i.$$

بنابر پیوستگی f گردایه $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ یک پوشش باز X است. بنابر فشردگی X وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ و $i_1, \dots, i_n \in I$ به قسمی که $X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(V_{i_j})$. از طرفی، چون f یک بیک و پوشاست، $V_i = f(f^{-1}(V_i))$. حال

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(V_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^{n} f(f^{-1}(V_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}.$$

یعنی $\{V_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ یک زیرپوشش متناهی $\mathcal{V}$ می باشد. این نشان میدهد که Y نیز فشرده است. □

فصل ۲

ساختن توپولوژی های جدید

منظور ما از ساختن توپولوژی های جدید چیست؟ در رسته مجموعه ها راههای مختلفی برای ساختن مجموعه های جدید هست. برای مثال اگر X یک مجموعه دلخواه باشد، با استفاده از عمل زیر مجموعه گرفتن مجموعه های جدید بدست می آوریم. یا اینکه اگر Y یک مجموعه دلخواه دیگر باشد، آنگاه حاصل ضرب دکارتی $X \times Y$ یا مجموعه توابع از X به Y که با $F(X,Y)$ نمایش میدهیم مجموعه های جدید بدست میدهند. یا اینکه میتوان به مجموعه های $X \cup Y$ و $X \cap Y$ اشاره نمود. ساختن توپولوژی جدید بررسی رفتار عمل ساختن مجموعه های جدید در حضور توپولوژی می باشد. یعنی اگر هر کدام از مجموعه های داده شده یک توپولوژی داشته باشند آیا می توان به صورت مفیدی یک توپولوژی روی مجموعه ساخته شده گذاشت؟ منظور از "مفید بودن" توپولوژی می تواند متغیر باشد. برای نمونه، یکی از معنی های مفید بودن این است که اگر مجموعه جدید ساخته شده متریک پذیر باشد، آنگاه توپولوژی جدید با توپولوژی متریک یکسان باشد. در این بخش مثالهایی از ساختن توپولوژی های جدید ارائه خواهد شدکه امیدواریم منظور ما را روشن تر بیان نماید.

۱.۲ توپولوژی های القاء شده

فرض کنید Z یک مجموعه ناتهی باشد و گردایه $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ از فضاهای توپولوژیک داده شده باشند. همچنین فرض کنید توابع $f_\alpha : Z \to X_\alpha$ داده شده باشند. آیا توپولوژی T روی مجموعه Z موجود است که به ازای هر $\alpha \in I$ تابع f_α پیوسته باشد؟ در صورت وجود چنین توپولوژی آن را توپولوژی القاء شده روی Z (توسط توابع f_α) خواهیم نامید. توجه کنید که اگر توپولوژی موجود باشد، آنگاه یک شرط لازم این است که

$$\forall \alpha \in I \; \forall U_\alpha \in T_\alpha, \; f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in T.$$

به عبارتی هر توپولوژی القایی ممکن، باید شامل همه $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ ها باشد. حال منظور خود از توپولوژی القایی را واضح تر بیان میکنیم.

قضیه ۱.۱.۲. *با مفروضات بالا، قرار دهید*

$$\mathcal{S} = \{{f_\alpha}^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in I, U_\alpha \in T_\alpha\} = \cup_{\alpha \in I}\{{f_\alpha}^{-1}(V) : V \in T_\alpha\}.$$

آنگاه $\mathcal{S}$ یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی Z می باشد.

اثبات. به ازای هر تابع داده شده $f : Z \to X_\alpha$ داریم $f^{-1}(X_\alpha) = Z$. پس مجموعه $\mathcal{S}$ بوضوح در تعریف زیر پایه بودن صدق می کند. $\square$

تعریف ۲.۱.۲. *توپولوژی تولید شده توسط زیر پایه $\mathcal{S}$ ، یعنی همان $T_{\mathcal{S}}$ ، را توپولوژی القایی توسط توابع f_α می نامیم.*

شاید این سوال مطرح شود که آیا خود مجموعه $\mathcal{S}$ یک توپولوژی روی Z هست یا نه؟ در بخش توپولوژی حاصل ضربی خواهیم دید که پاسخ این پرسش لزوما مثبت نیست!

۲.۲ توپولوژی های القاء شده: توپولوژی زیر فضایی

فرض کنید (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. نگاشت جانشانی

$$\begin{cases} \iota : A \to X \\ \iota(a) = a \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۱.۱.۲ میدانیم مجموعه

$$\mathcal{S} = \{\iota^{-1}(U) : \text{باز}\, U \subseteq X\}$$

یک زیر پایه برای یک توپولوژی روی A می باشد که با آن توپولوژی نگاشت جانشانی پیوسته خواهد بود. همچنین گفتیم که این مجموعه لزوما یک توپولوژی نیست. اما میتوان نشان داد در حالت خاص نگاشت جانشانی، ما یک توپولوژی بدست می آوریم.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنید (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. در این حالت مجموعه*

$$\mathcal{S} = \{\iota^{-1}(U) : \text{باز}\, U \subseteq X\}$$

که برابر است با

$$\{A \cap U : \text{باز}\, U \subseteq X\}$$

یک توپولوژی است.

اثبات. نخست توجه کنید که بنابر تعریف نگاشت جانشانی داریم

$$\iota^{-1}(U) = \{a \in A : \iota(a) \in U\} = \{a \in A : a \in U\} = A \cap U.$$

پس بوضوح

$$\mathcal{S} = \{A \cap U : \text{باز} U \subseteq X\}$$

اثبات اینکه مجموعه $\mathcal{S}$ یک توپولوژی است واضح است. توجه کنید که

$$\phi, X \in T \Rightarrow \underbrace{A \cap \phi}_{=\phi}, \underbrace{A \cap X}_{=A} \in \mathcal{S}.$$

برقراری شرط بسته بودن $\mathcal{S}$ نسبت به اجتماع دلخواه نتیجه ای است از قوانین دمورگان برای توزیع پذیری اشتراک و اجتماع نسیت به هم. به طور دقیق تر، فرض کنید $\{A \cap U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{S}$ در این صورت

$$\bigcup_{i\in I}(A \cap U_i) = A \cap \underbrace{(\bigcup_{i\in I} U_i)}_{\in T} \in \mathcal{S}.$$

همچنین، فرض کنید $\{A \cap U_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{S}$ در این صورت

$$\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap U_i) = A \cap \underbrace{(\bigcap_{i=1}^{n} U_i)}_{\in T} \in \mathcal{S}.$$

این اثبات را تمام میکند. □

قضیه ۱.۲.۲ تعریف و نمادگذاری زیر را توجیه میکند.

تعریف ۲.۲.۲. *فرض کنید (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$ یک زیر مجموعه ناتهی. از نماد (غیر استاندارد) $T|_A$ برای نمایش توپولوژی*

$$\{A \cap U : U \in T\}$$

استفاده میکنیم و آنرا توپولوژی زیرفضایی روی A می نامیم.

یک سوال طبیعی این است که آیا با استفاده از همین روش، با فرض اینکه پایه ای برای توپولوژی X داده شده باشد، آیا میتوان پایه ای برای توپولوژی زیر فضایی روی A ساخت؟ لم زیر به این پرسش پاسخ میدهد.

لم ۳.۲.۲. *فرض کنید (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{B}$ یک پایه برای T و $A \subseteq X$. در این حالت مجموعه*

$$\mathcal{B}|_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

یک پایه برای توپولوژی زیرفضایی $T|_A$ است.

اثبات. دو مطلب را باید ثابت کنیم. نخست اینکه $\mathcal{B}|_A$ یک پایه است و دوم اینکه توپولوژی $T|_A$ را تولید میکند.
$\mathcal{B}|_A$ یک پایه است: فرض کنید $a \in A$. پس $a \in X$ و چون $\mathcal{B}$ یک پایه است پس وجود دارد $B \in \mathcal{B}$ که $a \in B$. چون بنابر انتخاب ما $a \in A$ این نتیجه میدهد که $a \in A \cap B$. پس به ازای هر $a \in A$ وجود دارد $B' \in \mathcal{B}|_A$ که $a \in B'$. پس $\mathcal{B}|_A$ در شرط اول پایه بودن صدق میکند. حال فرض کنیم $a \in (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2)$. این نتیجه میدهد $a \in B_1 \cap B_2$. چون $\mathcal{B}$ یک پایه است، پس وجود دارد $B_3 \in \mathcal{B}$ به قسمی که

$$a \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \overset{a\in A}{\Longrightarrow} a \in A \cap B_3 \subseteq (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2).$$

پس $\mathcal{B}|_A$ در شرط دوم پایه بودن نیز صدق میکند.
حال نشان میدهیم که $\mathcal{B}|_A$ یک پایه برای $T|_A$ یعنی $T|_A = T_{\mathcal{B}|_A}$. برای این کار از گزاره ۷.۴.۱ استفاده میکنیم. یعنی نشان میدهیم هر عضو $T|_A$ را می توان به صورت اجتماعی گردایه ای از اعضای $\mathcal{B}|_A$ نوشت و اینکه هر اجتماع دلخواه اعضای $\mathcal{B}|_A$ عضوی از $T|_A$ می باشد. نخست فرض کنیم $V \in T|_A$. بنابر تعریف وجود دارد $V \in T$ به قسمی که $V = A \cap U$. چون $\mathcal{B}$ یک پایه برای T است پس بنابر گزاره ۷.۴.۱ وجود دارد گردایه $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ به قسمی که $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. این نتیجه میدهد

$$V = A \cap U = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$$

و بنابر تعریف میدانیم که $A \cap B_i \in \mathcal{B}|_A$. این نشان میدهد

$$T|_A \subseteq T_{\mathcal{B}|_A}.$$

از طرفی اگر $\{A \cap B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}|_A$ که $B_i \in \mathcal{B}$ آنگاه چون $\mathcal{B}$ یک پایه برای T می باشد پس $U := \bigcup_{i\in I} B_i \in T$.
حال داریم

$$\bigcup_{i\in I}(A \cap B_i) = A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = A \cap U \in T_A.$$

این نشان میدهد که

$$T_{\mathcal{B}|_A} \subseteq T|_A.$$

این اثبات اینکه $T_{\mathcal{B}|_A} = T|_A$ را تمام میکند. □

حال به بررسی یک مثال میپردازیم و قضایا و احکام فوق را در مورد این مثال بررسی میکنیم.

مثال ۴.۲.۲. *فرض کنید $X = \mathbb{R}^3$ باشد با متریک اقلیدسی و $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. یعنی A نسخه ای از $\mathbb{R}^2$ می باشد. برای دقت بیشتر از نماد d_n برای نمایش متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ استفاده میکنیم. توپولوژی متریک روی $\mathbb{R}^3$ پایه ای دارد مانند $\mathcal{B}_3$ شامل گوی های باز در $\mathbb{R}^3$ یعنی*

$$\mathcal{B}_3 = \{B_{d_3}((x,y,z),r) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, r > 0\}.$$

بنابر لم ۳.۲.۲ مجموعه

$$\mathcal{B}_A = \{B_{d_3}((x,y,z),r) \cap A : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, r > 0\}$$

یک پایه برای توپولوژی زیر فضایی روی A می باشد. براحتی میتوان دید که اگر $z^2 \geqslant r^2$ آنگاه $B_{d_3}((x,y,z),r) \cap A = \phi$. همچنین براحتی میتوان محاسبه نمود که اگر $z^2 < r^2$ آنگاه

$$B_{d_3}((x,y,z),r) \cap A = \{(a,b,0) : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2 - z^2\}.$$

اما چون z یک ثابت است، براحتی میبینیم که مجموعه فوق را میتوان با $B_{d_2}((x,y), \sqrt{r^2 - z^2})$ یکی گرفت. یعنی توپولوژی زیر فضایی A با همان توپولوژی اقلیدسی القاء شده با متریک d_2 یکی در می آید. البته این مطلب، پیش از محاسبه، و از نظر هندسی واضح است چون تقاطع یک کره بدون مرز با یک صفحه یا تهی است $(z^2 \geqslant r^2)$ یا یک دایره بدون مرز است $(z^2 < r^2)$.

یک نکته در مورد توپولوژی زیر فضایی این است که اگر $A_1 \subseteq A$ و $A \subseteq X$ باشد، انگاه A_1 میتواند در A با توپولوژی زیر فضایی باز باشد، اما در X باز نباشد. برای نمونه، در مثال فوق مجموعه $A_1 = A$ در توپولوژی $T|_A$ باز است، اما بوضوح در $\mathbb{R}^3$ باز نیست، چون

$$A \cap B_{d_3}((x,y,z),r) \not\subseteq A.$$

یعنی هیچ نقطه A در متریک d_3 درونی نیست.

یکی از ویژگی های مهم توپولوژی زیرفضایی این است که به ما اجازه میدهد هر نگاشت پیوسته را به صورت ترکیب یک نگاشت پوشا و نگاشت جانشانی بنویسیم. گزاره زیر این مساله را به صورت دقیق بیان میکند.

گزاره ۵.۲.۲. *فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد. مجموعه $f(X)$ را با توپولوژی زیرفضایی در نظر بگیرید. آنگاه تابع پوشای*

$$\begin{cases} \widetilde{f} : X \longrightarrow f(X) \\ \widetilde{f}(x) = f(x) \end{cases}$$

یک نگاشت پیوسته است و داریم $f = \iota \circ \widetilde{f}$. در اینجا $\iota : f(X) \longrightarrow Y$ نگاشت جانشانی است.

اثبات. تساوی $f = \iota \circ \widetilde{f}$ از تعریف $\widetilde{f}$ نتیجه میشود. همچنین پوشا بودن $\widetilde{f}$ از تعریف واضح است. کافی است فقط پیوستگی $\widetilde{f}$ را نشان دهیم. فرض کنید $W \subseteq f(X)$ باز باشد. در اینصورت بنابر تعریف توپولوژی زیرفضایی یک مجموعه باز مانند $V \subseteq Y$ موجود است که $W = f(X) \cap V$. بنابر تعریف $\widetilde{f}$ داریم

$$\widetilde{f}^{-1}(W) = f^{-1}(V).$$

چون f پیوسته است، پس $f^{-1}(V)$ باز است. در نتیجه $\widetilde{f}^{-1}(W)$ باز است. این نشان میدهد که $\widetilde{f}$ پیوسته است. □

نکته مهم دیگر ساختن نگاشتهای پیوسته روی یک فضای توپولوژیک است وقتی تعدادی نگاشت پیوسته روی زیر فضاهای آن موجود باشند. لم زیر، که به لم چسب معروف است، این مساله را مطالعه میکند.

لم ۶.۲.۲. *فرض کنید $X = A \cup B$ به قسمی که A و B هر دو در X بسته (باز) هستند. دو مجموعه A و B را با توپولوژی زیرفضایی در نظر بگیرید و فرض کنید $f : A \to Y$ و $g : B \to Y$ دو نگاشت پیوسته باشند به قسمی که*

$$\forall x \in A \cap B, f(x) = g(x).$$

آنگاه نگاشت $h : X = A \cup B \longrightarrow Y$ تعریف شده با ضابطه

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in Y \end{cases}$$

یک تابع پیوسته است.

پیش از اثبات توجه کنید اگر $Z \subseteq X$ و $D \subseteq Z$ در Z با توپولوژی زیر فضایی باز (بسته) باشد آنگاه یک مجموعه باز (بسته) مانند U در X وجود دارد که

$$D = Z \cap U.$$

حال اگر Z نیز در X باز (بسته) باشد، آنگاه D نیز در X باز (بسته) است.

اثبات. فرض کنید $C \subseteq Y$ بسته باشد. در این صورت

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

از پیوستگی f و g نتیجه میشود که $f^{-1}(C)$ و $g^{-1}(C)$ به ترتیب در A و B بسته هستند. اما چون A و B هر دو در X بسته هستند، بنابر نکته ای که پیش از اثبات گفتم $f^-1(C)$ و $g^{-1}(C)$ در X بسته است. پس $h^{-1}(C)$ نیز در X بسته خواهد بود. بنابر لم ۶.۲.۱ h یک نگاشت پیوسته است. $\square$

۳.۲ توپولوژی های القاء شده: توپولوژی حاصل ضربی

حاصا ضرب دکارتی دو مجموعه معمولا یکی از ابتدایی ترین اعمال مجموعه ای هست که در هر درس مقدماتی نظریه مجموعه ها معرفی می شود. به ازای دو مجموعه ناتهی A و B حاصل ضرب دکارتی این دو با ضابطه

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

تعریف می شود و منظور از (a, b) زوج مرتب است. با استفاده از استقرای ریاضی، میتوان حاصل ضرب دکارتی تعداد متناهی مجموعه را نیز تعریف نمود. اگر $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ یک گردایه شمارا از مجموعه های ناتهی باشد با استقرا تعریف میکنیم

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = (\prod_{i=1}^{n-1} A_i) \times A_n$$

و پایه استقرا را حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه قرار میدهیم. حال سوال این است که اگر مجموعه اندیس گذار $\mathbb{N}$ را با یک مجموعه اندیس گذار دیگر عوض کنیم، آیا هنوز میتوان حاصل ضرب دکارتی را تعریف نمود. به بیان دیگر، به ازای گردایه $\{A_i : i \in I\}$ و مجموعه اندیس گذار I آیا میتوان یک حاصل ضرب دکارتی مانند

$$\prod_{i\in I} A_i$$

تعریف نمود. پیش از پاسخ به این سوال بایستی بیان نمود که چه خاصیت مهمی از این شی انتظار داریم. معمولا در حاصل ضرب دکارتی تعداد متناهی، تابع تصویر روی مولفه i ـام ابزار مفیدی است. پس می توان انتظار داشت که به ازای هر $j \in I$ یک تابع تصویر مانند

$$\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$$

موجود باشد. همچنین یک نکته که در برخی از کاربردها مفید می باشد این است که $\mathbb{N}$ یک مجموعه مرتب با ترتیب کلی و کوچکترین عضو می باشد. در این حالت اخیر، اگر I یک مجموعه مرتب که ترتیب آن کلی است و دارای کوچکترین عضو i_0 است می توان با استفاده از استقرای قوی تعریف نمود

$$\prod_{i=i_0}^{i_0} A_i = A_{i_0},\ \prod_{i=i_0}^{i_1} = (\prod_{i<i_1} A_i) \times A_{i_1}.$$

برای نمونه می توان مجموعه اندیس گذار $I = [0, 1]$ را با ترتیب القایی در نظر گرفت. مثالهای بسیاری میتوان مثال ارائه داد. اما برای برخی کاربردها این تعریف کافی نیست و هر مجموعه اندیس گذاری لزوما مرتب با ترتیب کلی نیست. برای همین از یک دیدگاه تابعی برای ارائه یک تعریف کلی تر حاصل ضرب های دکارتی استفاده می کنیم. ابتدا توجه کنید که حالت حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه با استفاده از این بیان قابل تعریف می باشد.

قضیه ۱.۳.۲. *مجموعه $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$ را در نظر بگیرید. آنگاه یک تناظر یک بیک*

$$A \times B \longrightarrow \{x : \mathbb{N}_2 \to A \cup B | x(1) \in A, x_2 \in B\}$$

موجود است.

اثبات. دو تابع

$$F : A \times B \longrightarrow \{x : \mathbb{N}_2 \to A \cup B | x(1) \in A, x_2 \in B\}$$

و

$$G : \{x : \mathbb{N}_2 \to A \cup B | x(1) \in A, x_2 \in B\} \longrightarrow A \times B$$

را به صورت زیر تعریف کنید.

تعریف تابع F. به ازای $(a, b) \in A \times B$ تابع

$$x_{(a,b)} : \mathbb{N}_2 \to A \cup B$$

را با ضابطه

$$x_{(a,b)}(1) = a, x_{(a,b)}(2) = b$$

تعریف کنید و قرار دهید $F(a,b)=x_{(a,b)}$.
تعریف تابع G. به ازای $x:\mathbb{N}_2\to A\cup B$ تعریف کنید

$$G(x)=(x(1),x(2)).$$

براحتی میتوان نشان داد که

$$F\circ G=1, G\circ F=1.$$

ما نشان دادن تساوی ها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار میکنیم. این قضیه را ثابت می کند. $\square$

از منظر قضیه فوق حال براحتی میتوان حاصل ضرب دکارتی گردایه های دلخواه با مجموعه های اندیس گذار دلخواه را تعریف کرد.

تعریف ۲.۳.۲. *به ازای گردایه $\{A_i\}_{i\in I}$ که در آن I مجموعه اندیس گذار دلخواه می باشد، تعریف میکنیم*

$$\prod_{i\in I}A_i=\{x:I\to\bigcup_{i\in I}A_i|x(i)\in A_i\}.$$

معمولا از نماد x_i برای نمایش $x(i)$ استفاده میکنیم وآنرا مولفه iـام x مینامیم و مینویسیم

$$x=(x_i)_{i\in I}.$$

تابع

$$\pi_j:\prod_{i\in I}A_i\to A_j$$

با ضابطه $\pi_j(x)=x_j$ تابع تصویر به روی مولفه jـام نامیده می شود.

اگر یک تابع $f:X\to\prod_{i\in I}A_i$ داشته باشیم، آنگاه تابع $f_j:X\to A_j$ با ضابطه $f_j=\pi_j\circ f$ تعریف می شود و آن را مولفه j ـام تابع f می نامیم و می نویسیم $f=(f_i)_{i\in I}$. یکی از نتایج بسیار مهم و مفید در آنالیز توابع برداری نتیجه زیر است.

قضیه ۳.۳.۲.

f_i ها پیوسته باشند $\iff$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ پیوسته است

نکته مهم این است که در حالت مورد اشاره قضیه فوق توابع تصویر $\pi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ پیوسته هستند و پیوستگی $f_i=\pi_i\circ f$ ها از اینکه ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است نتیجه می شود. تمایل داریم که قضیه فوق در حالت کلی نیز برقرار باشد. یعنی گزاره ای مانند گزاره زیر درست باشد.

گزاره ۴.۳.۲. *به ازای گردایه $\{A_i\}_{i\in I}$ از فضاهای توپولوژیک و فضای توپولوژیک X و تابع $f:X\to\prod_{i\in I}A_i$ گزاره زیر برقرار است:*

$f_i:X\to A_i$ ها پیوسته باشند $\iff$ $f:X\to\prod_{i\in I}A_i$ پیوسته است

یکی از شرایطی که درستی گزاره فوق را تضمین خواهد کرد(حداقل در یک جهت) این است که یک توپولوژی روی فضای حاصل ضربی باشد که توابع تصویر پیوسته باشند. همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، این مطلب با استفاده از توپولوژی القایی مطالعه می شود و ما را به مبحث توپولوژی حاصل ضربی می رساند.

۱.۳.۲ توپولوژی حاصل ضربی: حاصل ضرب های متناهی

فرض کنید که (X, T_X) و (Y, T_Y) دو فضای توپولوژیک باشند. آیا میتوان توپولوژی مناسبی روی مجموعه $X \times Y$ گذاشت که در آن از توپولوژی های T_X و T_Y استفاده شده باشد؟ برای توضیح بیشتر مطلب و توجیه مفهوم منتسب بودن توپولوژی به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵.۳.۲. *فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$ مجهز به توپولوژی متریک استاندارد(القاء شده توسط متریک اقلیدسی) باشند. توجه کنید که*

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$$

یک پایه برای توپولوژی متریک روی X و Y می باشند. با توجه به اینکه $X \times Y = \mathbb{R}^2$ و فضای $\mathbb{R}^2$ خود دارای متریک می باشد، و با توجه به اینکه توپولوژیهای X و Y خود متریک هستند، انتظار داریم تا از این دو متریک یک توپولوژی روی $\mathbb{R}^2$ بسازیم به گونه ای که با توپولوژیک متریک $\mathbb{R}^2$ سازگار باشد. نکته ای که در مقایسه پایه ها مشاهده کردیم این بود که مجموعه ای که اعضای آن مستطیل های باز باشند، همان توپولوژی ای را تولید میکند که پایه ای که اعضای آن گوی های باز در متریک اقلیدسی باشد. اما توجه بکنیم که مستطیل های باز را میتوان توسط حاصل ضرب دکارتی بازه باز بدست آورد. یعنی امیدواریم مجموعه ای به فرم

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d)|a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

یک پایه برای توپولوژی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بدست بدهند. از مطالب قبل در مورد فضاهای متری میدانیم که این البته یک پایه می باشد. یعنی

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2|B_1 \in \mathcal{B}_X, B_2 \in \mathcal{B}_Y\}$$

یک پایه برای یک توپولوژی روی $X \times Y = \mathbb{R}^2$ می باشد که اتفاقا با توپولوژی متریک روی $\mathbb{R}^2$ برابر می باشد.

مثال فوق، ایده مناسبی برای تعریف یک توپولوژی روی مجموعه حاصل ضربی $X \times Y$ با استفاده از توپولوژی های X و Y بدست می دهد. نخست مشاهده زیر را ثبت میکنیم.

قضیه ۶.۳.۲. *به ازای فضاهای توپولوژیک (X, T_X) و (Y, T_Y) مجموعه*

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in T_X, V \in T_Y\}$$

یک پایه برای یک توپولوژی روی $X \times Y$ می باشد.

اثبات. فرض کنید $(x, y) \in X \times Y$. چون $X \in T_X$ و $Y \in T_Y$ پس $X \times Y \in B$. پس $\mathcal{B}$ در شرط اول پایه بودن صدق میکند. حال فرض کنید $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$. توجه کنید که به ازای هر چهار مجموعه

دلخواه A,B,C,D داریم $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$. از طرفی بنا بر تعریف توپولوژی داریم $U_1\cap U_2\in T_X$ و $V_1\cap V_2\in T_Y$. پس فرض را میتوان به صورت زیر باز نویسی نمود

$$(x,y)\in(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)\Rightarrow(x,y)\in(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)\in B.$$

پس شرط دوم پایه بودن نیز برقرار است. این ادعای ما را ثابت میکند. $\square$

این قضیه به ما اجازه تعریف زیر را میدهد.

تعریف ۷.۳.۲. *به ازای فضاهای توپولوژیک (X,T_X) و (Y,T_Y) توپولوژی تولید شده توسط پایه $\mathcal{B}$ در قضیه ۶.۳.۲ را توپولوژی حاصل ضربی روی مجموعه $X\times Y$ می نامیم.*

شاید پرسیده شود که چرا مجموعه $\mathcal{B}$ خود یک توپولوژی نیست. براحتی میتوان مثالی زد که نشان میدهد $\mathcal{B}$ تحت عمل اجتماع بسته نیست. توجه کنید که بیان قضیه ۶.۳.۲ کمی متفاوت با آنچه که در مثال مشاهده ۵.۳.۲ نمودیم می باشد. حال ثابت میکنیم که اگر در قضیه ۶.۳.۲ توپولوژی را با پایه عوض کنیم، نتیجه همچنان برقرار خواهد بود.

قضیه ۸.۳.۲. *به ازای فضاهای توپولوژیک (X,T_X) و (Y,T_Y) ، فرض کنید $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ به ترتیب دو پایه برای T_X و T_Y باشند. آنگاه مجموعه*

$$\mathcal{B}_{X\times Y}=\{B_1\times B_2: B_1\in\mathcal{B}_X, B_2\in\mathcal{B}_Y\}$$

یک پایه برای یک توپولوژی حاصل ضربی روی $X\times Y$ می باشد.

اثبات. از قضیه ۱۲.۴.۱ برای اثبات ادعای خود استفاده می کنیم. نخست توجه کنید که $\mathcal{B}_{X\times Y}$ گردایه ای از زیر مجموعه های $X\times Y$ هست که در توپولوژی حاصل ضربی باز هستند. کافی است نشان دهید به ازای هر مجموعه باز $W\subseteq X\times Y$ در توپولوژی حاصل ضربی و هر $(x,y)\in W$ وجود دارد یک عضو $B_1\times B_2\in\mathcal{B}_{X\times Y}$ که

$$(x,y)\in B_1\times B_2\subseteq W.$$

بنا بر تعریف توپولوژی حاصل ضربی، چون $\mathcal{B}$ این توپولوژی را تولید میکند پس وجود دارند مجموعه های باز $U\subseteq X$ و $V\subseteq Y$ که

$$(x,y)\in U\times V\subseteq W.$$

اما چون $\mathcal{B}_X$ و $\mathcal{B}_Y$ پایه هایی برای توپولوژی های X و Y هستند، پس وجود دارند $B_1\in\mathcal{B}_X$ و $B_2\in\mathcal{B}_Y$ به قسمی که

$$x\in B_1\subseteq U, y\in B_2\subseteq V\Rightarrow(x,y)\in B_1\times B_2\subseteq U\times W\subseteq W.$$

این اثبات را تمام میکند. $\square$

حال نشان میدهیم که این توپولوژی در واقع با توپولوژی القاء شده توسط توابه تصویر روی مولفه ها برابر است. توابع تصویر $\pi_X: X\times T\to X$ و $\pi_Y: X\times Y\to Y$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف، زیر پایه توپولوژی القایی توسط این توابع برابر است با

$$\mathcal{S}=\{\pi_X^{-1}(U),\pi_Y^{-1}(V): U\in T_X, V\in T_Y\}.$$

بیاد داشته باشیم که هر عضو پایه تولید شده توسط یک زیر پایه عبارت است از اشتراک تعداد متناهی اعضای زیر پایه. حال مجموعه های باز $U \subseteq X$ ، $V \subseteq Y$ را در نظر بگیرید. داریم

$$U \times V = (U \cap X) \times (Y \cap V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = \pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V).$$

یعنی هر عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی به صورت اشتراک دو عضو زیر پایه $\mathcal{S}$ می باشد و برعکس. این یعنی اینکه

$$T_{\mathcal{S}} = T_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}_{X \times Y}}.$$

۲.۳.۲ توپولوژی حاصل ضربی: حاصل ضرب های دلخواه

مطالب این بخش تعمیمی از مطالب بخش توپولوژی حاصل ضربی برای حاصل ضربهای متناهی است. البته این حالت تفاوتهای اساسی با حالت حاصل ضربهای متناهی دارد. همانگونه که اشاره شد، این مبحث در قالب توپولوژی القایی مطالعه می شود.

تعریف ۹.۳.۲. *به ازای گردایه دلخواه از فضاهای توپولوژیک* $\{(A_i, T_i)\}_{i \in I}$ *توپولوژی حاصل ضربی روی* $\prod_{i \in I} A_i$ *با زیر پایه زیر معین می شود*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(U) : U \in T_i\}.$$

توجه کنید که به ازای $B \subseteq A_j$ آنگاه $\pi_j^{-1}(B) = \prod_{i \in I} Y_i$ به قسمی که

$$Y_i = \begin{cases} A_i & i \neq j \\ B & i = j. \end{cases}$$

یعنی $\pi_j^{-1}(B) = \{(a_i)_{i \in I} : a_j \in B, i \neq j \Rightarrow a_i \in A_i\}$. برای مثال به ازای $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $B = [0, 1]$ داریم $\pi_2^{-1}(B) = \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R}$.
همانگونه که پیشتر نیز دیدیم، هر زیرپایه یک پایه را مشخص میکند؛ پایه تولید شده توسط یک زیر پایه عبارت است از اشتراک های متناهی اعضای زیر پایه. همچنین به عنوان یک تمرین ساده میتوان ثابت نمود که برای حاصل ضربهای دلخواه تساوی زیر برقرار است

$$(\prod_{i \in I} A_i) \cap (\prod_{i \in I} B_i) = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

این دو گزاره به هم توصیف زیر از زیر پایه توپولوژی حاصل ضربی را بدست میدهند.

قضیه ۱۰.۳.۲. *با مفروضات فوق، اگر* $\mathcal{B}_{prod} := \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ *پایه توپولوژی حاصل ضربی روی* $\prod_{i \in I} A_i$ *باشد آنگاه* $B \in \mathcal{B}_{prod}$ *اگر و تنها اگر* $B = \prod_{i \in I} B_i$ *به قسمی که وجود داشته باشند* $i_1, \ldots, i_n \in I$ *که*

$$i \notin \{i_1, \ldots, i_n\} \Longrightarrow B_i = A_i.$$

حال گزاره مورد نظر در مورد توابع پیوسته به داخل یک فضای حاصل ضربی را ثابت میکنیم.

قضیه ۱۱.۳.۲. *فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای توپولوژیک باشد و فضای حاصل ضربی $\prod_{i\in I} A_i$ به توپولوژی حاصل ضربی مجهز شده باشد. فرض کنید Z یک فضای توپولوژیک باشد و $f : Z \to \prod_{i\in I} A_i$. آنگاه*

$$f_i \text{ ها پیوسته باشند } \iff f \text{ پیوسته است}.$$

یادآوری میکنیم که $f_j = \pi_j \circ f$ و $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ تابع تصویر به روی مولفه j ـام می باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$: این قسمت واضح است. پون توابع تصویر تحت توپولوژی حاصل ضربی پیوسته هستند و پون ترکیب توابع پیوسته پیوسته است و $f_j = \pi_j \circ f$ پس هر کدام از مولفه های f پیوسته است.
$(\Rightarrow)$: فرض کنیم همه f_i ها پیوسته باشند. نشان میدهیم f نیز پیوسته است. کافی است نشان دهید به ازای هر عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی مانند B مجموعه $f^{-1}(B)$ در Z باز است. فرض کنید $B = \prod_{i\in I} B_i$ و $i_1, \dots, i_n \in I$ به قسمی که

$$i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \Rightarrow B_i = A_i.$$

ادعا میکنیم

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(B_i).$$

با فرض درستی این ادعا، دقت کنید که به غیر از احتمالا تعداد متناهی i، همه B_i ها با A_i ها برابرند. یعنی

$$i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \Rightarrow f_i^{-1}(B_i) = f_i^{-1}(A_i) = Z.$$

پس با فرض درستی ادعای فوق داریم

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(B_i) = \bigcap_{i\in \{i_1,\dots,i_n\}} f_i^{-1}(B_i).$$

بنابر پیوستگی f_i ها مجموعه های $f_i^{-1}(B_i)$ در Z باز هستند و اشتراک تعداد متناهی مجموعه باز نیز باز می باشد، پس $f^{-1}(B)$ در Z باز می باشد. این پیوستگی f را ثابت میکند. اما تساوی $f^{-1}(B) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(B_i)$ با عضوگیری قابل اثبات است و اثبات آن را به عهده دانشجو میگذاریم. $\square$

۳.۳.۲ توپولوژی جعبه ای

فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ یک گردایه از فضاهای توپولوژیک باشد. بنا بر قضیه ۱۰.۳.۲ در توپولوژی حاصل ضربی، اعضای پایه به صورت

$$B = \prod_{i\in I} U_i$$

هستند که فقط تعداد متناهی U_i می توانند مجموعه های باز نابدیهی باشد و به غیر از این تعداد نامتناهی، برای بقیه i ها خواهیم داشت $U_i = A_i$. پس اگر مجموعه اندیس گذار I متناهی نباشد، آنگاه حاصل ضرب هایی به صورت

$$\prod_{i\in I} B_i$$

به قسمی که به ازای هر $i \in I$ داشته باشیم $B_i \neq A_i$ یک عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی نیستند. اما براحتی میتوان نشان داد که چنین مجموعه هایی خود پایه ای برای یک توپولوژی هستند.

لم ۱۲.۳.۲. *فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ یک گردایه از فضاهای توپولوژیک باشد. فرض کنید T_i توپولوژی A_i باشد و قرار دهید*

$$\mathcal{B}_{box} = \{\prod_{i\in I} B_i : B_i \in T_i\}.$$

آنگاه $\mathcal{B}_{box}$ پایه ای برای یک توپولوژی روی حاصل ضرب دکارتی $\prod_{i\in I} A_i$ می باشد.

اثبات. براحتی دیده می شود که $\mathcal{B}_{\text{box}}$ شرایط پایه بودن را دارد. نخست توجه کنید که $A_i \in T_i$ پس $B = \prod_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}_{\text{box}}$. حال بوضوح، گزاره

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \Longrightarrow (x_i)_{i\in I} \in B.$$

برقرار است. همچنین اگر

$$(x_i)_{i\in I} \in (\prod_{i\in I} B_i) \cap (\prod_{i\in I} B'_i) = \prod_{i\in I}(B_i \cap B'_i)$$

آنگاه $x_i \in B_i \cap B'_i$. اما $B_i \cap B'_i$ اشتراک دو مجموعه باز در A_i است، پس $B_i \cap B'_i \in T_i$ پس $\prod_{i\in I}(B_i \cap B'_i) \in \mathcal{B}_{\text{box}}$ و

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(B_i \cap B'_i) \subseteq \prod_{i\in I}(B_i \cap B'_i) = (\prod_{i\in I} B_i) \cap (\prod_{i\in I} B'_i)$$

نشان میدهد که خاصیت دوم پایه بودن برقرار است. $\square$

می توان نشان داد که توپولوژی تولید شده توسط $\mathcal{B}_{\text{box}}$ در جهت ساختن مثالهای نقض بسیار بکار می آید و از این جهت توپولوژی مهمی است. لم بالا به همراه این نکات تعریف زیر را توجیه میکند.

تعریف ۱۳.۳.۲. *به ازای گردایه $\{A_i\}_{i\in I}$ از فضاهای توپولوژیک، توپولوژی تولید شده توسط $\mathcal{B}_{box}$ را توپولوژی جعبه ای روی حاصل ضرب دکارتی $\prod_{i\in I} A_i$ مینامیم.*

به طور پیش فرض توپولوژی مورد استفاده ما روی مجموعه های حاصل ضربی، توپولوژی حاصل ضربی خواهد بود و توپولوژی های دیگر مانند توپولوژی جعبه ای را در مواقع خاص بکار خواهیم برد. یکی از این دلایل برقرار نبودن قضایای مفید مانند قضیه ۱۱.۳.۲ در حضور توپولوژی جعبه ای می باشد. مثال زیر را به عنوان یک مثال نقض و برای اینکه نشان دهیم قضیه فوق الذکر در حضور توپولوژی جعبه ای لزوما برقرار نیست ارائه میکنیم.

مثال ۱۴.۳.۲. *گردایه $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$ با $A_i = \mathbb{R}$ به همراه توپولوژی متریک، به ازای هر i، را در نظر بگیرید. تابع $f : \mathbb{R} \to \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{R}$ با ضابطه*

$$f(t) = (t, t, t, \dots)$$

را در نظر بگیرید. یعنی به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $f_i(t) = t$. توجه کنید که هر کدام از f_i ها بوضوح پیوسته هستند. حال مجموعه $U = \prod_{i=1}^{+\infty}(-1-\frac{1}{i+1}, 1+\frac{1}{i+1})$ را که در توپولوژی حاصل ضربی باز است را در نظر بگیرید. داریم

$$f^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^{+\infty}(-1-\frac{1}{i+1}, 1+\frac{1}{i+1}).$$

از طرفی براحتی می توان نشان داد که $\bigcap_{i=1}^{+\infty}(-1-\frac{1}{i+1}, 1+\frac{1}{i+1}) = [-1,1]$. یعنی

$$f^{-1}(U) = [-1,1]$$

که در $\mathbb{R}$ باز نیست. پس f پیوسته نیست.

۴.۳.۲ شباهت های توپولوژی حاصل ضربی و جعبه ای

هدف ما در این بخش ارائه چند مثال از شباهت های دو توپولوژی حاصل ضربی و جعبه ای است. مثال ۱۴.۳.۲ یک تفاوت عمده و مهم، حداقل از دیدگاه محاسباتی، بین توپولوژی حاصل ضربی و توپولوژی جعبه ای را وقتی مجموعه های اندیس گذار متناهی نیستند ارائه میدهد. توجه کنید که هر دو توپولوژی حاصل ضربی و جعبه ای، توپولوژی هایی روی یک مجموعه ثابت هستند. پس میتوان پرسید که آیا این دو توپولوژی قابل مقایسه با استفاده از مفهوم ظریفتر بودن هستند یا نه؟

تمرین ۱۵.۳.۲. *نشان دهید توپولوژی جعبه ای ظریفتر از توپولوژی حاصل ضربی است.*

توجه کنید که ظریفتر بودن، لزوما همیشه به معنی مفید تر بودن نیست. البته اگر بخواهیم دقیق تر صحبت بکنیم، ابتدا بایستی منظور خود از مفید بودن را بیان کنیم. برای نمونه، توپولوژی گسسته از هر توپولوژی دیگری ظریفتر است، اما این لزوما به معنی مفیدتر بودن این توپولوژی نیست! دلیل این عدم فایده انتخاب یک دیدگاه محاسباتی است. میدانیم که توپولوژی گسسته توسط متریک گسسته القاء میشود و این متریک معمولا متریک مورد علاقه و مفیدی از دیدگاه محاسباتی نیست. با این دید توپولوژی گسسته از نظر ما توپولوژی مفیدی نیست.

اما این دو توپولوژی شباهت هایی نیز دارند. یک نکته مهم که از توصیف پایه توپولوژی حاصل ضربی و پایه توپولوژی جعبه ای نتیجه می شود برابر بودن این دو توپولوژی در حالتی است که با حاصل ضرب تعداد متناهی فضای توپولوژیک سر و کار داریم.

تمرین ۱۶.۳.۲. *فرض کنید $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ گردایه ای متناهی از فضاهای توپولوژیک باشند. نشان دهید در این حالت*

$$\mathcal{B}_{box} = \mathcal{B}_{prod}.$$

برابر بودن دو پایه نشان میدهد که توپولوژی های تولید شده نیز با هم برابر هستند. پس در واقع تفاوتهای دو توپولوژی جعبه ای و حاصل ضربی روی حاصل ضرب های نامتناهی فضاهای توپولوژیک ظاهر می شوند. حال چند مثال از شباهتهای این دو توپولوژی روی حاصل ضربهای دلخواه ارائه میکنیم.

لم ۱۷.۳.۲. *فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه ای باشد از فضاهای توپولوژیک و I مجموعه اندیس گذار دلخواه. اگر هر کدام از X_i ها هاسدورف باشند، آنگاه مجموعه حاصل ضربی $\prod_{i\in I} X_i$ با هر کدام از توپولوژی های حاصل ضربی و جعبه ای، هاسدورف است.*

اثبات. فرض کنید $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ به قسمی که $(x_i)_{i\in I} \neq (y_i)_{i\in I}$. پس وجود دارد $j \in I$ به قسمی که $x_j \neq y_j$. چون X_j هاسدورف است، پس مجموعه های باز $U_j, V_j \subseteq X_j$ وجود دارند که

$$x_j \in U_j, y_j \in V_j, U_j \cap V_j = \phi.$$

حال قرار دهید

$$B = \prod_{i\in I} B_i, B' = \prod_{i\in I} B'_i$$

به قسمی که

$$i \neq j \Rightarrow B_i = B'_i = X_i,\ B_j = U_j,\ B'_j = V_j.$$

بوضوح

$$(x_i)_{i\in I} \in B, (y_i)_{i\in I} \in B',\ B \cap B' = \prod_{i\in I}(B_i \cap B'_i) = \phi.$$

اما توجه کنید که

$$B, B' \in \mathcal{B}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{B}_{\text{box}}.$$

پس B و B' در هر دو توپولوژی حاصل ضربی و جعبه ای باز هستند. پس هر دو نقطه مجزا در حاصل ضرب توسط مجموعه بازی در توپولوژی حاصل ضربی (که در توپولوژی جعبه ای نیز باز است) جدا می شوند. این ادعای ما را ثابت میکند. □

یک نکته دیگر که با معلومات کنونی می توان به مطالعه آن پرداخت، رفتار این دو توپولوژی نسبت به زیر فضاهاست. البته لزومی ندارد که هر زیر مجموعه یک فضای حاصل ضربی خود حاصل ضربی از زیر مجموعه ها باشد. به عنوان مثال، در حالت $X = Y$ مجموعه قطر حاصل ضرب عبارت است از

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$$

که بوضوح اگر $|X| > 1$ نمیتواند حاصل ضرب دو زیر مجموعه X باشد. اما در اینجا، هدف ما مطالعه آن دسته از زیر فضاهایی است که به صورت حاصل ضرب هستند. برای واضح تر شدن مساله فرض کنید $\{(X_i, T_i)\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای توپولوژیک باشد و به ازای هر $i \in I$ زیر فضای ناتهی $A_i \subseteq X_i$ را در نظر بگیرید (یعنی A_i توپولوژی زیرفضایی $T_i|_{A_i}$ دارد). حال

$$\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i.$$

با استفاده از توپولوژی های $T_i|_{A_i}$ میتوان از توپولوژی حاصل ضربی و توپولوژی جعبه ای حاصل از این توپولوژی ها روی $\prod_{i\in I} A_i$ سخن گفت. از طرفی اگر مجموعه $\prod_{i\in I} X_i$ خود دارای توپولوژی باشد، میتوان از توپولوژی زیر فضایی روی $\prod_{i\in I} A_i$ سخن به میان آورد. میتوان پرسید که چه رابطه ای بین این توپولوژی ها روی مجموعه $\prod_{i\in I} A_i$ برقرار است. گزاره زیر به این سوال در یک حالت خاص پاسخ میدهد که اثبات آن را به عنوان تمرین به عهده خواننده میگذاریم.

گزاره ۱۸.۳.۲. *فرض کنید $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای توپولوژیک باشد و به ازای هر $i\in I$ زیر فضای ناتهی $A_i\subseteq X_i$ را در نظر بگیرید (یعنی A_i توپولوژی زیرفضایی $T_i|_{A_i}$ دارد). آنگاه گزاره های زیر برقرار هستند.*

الف. با توپولوژی حاصل ضربی روی $\prod_{i\in I} X_i$ توپولوژی زیر فضایی روی مجموعه $\prod_{i\in I} A_i$ با توپولوژی حاصل ضربی بدست آمده از $T_i|_{A_i}$ ها برابر است.

ب. با توپولوژی جعبه ای روی $\prod_{i\in I} X_i$ توپولوژی زیر فضایی روی مجموعه $\prod_{i\in I} A_i$ با توپولوژی جعبه ای بدست آمده از $T_i|_{A_i}$ ها برابر است.

۴.۲ توپولوژی حاصل از پالایه ها

مبحث حاضر در این بخش و بخش بعد، به نوعی دوگان مبحث توپولوژی القایی است. فرض کنید $\{(X_i,T_i)\}$ یک گردایه از فضاهای توپولوژیک باشد و X یک مجموعه دلخواه. همچنین فرض کنید توابع $f_i:X_i\to X$ داده شده باشند. آیا میتوان یک توپولوژی نابدیهی مانند T روی X بافت به قسمی که همه نگاشتهای $f_i:(X_i,T_i)\to(X,T)$ پیوسته باشند؟ در این بخش به یک حالت نسبتا ساده از این مطلب می پردازیم.

گاهی برخی از مجموعه ها توسط یک زنجیر صعودی از زیر مجموعه هایشان معین می شوند. برای نمونه به ازای $\mathbb{N}_k=\{1,\ldots,k\}$ داریم

$$\mathbb{N}_k\subseteq\mathbb{N}_{k+1},\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\mathbb{N}_k.$$

در واقع اگر I یک مجموعه شمارش پذیر باشد، یعنی در تناظر یک بیک با $\mathbb{N}$ باشد، پس از انتخاب یک تناظر یک بیک $f:\mathbb{N}\to I$ میتواند به صورت اجتماعی از زیر مجموعه های متناهی اش نوشته شود. براحتی دیده می شود که به ازای $I_k:=f(\mathbb{N}_k)$ داریم

$$I_k\subseteq I_{k+1},\ I=\bigcup_{k=1}^{+\infty}I_k.$$

هدف ما در این بخش مطالعه چنین پدیده ای در حضور توپولوژی است. به بیان دقیق تر، فرض کنید $\{(X_i,T_i)\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای توپولوژیک اندیس گذاری شده روی یک مجموعه کلی مرتب مانند I باشد به نحوی که به عنوان مجموعه

$$i<j\Rightarrow X_i\subseteq X_j$$

و به عنوان فضای توپولوژیک هرگاه $i<j$ باشد آنگاه X_i یک زیر فضای X_j باشد، یعنی

$$i<j\Rightarrow T_i=T_j|_{X_i}.$$

حال مجموعه $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ را در نظر بگیرید. آیا توپولوژی ای مانند T روی X وجود دارد به قسمی که به ازای هر $i\in I$ فضای (X_i,T_i) زیر فضای (X,T) باشد، یعنی

$$\forall i\in I,T_i=T|_{X_i}.$$

دقت کنید که در این حالت، نگاشتهای جانشانی $X_i \to X$ وجود دارند و اگر چنین توپولوژی ای موجود باشد، همه این نگاشتها پیوسته خواهند بود. توجه کنید برای معرفی توپولوژی، باید مجموعه های باز را معرفی نماییم. اما بنابر تمرین ۲.۱.۱ به طور معادل کافیست مجموعه های بسته را معرفی کنیم و مجموعه های باز با متمم گیری بدست می آیند. در این قسمت، توسط معرفی مجموعه های بسته، یک توپولوژی که معمولا به آن توپولوژی به طور هماهنگ ضعیف گفته میشود را معرفی میکنیم.

قضیه ۱.۴.۲. *مفروضات بالا را در نظر بگیرید و فرض کنید به ازای هر $i < j$ فضای X_i در X_j بسته باشد. تعریف کنید*

$$C \text{ در } X \text{ بسته است} \iff \forall i \in I,\ C \cap X_i \text{ در } X_i \text{ بسته است}.$$

آنگاه مجموعه

$$T = \{X - C :\ C \text{ در } X \text{ بسته است}\}$$

یک توپولوژی روی X است و به ازای هر $i \in I$ داریم $T_i = T|_{X_i}$.

اثبات. نخست نشان میدهیم که T^c در شرایط تمرین ۲.۱.۱ صدق میکند، پس T یک توپولوژی روی X است. توجه کنید که به ازای هر $i \in I$ توپولوژی T_i روی X_i را داریم، پس ${T_i}^c$ در شرایط تمرین ۲.۱.۱ صدق میکند یعنی $X_i, \phi \in {T_i}^c$ و اینکه ${T_i}^c$ تحت اشتراک دلخواه و اجتماع متناهی بسته است. حال به بررسی برقرار بودن شرایط تمرین ۲.۱.۱ برای ${T_i}^c$ میپردازیم.

بنابر تعریف X داریم

$$\forall i \in I, X \cap X_i = X_i \in T_i^c, \phi \cap X_i = \phi \in T_i^c.$$

پس $X, \phi \in T^c$.

اگر $\{C_j\}_{j\in J} \subseteq T^c$ یک گردایه دلخواه باشد، یعنی

$$\forall j \in J, \forall i \in I, C_j \cap X_i \in T_i^c.$$

حال

$$(\bigcap_{j\in J} C_j) \cap X_i = \bigcap_{j\in J}(C_j \cap X_i) \in T_i^c.$$

پس T^c تحت اشتراک دلخواه بسته است.

اگر $\{C_j\}_{j=1}^n \subseteq T^c$ آنگاه

$$(\bigcup_{j=1}^{n} C_j) \cap X_i = \bigcup_{j=1}^{n}(C_j \cap X_i) \in T_i^c.$$

پس T^c تحت اجتماع متناهی نیز بسته است.

نتیجه میگیریم که T یک توپولوژی روی X است. حال بایستی نشان دهیم

$$T|_{X_i} = T_i \iff T|_{X_i}{}^c = T_i{}^c.$$

توجه کنید که اگر (Y, T_Y) یک فضای توپولوژیک باشد و $B \subseteq Y$ آنگاه بسته بودن در توپولوژی زیر فضایی $T_Y|_B$ توسط ضابطه زیر معین میشود

$$D \in T_Y|B^c \iff \exists C \in T_Y{}^c, D = B \cap C.$$

پس
$$T|_{X_i}{}^c = \{X_i \cap C : C \in T^c\}$$
و کافیست نشان دهیم
$$T_i^c = T|_{X_i}{}^c = \{X_i \cap C : C \in T^c\}.$$
توجه کنید که بنابر تعریف،
$$C \in T^c \Longleftrightarrow \forall i \in I, C \cap X_i \in T_i^c.$$
این نشان میدهد که
$$T|_{X_i}{}^c \subseteq T_i^c.$$
حال نشان میدهیم رابطه شمول در جهت عکس نیز برقرار است. توجه کنید که
$$X_i \cap X_j = \begin{cases} X_i \in T_j{}^c & i \leqslant j \quad (\text{بنابر فرض}) \\ X_j \in T_j{}^c & i > j \quad (\text{بنابر تعریف}) \end{cases}$$
پس X_i در X بسته است، یعنی $X \in T^c$. حال اگر $C \subseteq X_i$ بسته باشد، یعنی $C \in T_i{}^c$ ، تساوی $C = C \cap X_i$ به همراه بسته بودن X_i در X نتیجه میدهند که $C \in T|_{X_i}{}^c$. پس
$$T_i^c \subseteq T|_{X_i}{}^c.$$
این نشان میدهد که
$$T_i^c = T|_{X_i}{}^c \Rightarrow T_i = T|_{X_i}.$$
این اثبات را تمام میکند. $\square$

از این توپولوژی، برای معرفی یک توپولوژی روی زیر مجموعه ای از مجموعه های حاصل ضربی خاصی استفاده میکنیم. هدف معرفی ابزاری است که رابطه نادرست
$$\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$
را به گونه ای درست بازنویسی بکند. برای توجیه نیاز به چنین ابزاری، فضای متریک $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که حین انجام محاسبه، ما محور xـ ها را به طور ضمنی با $\mathbb{R}$ یکی میگیریم. اما این در واقع چیزی به جز مجموعه حاصل ضربی $\mathbb{R} \times \{0\}$ نیست، در حالی که ما علاقه مند هستیم چنین باشد. پیش از ادامه، یک مفهوم به نام نشاندن را معرفی میکنیم.

تعریف ۲.۴.۲. *گوییم نگاشت پیوسته $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ یک نشاندن (Embedding) است هرگاه f یک بیک باشد و نگاشت*
$$\begin{cases} \widetilde{f} : (X, T_X) \to (f(X), T_Y|_{f(X)}) \\ \widetilde{f}(x) = f(x) \end{cases}$$
یک یکسانریختی یا همسانی توپولوژیک باشد.

مثال ۳.۴.۲. *نگاشت $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ با ضابطه $f(x)=(x,0)$ را در نظر بگیرید. در اینجا هم $\mathbb{R}^n$ و هم $\mathbb{R}^{n+1}$ دارای توپولوژی القایی توسط متریک اقلیدسی هستند. بوضوح f یک تابع پیوسته یک بیک است و*

$$f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n\times\{0\}.$$

باید نشان دهیم تابع

$$\widetilde{f}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\{0\}$$

با ضابطه $\widetilde{f}(x)=f(x)$ یک یکسانریختی است. به این منظور تابع تصویر $\pi_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ با ضابطه $\pi_{\mathbb{R}^n}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=(x_1,\ldots,x_n)$ را در نظر بگیرید. بوضوح این تابع پیوسته است. حال تحدید این تابع

$$\pi_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}:\mathbb{R}^n\times\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

که با ترکیب

$$\mathbb{R}^n\times\{0\}\xrightarrow{i}\mathbb{R}^{n+1}\xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^n}}\mathbb{R}^n$$

تعریف میشود پیوسته است. با استفاده از تعریف توابع $\widetilde{f}$ و $\pi_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}$ براحتی میبینیم که

$$\widetilde{f}\circ\pi_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}=1_{\mathbb{R}^n},\ \pi_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}\circ\widetilde{f}=1_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}.$$

این نشان میدهد که نگاشت پیوسته $\pi_{\mathbb{R}^n}|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}$ وارون $\widetilde{f}$ است. پس $\widetilde{f}$ یک یکسانریختی یا همسانی توپولوژیک است.

البته در بخش توپولوژی خارج قسمتی صورت بندی دقیق تر این مساله را بیان خواهیم کرد. اما فعلا، به صورت یک قرارداد میپذیریم که اگر $f:X\to Y$ یک نشاندن باشد، آنگاه X را با $f(X)$ یکی خواهیم گرفت که به ما اجازه میدهد بنویسیم $X\subseteq Y$.

حال فرض کنید $\{(X_i,T_i),f_{ij}\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای توپولوژیک و نشاندنهایی مانند $f_{ij}:X_i\to X_j$ هرگاه $i\leqslant j$ به قسمی که $f_{ii}=1_{X_i}$ که روی یک مجموعه کلی مرتب مانند I اندیس گذاری است. با قرارداد فوق میتوان مجموعه $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ را در نظر گرفت. آیا توپولوژی ای مانند T روی X وجود دارد به قسمی که به ازای هر $i\in I$ فضای (X_i,T_i) زیر فضای (X,T) باشد، یعنی

$$\forall i\in I, T_i=T|_{X_i}.$$

در این حالت، پاسخی مانند قضیه ۱.۴.۲ موجود است که ما فقط صورت آنرا بیان میکنیم.

قضیه ۴.۴.۲. *مفروضات بالا را در نظر بگیرید و فرض کنید به ازای هر $i<j$ فضای X_i در X_j بسته باشد(در واقع $f_{ij}(X_i)$ در X_j بسته باشد). تعریف کنید*

$$C \text{ در } X \text{ بسته است} \iff \forall i\in I,\ C\cap X_i \text{ در } X_i \text{ بسته است}.$$

آنگاه مجموعه

$$T=\{X-C:\ C \text{ در } X \text{ بسته است}\}$$

یک توپولوژی روی X است و به ازای هر $i\in I$ داریم $T_i=T|_{X_i}$.

اثبات. اثبات به عنوان تمرین به عهده خواننده. $\square$

به عنوان مثال، فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را به همراه نشاندنهای $i_{np}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ وقتی $n\leqslant p$ در نظر بگیرید. قرار میدهیم

$$\mathbb{R}^\infty=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathbb{R}^n.$$

اولین توپولوژی مورد نظر ما روی این مجموعه توپولوژی ضعیف حاصل از پالایه $\{R^n,i_{np}\}$ خواهد بود. توجه کنید که بنابر تعریف

$$(x_i)_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^\infty\iff\exists N\forall i>N,x_i=0.$$

نگاشت جانشانی $i_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\infty$ با ضابطه

$$i_n(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$$

معین شده است و به ازای توپولوژی پالایه ای روی $\mathbb{R}^\infty$ یک نگاشت پیوسته است. از طرف دیگر، توجه کنید که به ازای مجموعه حاصل ضربی

$$\mathbb{R}^\omega:=\prod_{i=1}^{+\infty}\mathbb{R}=\{(x_i)_{i=1}^{+\infty}:x_i\in\mathbb{R}\}$$

داریم

$$\mathbb{R}^\infty\subseteq\mathbb{R}^\omega.$$

از نماد غیر استاندارد $\mathbb{R}^\omega_{<\infty}$ برای نمایش زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^\omega$ شامل همه دنباله های $(x_i)_{i=1}^{+\infty}$ که $\sum_{i=1}^{+\infty}x_i^2$ همگراست (یعنی $\sum_{i=1}^{+\infty}x_i^2<+\infty$) استفاده خواهیم کرد. بوضوح به عنوان مجموعه

$$\mathbb{R}^\infty\subseteq\mathbb{R}^\omega_{<\infty}\subseteq\mathbb{R}^\omega.$$

سوال مهمی که میتوان پرسید این است که به ازای کدام توپولوژی، جعبه ای یا حاصل ضربی، $\mathbb{R}^n$ به همراه توپولوژی پالایه ای زیرفضایی از $\mathbb{R}^\omega$ و $\mathbb{R}^\omega_{<\infty}$ خواهد بود؟ در آینده، این مجموعه ها در مبحث متریک پذیری مثالهای مهمی بدست خواهند داد.
تمرین زیر چند گام مهم برای تعمیم نحوه ساختن $\mathbb{R}^\infty$ ارائه میکند.

تمرین ۵.۴.۲. *الف. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $\{*\}$ یک فضای تک نقطه ای. نشان دهید فضای $\{*\}\times X$ با توپولوژی حاصل ضربی با فضای توپولوژیک X یکسانریخت است.*
ب. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند مسیری باشد و $x_0\in X$ را ثابت در نظر بگیرید. نشان دهید نگاشت

$$\begin{cases}\iota_{x_0}:X\longrightarrow X\times X\\ \iota_{x_0}(x)=(x,x_0)\end{cases}$$

یک نشاندن است و تصویر X تحت این نگاشت در $X\times X$ بسته است.

با استفاده از شیوه نشاندن در تمرین فوق، میتوان نشاندن های

$$\begin{cases}\iota_{x_0}:X^{\times n}\longrightarrow X^{\times(n+1)}\\ \iota_{x_0}(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,x_0)\end{cases}$$

را مورد استفاده قرار داد. در اینجا

$$X^{\times n} = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n-\text{بار}}.$$

حال میتوان از فضای توپولوژیک

$$X^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X^{\times n}$$

با توپولوژی ضعیف صحبت کرد و توجه کرد که به عنوان یک مجموعه، به ازای $X^{\omega} = \prod_{i=1}^{+\infty} X$ ، داریم

$$X^{\infty} \subseteq X^{\omega}.$$

۵.۲ توپولوژی خارج قسمتی

توپولوژی خارج قسمتی یکی از مهم ترین مباحث در ساختن توپولوژی های جدید است. از چند دیدگاه میتوان اهمیت این توپولوژی را توجیه نمود. هم به جهت کاربرد آن در دیگر مباحث توپولوژی عمومی، مانند تعمیم مبحث توپولوژی پالایه ای، و هم به دلیل کاربردهای هندسی آن. خواهیم دید که در شرایط مناسبی، توپولوژی خارج قسمتی از دید هندسی معادل عمل چسباندن بخشهایی از یک شی هندسی به بخشهای دیگر آن شی یا شی ای دیگر است. این مبحث به نوعی یک حالت ساده از دوگان توپولوژی القایی است. همچین میتوان توپولوژی خارج قسمتی را بررسی عمل ساختن مجموعه های جدید با استفاده از روابط هم ارزی در حضور توپولوژی در نظر گرفت. در این فصل، شمه ای کوتاه از هر کدام از این دیدگاه ها را مورد اشاره قرار خواهیم داد. در بخش ۳.۵.۲ برخی مطالب مورد نیاز در مورد روابط هم ارزی و توابع پوشا را جمع آوری نموده ایم و خواننده را به این بخش برای یادآوری این مطالب و نیز آشنایی با نمادگذاری های انجام شده در این بخش ارجاع میدهیم.

فرض کنید (X, T_X) یک فضای توپولوژیک باشد و Z یک مجموعه و $p : X \to Z$ یک تابع پوشا. سوال این است که آیا یک توپولوژی نابدیهی مانند T_Z روی Z وجود دارد که p در حضور این توپولوژی یک تابع پیوسته باشد؟ در اینجا نابدیهی بودن T_Z یعنی $T_Z \neq \mathcal{N}$. برای یافتن پاسخ، توجه کنید که در صورت وجود چنین توپولوژی ای روی Z آنگاه

$$\forall W \in T_Z, p^{-1}(W) \in T_X.$$

توجه کنید توپولوژی T_X و تابع p داده شده اند، پس مجموعه

$$\{W \subseteq Z : p^{-1}(W) \in T_X\}$$

یک مجموعه خوش تعریف است. با توجه به توضیحات بالا، هر توپولوژی T_Z که جوابی برای سوال ما باشد، باید شامل این مجموعه باشد. البته اولین گزینه برای توپولوژی T_Z خود همین مجموعه است. لم زیر نشان میدهد که این مجموعه البته یک توپولوژی می باشد.

لم ۲.۵.۱. *فرض کنید $p : X \to Z$ یک تابع پوشا باشد، و T_X یک توپولوژی روی X. در این صورت مجموعه T_Z تعریف شده با*

$$W \in T_Z \Longleftrightarrow p^{-1}(W) \in T_X$$

یک توپولوژی روی Z است و تابع p با این توپولوژی یک نگاشت پیوسته است.

اثبات. پیوستگی p معادل قسمت $\Longleftarrow$ تعریف T_Z است. پس، بوضوح برقرار است. کافیست نشان دهیم T_Z یک توپولوژی است.

الف. بنابر تعریف

$$\phi = p^{-1}(\phi) \in T_X, X = p^{-1}(Z) \in T_X \Longrightarrow \phi, Z \in T_Z.$$

پس T_Z شرط نخست توپولوژی بودن را دارد.

ب. فرض کنیم $\{W_i\}_{i\in I} \in T_Z$. بنا بر تعریف $p^{-1}(W_i) \in T_Z$. اما

$$p^{-1}(\bigcup_{i\in I} W_i) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(W_i) \in T_X \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} W_i \in T_Z.$$

پس T_Z تحت اجتماع دلخوا بسته است.

پ. بسته بودن تحت اشتراک متناهی نیز به طریق مشابه ثابت میشود. $\square$

دقت کنید که توپولوژی تعریف شده وابسته به T_X و p می باشد و به طور یکتا مشخص شده است. از نماد غیر استاندارد p_*T_X برای نمایش این توپولوژی استفاده خواهیم کرد، یعنی

$$W \in p_*T_X \Longleftrightarrow p^{-1}(W) \in T_X.$$

لم فوق تعریف زیر را توجیه میکند.

تعریف ۲.۵.۲. *الف. به ازای تابع پوشای $p : X \to Z$ و توپولوژی T_X روی X، منظور ما از توپولوژی خارج قسمتی روی Z (نسبت به T_X و p) عبارت است از توپولوژی p_*T_X .*
ب. اگر $p : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ یک نگاشت پیوسته و پوشا باشد، گوییم p یک نگاشت خارج قسمتی است هرگاه

$$T_Y = p_*T_X.$$

توجه کنید که، با توجه به نمادگذاری انجام شده، نگاشت پیوسته و پوشای $p : X \to Y$ خارج قسمتی است هرگاه

$$\forall V \subseteq Y \text{ باز } \Longleftrightarrow p^{-1}(V) \subseteq X \text{ باز }.$$

بنابر تعریف بالا، اگر تابع پوشای $p : X \to Z$ و توپولوژی T_X روی X را در نظر بگیریم آنگاه نگاشت

$$p : (X, T_X) \to (Z, p_*T_X)$$

یک نگاشت خارج قسمتی است.

تذکر ۳.۵.۲. *یک سوال مهم این است که پوشا بودن p چه اهمیتی دارد؟ در واقع، حتی اگر شرط پوشا بودن p را از لم ۱.۵.۲ نیز حذف کنیم به نظر اثبات لم درست است و لم برقرار خواهد بود. پس چه لزومی به فرض پوشا بودن هست؟ نکته مهم این است که ما حتی الامکان به دنبال توپولوژی های مناسبی هستیم که از بدیهی بودن بدور باشند. اگر $p : X \to Z$ یک نگاشت پوشا نباشد، یعنی مجموعه $Z - p(X)$ ناتهی است. با تعریف فوق از p_*T_X خواهیم داشت*

$$\forall z \in Z - p(X), p^{-1}(\{z\}) = \phi \Longrightarrow \{z\} \in p_*T_X.$$

یعنی اگر نگاشت p پوشا نباشد، آنگاه توپولوژی Z در بیرون از $p(X)$ شبیه توپولوژی گسسته خواهد بود، چون هر تک نقطه ای $\{z\}$ که $z \in Z - p(X)$ در این توپولوژی خواهد بود. از طرف دیگر، اگر p هر تابع دلخواهی باشد، که لزوما پوشا نیست، آنگاه می توان تابع $\widetilde{p} : X \to p(X)$ را در نظر گرفت که بنابر تعریف پوشاست. همچنین نگاشت جانشانی $\iota : p(X) \to Z$ را نیز داریم که در رابطه $p = \iota \circ \widetilde{p}$ صدق میکند. می توان نشان داد که توپولوژی زیرفضایی روی $p(X)$ نسبت به توپولوژی p_*T_X برابر است با توپولوژی حاصل از لم ۱.۵.۲ برای نگاشت $\widetilde{p}$ ، یعنی

$$\widetilde{p}_*T_X = (p_*T_X)|_{p(X)}.$$

این نشان میدهد که در این مبحث در نظر گرفتن توابع پوشا کافیست. و البته مشاهده خواهیم کرد که فرض پوشا بودن در برخی اثباتها بسیار کمک کننده است و چه بسا نبودن این شرط در درستی گزاره ها خلل وارد نماید.

حال چند مثال برای یک تابع خارج قسمتی ارائه میکنیم.

مثال ۴.۵.۲. *فرض کنید $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد. ادعا میکنیم f یک نگاشت خارج قسمتی است. توجه کنید هر همسانریختی در حالت خاص یک نگاشت پوشاست. کافیست نشان دهیم*

$$\forall V \subseteq Y, V \subseteq Y \text{ باز } \iff f^{-1}(V) \subseteq X \text{ باز }.$$

توجه کنید که جهت $\Rightarrow$ همان پیوستگی f است که برقرار است. پس کافیست نشان دهیم به ازای هر $V \subseteq Y$ گزاره

$$f^{-1}(V) \subseteq X \text{ باز } \Rightarrow V \subseteq Y \text{ باز}$$

برقرار است. اما توجه کنید $f(f^{-1}(V)) = V$. بنابر قسمت الف. لم ۲.۳.۱ باز بودن $f^{-1}(V)$ و اینکه f یک همسانریختی است، باز بودن V را نتیجه میدهد. این ادعای ما را ثابت میکند.

عکس گزاره ثابت شده در مثال بالا به نوعی برقرار است.

لم ۵.۵.۲. *فرض کنید $p : X \to Y$ یک نگاشت خارج قسمتی یک بیک باشد، آنگاه p یک همسانریختی است.*

اثبات. بنابر فرض، p یک نگاشت پوشا و یک بیک پیوسته است. پس در حالت خاص وارون پذیر است. کافیست نشان دهیم وارون آن نیز پیوسته است. یعنی

$$\forall U \subseteq X \text{ باز }, (p^{-1})^{-1}(U) \subseteq Y \text{ باز }.$$

چون p یک بیک و پوشاست داریم
$$(p^{-1})^{-1}(U)=p(U).$$
پس باید نشان دهیم
$$\forall U\subseteq X \text{ باز}, p(U)\subseteq Y \text{ باز}.$$
اما چون p یک نگاشت خارج قسمتی
$$p(U)\subseteq Y \text{ باز} \iff p^{-1}(p(U))\subseteq X \text{ باز}.$$
چون p یک بیک و پوشاست،
$$p^{-1}(p(U))=U.$$
پس پیوستگی p^{-1} معادل این است که
$$\forall U\subseteq X \text{ باز}, p(U)\subseteq Y \text{ باز} \iff p^{-1}(p(U))=U\subseteq X \text{ باز}$$
که بوضوح برقرار است. پس p یک همسانریختی است. $\square$

مثال ۶.۵.۲. *فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و $X=[0,1]\cup[2,3]$ و $Y=[0,2]$ را با توپولوژی زیر فضایی در نظر بگیرید. توجه کنید که این توپولوژی های توسط متریک اقلیدسی القا شده اند. به همین دلیل خود را مجاز میدانیم تا از آنچه در مورد فضاهای متریک میدانیم استفاده کنیم. تابع $p:X\to Y$ با ضابطه*
$$p(t)=\begin{cases} t & t\in[0,1]\\ t-1 & t\in[2,3]\end{cases}$$
را در نظر بگیرید. این تابع بوضوح یک تابع پیوسته و پوشاست. حال باید نشان دهیم
$$\forall W\subseteq[0,2], p^{-1}(W) \text{ باز} \Rightarrow W \text{ باز}.$$
توجه کنید که چون p پوشاست داریم
$$W=p(p^{-1}(W)).$$
میدانیم که گردایه همه بازه باز یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ می باشد. پس بنابر لم ۲ .۲ .۳ گردایه
$$\mathcal{B}_X:=\{X\cap(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$$
یک پایه برای توپولوژی زیر فضایی روی X می باشد. با استفاده از این مطلب و با در نظر گرفتن حالتهای مختلف، میتوان نشان داد که اگر $\mathcal{B}_X$ را گردایه تمام بازه های به صورت
$$[0,a),(a_1,a_2),(b,1],[2,c),(c_1,c_2),(d,3]$$
که
$$0<a,0<a_1<a_2<1,b<1,c<3,2<c_1<c_2<3,2<d$$
نیز یک پایه برای توپولوژی زیرفضایی روی X می باشد. حال اگر $p^{-1}(W)$ باز باشد، آنگاه به ازای یک مجموعه اندیس گذار I خواهیم داشت
$$p^{-1}(W)=\bigcup_{i\in I,B_i\in\mathcal{B}_X}B_i.$$

چون اثر دادن تابع حافظ اجتماع است، پس

$$W = p(p^{-1}(W)) = p(\bigcup_{i\in I, B_i\in \mathcal{B}_X} B_i) = \bigcup_{i\in I, B_i\in \mathcal{B}_X} p(B_i).$$

حال توجه کنید که نگاشت $p|_{X-\{1,2\}}$ یک بیک است و تنها نقاطی که این نگاشت در آنها یک بیک نیست عبارتند از 2 و 3 که بنابر ضابطه تابع داریم

$$p(1) = p(2) = 1.$$

حالت اول. $1, 2 \notin p^{-1}(W)$ *. در این صورت*

$$p^{-1}(W) \subseteq [0, 1) \cup (2, 3]$$

و $p^{-1}(W)$ را میتوان به صورت اجتماعی از اعضای پایه به صورت

$$[0, a), (a_1, a_2)(c_1, c_2), (d, 3]$$

نوشت. پس W را میتوان به صورت اجتماعی از بازه هایی به صورت

$$\begin{array}{lll} p([0,a)) & = & [0,a) \\ p((a_1,a_2)) & = & (a_1,a_2) \\ p((c_1,c_2)) & = & (c_1-1, c_2-1) \\ p((d,3]) & = & (d-1, 2] \end{array}$$

که همگی در توپولوژی زیر فضایی $Y = [0, 2]$ باز هستند، نوشت. این یعنی اینکه W در Y باز است.

حالت دوم. $1 \in p^{-1}(W)$ *. این یعنی اینکه $p(1) = 1 = p(2) \in W$. پس $2 \in W$. توجه کنید با شیوه مشابه از فرض $2 \in p^{-1}(W)$ میتوان نتیجه گرفت که $1 \in p^{-1}(W)$. پس این حالت تنها حالت باقی مانده است. در این صورت بازه هایی به صورت*

$$(b, 1], [c, 3)$$

در کنار هم (و نه یکی در نبود دیگری) نیز در نوشتن $p^{-1}(W)$ به صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}_X$ حضور خواهند داشت، چون $1, 2 \in p^{-1}(W)$ نقاط درونی هستند. اما توجه کنید که

$$p((b, 1] \cup [2, c)) = (b, c - 1)$$

که در Y باز هست. این محاسبه، به همراه محاسبه حالت اول، نشان میدهد که W صورت اجتماعی از مجموعه های باز در Y خواهد بود. پس W در Y باز است. این نشان میدهد که نگاشت p یک نگاشت خارج قسمتی است.

مثال دوم ما یک مثال مهم از یک نگاشت خارج قسمتی است. اهمیت این مثال بدلیل شهود هندسی آن و کاربردهای آن در آینده می باشد.

مثال ۷.۵.۲. خط حقیقی $\mathbb{R}$ با توپولوژی متریک در نظر بگیرید. همچنین دایره واحد

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

را به عنوان زیر مجموعه ای از $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. توپولوژی روی $\mathbb{C}$ همان توپولوژی متریک است و دایره را با توپولوژی زیر فضایی در نظر بگیرید. توجه کنید که هر $z \in \mathbb{C}$ را میتوان به صورت $re^{i\theta}$ نوشت که در آن $r \geqslant 0$ یک عدد حقیقی، $i^2 = -1$ ، و $\theta \in [0, 2\pi)$ متناظر به زاویه ای است که z با محور xــ ها میسازد. با تغییر متغیر $t = \theta/2\pi \in [0, 1)$ میتوان نوشت $z = re^{(2\pi t)i}$ و دایره واحد در این نمایش متناظر به نقاط با $r = 1$ است، یعنی دایره را میتوان به صورت

$$S^1 = \{e^{(2\pi t)i} : t \in [0, 1]\}$$

پارامتری نمود که البته $e^{2\pi i} = e^0$ ، یعنی در این پارامتری نمودن نقاط متناظر به $t = 0$ و $t = 1$ با هم برابر هستند. نگاشت

$$\begin{cases} q : \mathbb{R} \to S^1 \\ q(t) = e^{(2\pi t)i} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. ادعا میکنیم این یک نگاشت خارج قسمتی است. بوضوح q پوشاست. برای بررسی پیوستگی توجه کنید که نگاشت $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$$\phi(re^{(2\pi t)i}) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$$

یک ایزومتری است، یعنی یک تابع پیوسته بین دو فضای متریک که وارون آن نیز پیوسته است و

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{R}^2}(\phi(z_1), \phi(z_2)).$$

در اینجا $d_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ و $d_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ بترتیب متریک های اقلیدسی روی $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}^2$ هستند. حال تابع $\phi \circ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$$\phi \circ q(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

بوضوح پیوسته است، چون مولفه هایش پیوسته هستند. پس تابع $q = \phi^{-1} \circ (\phi \circ q)$ نیز پیوسته است. در پایان باید نشان دهیم

$$W \subseteq S^1 \text{ باز } \iff q^{-1}(W) \subseteq \mathbb{R} \text{ باز }.$$

جهت $\Longrightarrow$ همان پیوستگی q می باشد که بررسی کردیم. پس فقط کافیست درستی استنتاج فوق در جهت $\Longleftarrow$ را نشان دهیم. توجه کنید چون q پوشاست به ازای هر $W \subseteq S^1$ داریم

$$q(q^{-1}(W)) = W.$$

همچنین، توجه کنید به ازای $q(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} q(U_i)$ به ازای هر گردایه $\{U_i\}_{i\in I}$ از زیر محموعه های $\mathbb{R}$. توجه کنید که اگر $q^{-1}(W)$ باز باشد، پس آنرا میتوان به صورت اجتماعی از اعضای پایه نوشت. یادآوری میکنیم که مجموعه همه بازه های باز (a, b) یک پایه برای توپولوژی متریک روی $\mathbb{R}$ است. با حالت بندی میتوان نشان داد که $q((a, b))$ یک کمان در S^1 است مانند

$$W(t_1, t_2) = \{e^{(2\pi t)i} : t_1 < t < t_2\}$$

که $t_1, t_2 \in [0, 1)$. برای مثال اگر وجود داشته باشد $n \in \mathbb{Z}$ به قسمی که $n < a < b < n + 1$ آنگاه

$$q((a, b)) = W(n - a, n - b).$$

پس اگر $q^{-1}(W)$ اجتماعی از بازه های باز مانند (a_i, b_i) باشد، آنگاه

$$W = q(q^{-1}(W)) = \bigcup_{i\in I} q(a_i, b_i) = \bigcup_{i\in I} W(t_{1i}, t_{2i}).$$

از آنجایی که کمانها در توپولوژی زیر فضایی در S^1 باز هستند، پس اجتماع دلخواه آنها نیز باز است، پس W باز است. این ادعای ما را ثابت میکند و نشان میدهد که اگر $q^{-1}(W)$ باز باشد، W نیز باز است. یعنی q یک نگاشت خارج قسمتی است.

تمرین ۸.۵.۲. *نشان دهید تحدید نگاشت q به بازه بسته $I = [0, 1]$ وقتی I توپولوژی زیرفضایی نسبت به $\mathbb{R}$ دارد یک نگاشت خارج قسمتی است.*

تمرین ۹.۵.۲. *نشان دهید اگر $p : X \to Z$ یک نگاشت خارج قسمتی باشد و $A \subseteq X$ با توپولوژی زیر فضایی، آنگاه تحدید $p|_A : A \to Z$ لزوما یک نگاشت خارج قسمتی نیست. (راهنمایی. مثال ۶.۵.۲ را با $A = [0, 1) \cup [2, 3]$ بررسی کنید و نشان دهید یک مثال بدست میدهد).*

تمرین ۱۰.۵.۲. *نشان دهید اگر $p : X \to Y$ و $q : Y \to Z$ نگاشت های خارج قسمتی باشند، آنگاه $q \circ p : X \to Z$ نیز یک نگاشت خارج قسمتی است.*

حال به بررسی ارتباط توپولوژی خارج قسمتی با روابط هم ارزی میپردازیم. تلاش میکنیم تا یک ویژگی عمومی بودن (Universality) ، مانند آنچه در بخش ۳.۵.۲ برای روابط هم ارزی بیان شده اند، را برای نگاشت های خارج قسمتی بیان کنیم. این ارتباط، مقدمه ای است برای نتایجی که کاربردهای هندسی و دیدگاه شهودی ما در مورد این توپولوژی را توجیه میکند.

قضیه ۱۱.۵.۲. *فرض کنید $p : X \to Y$ یک نگاشت خارج قسمتی باشد و $g : X \to Z$ یک تابع دلخواه (نه لزوما نگاشت پیوسته) که به ازای هر $y \in Y$ روی مجموعه $p^{-1}(y)$ ثابت است. آنگاه یک تابع مانند $\overline{g} : Y \to Z$ موجود است به قسمی که نمودار*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "\overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

جابجایی است. همچنین
الف. g پیوسته است اگر و تنها اگر $\overline{g}$ پیوسته باشد.
ب. g خارج قسمتی است اگر و تنها اگر $\overline{g}$ خارج قسمتی باشد.

اثبات. توجه کنید که فرض ثابت بودن g روی هر مجموعه $p^{-1}(y)$ یعنی

$$x_1, x_2 \in p^{-1}(y) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2).$$

حال وجود تابع $\overline{g} : Y \to Z$ به قسمی که $g = \overline{g} \circ p$ از لم ۳۱.۵.۲ نتیجه میشود. حال به اثبات قسمت های الف و ب میپردازیم.

الف. فرض کنید $\overline{g}$ پیوسته باشد، چون p یک نگاشت خارج قسمتی است، پس پیوسته نیز هست. پس $g = \overline{g} \circ p$ نیز پیوسته خواهد بود. برعکس، فرض کنید g پیوسته باشد. در این صورت، بنابر تعریف پیوستگی، به ازای هر مجموعه باز $W \subseteq Z$ مجموعه

$$g^{-1}(W) = p^{-1}(\overline{g}^{-1}(W))$$

نیز در X باز خواهد بود. اما، چون p یک نگاشت خارج قسمتی است، بنابر تعریف، داریم

$$p^{-1}(\overline{g}^{-1}(W)) \subseteq X \text{ باز } \iff (\overline{g}^{-1}(W)) \subseteq Y \text{ باز }.$$

یعنی به ازی هر مجموعه باز W در Z مجموعه $\overline{g}^{-1}(W)$ در Y باز خواهد بود. یعنی $\overline{g}$ پیوسته است. این اثبات قسمت الف را تمام میکند.

ب. فرض کنید $\overline{g}$ خارج قسمتی باشد. چون p نیز خارج قسمتی است، بنابر تمرین ۱۰.۵.۲ ترکیب این دو یعنی g نیز یک نگاشت خارج قسمتی خواهد بود. برعکس، فرض کنید g خارج قسمتی باشد. میخواهیم نشان دهیم $\overline{g}$ نیز خارج قسمتی است. توجه کنید که بنابر قسمت الف لم ۳۱.۵.۲ چون g پوشاست، پس $\overline{g}$ نیز پوشاست. حال باید ثابت کنیم $\overline{g}$ یک نگاشت خارج قسمتی است، یعنی

$$\forall W \subseteq Z, W \subseteq Z \text{ باز } \iff \overline{g}^{-1}(W) \subseteq Y \text{ باز }.$$

تساوی $g = \overline{g} \circ p$ نتیجه میدهد

$$g^{-1}(W) = p^{-1}(\overline{g}^{-1}(W)).$$

با استفاده از تعریف خارج قسمتی بودن برای p و g، به ازای هر $W \subseteq Z$ داریم

$$W \subseteq Z \text{ باز } \overset{g\,\text{خارج قسمتی}}{\iff} g^{-1}(W) = p^{-1}(\overline{g}^{-1}(W)) \subseteq X \text{ باز } \overset{p\,\text{خارج قسمتی}}{\iff} \overline{g}^{-1}(W) \subseteq Y \text{ باز }.$$

این ادعای ما را ثابت میکند. $\square$

حال فرض کنید که X یک فضای توپولوژیک باشد و $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی X. تابع خارج قسمتی

$$\pi : X \to X/\sim$$

یک تابع پوشاست و میتوان توپولوژی خارج قسمتی روی $X/\sim$ را در نظر گرفت. در این صورت π نیز یک نگاشت خارج قسمتی است. در حالت خاص میتوان یک نگاشت پوشا مانند $g : X \to Z$ را در نظر گرفت و رابطه هم ارزی $\sim$ را همان $\sim_g$ تعریف شده در تمرین ۲۹.۵.۲. در این صورت، قضیه بالا نتیجه مفید زیر را بدست میدهد.

نتیجه ۱۲.۵.۲. *نگاشت پیوسته و پوشای $g : X \to Z$ را در نظر بگیرید و نگاشت خارج قسمتی $\pi : X \to X/\sim_g$ را در نظر بگیرید، یعنی توپولوژی روی*

$$X/\sim_g = \{g^{-1}(z) : z \in Z\}$$

توپولوژی خارج قسمتی است. در این صورت گزاره های زیر برقرار هستند.

الف. نگاشت g نگاشت پیوسته و تناظر یک بیک (یعنی یک بیک و پوشا) $\overline{g} : X/\sim_g \to Z$ را القاء میکند به نحوی که نمودار

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\sim_g \arrow[ur, "\overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

جابجایی است. همچنین $\overline{g}$ یک همسانریختی است اگر و تنها اگر g خارج قسمتی باشد.
ب. اگر Z هاسدورف باشد، آنگاه $X/\sim_g$ نیز هاسدورف است.

اثبات. الف. توجه کنید که رابطه هم ارزی $\sim_g$ اینگونه تعریف شده است که

$$x_1 \sim_g x_2 \Longleftrightarrow g(x_1) = g(x_2).$$

بنابر قضیه قسمت الف ۱۱.۵.۲ نگاشت پیوسته $\overline{g} : X/\sim_g \to Z$ که نمودار فوق را جابجایی کند وجود دارد. از طرفی، بنابر قسمت ب لم ۳۱.۵.۲ این تابع یک بیک و پوشاست. حال باید نشان دهیم

$$\overline{g} \text{ یک همسانریختی است } \Longleftrightarrow g \text{ یک نگاشت خارج قسمتی است}$$

$(\Leftarrow)$ اگر $\overline{g}$ یک همسانریختی باشد، آنگاه یک نگاشت خارج قسمتی نیز هست. چون π نیز یک نگاشت خارج قسمتی است، پس ترکیب آنها، یعنی g، نیز خارج قسمتی است.
$(\Rightarrow)$ فرض کنیم g یک نگاشت خارج قسمتی باشد. در این صورت بنابر قسمت ب. قضیه ۱۱.۵.۲ نگاشت $\overline{g}$ نیز یک نگاشت خارج قسمتی است. همچنین، تاکنون نشان داده ایم که $\overline{g}$ یک نگاشت یک بیک و پوشای است. پس $\overline{g}$ یک نگاشت خارج قسمتی یک بیک است. بنابر لم ۵.۵.۲ این تابع یک همسانریختی است.
ب. فرض کنید $x_1, x_2 \in X$ به قسمی که $[x_1] \neq [x_2]$. چون $\overline{g}$ یک تناظر یک بیک است، پس $\overline{g}[x_1] \neq \overline{g}[x_2]$. چون Z هاسدورف است، پس وجود دارند مجموعه های باز $W_1, W_2 \subseteq Z$ به قسمی که

$$\overline{g}[x_i] \in W_i, W_1 \cap W_2 = \phi.$$

چون $\overline{g}$ پیوسته است، پس $V_i = \overline{g}^{-1}(W_i)$ در $X/\sim_g$ باز است و داریم

$$[x_i] \in V_i, V_1 \cap V_2 = \phi.$$

این نشان میدهد که $X/\sim_g$ نیز باز است. □

حال به بررسی یک مثال میپردازیم.

مثال ۱۳.۵.۲. *بازه $I = [0,1]$ با توپولوژی زیر فضایی به عنوان زیرفضایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ و نگاشت خارج قسمتی $q : I \to S^1$ با ضابطه $q(t) = e^{(2\pi t)i}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که این تابع متناوب با دوره تناوب 1 است و $q|_{(0,1)}$ یک تابع یک بیک است، و فقط*

$$q(0) = q(1) = e^0 \in S^1.$$

رابطه هم ارزی متناظر به q با رابطه

$$0 \sim_q 1, x \in (0,1) \Rightarrow x \sim_q x$$

معین شده است. بنابر نتیجه ۱۲.۵.۲ نگاشت القاء شده

$$\overline{q} : I/\sim_q \to S^1$$

یک همسانریختی است. یعنی از لحاظ توپولوژیک فضای خارج قسمتی $I/\sim_q$ با دایره یکی است. از لحاظ هندسی، با چسباندن 0 به 1 میتوان بازه بسته $[0,1]$ را به یک دایره تبدیل نمود.

مثال بالا توجیه میکند که میتوان اثر رابطه هم ارزی روی فضاهای توپولوژیک را به صورت چسباندن نقاط هم ارز در نظر گرفت.

یک ویژگی مهم فضاهای توپولوژیک، ویژگی هاسدورف بودن هست. البته نتیجه ۱۲.۵.۲ یک شرط کافی برای هاسدورف بودن بدست میدهد. اما در مواقعی که رابطه هم ارزی لزوما براساس یک تابع تعریف نشده است، داشتن یک شرط که بر اساس خود رابطه هم ارزی بیان شده باشد نیز میتواند کمک کننده باشد. ابتدا مثالی از یک رابطه هم ارزی روی یک فضای توپولوژیک هاسدورف میدهیم به قسمی که فضای خارج قسمتی حاصل هاسدورف نیست.

مثال ۱۴.۵.۲. *فضای $X = [-1, 1]$ را به عنوان زیر فضایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. حال رابطه $\sim$ را روی X با ضابطه زیر تعریف کنید*

$$\forall a \in X, a \sim a$$
$$|a| < 1 \Rightarrow a \sim -a.$$

با در نظر گرفتن توپولوژی خارج قسمتی روی $X/\sim$ میتوان دید که $[1], [-1] \in X/\sim$ توسط مجموعه های باز از هم جدا نمیشوند، یعنی فضای خارج قسمتی هاسدورف نیست.

یکی از راههای تشخیص هاسدورف بودن، مطالعه قطر یک مجموعه است. یادآوری میکنیم که به ازای فضای توپولوژیک X قطر آن عبارت است از

$$D(X) = \{(x, x) : x \in X\}$$

که آن را با توپولوژی زیر فضایی درون $X \times X$ در نظر میگیریم. تمرین زیر یک محک برای هاسدورف بودن بدست میدهد.

تمرین ۱۵.۵.۲. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. نشان دهید X هاسدورف است اگر و تنها اگر $D(X)$ در $X \times X$ بسته باشد.*

حال فرض کنید $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی فضای توپولوژیک X باشد. با در نظر گرفتن توپولوژی خارج قسمتی روی $X/\sim$ قرار دهید $\Delta = D(X/\sim)$. بنابر تمرین بالا، $X/\sim$ هاسدورف است اگر و تنها اگر Δ بسته باشد. به ازای تابع پیوسته

$$\pi \times \pi : X \times X \to (X/\sim) \times (X/\sim)$$

اگر Δ بسته باشد، آنگاه

$$(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) = \{(x, x') \in X \times X : x \sim x'\}$$

نیز در $X \times X$ بسته خواهد بود. اگر تعریف کنیم

$$\text{رابطه } \sim \text{ بسته است} \equiv (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) \text{ بسته است}$$

آنگاه یک محک برای تشخصی هاسدورف نبودن فضای خارج قسمتی داریم.

لم ۱۶.۵.۲. *اگر $X/\sim$ با توپولوژی خارج قسمتی یک فضای هاسدورف باشد، آنگاه $\sim$ یک رابطه هم ارزی بسته روی X است.*

بسیار مفید خواهد بود اگر عکس لم فوق نیز برقرار باشد. ثابت خواهیم کرد که عکس لم، حداقل وقتی X فشرده است برقرار است. لم زیر صورت دقیق گزاره را بیان میکند.

لم ۱۷.۵.۲. *فرض کنید فضای توپولوژیک X هاسدورف و فشرده باشد. اگر $\sim$ یک رابطه هم ارزی بسته روی X باشد، آنگاه $X/\sim$ با توپولوژی خارج قسمتی یک فضای توپولوژیک هاسدورف است.*

اثبات این لم را پس از بیان اصول جداسازی و مطالعه فضاهای نرمال ارائه خواهیم داد. اما در کاربردها، از آن استفاده خواهیم نمود.

۱.۵.۲ فضاهای تصویری

در توپولوژی جبری و هندسه جبری، فضاهای پرمایشی (فضاهای مدولی/ Moduli spaces) دسته از فضاهای توپولوژیک هستند که از اهمیت بسزایی برخوردارند و مطالعه آنها بمنزله مطالعه رفتار دسته ای از اشیاء با ویژگی (های) معین است. هدف این بخش معرفی دسته ای از فضاهای پرمایشی به نام فضاهای تصویری، و در حالت خاص صفحه تصویری، می باشد. ساختن فضاهای تصویری با انتخاب یک میدان $\mathbb{F}$ و در نظر گرفتن فضاهای برداری $\mathbb{F}$ آغاز می شود. توپولوژی خارج قسمتی ابزاری است که اجازه میدهد مجموعه های مورد نظر را به عنوان فضاهای توپولوژیک در نظر بگیریم و از روشهای توپولوژیک برای مطالعه این مجموعه ها استفاده کنیم. در این بخش به معرفی کوتاهی از فضاهای برداری در حالتهای $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ می پردازیم. معرفی خود را با فضاهای تصویری حقیقی، متناظر به حالت $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ شروع میکنیم.
به عنوان یک "مجموعه" فضای تصویری nـ بعدی (حقیقی) که با $\mathbb{R}P^n$ نمایش خواهیم داد عبارت است از همه زیر فضاهای برداری $\mathbb{R}^{n+1}$ از بعد یک، یعنی

$$\mathbb{R}P^n = \{V \leqslant \mathbb{R}^{n+1} : \dim_{\mathbb{R}} V = 1\}.$$

در حالت خاص از $\mathbb{R}P^2$ با عنوان صفحه تصویری یاد خواهیم کرد. ابتدا توجه کنید که اگر $V \leqslant \mathbb{R}^{n+1}$ یک زیر فضای یک بعدی باشد، آنگاه یک بردار ناصفر $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ موجود است که

$$V = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

از طرف دیگر، اگر $v' \in \mathbb{R}^{n+1}$ هر بردار ناصفر دیگری باشد که به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $v' = \lambda v$ آنگاه

$$V = \{\lambda v' : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

یعنی در معین کردن V انتخاب بردار ناصفر v هیچ تاثیری ندارد. تنها نکته مهم این است که بردار صفر $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ به هر زیر فضای برداری $\mathbb{R}^{n+1}$ تعلق دارد. پس اگر رابطه هم ارزی $\sim$ روی $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ را با

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, v \sim v' \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, v = \lambda v'$$

آنگاه

$$[v] = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\} = V - \{0\}.$$

پس با تعریف تابع

$$\Phi : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim \longrightarrow \mathbb{R}P^n,\ \Phi([v]) = [v] \cup \{0\}$$

یک تناظر یک بیک بدست می آوریم که وارون آن با ضابطه

$$\Psi : \mathbb{R}P^n \to (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim, \Psi(V) = V - \{0\}$$

معین شده است. حال توپولوژی $\mathbb{R}P^n$ را به گونه ای تعریف میکنیم که هر دوی این توابع پیوسته باشند، یعنی

$$W \subseteq \mathbb{R}P^n \text{ باز } \iff \Psi(W) = \Phi^{-1}(W) \subseteq (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim \text{ باز }.$$

توجه کنید که $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ دارای توپولوژی اقلیدسی به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}^{n+1}$ می باشد و $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ دارای توپولوژی خارج قسمتی است. با این تعریف توابع Φ و Ψ همسانریختی هستند. پس میتوان $\mathbb{R}P^n$ را به عنوان یک مجموعه خارج قسمتی در نظر گرفت، یعنی در نظر گرفت

$$\mathbb{R}P^n \equiv (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim .$$

پس میتوان زیر فضاهای یک بعدی $\mathbb{R}^{n+1}$ را به عنوان یک فضای توپولوژیک در نظر گرفت. این یک فضای پرمایشی است به این معنی که هر نقطه از آن خود نمایشگر یک فضای برداری یک‌ـ‌بعدی است.

هدف بعدی ما این است که نشان دهیم میتوان فضای تصویری $\mathbb{R}P^n$ را با تعریف یک رابطه هم ارزی بسته روی یک فضای توپولوژیک فشرده بدست آورد. در این صورت لم ۱۷.۵.۲ نشان خواهد داد که $\mathbb{R}P^n$ هاسدورف نیز هست. در واقع نشان میدهیم که این فضای تصویری از یک فضای توپولوژیک بسیار آشنا مانند کره بدست می آید. در اینجا کره nـ‌بعدی عبارت است از

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

که در حالت خاص، به عنوان زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^{n+1}$ چون بسته و کراندار می باشد، فشرده می باشد. قضیه زیر نتیجه مورد دلخواه را بیان میکند.

قضیه ۱۸.۵.۲. *رابطه هم ارزی $\sim$ را روی S^n به صورت زیر تعریف کنید*

$$\forall x, y \in S^n, x \sim y \iff x = \pm y.$$

در این صورت یک همسانریختی

$$\overline{f} : S^n/\sim \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$

وجود دارد.

اثبات. توجه کنید که بنابر تعریف $0 \notin S^n$. پس میتوان S^n را به عنوان زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ در نظر گرفت. حال تابع $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ را ترکیب

$$S^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n$$

در نظر بگیرید، یعنی $f = \pi \circ i$. در این نمودار i نگاشت جانشانی و π نگاشت خارج قسمتی می باشد. توجه کنید که بوضوح این نگاشت پوشاست. همچنین بنابر تعریف نگاشت π به ازای هر $V \in \mathbb{R}P^n$ وجود دارد $x \in S^n$ به قسمی که

$$f^{-1}(V) = V \cap S^n = \{x, -x\}.$$

پس f پوشا نیز هست. حال نگاشت خارج قسمتی $\pi : S^n \to S^n/\sim$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف رابطه هم ارزی $\sim$ روی S^n میبینیم که

$$x \sim y \Longleftrightarrow y = \pm x \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

یعنی $\sim = \sim_f$. بنابر قسمت الف نتیجه ۱۲.۵.۲ یک تابع یک بیک و پوشای پیوسته

$$\overline{f} : S^n/\sim \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$

موجود است که نمودار زیر جابجایی است

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}P^n \\ S^n/\sim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

وجود دارد. به عنوان تمرین به عهده خواننده میگذاریم تا نشان دهد که $\overline{f}$ یک نگاشت خارج قسمتی است. حال نشان میدهیم رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی بسته است، یعنی $\{(x,y) \in S^n \times S^n : x \sim y\}$ یک مجموعه بسته در $S^n \times S^n$ است. توجه کنید که

$$\{(x,y) \in S^n \times S^n : x \sim y\} = \{(x,x) : x \in S^n\} \cup \{(x,-x) : x \in S^n\}.$$

چون $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ و $\mathbb{R}^{n+1}$ به عنوان یک فضا با توپولوژی متریک هاسدورف است، میتوان نشان داد که S^n نیز هاسدورف است. بنابر تمرین ۱۵.۵.۲ $D(S^n) = \{(x,x) : x \in S^n\}$ یک مجموعه بسته در $S^n \times S^n$ است. همچنین توجه کنید که تابع

$$\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1},\ \alpha(x,y) = (x,-y)$$

یک تابع پیوسته است. تحدید این تابع به روی $S^n \times S^n$ تابعی پیوسته مانند

$$\beta : S^n \times S^n \longrightarrow S^n \times S^n,\ \beta(x,y) = (x,-y)$$

می باشد. بنابر لم ۶.۲.۱ مجموعه

$$\{(x,-x) : x \in S^n\} = \beta^{-1}(D(S^n))$$

در $S^n \times S^n$ بسته است. این نشان میدهد مجموعه $\{(x,y) \in S^n \times S^n : x \sim y\}$ اجتماع دو مجموعه بسته و در نتیجه بسته است. پس رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی بسته و در نتیجه $\mathbb{R}P^n$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف است. $\square$

نکته جالب این است که در حالت $n = 1$ میتوان نشان داد که فضای تصویری $\mathbb{R}P^1$ یک فضای بسیار آشناست. نتیجه زیر این مطلب را به طور واضح بیان میکند.

لم ۱۹.۵.۲. *یک همسانریختی $\mathbb{R}P^1 \longrightarrow S^1$ وجود دارد.*

اثبات. توجه کنید که هر زیرفضای برداری $\mathbb{R}^2$ با بعد یک چیزی به جز یک خط راست گذرنده از مبدا نیست و هر چنین خطی با زاویه ای که با محور xـ ها میسازد معین میشود. اما از طرف دیگر توجه کنید که به ازای هر $\theta \in [0,\pi]$ خط راست معین شده با θ با خط راست معین شده با $\theta + \pi$ یکی است و خط راست معین شده با 0 نیز با π یکی است که منطبق بر محور xـ ها می باشد. به ازای $\theta \in [0,\pi]$ قرار دهید

$$v_\theta = e^{i\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

رابطه هم ارزی $\sim$ روی فضای $[0,\pi]$ را با ضابطه

$$\theta \sim \theta' \Leftrightarrow (|\theta - \theta'| = \pi) \vee (\theta = \theta')$$

تعریف کنید. حال تابع $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}P^1$ را به عنوان ترکیب

$$f : [0,\pi] \xrightarrow{\theta \mapsto v_\theta} \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$$

تعریف کنید. همچنین تابع خارج قسمتی $p : [0,\pi] \to [0,\pi]/\sim$ را در نظر بگیرید. مشابه آنچه در بالا گفتیم میتوان نشان داد که تابع f یک همسانریختی $[0,\pi] \to \mathbb{R}P^1$ القاء میکند. اما توجه کنید که پیشتر نشان دادیم به ازای $I = [0,1]$ و رابطه هم ارزی $\sim_q$ داشتیم $I/\sim_q \equiv S^1$. تابع خطی

$$l : [0,1] \to [0,\pi],\ l(t) = t\pi$$

یک همسانریختی بین I و $[0,\pi]$ است که یک یکسانریختی $I/\sim_q \to [0,\pi]/\sim$ القاء میکند. ترکیب این همسانریختی ها یک همسانریختی

$$S^1 \to \mathbb{R}P^1$$

بدست میدهد. $\square$

نکته جالب در مورد این فضاها این است که به ازای مقادیر مختلف n این فضاها به گونه ای مناسب با هم سازگار هستند. تمرین زیر یک صورت بندی مفید از این سارگاری بدست میدهد.

تمرین ۲۰.۵.۲. *نشان دهید جانشانی $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}$ یا معادلا **جانشانی** $S^n \to S^{n+1}$ یک نشاندن $\mathbb{R}P^n$ درون $\mathbb{R}P^{n+1}$ به عنوان یک زیرفضای بسته را القاء میکند.*

تمرین فوق از این جهت بسیار مهم است که اجازه میدهد یک فضای توپولوژیک جدید تعریف کنیم. با یکی گرفتن $\mathbb{R}P^n$ و تصویر آن در $\mathbb{R}P^{n+1}$ میتوانیم تعریف کنیم

$$\mathbb{R}P^\infty := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{R}P^n$$

که دارای توپولوژی ضعیف می باشد. معمولا $\mathbb{R}P^\infty$ به صورت زیر نیز در نظر گرفته می شود

$$\mathbb{R}P^\infty = \{V \leqslant \mathbb{R}^\infty : \dim_{\mathbb{R}} V = 1\}$$

یعنی مجموعه زیرفضاهای یک بعدی $\mathbb{R}^\infty$. این فضا یکی از فضاهای توپولوژیک بسیار مهم در توپولوژی می باشد. حال به فضاهای تصویری مختلط میپردازیم. بسیاری از تعریف ها و نتایجی که در مورد فضاهای تصویری حقیقی برقرار هستند، در مورد فضاهای تصویری مختلط نیز برقرار می باشند. به عنوان یک مجموعه، فضای تصویری مختلط nـ بعدی (بعد مختلط) که با $\mathbb{C}P^n$ نمایش میدهیم به صورت

$$\mathbb{C}P^n = \{V \leqslant \mathbb{C}^{n+1} : \dim_{\mathbb{C}} V = 1\}$$

تعریف می شود، یعنی مجموعه همه زیرفضاهای برداری مختلط $\mathbb{C}^{n+1}$ که دارای بعد n روی میدان $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ می باشند. توجه کنید که همانند حالت مختلط به ازای $V \leqslant \mathbb{C}^{n+1}$ داریم

$$\dim_{\mathbb{C}} V = 1 \Longleftrightarrow \exists v \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}, V = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

مشابه حالت حقیقی، اگر رابطه $\sim_{\mathbb{C}}$ را روی $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ با ضابطه

$$v \sim_{\mathbb{C}} v' \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : v = \lambda v'$$

میتوان نشان داد که توابع

$$\Phi_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}P^n,\ \Phi_{\mathbb{C}}([v]) = [v] \cup \{0\}$$

و

$$\Psi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}P^n \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim_{\mathbb{C}},\ \Psi_{\mathbb{C}}(V) = V - \{0\}$$

وارون هم هستند. در نتیجه می توان با استفاده از $\Phi_{\mathbb{C}}$ مجموعه $\mathbb{C}P^n$ را به توپولوژی خارج قسمتی مجهز نمود که باعث می شود $\Phi_{\mathbb{C}}$ و $\Psi_{\mathbb{C}}$ را بتوان به عنوان همسانریختی در نظر گرفت.

گام بعدی این است که نشان دهیم این فضای توپولوژیک یک فضای هاسدورف است. همانند حالت حقیقی، برای اینکه بتوانیم از لم ۱۷.۵.۲ استفاده بکنیم، لازم است نشان دهیم که میتوان یک رابطه هم ارزی بسته روی یک فضای توپولوژیک فشرده تعریف نمود به قسمی که فضای خارج قسمتی همسانریخت با $\mathbb{C}P^n$ باشد. نشان میدهیم فضای توپولوژیک فشرده مناسب برای بدست آوردن $\mathbb{C}P^n$ کره S^{2n+1} می باشد. برای توجیه این مطلب، ابتدا توجه کنید که

$$S^{2n+1} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2} : \sum_{i=1}^{n+1}(x_i^2 + y_i^2) = 1\}.$$

از طرفی ایزومتری $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ یک ایزومتری

$$(\mathbb{R}^2)^{\times(n+1)} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times(n+1)} = \mathbb{C}^{n+1}$$

بدست میدهد. چون $\mathbb{R}^{2n+2}$ را میتوان با $(\mathbb{R}^2)^{\times(n+1)}$ در نظر گرفت، پس یک ایزومتری

$$\mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{C}^{n+1}$$

در دست داریم. با استفاده از این ایزومتری، میتوان کره S^{2n+1} را به عنوان

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1\}$$

در نظر گرفت. از طرفی توجه کنید که با همین ایزومتری به ازای $n = 0$ داریم

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

توجه کنید که $\mathbb{C}^{n+1}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ می باشد که ضرب اسکالر آن با ضابطه

$$(z, (z_1, \ldots, z_{n+1})) \longmapsto z(z_1, \ldots, z_{n+1}) := (zz_1, \ldots, zz_{n+1})$$

داده شده است. چون $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ پس میتوان ضرب اعضای دایره واحد روی کره را نیز در نظر گرفت. توجه کنید که به ازای دو عدد مختلط ζ و η داریم $|\zeta\eta| = |\zeta||\eta|$. پس اگر $z \in S^1$ و $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^{2n+1}$ آنگاه

$$|z(z_1, \ldots, z_{n+1})| = |(zz_1, \ldots, zz_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n+1} |zz_i|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |z|^2|z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = |(z_1, \ldots, z_{n+1})|.$$

پس میتوان یک رابطه هم ارزی مانند $\sim_{S^1}$ روی S^{2n+1} به این صورت تعریف کرد که

$$\forall v, w \in S^{2n+1}, v \sim_{S^1} w \iff \exists z \in S^1, v = zw.$$

همچنین توجه کنید که میتوان تابع $\eta_n : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ به عنوان ترکیب

$$S^{2n+1} \xrightarrow{i} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{C}}} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/ \sim_{\mathbb{C}}$$

تعریف کرد. در اینجا $\pi_{\mathbb{C}}$ نگاشت خارج قسمتی می باشد. از تعریف نتیجه می شود که η_n یک تابع پیوسته و پوشاست و همچنین $\sim_{S^1} = \sim_{\eta_n}$. حال نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۲.۵.۲۱. *نگاشت η_n یک همسانریختی*

$$\overline{\eta_n} : S^{2n+1}/ \sim_{S^1} \to (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/ \sim_{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}P^n$$

القاء میکند. در حالت خاص فضای $\mathbb{C}P^n$ هاسدورف است.

اثبات. اگر نشان دهیم η_n یک نگاشت خارج قسمتی است، آنگاه القاء شدن همسانریختی $\overline{\eta_n}$ از لم ۲.۵.۱ نتیجه میشود. نشان دادن اینکه η_n خارج قسمتی است را به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار میکنیم. $\square$

نکته مهم دیگر، عبارت است اینکه این فضاها نیز به ازای مقادیر گوناگون n سازگار هستند.

تمرین ۲.۵.۲۲. *نشان دهید جانشانی $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+2}$ به عنوان یک فضای برداری، یک نشاندن*

$$\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^{n+1}$$

القا میکند. در حالت خاص، تصویر $\mathbb{C}P^n$ تحت این نشاندن در $\mathbb{C}P^{n+1}$ بسته است.

در حالت خاص این تمرین به ما اجازه میدهد فضای

$$\mathbb{C}P^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}P^n$$

را تعریف کنیم و آن را با توپولوژی ضعیف در نظر بگیریم. به این فضای توپولوژیک، فضای تصویری مختلط بینهایت بعدی گفته می شود.

در پایان یادآور می شویم که همانند حالت حقیقی، در حالت مختلط نیز $\mathbb{C}P^1$ یک فضای توپولوژیک آشناست.

تمرین ۲.۵.۲۳. *نشان دهید یک همسانریختی $\mathbb{C}P^1 \longrightarrow S^2$ وجود دارد.*

۲.۵.۲ چند پروژه در توپولوژی خارج قسمتی

مفاهیم ارائه شده در این بخش، جزو مطالب مهم و شناخته شده توپولوژی خارج قسمتی می باشند. هدف از بیان این مفاهیم به عنوان پروژه تشویق دانشجویان به انجام تمرین و ریاضیات جدی تر به طور مستقل است تا به این وسیله به درک مفاهیم و ابزار اولیه توپولوژی خارج قسمتی نیز کمک شود.

عمل پیوسته گروههای توپولوژیک

گروه های توپولوژیک جزو مفیدترین و جالب ترین فضاهای توپولوژیک هستند. نکته قوت این اشیاء این است که هم ابزار توپولوژیک و هم ابزار نظریه گروهها برای مطالعه چنین اشیایی در دسترس هستند. هدف این بخش معرفی عمل پیوسته یک گروه توپولوژیک روی یک فضای توپولوژیک و بررسی فضای خارج قسمتی آن است.

تعریف ۲.۵.۲۴. *فرض کنید G یک گروه باشد و T نیز یک توپولوژی روی G باشد. همچنین فرض کنید $m_G : G \times G \to G$ عمل ضرب گروه باشد و $\nu_G : G \to G$ تابعی باشد که هر عضو را به وارونش می برد، یعنی $\nu_G(x) = x^{-1}$. به چهارتایی (G, T, m_G, ν_G) یک گروه توپولوژیک گوییم هرگاه m_G و ν_G توابع پیوسته باشد. در اینجا $G \times G$ با توپولوژی حاصل ضربی در نظر گرفته می شود. اگر توپولوژی و اعمال گروه برایمان واضح باشند، به اختصار خواهیم گفت G یک گروه توپولوژیک است.*

توجه کنید که در تعریف فوق، عمل گروه را ضربی گرفتیم. اما این مطلب نباید مایه اشتباه شود.

مثال ۲.۵.۲۵. *الف. گروه $(\mathbb{R},+)$ وقتی که خط حقیقی توپولوژی اقلیدسی دارد یک گروه توپولوژیک است. پیوستگی $m_{\mathbb{R}}=+$ و $\nu_{\mathbb{R}}$ تقریبا واضح هستند. از تعریف داریم*

$$m_{\mathbb{R}}^{-1}(a,b)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:a<x+y<b\}$$

که یک نوار باز در $\mathbb{R}^2$ می باشد. بوضوح این مجموعه باز است. همچنین

$$\nu_{\mathbb{R}}^{-1}(a,b)=\{-x:x\in(a,b)\}$$

و با حالت بندی میتوان نشان داد که این مجموعه باز می باشد. برای مثال اگر $0<a<b$ آنگاه

$$\nu_{\mathbb{R}}^{-1}(a,b)=(-b,-a)$$

که بوضوح باز می باشد.
ب. عمل جمع $\mathbb{R}^n$ به طور مولفه ای با استفاده از عمل جمع $\mathbb{R}$ تعریف شده است. میتوان براحتی نشان داد که $\mathbb{R}^n$ یک گروه توپولوژیک است.
پ. به طور مشابه میتوان نشان داد $\mathbb{C}^n$ یک گروه توپولوژیک است. همچنین گروه ماتریس های $m\times n$ که با $\mathbb{R}^{m\times n}$ و $\mathbb{C}^{m\times n}$ نمایش داده می شوند، به همراه عمل جمع ماتریسها، گروههای توپولوژیک هستند. این مطلب با یکی گرفتن $\mathbb{R}^{m\times n}$ و $\mathbb{R}^{mn}$ براحتی نشان داده می شود. در مورد نسخه مختلط نیز گزاره مشابه برقرار است.
ت. میتوان نشان داد که $\{0\}-\mathbb{R}$ و $\{0\}-\mathbb{C}$ به همراه عمل ضرب گروه های توپولوژیک هستند. توپولوژی روی این فضاها زیرفضایی می باشد.
ث. با استفاده از عمل ضرب و اینکه ضرب ماتریسها را میتوان بر اساس جمع و ضرب اعداد حقیقی(مختلط) توصیف نمود میتوان نشان داد که گروههای ماتریسهای وارون پذیر(تحت عمل ضرب ماتریسها) یعنی $Gl_n(\mathbb{R})$ و $Gl_n(\mathbb{C})$ نیز گروه های توپولوژیک می باشند. همچنین، با در نظر گرفتن توپولوژی خارج قسمتی، گروههای ماتریسهای وارون پذیر با دترمینان یک، یعنی $Sl_n(\mathbb{R})$ و $Sl_n(\mathbb{C})$ ، گروههای توپولوژیک هستند.

مطلب مهم بعدی معرفی عمل پیوسته یک گروه توپولوژیک روی یک فضای توپولوژیک است.

تعریف ۲.۵.۲۶. *فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک عمل پیوسته G (از چپ) روی X تابع پیوسته*
$$\phi:G\times X\to X$$
است به قسمی که
$$\forall g,g'\in G\forall x\in X, g(g'x)=(gg')x, ex=x.$$
در اینجا $e\in G$ عضو خنثی گروه می باشد. مدار $x\in X$ با

$$Gx:=\{gx:g\in G\}$$

تعریف می شود.

مثالهای زیادی برای عمل گروه می توان ارائه دارد. برای نمونه عمل گروه $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$ که با ضابطه

$$\phi:\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \phi(n,x)=n+x$$

تعریف میشود یک عمل گروه پیوسته است. البته در اینجا $\mathbb{Z}$ دارای توپولوژی گسسته است. پیوستگی عمل هم از پیوسته عمل جمع

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

که در بالا نشاند دادیم و اینکه ϕ را میتوان به صورت ترکیب

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

نوشت بدست می آید.

به عنوان یک مثال دیگر میتوان عمل دایره S^1 روی استوانه $S^1 \times \mathbb{R}$ را به صورت دوران در نظر گرفت. در واقع

$$\phi : S^1 \times (S^1 \times \mathbb{R}) \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}, \phi(g', (g, x)) = (g'g, x)$$

نمایش دهنده این عمل است، و اینکه این یک تابع پیوسته است از اینکه S^1 یک گروه توپولوژیک و نوشتن ϕ به صورت ترکیب چند تابع پیوسته بدست می آید (پیدا کردن چنین ترکیبی به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می شود).

نکته مهم عمل گروه G روی فضای توپولوژیک X این است که یک رابطه هم ارزی روی X القا میکند.

تمرین ۲۷.۵.۲. *فرض کنید گروه G روی فضای توپولوژیک X به طور پیوسته عمل کند. در این صورت رابطه $\sim_G$ تعریف شده با*

$$\forall x, x' \in G, x \sim_G x' \Longleftrightarrow \exists g \in G, x = gx'.$$

در این صورت $\sim_G$ یک رابطه هم ارزی روی X می باشد.

توجه کنید که در این صورت خواهیم داشت $[x] = Gx$. از نماد X/G برای نمایش مجموعه کلاسهای هم ارزی رابطه $\sim_G$ استفاده خواهیم کرد، یعنی

$$X/G = \{Gx : x \in G\}$$

و این مجموعه را با توپولوژی خارج قسمتی در نظر خواهیم گرفت. همچنین از نماد

$$\pi_G : X \longrightarrow X/G$$

برای نمایش نگاشت خارج قسمتی استفاده خواهیم کرد. گاهی اوقات برخی از روابط خارج قسمتی و فضاهای خارج قسمتی متناظر را میتوان به عمل یک گروه نسبت داد.

مثال ۲۸.۵.۲. *عمل گروه $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم*

$$[x] = \mathbb{Z}x = \{n + x : n \in \mathbb{Z}\}$$

و رابطه هم ارزی $\sim_{\mathbb{Z}}$ به صورت زیر در می آید

$$x \sim_{\mathbb{Z}} x' \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} x - x' = n.$$

از طرفی تابع خارج قسمتی $q : \mathbb{R} \to S^1$ با ضابطه $q(t) = e^{(2\pi t)i}$ مثال ۷.۵.۲ را در نظر بگیرید. توجه کنید که q یک تابع متناوب با دوره تناوب 1 می باشد و روی هر بازه (a, b) که $b - a < 1$ یک بیک است. در این صورت رابطه هم ارزی متناظر به q به صورت

$$x \sim_q x' \iff q(x) = q(x') \iff \exists n \in \mathbb{Z}, x - x' = n$$

در خواهد آمد. یعنی

$$x \sim_q x' \iff x \sim_{\mathbb{Z}} x'.$$

پس حداقل از نظر مجموعه ای داریم

$$S^1 \equiv \mathbb{R}/ \sim_q = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

میتوان نشان داد که یک یکسانریختی

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$$

وجود دارد که این مطلب را به عنوان تمرین به عهده خواننده میگذاریم.

حال پروژه مورد نظر این بخش را بیان میکنیم.

پروژه ۱ . نشان دهید فضاهای تصویر $\mathbb{R}P^n$ و $\mathbb{C}P^n$ را میتوان به عنوان فضای خارج قسمتی عمل گروه های مناسبی روی فضاهای توپولوژیک مناسب نوشت.

فضاهای استایفل و گراسمان

هدف در این بخش معرفی دسته ای از فضاهای توپولوژیک، به عنوان نمونه ای دیگر از فضاهای پرمایشی و به عنوان تعمیمی از فضاهای تصویری روی یک میدان نامتناهی است. همچنین یک میدان نامتناهی مانند $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ را در نظر خواهیم گرفت و از ساختار $\mathbb{F}^n$ به عنوان بک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ استفاده خواهیم کرد. ابتدا فضای گراسمان را به عنوان یک مجموعه معرفی میکنیم و در تلاش برای معرفی یک توپولوژی روی این مجموعه فضای گراسمان را مطالعه خواهیم کرد. به عنوان یک مجموعه، به ازای اعداد صحیح نامنفی k, n داریم

$$G_k(\mathbb{R}^{n+k}) = \{V \leqslant \mathbb{R}^{n+k} : \dim_{\mathbb{R}} V = k\}.$$

به این فضای توپولوژیک فضای گراسمان (حقیقی) kـصفحه ها در $\mathbb{R}^{n+k}$ گفته می شود. گاهی از نماد $G_{k,n}$ و گاهی از نماد $Gr_k(\mathbb{R}^{n+k})$ برای نمایش این فضا استفاده می شود. از تعریف واضح است که به عنوان یک مجموعه $\mathbb{R}P^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$. پس حداقل برای مقادیر خاص k و n یک توپولوژی روی $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ وجود دارد. سوال این است که آیا روی همه این فضاها میتوان یک توپولوژی مناسب گذاشت؟ برای پاسخ دادن به این مطلب به تعریف این فضا برمیگردیم. سوال این است که یک زیرفضای k بعدی $\mathbb{R}^{n+k}$ متناظر به چه چیزی است؟ از جبر خطی میدانیم که اگر $V \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ یک چنین زیرفضایی باشد پس باید توسط k بردار مستقل خطی تولید شده باشد. مجموعه $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ را مجموعه همه $(v_1, \ldots, v_k)$ هایی قرار میدهیم که مستقل خطی هستند، یعنی

$$V_k(\mathbb{R}^{n+k}) = \{(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^{n+k} - \{0\})^{\times k} : v_1, \ldots, v_k \text{ مستقل خطی هستند}\}.$$

به این مجموعه یک مجموعه استایفل (Stiefel) گفته میشود و به هر عضو آن یک kـ کنج در $\mathbb{R}^{n+k}$ میگوییم. بنابر تعریف

$$V_k(\mathbb{R}^{n+k}) \subseteq (\mathbb{R}^{n+k} - \{0\})^{\times k} \subseteq (\mathbb{R}^{n+k})^{\times k}$$

که به ما اجازه میدهد از توپولوژی زیر فضایی استفاده کنیم و $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ را به عنوان زیرفضای از $(\mathbb{R}^{n+k})^{\times k}$ در نظر بگیریم. از نماد $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ برای نمایش زیرفضای تولید شده توسط $v_1, \ldots, v_k$ استفاده میکنیم. حال یک رابطه هم ارزی روی $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ به صورت زیر تعریف میکنیم

$$(v_1, \ldots, v_k) \sim (w_1, \ldots, w_k) \Longleftrightarrow \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathrm{Span}\{w_1, \ldots, w_k\}.$$

بررسی اینکه رابطه بالا یک رابطه هم ارزی است واضح می است. بوضوح تابع

$$\begin{cases} \pi : V_k(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \\ \pi((v_1, \ldots, v_k)) = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} \end{cases}$$

یک تابع پوشاست، چون زیرفضای kـ بعدی $\mathbb{R}^{n+k}$ یک پایه متشکل از k بردار در $\mathbb{R}^{n+k}$ دارد). با استفاده از توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط π میتوان $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ را به عنوان فضای خارج قسمتی و π را به عنوان نگاشت خارج قسمتی در نظر گرفت.

پروژه ۲. توجه کنید که $\mathbb{R}^{n+k}$ یک فضای ضرب داخلی است. از نماد $\langle v, w\rangle$ برای نمایش ضرب داخلی استفاده میکنیم. قرار دهید

$$V_k^{\mathrm{ort}}(\mathbb{R}^{n+k}) = \{(v_1, \ldots, v_k \in V_k(\mathbb{R}^{n+k}) : \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}\}$$

و آنرا مجهز به توپولوژی زیر فضایی به عنوان زیر فضایی از $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ بکنید. به اعضای این فضا kـ کنج های متعامد یکه در $\mathbb{R}^{n+k}$ گفته می شود. توجه کنید که قضیه گرام‌ـ‌اشمیت نشان میدهد که

$$\pi|_{V_k^{\mathrm{ort}}(\mathbb{R}^{n+k})} : V_k^{\mathrm{ort}}(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+k})$$

یک نگاشت پوشاست.

الف. نشان دهید این نگاشت یک نگاشت خارج قسمتی است.

ب. نشان دهید که گروه ماتریسهای متعامد $k \times k$ که با $O(k)$ نمایش میدهیم روی $V_k^{\mathrm{ort}}(\mathbb{R}^{n+k})$ عمل میکند و یک همسانریختی

$$V_k^{\mathrm{ort}}(\mathbb{R}^{n+k})/O(k) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+k})$$

وجود دارد.

پروژه ۳. تمام تعریفها و همچنین پروژه قبل را به حالت مختلط تعمیم دهید. توجه کنید در حالت مختلط، گروه $O(k)$ را بایستی با گروه ماتریسهای یکه یعنی $U(k)$ جایگزین نمایید.

۳.۵.۲ مطالبی در مورد روابط هم ارزی

توجه کنید که به ازای هر تابع $f : A \to B$ داریم $A = \bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)$ و در واقع

$$\{f^{-1}(b) : f^{-1}(b) \neq \phi\}_{b\in B}$$

یک افراز A می باشد. بویژه اگر f پوشا باشد، آنگاه به ازای هر $b \in B$ مجموعه $f^{-1}(b)$ ناتهی است، یعنی

$$P := \{f^{-1}(b)\}_{b \in B}$$

یک افراز A می باشد. همچنین یادآوری میکنیم که هر افرازی متناظر به یک رابطه هم ارزی است و برعکس. به اینصورت که اگر P یک افراز مجموعه X باشد آنگاه این افراز متناظر به رابطه هم ارزی $\sim_P$ روی X است به گونه ای که

$$x \sim_P y \Longleftrightarrow \exists A \in P, x, y \in A.$$

به ازای مجموعه X و رابطه هم ارزی $\sim$ روی این مجموعه، به ازای هر $x \in X$ از نماد $[x]$ برای نمایش کلاس هم ارزی x استفاده خواهیم کرد، یعنی

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

همچنین از نماد $X/ \sim$ برای نمایش مجموعه خارج قسمتی (افراز متناظر $\sim$ / مجموعه کلاسهای هم ارزی $\sim$) استفاده خواهیم کرد، یعنی

$$X/ \sim = \{[x] : x \in X\}, [x] = [y] \Longleftrightarrow x \sim y.$$

همچنین

$$\begin{cases} \pi : X \to X/ \sim \\ \pi(x) = [x] \end{cases}$$

تابع خارج قسمتی را نمایش خواهد داد. با این توصیف ها، هر تابع پوشا را میتوان به صورت یک تابع خارج قسمتی متناظر به یک رابطه هم ارزی در نظر گرفت.

تمرین ۲۹.۵.۲. *فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع پوشا باشد. نشان دهید اگر رابطه هم ارزی $\sim_f$ روی A را با ضابطه*

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

تعریف کنیم آنگاه $B = A/ \sim_f$ و $f = \pi : A \to A/ \sim_f$.

یادآوری میکنیم که رابطه هم ارزی و نگاشت خارج قسمتی از یک خاصیت عمومی بودن (Universility) بهره می برد.

لم ۳۰.۵.۲. *فرض کنید $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه X باشد و $f : X \to Z$ یک تابع به قسمی که*

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \sim x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

آنگاه یک تابع مانند $\overline{f} : X/ \sim \to Z$ موجود است به قسمی که $\overline{f} \circ \pi = f$. همچنین
الف. اگر f یک تابع پوشا باشد، آنگاه $\overline{f}$ نیز یک تابع پوشاست.
ب. اگر علاوه بر پوشا بودن f ، به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

آنگاه $\overline{f}$ پوشا و یک بیک است.

گاهی ارجاع به مجموعه ها(فضاها) در بیان تساویهایی مانند $\overline{f} \circ \pi = f$ میتواند بسیار مفید باشد. به این دلیل، با داده شدن نموداری مانند

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\sim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

خواهیم گفت نمودار(گراف جهت دار) فوق جابجایی است، یعنی از هر مسیری از X به Z برویم با هم برابر هستند، یعنی $\overline{f} \circ \pi = f$.

اثبات. تابع $\overline{f} : X/\sim \to Z$ را با ضابطه

$$\overline{f}[x] = f(x)$$

تعریف کنید. توجه کنید که $[x] = \pi(x)$. پس، در صورت خوش تعریف بودن $\overline{f}$ ، بوضوح داریم $\overline{f} \circ \pi = f$. حال نشان میدهیم $\overline{f}$ خوش تعریف است. باید نشان دهیم اگر $y \in X$ باشد به قسمی که $[x] = \pi(y) = \pi(x) = [y]$ آنگاه $\overline{f}[x] = \overline{f}[y]$. بنابر آنچه پیشتر گفته شد داریم

$$[x] = [y] \Longleftrightarrow x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow \overline{f}[x] = f(x) = f(y) = \overline{f}[y].$$

این خوش تعریفی بودن $\overline{f}$ را ثابت میکند.
حال نشان میدهیم اگر f پوشا باشد، آنگاه $\overline{f}$ نیز یک تابع پوشاست. بنابر فرض پوشا بودن $f = \overline{f} \circ \pi$ داریم

$$\forall z \in Z \exists x \in X, z = f(x) = \overline{f} \circ \pi(x) = \overline{f}[x]$$

که نشان دهنده پوشابودن $\overline{f}$ است. این قسمت الف را ثابت میکند. حال به اثبات قسمت ب میپردازیم. توجه کنید که بنابر قسمت الف $\overline{f}$ پوشاست. پس کافیست یک بیک بودن آن را نشان دهیم. برای یک بیک بودن، از فرض $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ استفاده میکنیم. داریم

$$\overline{f}[x_1] = \overline{f}[x_2] \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \sim x_2 \Rightarrow [x_1] = [x_2]$$

که نشان میدهد $\overline{f}$ یک بیک است. $\square$

توجه کنید، همانگونه که پیشتر گفتیم، هر نگاشت پوشا $p : X \to Y$ یک رابطه هم ارزی مانند $\sim_p$ متناظر به افراز $\{p^{-1}(z)\}_{z \in Z}$ روی X القاء میکند به قسمی که

$$x_1 \sim_p x_2 \Longleftrightarrow \exists z \in Z, x_1, x_2 \in p^{-1}(z).$$

با استفاده از این نکته، لم ۲.۵.۳۰ را میتوان به صورت زیر بازنویسی نمود.

لم ۲.۵.۳۱. *فرض کنید $p : X \to Y$ یک تابع پوشا باشد و $f : X \to Z$ تابعی باشد به قسمی که*

$$\exists z \in Z, x_1, x_2 \in p^{-1}(z) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

آنگاه یک تابع مانند $\overline{f}$ موجود است که نمودار زیر جابجایی است

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ Y & & \end{array}$$

همچنین

الف. اگر f پوشا باشد آنگاه $\overline{f}$ نیز پوشاست.

ب. اگر f دارای این خاصیت باشد که به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow \exists z \in Z, x_1, x_2 \in p^{-1}(z)$$

آنگاه $\overline{f}$ یک بیک و پوشاست.

اثبات. با استفاده از تمرین ۲.۵.۲۹ میدانیم که p را میتوان با تابع خارج قسمتی $\pi : X \to X/\sim_p$ یکی گرفت. ادعای مان با استفاده از لم ۲.۵.۳۰ ثابت میشود. $\square$

فصل ۳

فشردگی و همبندی

در فصل ۱ فشردگی و همبندی به اختصار یادآوری شد و نشان داده شد که این ویژگیها تحت همسانریختی ها پایا هستند. این دو ویژگی به اندازه ای مهم هستند که جا دارد بررسی بیشتر آنها در یک فصل مستقل انجام گیرد. به این منظور در این فصل، به بررسی این ویژگیها میپردازیم. همچنین، نسخه موضعی این ویژگیها را نیز بررسی میکنیم. احتمالا، این نخستین بار است که خواننده نمونه هایی از ویژگی های موضعی را مشاهده میکند. همه این خواص در بیان مهم متری پذیری بکار می آیند.

۱.۳ همبندی

در فصل اول، همبندی را به عنوان یک خاصیت توپولوژیک معرفی نمودیم. هدف از این بخش ارائه مثالهای بیشتری و معرفی مفاهیم همبندی موضعی و نیز مولفه های همبندی می باشد. یادآوری میکنیم که

$$X \text{همبند است} \equiv X = U_0 \cup U_1, U_i \subseteq X \text{ باز } \implies U_i \in \{X, \phi\}.$$

مثال ۱.۱.۳. *الف. هر فضای توپولوژیکی X با توپولوژی بیمایه $\mathcal{N}$ همبند است. چون این توپولوژی هیچ باز نابدیهی ندارد.*
ب. هر مجموعه تک عضوی همبند است.
پ. هر مجموعه ناتهی X که $|X| > 1$ به همراه توپولوژی گسسته ناهمبند است. به ازای $x \in X$ مجموعه های $\{x\}$ و $X - \{x\}$ یک جدا سازی برای X می باشد.

مثال ۲.۱.۳. *الف. فضای سرپینسکی $X = \{0, 1\}$ همبند است. برای مشاهده این امر توجه کنید که تنها مجموعه باز نابدیهی در این توپولوژی $U = \{0\}$ می باشد. در حالیکه وجود جداسازی نتیجه میدهد که $X - U = \{1\}$ نیز باید باز باشد. اما در توپولوژی سرپینسکی این درست نیست.*
ب. مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $A \subseteq \mathbb{Q}$ به قسمی که $|A| > 1$. مجموعه A را به همراه

توپولوژی زیرفضایی به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. به ازای دو عضو متمایز a_0, a_1 که $a_0 < a_1$ فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$ به قسمی که $a_0 < \alpha < a_1$. در این صورت $U_0 = (-\infty, \alpha)$ و $U_1 = (\alpha, +\infty)$ دو مجموعه باز در $\mathbb{R}$ هستند. پس $A \cap U_0$ و $A \cap U_1$ در A باز می باشند. همچنین بوضوح $A = (A \cap U_0) \cup (A \cap U_1)$. پس $\{A \cap U_0, A \cap U_1\}$ یک جداسازی برای A در توپولوژی زیرفضایی می باشد. پس A همبند نیست.

مایلیم یادآوری کنیم که در تعریف آنالیزی همبندی معمولا از همبندی زیرمجموعه های یک فضای متریک صحبت می شود. یعنی اگر فضای متریک X را با توپولوژی متریک در نظر بگیریم و $Y \subseteq X$ باشد، آنگاه در مورد همبندی Y بحث میشود که در تعریف ما متناظر به همبندی Y با توپولوژی زیرفضایی خواهد بود.

توجه کنید که لزومی ندارد هر زیرفضای یک فضای همبند، خود تحت توپولوژی زیرفضایی همبند باشد. برای نمونه $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی همبند است (این مطلب را نشان خواهیم داد) اما در مثال ۲.۱.۳ دیدیم که $\mathbb{Q}$ با توپولوژی زیرفضایی همبند نیست. لم زیر حالتی را بررسی میکند که $Y \subseteq X$ و Y همبند است اما X همبند نیست.

لم ۳.۱.۳. *فرض کنید $X = U_0 \cup U_1$ یک جداسازی برای X معین کند و $Y \subseteq X$ با توپولوژی زیرفضایی همبند باشد. در این صورت $Y \subseteq U_0$ یا $Y \subseteq U_1$.*

اثبات. بنابر تعریف جداسازی U_0 و U_1 در X باز هستند. پس $Y \cap U_0$ و $Y \cap U_1$ در Y با توپولوژی زیرفضایی باز هستند. حال اگر $Y \cap U_0 \neq \phi$ و $Y \cap U_1 \neq \phi$ همزمان برقرار باشند، آنگاه

$$X = U_0 \cap U_1 \Rightarrow Y = (Y \cap U_0) \cap (Y \cap U_1)$$

یک جداسازی برای Y بدست میدهد که با همبندی Y در تناقض است. پس $Y \cap U_0 = \phi$ یا $Y \cap U_1 = \phi$ که نشان میدهد $Y \subseteq U_1$ یا $Y \subseteq U_0$. این لم را ثابت میکند. □

پیش از ادامه مطلب یک نمادگذاری مهم انجام میدهیم. به ازای فضای توپولوژیک X و $A \subseteq X$ تعریف کنید

$$\mathrm{cl}_X(A) = \bigcap_{\text{بسته } C \subseteq X, A \subseteq C} C.$$

توجه کنید که اشتراک دلخواه مجموعه های بسته خود بسته است. پس در حالت خاص $\mathrm{cl}_X(A)$ یک مجموعه بسته در X است. در واقع این مجموعه کوچکترین مجموعه بسته X است که شامل A می باشد. به این مجموعه بستار A در X گفته می شود. برای اینکه کاربرد و اهمیت نماد $\mathrm{cl}_X(A)$ مشخص شود فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ و $B = (2, 3]$ باشند که A دارای توپولوژی زیرفضایی در X است. حال براحتی میتوان دید که

$$\mathrm{cl}_A(B) = (2, 3],\ \mathrm{cl}_X(B) = [2, 3].$$

البته وقتی فضای X برای ما معین است، از نماد $\overline{A}$ برای نمایش این مجموعه استفاده میشود.

تمرین ۴.۱.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq Y \subseteq X$. Y را با توپولوژی زیرفضایی در نظر بگیرید. نشان دهید*

$$\mathrm{cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{cl}_X(A).$$

دلیل معرفی بستار در این مرحله کاربرد آن در تعریف آنالیزی همبندی است که در برخی کتابها موجود است. به ازای یک فضای متریک (X,d) و $Y \subseteq X$ مجموعه Y ناهمبند گفته می شود اگر وجود داشته باشند زیر مجموعه های U و V که $U,V \notin \{\phi, Y\}$ و

$$Y = U \cup V,\ \overline{U} \cap V = \phi,\ U \cap \overline{V} = \phi,\ U,V \notin \{\phi, Y\}.$$

مجموعه Y را همبند گویند اگر ناهمبند نباشد. حال نشان میدهیم که این تعریف همبندی از زیرفضاها در مورد فضاهای توپولوژیک، که لزوما متریک پذیر هم نیستند، درست است.

قضیه ۵.۱.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$. آنگاه*

در توپولوژی زیرفضایی ناهمبند است $Y \equiv \exists U,V \subseteq Y, (Y = U \cup V) \wedge (\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \phi) \wedge (U,V \neq \phi).$

در اینجا $\overline{U} = \mathrm{cl}_X(U)$ *و* $\overline{V} = \mathrm{cl}_X(V)$.

اثبات. $(\Rightarrow)$ فرض کنید Y با توپولوژی زیرفضایی ناهمبند باشد. پس وجود دارند مجموعه های $U,V \subseteq Y$ که در Y باز نابدهی هستند و $Y = U \cup V$ و $U \cap V = \phi$. از تساوی $U = Y - V$ نتیجه میشود که U در Y بسته نیز هست (بدلیل مشابه V نیز در Y بسته است). حال چون U در Y بسته است پس $\mathrm{cl}_Y(U) = U$. از طرفی بنابر تمرین ۴.۱.۳ داریم $\mathrm{cl}_Y(U) = Y \cap \mathrm{cl}_X(U)$ که نشان میدهد $Y \cap \mathrm{cl}_X(U) = U$. حال با اشتراک گرفتن از طرفین داریم

$$\mathrm{cl}_X(U) \cap V = (\mathrm{cl}_X(U) \cap V) \cap Y = U \cap V = \phi.$$

بطور مشابه نشان داده میشود که $U \cap \mathrm{cl}_X(V) = \phi$.
$(\Leftarrow)$ فرض کنید $Y = U \cup V$ به قسمی که $U \cap \mathrm{cl}_X(V) = \mathrm{cl}_X(U) \cap V = \phi$ و $U,V \neq \phi$. از طرفین تساوی $Y = U \cup V$ نسبت به $\mathrm{cl}_X(U)$ اشتراک میگیریم. با استفاده از تمرین ۴.۱.۳ خواهیم داشت

$$\mathrm{cl}_Y(U) = Y \cap \mathrm{cl}_X(U) = (U \cup U) \cap \mathrm{cl}_X(U) = U \cap \mathrm{cl}_X(U) = U.$$

این نشان میدهد که U در Y بسته است. بطور مشابه نشان داده میشود که V نیز در Y بسته است. اما چون $Y = U \cup V$ و $U \cap V = \phi$ پس $U = Y - V$ که نشان میدهد U در Y باز نیز هست و بطور مشابه V نیز در Y باز است. پس $Y = U \cup V$ یک جداسازی Y درتو پولوژی زیرفضایی هستند. پس Y در توپولوژی زیرفضایی ناهمبند است. $\square$

توجه کنید از تعریف براحتی نتیحه می شود که اگر $A \subseteq B$ آنگاه

$$\mathrm{cl}_X(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(B).$$

لم ۶.۱.۳. *فرض کنید X یک فضای توپوژیک باشد و $A \subseteq X$ همبند باشد (با توپولوژی زیرفضایی). فرض کنید $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. در این صورت B نیز همبند است.*

توجه کنید اگر توپولوژی ما یک توپولوژی متریک پذیر باشد، آنگاه با استفاده از مفاهیم نقطه حدی، قضیه فوق میگوید اگر تعدادی از نقاط حدی یک مجموعه همبند را به آن اضافه کنیم، مجموعه حاصل همبند خواهد بود.

اثبات. فرض کنیم B همبند نباشد و $B = U \cup V$ یک جداسازی برای B باشد. در اینصورت بنابر لم **۳.۱.۳** خواهیم داشت $A \subseteq U$ یا $A \subseteq V$ فرض کنیم $A \subseteq U$. این نتیجه میدهد که $\overline{A} \subseteq \overline{U}$. از طرفی $B \subseteq \overline{A}$ نشان میدهد که $B \subseteq \overline{U}$. چون $\overline{U} \cap V = \phi$ پس نتیجه میگریم $V = \phi$. اما این خلاف فرض اینست که $B = U \cup V$ یک جداسازی برای B می باشد. پس به تناقض رسیده ایم. پس فرض ناهمبند بودن B نادرست می باشد. پس B همبند است. $\square$

توجه کنید که لم فوق یکی از نتایج لم **۳.۱.۳** می باشد. یکی دیگر از نتایج مفید این لم به شرح زیر می باشد.

لم ۷.۱.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $\{A_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از زیر فضاهای همبند به قسمی که $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$. در اینصورت $\bigcup_{i\in I} A_i$ نیز همبند است.*

اثبات. فرض کنید $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ همبند نباشد و فرض کنید $A = U \cup V$ یک جداسازی باشد. فرض کنید $p \in \bigcap_{i\in I} A_i$. چون $\{p\}$ همبند است، پس بنابر لم **۳.۱.۳** $p \in U$ یا $p \in V$. فرض کنیم $p \in U$. در اینصورت

$$\forall i \in I, A_i \cap U \neq \phi.$$

چون A_i همبند است، بنابر لم **۳.۱.۳**

$$\forall i \in I, A_i \subseteq U \Rightarrow A = \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq U \Rightarrow V = \phi$$

که یک تناقض می باشد. پس A همبند است. $\square$

گام بعدی در مطالعه همبندی، پس از مطالعه رفتار این ویژگی نسبت به زیرفضاها و توپولوژی زیرفضایی، بررسی رفتار این ویژگی تحت توابع پیوسته و توپولوژی های دیگر مانند توپولوژی حاصلضربی می باشد. ابتدا مورد نگاشت های پیوسته را مطالعه میکنیم.

قضیه ۸.۱.۳. *فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد و X همبند باشد. آنگاه $f(X)$ با توپولوژی زیرفضایی همبند است.*

اثبات. با استفاده از گزاره **۵.۲.۲** میتوان تابع پوشای $\widetilde{f} : X \to f(X)$ را در نظر گرفت که $f(X)$ توپولوژی زیرفضایی دارد. اگر $f(X)$ همبند نباشد پس یک جداسازی مانند $f(X) = V_0 \cup V_1$ دارد که V_0 و V_1 در $f(X)$ با توپولوژی زیرفضایی باز هستند. در این صورت به ازای $i = 0, 1$ قرار دهید $U_i = \widetilde{f}^{-1}(V_i)$. بنابر پیوستگی $\widetilde{f}$ مجموعه های U_0 و U_1 در X باز هستند و ازهم جدا و داریم $X = U_0 \cup U_1$. اما این نتیجه میدهد که X یک جداسازی نابدیهی دارد و در نتیجه همبند نیست که یک تناقض است. پس $f(X)$ با توپولوژی زیرفضایی همبند است. $\square$

توجه کنید که با فرض همبند بودن کره S^n نتیجه میشود که فضاهای تصویری $\mathbb{R}P^n$ و $\mathbb{C}P^n$ ، به عنوان فضاهای خارج قسمتی بدست آمده از فضاهای همبند، همبند هستند. بررسی همبند بودن S^n را به بعد موکول میکنیم. گام بعد، بررسی همبندی حاصلضرب دکارتی فضاهای همبند با توپولوژی حاصلضربی است.

قضیه ۹.۱.۳. *فرض کنید X و Y دو فضای همبند باشند. در این صورت $X \times Y$ با توپولوژی حاصلضربی همبند است.*

اثبات. یک نقطه $(a,b) \in X \times Y$ را ثابت در نظر بگیرید. نخست توجه کنید که $X \equiv X \times \{b\}$ و $Y \equiv \{a\} \times Y$. پس $X \times \{b\}$ و $\{a\} \times Y$ همبند می باشند. از طرفی $(a,b) \in (X \times \{b\}) \cap (\{a\} \times Y)$. پس بنابر لم ۷.۱.۳

$$S_{(a,b)} = (X \times \{b\}) \cup (\{a\} \times Y)$$

همبند است. حال توجه کنید که

$$X \times Y = \bigcup_{b \in Y} S_{(a,b)}.$$

توجه کنید که به ازای $b_1, b_2 \in Y$ داریم

$$\{a\} \times Y \subseteq S_{(a,b_1)} \cap S_{(a,b_2)} \Rightarrow \bigcap_{b \in Y} S_{(a,b)} \neq \phi.$$

بنابر لم ۷.۱.۳ $X \times Y = \bigcup_{b \in Y} S_{(a,b)}$ همبند است. این اثبات را تمام میکند. □

اگر همبند بودن $\mathbb{R}$ را دانسته بگیریم، بنابر قضیه بالا به ازای هر $n > 0$ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک فضای همبند است. همچنین میتوان $\mathbb{R}^n$ را با زیرفضای

$$\{(x_i)_{i=1}^{+\infty} \in \mathbb{R}^\infty : i > n \Rightarrow x_i = 0\}$$

یکی گرفت. توجه کنید که این مجموعه یک زیرفضای بسته $\mathbb{R}^\infty$ می باشد. همچنین توجه کنید که بنابر تعریف $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{R}^n$ و اینکه $(0,0,\ldots) \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathbb{R}^n$. پس بنابر لم ۷.۱.۳ فضای $\mathbb{R}^\infty$ با توپولوژی ضعیف یک فضای همبند است.

میتوان نشان داد که قضیه ۹.۱.۳ قابل تعمیم به حاصل ضربهای دلخواه می باشد.

قضیه ۱۰.۱.۳. *اگر $\{X_i\}_{i \in I}$ گردایه ای از فضاهای همبند باشد، آنگاه $\prod_{i \in I} X_i$ با توپولوژی حاصلضربی همبند است.*

اثبات این قضیه به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می شود. در حالت خاص $\mathbb{R}^\omega$ یک فضای همبند است. در مورد توپولوژی جعبه ای میتوان نشان داد که این قضیه درست نیست. در حالت خاص میتوان نشان داد $\mathbb{R}^\omega$ با توپولوژی جعبه ای همبند نیست.

۲.۳ همبندی مسیری

اساس این مفهوم بر همبند بودن هر بازه $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی است. ابتدا این مطلب را نشان میدهیم.

قضیه ۱.۲.۳. *فضای اقلیدسی* $\mathbb{R}$ *همبند است.*

توجه کنید که نگاشت $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ یک همسان ریختی است. پس $(-\pi/2, \pi/2)$ نیز همبند مسیری است. از طرفی نگاشت

$$\begin{cases} l_{a,b} : (0,1) \to (a,b) \\ l_{a,b}(t) = (1-t)a + tb \end{cases}$$

یک همسانریختی بین هر بازه (a,b) و $(0,1)$ است. همچنین به ازای هر بازه باز (c,d) نگاشت

$$l_{c,d} \circ l_{a,b}^{-1} : (a,b) \to (c,d)$$

یک همسانریختی است. پس نتیجه میگریم که هر بازه (a,b) همبند است. همچنین، بنابر لم **۶.۱.۳** نتیجه میگیریم که بازه های $[a,b), (a,b], [a,b]$ نیز همبند هستند.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{R}$ همبند نباشد و $\mathbb{R} = U \cup V$ یک جداسازی برای $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $u \in U$ و $v \in V$. بدون کم شدن از کلیت مساله، فرض کنید $u < v$. مجموعه

$$W = \{x \in \mathbb{R} : [u,x] \subseteq U\}$$

را در نظر بگیرید. این مجموعه دارای کران بالایی مانند v می باشد. از طرفی چون U باز می باشد، پس وجود دارد یک $\delta > 0$ به قسمی که $(u-\delta, u+\delta) \subseteq U$. حال به ازای هر $u < u_1 < u + \delta$ داریم

$$[u, u_1] \subseteq (u-\delta, u+\delta) \subseteq U \Rightarrow u_1 \in W.$$

پس W ناتهی نیز هست. پس دارای کوچکترین کران بالاست، یعنی

$$\exists c \in \mathbb{R}, c = \sup W.$$

چون $\mathbb{R} = U \cup V$ پس $c \in U$ یا $c \in V$. نشان میدهیم که هر کدام از این حالتها به تناقض می انجامد.
حالت $c \in U$. بنابر تعریف کوچکترین کران بالا

$$x < c \Rightarrow [u,x] \subseteq U.$$

با توجه به اینکه $[u,c) = \bigcup_{x<c}[u,x]$ نتیجه میگیریم که $[u,c) \subseteq U$. پس

$$[u,c] = [u,c) \cup \{c\} \subseteq U.$$

از طرفی چون U باز است، پس وجود دارد $\epsilon > 0$ به قسمی که $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subseteq U$. یعنی به ازای هر $c < d < c+\epsilon$ داریم $[u,d] \subseteq U$ پس $d \in W$. اما این کوچکترین کران بالا بودن c را نقض میکند. پس $c \notin U$.
حالت $c \in V$ به شیوه مشابهی به تناقضی می انجامد. این یعنی

$$(c \in \mathbb{R}) \wedge (c \notin U \cup V = \mathbb{R})$$

که یک تناقض است. پس $\mathbb{R}$ همبند است. $\square$

از نماد I برای نمایش بازه بسته $[0,1]$ به همراه توپولوژی زیرفضایی استفاده خواهیم کرد. بنابر قضیه بالا این مجموعه همبند است. یادآوری میکنیم که به ازای فضای توپولوژیک X

$$X \text{ همبند مسیری است } \equiv \forall x_0, x_1 \in X \exists \alpha : I \to X, \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1.$$

تعدادی از فضاهای توپولوژیک مهم همبند مسیری هستند. در ادامه چند مثال ارائه میدهیم. اما نخست یک شیوه ساختن مسیرهای جدید معرفی میکنیم.

اگر $p : I \to X$ و $q : I \to X$ دو مسیر در X باشند که $p(1) = q(0)$ آنگاه ترکیب این دو نگاشتی مانند $p * q : I \to X$ است که با ضابطه

$$(p * q)(t) = \begin{cases} p(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ q(2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

تعریف میشود. با استفاده از لم چسب ۶.۲.۲ براحتی دیده میشود که این یک نگاشت پیوسته است.

مثال ۲.۲.۳. *فرض کنید $x, y \in S^n$ دو نقطه دلخواه باشند. ابتدا فرض کنید $x \neq -y$ و پاره خط واصل بین این دونقطه در $\mathbb{R}^{n+1}$ را در نظر بگیرید که با ضابطه*

$$\begin{cases} l_{x,y} : I \to \mathbb{R}^{n+1} \\ l_{x,y}(t) = (1-t)x + ty \end{cases}$$

مشخص شده است. چون $x \neq -y$ پس این دو نقطه روی یک قطر نیستند، در نتیجه

$$\forall t \in I, l_{x,y}(t) \neq 0.$$

حال نگاشت

$$\begin{cases} a_{x,y} : I \to \mathbb{R}^{n+1} \\ a_{x,y}(t) = \frac{l_{x,y}(t)}{|l_{x,y}(t)|} \end{cases}$$

خوش تعریف است. در اینجا به ازای $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ نماد $|v|$ نشانگر طول v می باشد. بوضوح $a_{x,y}$ یک مسیر از x به y روی S^n است. اگر $x = -y$ آنگاه یک نقطه سوم مانند $z \in S^n - \{x, -x\}$ انتخاب کنید و مسیر $a_{x,z} * a_{z,-x}$ را در نظر بگیرید. این یک مسیر از x به y است. پس کره یک فضای همبند مسیری است.

مثال بعد، یک مثال واضح است، که به عنوان تمرین ارائه میکنیم.

تمرین ۳.۲.۳. *نشان دهید هر زیر مجموعه محدب $C \subseteq \mathbb{R}^n$ با توپولوژی زیرفضایی همبند مسیری است.*

گام بعد این است که نشان دهیم همبند مسیری بودن قوی تر از همبند بودن است.

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند مسیری باشد، آنگاه X همبند نیز هست.*

اثبات. فرض کنید X همبند نباشد و $X = U \cup V$ یک جداسازی برای X باشد. به ازای $u \in U$ و $v \in V$ بنابر همبند مسیری بودن X نگاشت $\alpha : I \to X$ وجود دارد به قسمی که $\alpha(0) = u, \alpha(1) = V$. اما

$$I = \alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(V)$$

یک جداسازی I بدست میدهد. یعنی I همبند نیست که یک تناقض است. پس X همبند نیز هست. $\square$

به عنوان ارائه مثالی از یک فضای توپولوژیک که همبند مسیری نیست، فضای $\mathbb{R} - \{0\}$ را با توپولوژی زیر فضایی در نظر بگیرید. این فضا همبند نیست. پس با استفاده از عکس نقیض قضیه فوق همبند مسیری نیز نیست. همچنین هر فضای توپولوژیک X با توپولوژی گسسته، به قسمی که $|X| > 1$ ، همبند نیست، پس همبند مسیری نیز نیست.

حال مثالی از یک فضای توپولوژیک ارائه میدهیم که همبند هست اما همبند مسیری نیست.

مثال ۵.۲.۳. مجموعه

$$S = \{(x, \sin(1/x) : 0 < x \leqslant 1\}$$

را در نظر بگیرید. این مجموعه نمودار تابع $\alpha : (0,1] \to \mathbb{R}$ *با ضابطه* $\alpha(x) = \sin(1/x)$ *می باشد. این تابع یک تابع پیوسته است. پس اگر* $\beta : (0,1] \to \mathbb{R}^2$ *را با ضابطه*

$$\beta(x) = (x, \alpha(x))$$

تعریف کنیم، آنگاه $S = \beta((0,1])$*. پس بنابر قضیه ۸.۱.۳* S *همبند است. لم ۶.۱.۳ نشان میدهد که* $\overline{S} = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(S)$ *همبند است. نشان میدهیم این مجموعه همبند مسیری نیست. توجه کنید که*

$$\overline{S} = \{0\} \times [-1,1] \cup S.$$

بوضوح هم S *و هم* $\{0\} \times [-1,1] \equiv [-1,1]$ *هر دو همبند مسیری هستند. پس اگر بخواهیم نشان دهیم* $\overline{S}$ *همبند مسیری نیست، باید دو نقطه مثلا* $a \in \{0\} \times [-1,1]$ *و* $b \in S$ *انتخاب کنیم و نشان دهیم که هیچ مسیر* $p : I \to \overline{S}$ *بین این دو نقطه وجود ندارد. نقطه* $(0,0) \in \{0\} \times [-1,1]$ *و یک نقطه دلخواه مثلا* $z \in S$ *را در نظر بگیرید و فرض کنید* $f : [0,1]$ *یک مسیر بین این دو نقطه باشد. نشان میدهیم که این فرض به تناقض می انجامد. توجه کنید که وجود دارد* $t \in [0,1]$ *به قسمی که* $f(t) \in S$*. از طرفی مجموعه*

$$\{t \in [0,1] : f(t) \in \{0\} \times [-1,1]\}$$

یک مجموعه بسته است. پس دارای بزرگترین عضو است، فرض کنید $c \in [0,1]$ *چنین عضوی است. در این صورت*

$$\forall c < t \leqslant 1, f(t) \in S.$$

چون $[c,1]$ *با* $[0,1]$ *همسانریخت است، تحدید* f *به* $[c,1]$ *را در نظر میگیریم و با یک تغییر متغیر آن را به عنوان تابعی مانند* $f : [0,1] \to \overline{S}$ *در نظر میگریم که* $f(0) = (0,0)$ *و*

$$\forall t > 0, f(t) \in S.$$

حال براحتی میتوان دید که این به یک تناقض منجر میشود. مولفه های f را با x و y نشان میدهیم، یعنی

$$f(t) = (x(t), y(t)).$$

حال فرض پیوسته بودن f نتیجه میدهد که

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0) = (0,0) \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} y(t) = y(0) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \sin(1/t) = 0.$$

اما به عنوان یک تمرین بسیار ساده از ریاضی عمومی میدانیم که $\lim_{t\to 0^+} \sin(1/t)$ وجود ندارد. پس $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ وجود ندارد، یعنی f پیوسته نیست. پس هیچ مسیری از $(0,0)$ به $z \in S$ وجود ندارد. این اثبات را تمام میکند.

توجه کنید که مشابه همبندی میتوان در مورد همبند مسیری بودن زیرفضاهای فضاهای همبند مسیری یا همبند مسیری بودن حاصل ضرب فضاهای همبند مسیری بحث نمود. در مورد نخست، توجه کنید که $\mathbb{R} - \{0\}$ یک فضای همبند مسیری نیست، در حالیکه زیرفضای $\mathbb{R}$ است که خود همبند مسیری است. در مورد حاصل ضرب قضیه زیر نتیجه مطلوب را بدست میدهد.

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه از فضاهای همبند مسیری باشد. در این صورت $\prod_{i\in I} X_i$ به همراه توپولوژی حاصلضربی نیز همبند مسیری است.*

اثبات. فرض کنید $a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$. چون X_i همبند مسیری است، پس مسیر $\alpha_i : I \to X_i$ موجود است به قسمی که $\alpha_i(0) = a_i$ و $\alpha_i(1) = b_i$. حال تابع

$$\begin{cases} \alpha : I \to \prod_{i\in I} X_i \\ \alpha(t) = (\alpha_i(t))_{i\in I} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید، یعنی $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$. چون توپولوژی حاصلضربی مورد استفاده است، بنابر قضیه ۱۱.۳.۲ نگاشت α پیوسته است، چون مولفه هایش پیوسته هستند. همچنین داریم $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$. این قضیه را ثابت میکند. $\square$

۳.۳ مولفه های همبندی

فضای $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ را با توپولوژی زیرفضایی به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم. این فضا بوضوح ناهمبند است. از طرفی دو مجموعه $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ همبند هستند. همچنین این دو مجموعه بزرگترین زیرفضاهای همبند X هستند. اگر $f : Y \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد و Y همبند باشد، آنگاه بنابر قضیه ۸.۱.۳ میدانیم که $f(Y)$ یک مجموعه همبند است و بنابر لم ۳.۱.۳

$$f(Y) \subset (-\infty, 0) \text{ یا } f(Y) \subseteq (0, +\infty).$$

پس از دیدگاه کار کردن با نگاشتهای پیوسته، بسیار مفید است اگر بتوان یک فضاهی توپولوژیک داده شده را بتوان به صورت اجتماعی از "بزرگترین" زیرفضاهای همبندش نوشت و خود را محدود به مطالعه نگاشتهای پیوسته بین فضاهای همبند نمود. در این فصل به صورت بندی مساله می پردازیم که با مولفه های همبند بیان میشوند.

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. رابطه $\sim_c$ را روی این فضا با ضابطه*

$$x_0 \sim_c x_1 \Longleftrightarrow \exists C \subseteq X, (\text{همبند است } C) \wedge (x_0, x_1 \in C)$$

آنگاه رابطه $\sim_c$ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات. بازتابی بودن با انتخاب $C = \{x\}$ نشان داده می شود. متقارن بودن رابطه واضح می باشد. برای نشان دادن تعدی فرض کنید $x \sim_c y$ و $y \sim_c z$. آنگاه بنابر تعریف مجموعه های همبند $C_1, C_2 \subseteq X$ موجودند به قسمی که $x, y \in C_1$ و $y, Z \in C_2$. توجه کنید که $y \in C_1 \cap C_2$. بنابر لم **۷.۱.۳** $C_1 \cup C_2$ یک مجموعه همبند است که $x, z \in C_1 \cup C_2$. این نشان میدهد که رابطه $\sim_c$ متعدی است. بنابراین رابطه $\sim_c$ یک رابطه هم ارزی است. $\square$

اگر $C \subseteq X$ یک کلاس هم ارزی رابطه $\sim_c$ باشد به آن یک مولفه همبندی X خواهیم گفت.

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنید C یک مولفه همبندی فضای توپولوژیک X باشد و*

$$X \bigcup_{C \in X/\sim_c} C$$

یعنی اجتماع مولفه های همبندی باشد. در این صورت اگر $A \subseteq X$ همبند باشد آنگاه یک مولفه همبندی منحصر بفرد موجود است که $A \subseteq C$. همچنین هر مولفه همبندی خود یک زیرفضای همبند است.

اثبات. فرض کنید $A \subseteq X$ همبند باشد و مولفه های همبندی C_1, C_2 وجود داشته باشند که

$$A \cap C_1 \neq \phi \Rightarrow \exists x_1 \in A \cap C_1$$

و

$$A \cap C_2 \neq \phi \Rightarrow \exists x_2 \in A \cap C_2.$$

حال چون $x_1, x_2 \in A$ و A همبند است پس $x_1 \sim_c x_2$. یعنی

$$C_1 \cap C_2 \neq \phi \Rightarrow C_1 = C_2.$$

از طرفی $A \subseteq X$ و A میتواند فقط با یکی از مولفه های همبندی اشتراک داشته باشد، پس یک مولفه همبندی یکتا مانند C وجود دارد که $A \subseteq C$. برای نشان دادن همبندی مولفه های همبندی، فرض کنید C یک مولفه همبندی باشد. اگر $|C| = 1$ آنگاه قضیه واضح است. پس فرض کنیم $|C| > 1$. حال یک $x \in C$ را ثابت در نظر بگیرید. بنابر تعریف، به ازای هر $z \in C$ وجود دارد مجموعه همبند A_z به قسمی که $x, z \in A_z$. از طرفی بنابر آنچه بالا گفتیم

$$A_z \cap C \neq \phi \Rightarrow A_z \subseteq C.$$

اما $x \in \bigcap_{z \in C - \{x\}} A_z$ یعنی $\bigcap_{z \in C - \{x\}} A_z \neq \phi$. پس بنابر لم **۷.۱.۳**

$$C = \bigcup_{z \in C} A_z$$

همبند است. $\square$

حال از تعریف کلاس هم ارزی و قضیه فوق، نتیجه زیر واضح است.

نتیجه ۳.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. آنگاه*

$$X = \bigcup_{C \in X/\sim_c} C$$

یک افراز X به مجموعه های همبند است به قسمی که اگر $A \subseteq X$ همبند باشد، آنگاه یک $C \in X/\sim_c$ منحصربفرد موجود است به قسمی که $A \subseteq C$.

توجه کنید که در مثال $X = \mathbb{R} - \{0\}$ هر دو مولفه همبندی $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ هم در X باز هستند و هم بسته. یک مساله مهم این است که آیا این گزاره در حالت کلی درست است یا نه؟

گزاره ۴.۳.۳. *الف. هر مولفه همبندی یک فضای توپولوژیک X یک زیر مجموعه بسته از X است.*
ب. اگر تعداد مولفه های همبندی X متناهی باشد، یعنی $|X/\sim_c| < \infty$ ، آنگاه هر مولفه همبندی در X باز نیز هست.

اثبات. الف. فرض کنیم C یک مولفه همبندی X باشد. بنابر لم ۶.۱.۳ $\overline{C}$ نیز همبند است. از طرفی $C \cap \overline{C} \neq \phi$.
بنابر نتیجه ۳.۳.۳ $\overline{C} \subseteq C$. اما چون $C \subseteq \overline{C}$ این نشان میدهد که $C = \overline{C}$. پس C در X بسته است.
به ازای هر $C \in X/\sim_c$ داریم

$$C = X - (\bigcup_{D \in (X/\sim_c) - \{C\}} D).$$

چون $|X/\sim_c| < \infty$ پس $\bigcup_{D \in (X/\sim_c) - \{C\}} D$ اجتماع تعداد متناهی مجموعه بسته، و در نتیجه خود بسته است.
پس C به عنوان متمم یک مجموعه بسته باز نیز هست. $\square$

حال نسخه موضعی همبندی را معرفی میکنیم. شرط همبند موضعی بودن بسیار شرط مفید و کارسازی در بدست آوردن نتایج محاسباتی می باشد.

تعریف ۵.۳.۳. *فضای توپولوژیک X را در $x \in X$ همبند موضعی گویند هرگاه*

$$\forall U \subseteq X \text{ باز}, x \in U \Rightarrow \exists V \subseteq X \text{ باز و همبند}, x \in V \subseteq U.$$

فضای X را همبند موضعی گوییم هرگاه در هر $x \in X$ موضعا همبند باشد.

مثال ۶.۳.۳. *الف. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی را در نظر بگیرید و فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$. به ازای هر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ که شامل x باشد، بنابر تعریف باز بودن در فضای متریک وجود دارد $\epsilon > 0$ به قسمی که $B_d(x, \epsilon) \subseteq U$. از طرفی هر گوی باز چون محدب نیز هست، همبند مسیری نیز هست. پس $\mathbb{R}^n$ موضعا همبند است. این فضا البته همبند نیز هست.*
ب. فضای $X = \mathbb{R} - \{0\}$ همبند نیست. از طرفی مشابه مثال قسمت الف میتوان نشان داد که موضعا همبند است.
پ. خم توپولوژیست ها همبند هست، اما موضعا همبند نیست (در صورت موضعا همبند بودن قضیه بعد نقض میشود).
ت. مجموعه $\mathbb{Q}$ نه همبند است و نه موضعا همبند.

توجه کنید که به ازای فضای توپولوژیک X و $A \subseteq X$ میتوان از مولفه های همبندی A در X صحبت کرد.

قضیه ۷.۳.۳. *فضای توپولوژیک X موضعا همبند است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز $U \subseteq X$ مولفه های U در X باز باشند.*

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم X موضعا همبند باشد و U یک مجموعه باز باشد. همچنین فرض کنیم C یک مولفه U باشد و $x \in C$. چون X موضعا همبند است، پس مجموعه باز همبند V_x موجود است که $x \in V_x \subseteq U$. از طرفی چون V_x همبند است و $V_x \cap C \neq \phi$ پس $V_x \subseteq C$. نتیجه میگیریم

$$C = \bigcup_{x \in C} V_x$$

که اجتماعی از مجموعه های باز است. پس C باز است.
$(\Rightarrow)$ فرض کنیم کنید $x \in X$ و U یک مجموعه باز شامل x باشد. بنابر فرض مولفه هایU در X باز هستند، پس آن مولفه ای را که شامل x است را به عنوان V انتخاب کنید. این نشان میدهد که X موضعا همبند است. □

نکته مهم بعد اینست که وقتی فضای ما موضعا همبند باشد، میتوان نشان داد که هر مولفه همبندی باز نیز هست.

لم ۸.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای همبند موضعی باشد. آنگاه هر مولفه همبندی X یک مجموعه باز در X است.*

اثبات. فرض کنید C یک مولفه همبندی X باشد و $x \in C$. چون X موضعا همبند است، به ازای مجموعه باز دلخواه $U \subseteq X$ که شامل x باشد، مجموعه باز و همبند V_x وجود دارد که $x \in V_x \subseteq U$. از طرفی V_x همبند است و $V_x \cap C \neq \phi$. پس بنابر قضیه ۲.۳.۳ $V_x \subseteq C$. پس به ازای هر $x \in C$ مجموعه بازی مانند V_x موجود است که $x \in V_x \subseteq C$. پس

$$C = \bigcup_{x \in C} V_x$$

خود یک مجموعه باز است. این اثبات را تمام میکند. □

قضیه ۹.۳.۳. *فضای توپولوژیک X را در نظر بگیرید. رابطه $\sim_p$ را به صورت زیر تعریف کنید*

$$\forall x_0, x_1 \in X, x_0 \sim_p x_1 \iff \exists p : I \to X \text{ پیوسته } , (p(0) = x_1) \wedge (p(1) = x_1).$$

آنگاه رابطه $\sim_p$ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات. بازتابی بودن. به ازای $x \in X$ وجود مسیر ثابت $c_x : I \to X$ با ضابطه $c_x(t) = x$ نشان میدهد که $x \sim_p x$
.
متقارن بودن. فرض کنید $x_0 \sim_p x_1$. پس یک مسیر $p : I \to X$ وجود دارد که $p(0) = x_1$ و $p(1) = x_1$. حال تعریف کنید

$$\begin{cases} -p : I \to X \\ (-p)(t) = p(1-t). \end{cases}$$

در اینصورت $p-$ یک مسیر است به قسمی که $(-p)(0) = p(1) = x_1$ و $(-p)(1) = p(0) = x_0$. پس $x_1 \sim_p x_1$.
متعدی بودن. فرض کنیم $x \sim_p y$ و $y \sim_p z$. پس وجود دارند مسیرهای p و q در X به قسمی که

$$p(0) = x, p(1) = q(0) = y, q(1) = z.$$

حال مسیر $p * q : I \to X$ مسیری است که بر اساس آن $x \sim_p z$.
برقراری سه ویژگی بالا نشان میدهد که رابطه $\sim_p$ یک رابطه هم ارزی است. $\square$

تمرین ۱۰.۳.۳. *نشان دهید به ازای فضای توپولوژیک X و $x_0, x_1 \in X$*

$$x_0 \sim_p x_1 \iff \exists P \subseteq X \text{همبند مسیری}, x_0, x_1 \in P.$$

قضیه ۹.۳.۳ به ما اجازه میدهد از کلاسهای هم ارزی رابطه $\sim_p$ سخن به میان آورد. از اصطلاح مولفه های مسیری برای این کلاسهای هم ارزی استفاده خواهیم نمود. در حالت خاص رابطه $\sim_p$ از نماد معمول $\pi_0(X)$ برای نمایش مجموعه کلاسهای هم ارزی یا $X/\sim_p$ استفاده می شود. چون $\sim_p$ یک رابطه هم ارزی است، پس افراز متناظر به آن را داریم، یعنی

$$X = \bigcup_{P \in \pi_0(X)} P.$$

قضیه ۱۱.۳.۳. *فرض کنید C یک مولفه مسیری فضای توپولوژیک X باشد و*

$$X = \bigcup_{C \in \pi_0(X)} P$$

یعنی اجتماع مولفه های همبندی باشد. در این صورت اگر $A \subseteq X$ همبند مسیری باشد آنگاه یک مولفه همبندی منحصر بفرد موجود است که $A \subseteq C$. همچنین هر مولفه مسیری خود یک همبند مسیری است.

پیش از اثبات، حکمی را که مشابه آن را برای همبندی بیان کرده بودیم، یادآوری میکنیم و اثبات آنرا به خواننده وامیگذاریم.

لم ۱۲.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $\{A_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای همبند مسیری که اشتراک همه آنها ناتهی است، یعنی $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$. در این صورت $\bigcup_{i\in I} A_i$ همبند مسیری است.*

اثبات. فرض کنید $A \subseteq X$ همبندمسیری باشد و مولفه های مسیری C_1, C_2 وجود داشته باشند که

$$A \cap C_1 \neq \phi \Rightarrow \exists x_1 \in A \cap C_1$$

و

$$A \cap C_2 \neq \phi \Rightarrow \exists x_2 \in A \cap C_2.$$

حال چون $x_1, x_2 \in A$ و A همبندمسیری است پس $x_1 \sim_p x_2$. یعنی

$$C_1 \cap C_2 \neq \phi \Rightarrow C_1 = C_2.$$

از طرفی $A \subseteq X$ و A میتواند فقط با یکی از مولفه های همبندی اشتراک داشته باشد، پس یک مولفه مسیری یکتا مانند C وجود دارد که $A \subseteq C$. نشان دادن همبندمسیری بودن مولفه ها مسیری تقریبا واضح است و از تعریف همبند مسیری بودن و کلاس هم ارزی یک رابطه هم ارزی نتیجه میشود. نوشتن جزییات را به عنوان تمرین به خواننده وامیگذاریم. $\square$

حال از تعریف کلاس هم ارزی و قضیه فوق، نتیجه زیر واضح است.

نتیجه ۱۳.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. آنگاه*

$$X = \bigcup_{C\in\pi_0(X)} P$$

یک افراز X به مجموعه های همبندمسیری است به قسمی که اگر $A \subseteq X$ همبند مسیری باشد، آنگاه یک $P \in \pi_0(X)$ منحصربفرد موجود است به قسمی که $A \subseteq C$.

گام بعدی، معرفی نسخه موضعی همبندی مسیری است.

تعریف ۱۴.۳.۳. *فضای توپولوژیک X را در $x \in X$ موضعا همبندمسیری گوییم هرگاه*

$$\forall U \subseteq X \text{باز} , x \in U \Rightarrow \exists V \subseteq X \text{باز و همبندمسیری} , x \in V \subseteq U.$$

فضای X را موضعا همبندمسیری گوییم هرگاه در هر $x \in X$ موضعا همبندمسیری باشد.

مثال ۱۵.۳.۳. *الف. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی را در نظر بگیرید و فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$. به ازای هر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ که شامل x باشد، بنابر تعریف باز بودن در فضای متریک وجود دارد $\epsilon > 0$ به قسمی که $B_d(x, \epsilon) \subseteq U$. از طرفی هر گوی باز چون محدب نیز هست، همبند مسیری نیز هست. پس $\mathbb{R}^n$ موضعا همبندمسیری است. این فضا البته همبندمسیری نیز هست.*
ب. فضای $X = \mathbb{R} - \{0\}$ همبند نیست. همبندی مسیری نیست. اما مشابه مثال قسمت الف میتوان نشان داد که موضعا همبند است.
پ. خم توپولوژیست ها همبند هست، همبندمسیری نیست، اما موضعا همبندمسیری است.

توجه کنید که به ازای فضای توپولوژیک X و $A \subseteq X$ میتوان از مولفه های مسیری A در X صحبت کرد. قضیه زیر را پیشتر برای فضاهای موضعا همبند بیان کرده بودیم. حال نسخه آن برای فضاهای همبند مسیری را بیان میکنیم.

قضیه ۱۶.۳.۳. *فضای توپولوژیک X موضعا همبندمسیری است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز $U \subseteq X$ مولفه های U در X باز باشند.*

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم X موضعا همبندمسیری باشد و U یک مجموعه باز باشد. همچنین فرض کنیم P یک مولفه U باشد و $x \in P$. چون X موضعا همبندمسیری است، پس مجموعه باز همبندمسیری V_x موجود است که $x \in V_x \subseteq U$. از طرفی چون V_x همبندمسیری است و $V_x \cap P \neq \phi$ پس $V_x \subseteq P$. نتیجه میگیریم

$$P = \bigcup_{x\in C} V_x$$

که اجتماعی از مجموعه های باز است. پس P باز است.
$(\Rightarrow)$ فرض کنیم کنید $x \in X$ و U یک مجموعه باز شامل x باشد. بنابر فرض مولفه های U در X باز هستند، پس آن مولفه ای را که شامل x است را به عنوان V انتخاب کنید. این نشان میدهد که X موضعا همبند است. $\square$

لم ۱۷.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای موضعا همبندمسیری باشد. نشان دهید هر مولفه مسیری X یک مجموعه باز در X است.*

اثبات. اثبات مشابه اثبات لم ۸.۳.۳ می باشد. جزییات اثبات را به خواننده واگذار میکنیم. $\square$

نکته پایانی در این مبحث، بررسی رابطه بین موضعا همبند بودن و موضعا همبندمسیری بودن است.

قضیه ۱۸.۳.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.*
الف. به ازای هر مولفه مسیری X مانند P یک مولفه همبندی یکتا مانند C وجود دارد که $P \subseteq C$.
ب. اگر X موضعا همبندمسیری باشد آنگاه مولفه های همبندی و مولفه های مسیری X یکی هستند.

اثبات. الف. اگر P یک مولفه مسیری باشد، آنگاه همبند مسیری و در نتیجه همبند است. پس بنابر قضیه ۲.۳.۳ یک مولفه همبندی یکتا مانند C موجود است که $P \subseteq C$.
ب. فرض کنیم X موضعا همبند مسیری باشد و P و C به ترتیب مولفه های مسیری و همبندی که $P \subseteq C$. نشان میدهیم $P = C$. فرض کنیم $P \neq C$. حال

$$\forall x \in C - P \ \exists P_x \in \pi_0(X) - \{P\}, x \in P_x \subseteq C.$$

پس

$$C = P \cup \Big(\bigcup_{x \in C-P} P_x \Big).$$

از طرفی بنا بر لم ۱۷.۳.۳ در فضاهای همبند موضعی مولفه های مسیری باز هستند، پس هم P و هم P_x ها در X باز هستند. پس C را به صورت اجتماع دو مجموعه باز جدا از هم نوشته ایم، یعنی یک جداسازی برای یک مجموعه همبند بدست آورده ایم. این یک تناقض است. پس $P = C$. $\square$

۴.۳ فشردگی

هدف ما در این بخش مطالعه بیشتر ویژگی فشردگی می باشد. یادآوری میکنیم که فضای توپولوژیک X را فشرده گویند هرگاه هر پوشش باز آن شامل یک زیرپوشش متناهی باشد. ابتدا چند مثال بدیهی بیان میکنیم.

مثال ۱.۴.۳. *الف. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و متناهی باشد، یعنی وجود دارد $n > 0$ به قسمی که $|X| = n$. در این صورت هر توپولوژی T روی X تعداد متناهی، حداکثر 2^n ، عضو دارد. پس هر پوشش باز X یک مجموعه متناهی و هر زیر مجموعه آن نیز یک مجموعه متناهی. پس هر مجموعه متناهی با هر توپولوژی ممکن فشرده است.*
ب. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد و T یک توپولوژی روی X به قسمی که $|T| = n < \infty$. با استدلالی مشابه استدلال قسمت الف. میبینیم که (X, T) یک فضای فشرده است.

گام دوم ارائه چند مثال از فضاهای توپولوژیک است که فشرده نیستند.

مثال ۲.۴.۳. *الف. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ فشرده نیست. برای نشان دادن این مطلب باید یک پوشش باز بیابیم که شامل هیچ زیرپوشش متناهی نباشد. برای نمونه $\mathcal{U} = \{(-r, r) : r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ را در نظر بگیرید. بوضوح داریم $\mathbb{R} = \bigcup_{r>0}(-r, r)$. اما اگر این پوشش شامل یک زیر پوشش متناهی باشد، یعنی وجود دارند $r_1, \ldots, r_n > 0$ به قسمی که*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n}(-r_i, r_i).$$

فرض کنید $r_M = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. این نتیجه میدهد که $\mathbb{R} = (-r_M, r_M)$. این تساوی از جهات مختلف حاوی تناقض است. برای نمونه $r_M \in \mathbb{R}$ ولی $M \notin (-r_M, r_M)$ که تناقض است. پس $\mathcal{U}$ شامل هیچ زیرپوشش متناهی نیست. پس $\mathbb{R}$ با توپولوژی متریک فشرده نیست.
ب. با تعمیم مثال فوق میتوان نشان داد که فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک فضای فشرده نیست. برای نمونه پوشش $\{B_d(x, r) : r > 0\}$ را که d نمایانگر متریک اقلیدسی و $x \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه دلخواه ثابت است را در نظر بگیرید. میتوان نشان داد که این پوشش شامل هیچ زیرپوشش متناهی نیست.
پ. هر مجموعه X نامتناهی با توپولوژی گسسته فشرده نیست. برای نمونه پوشش $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in X\}$ یک پوشش باز است که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. چون وجود زیرپوشش متناهی برای این پوشش نتیجه خواهد داد که X متناهی است که خلاف فرض است.

برای ارائه مثالهای بیشتر، مایلیم از فضاهای متریک و توپولوژی متریک کمک بگیریم. نخست یادآوری میکنیم که در یک فضای متریک (X, d) زیرمجموعه $A \subseteq X$ را فشرده میگفتیم هرگاه به ازای هر گردایه $\{U_i\}_{i\in I}$ از زیر مجموعه های باز در X به قسمی که $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ وجود داشته باشند $n > 0$ و $i_1, \ldots, i_n \in I$ به قسمی که

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}.$$

توجه کنید که در این تعریف، بر خلاف تعریف فشردگی، زیرمجموعه بودن استفاده شده است و نه تساوی! سوال اینست که تفاوت در این دو تعریف چگونه توجیه میشود؟ لم زیر به این مطلب پاسخ میدهد.

لم ۳.۴.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در اینصورت $K \subseteq X$ در توپولوژی زیرفضایی فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر گردایه $\{U_i\}_{i\in I}$ از زیر مجموعه های باز در X به قسمی که $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ وجود داشته باشند $n > 0$ و $i_1, \ldots, i_n \in I$ به قسمی که*

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}.$$

توجه کنید که براساس لم بالا، اگر در فضای متریک (X, d) توپولوژی متریک T_d را در نظر بگیریم آنگاه تعریف آنالیزی فشردگی $K \subseteq X$ معادل فشردگی K در توپولوژی زیرفضایی $T_d|_K$ می باشد.

اثبات. فرض کنید K در توپولوژی زیرفضایی فشرده باشد و $\{U_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از زیرمجموعه های باز در X باشد به قسمی که $K\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$. در این صورت

$$K=K\cap\bigcup_{i\in I}U_i=\bigcup_{i\in I}(K\cap U_i).$$

توجه کنید که $K\cap U_i$ در توپولوژی زیرفضایی K باز میباشد، یعنی $\{K\cap U_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز برای K در توپولوژی زیرفضایی میباشد. چون K در توپولوژی زیرفضایی فشرده است، بنابر تعریف فشردگی وجود دارند $n>0$ و $i_1,\ldots,i_n\in I$ به قسمی که

$$K=\bigcup_{j=1}^{n}(K\cap U_{i_j})\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}.$$

این ادعای ما را در یک جهت ثابت میکند.
در جهت برعکس، فرض کنید $\mathcal{V}=\{V_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز K در توپولوژی زیرفضایی باشد. میخواهیم نشان دهیم این پوشش یک زیرپوشش متناهی دارد. این فشرده بودن K در توپولوژی زیرفضایی را نشان خواهد داد. چون V_i در توپولوژی زیرفضایی باز است، پس مجموعه باز U_i در X وجود دارد به قسمی که $V_i=K\cap U_i$. حال داریم

$$K=\bigcup_{i\in I}V_i=\bigcup_{i\in I}(K\cap U_i)=K\cap(\bigcup_{i\in I}U_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i.$$

بنابرفرض، وجود دارند $n>0$ و $i_1,\ldots,i_n\in I$ به قسمی که $K\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}$. این نشان میدهد که

$$K=K\cap(\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j})=\bigcup_{j=1}^{n}(K\cap U_{i_j})=\bigcap_{j=1}V_{i_j}.$$

یعنی $\mathcal{V}_1=\{V_{i_j}:j=1,\ldots,n\}$ یک زیرپوشش متناهی $\mathcal{V}$ در توپولوژی زیرفضایی می باشد. این ادعای ما را ثابت میکند. $\square$

حال با داشتن این لم می توانیم از دانسته های خود در مورد زیرمجموعه های فشرده فضاهای متریک استفاده کنیم. برای نمونه یادآوری میکنیم که براساس قضیه Heine-Borel مجموعه $K\subseteq\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و تنها اگر K بسته و کراندار باشد. این قضیه مثالهای خوبی بدست می دهد.

مثال ۴.۴.۳. *کره*

$$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|=1\}$$

به عنوان زیرفضایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ یک مجموعه بسته و کراندار می باشد. پس فشرده است.

توجه کنید چنین قضیه ای لزوما در هرفضای متریک درست نیست و نتیجه اینکه لزوما در هر فضای توپولوژیک نیز درست نیست. اما یک نتیجه ضعیف تر که شبیه صورت قضیه Heine-Borel در یک جهت است، در هر فضای توپولوژیک که خود فشرده است برقرار میباشد.

قضیه ۵.۴.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد و $C\subseteq X$ یک مجموعه بسته. آنگاه C با توپولوژی زیرفضایی فشرده است.*

اثبات. از لم ۳.۴.۳ استفاده می کنیم. توجه کنید چون C بسته است پس $U = X - C$ باز است. فرض کنید $\{U_i\}_{i\in I}$ گردایه اس از مجموعه های باز در X باشد که $C \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. در اینصورت

$$X = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cup U.$$

یعنی

$$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I} \cup \{U\}$$

یک پوشش باز برای X است. چون X فشرده است پس این پوشش شامل یک زیرپوشش متناهی مانند

$$\mathcal{U}_1 = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$$

برای X است که میتواند شامل $U = X - C$ هم باشد. در نتیجه

$$\mathcal{U}_1 - \{U\} \subseteq \{U_i\}_{i\in I}$$

گردایه ای متناهی از مجموعه های باز است که C را میپوشانند. یعنی

$$C \subseteq \bigcup_{V\in\{U_i\}_{i\in I}} V$$

و این اثبات را تمام میکند. □

ورای تفاوتهای بسیار بین صورت این قضیه و قضیه Heine-Borel توجه داشته باشید که شرط کرانداری اصلا خود را در بیان این قضیه نشان نمیدهد. اما این نکته طبیعی نیز هست، چون کرانداری یک مفهوم آنالیزی است و لزوما در هر فضای توپولوژیک تعریف نشده است. عکس قضیه فوق در حضور شرط هاسدورف بودن برقرار است.

قضیه ۶.۴.۳. *فرض کنید X یک فضای هاسدورف باشد و $K \subseteq X$ یک فضای فشرده. در این صورت K در X بسته است.*

اثبات. نشان میدهیم $X - K$ باز است و برای اینکار نشان میدهیم به ازای هر $x \in X - K$ یک مجموعه باز $U_x \subseteq X$ وجود دارد که $U_x \subseteq X - K$. این نشان خواهد داد که

$$X = \bigcup_{x\in X-K} U_x$$

یعنی $X - K$ را میتوان به صورت اجتماعی از مجموعه های باز نوشت که نشان دهنده باز بودن $X - K$ و در نتیجه بسته بودن K می باشد. برای نشان دادن این مطلب $x \in X - K$ را ثابت در نظر بگیرید. به ازای $y \in K$ بنابر هاسدورف بودن X، مجموه های باز $U_y, V_y \subseteq X$ وجود دارند به قسمی که

$$x \in U_y,\ y \in V_y, U_y \cap V_y = \phi.$$

حال $\{V_y\}_{y\in K}$ در این شرط صدق میکند که $K \subseteq \bigcup_{y\in K} V_y$. چون K با توپولوژی زیرفضایی فشرده است پس وجود دارد $n_x > 0$ و $v_{y_1}, \dots, V_{y_{n_x}}$ به قسمی که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{y_i}$. حال قرار دهید

$$U_x = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_{n_x}}$$

که به عنوان اشتراک تعداد متناهی مجموعه باز، خود باز است. همچنین بوضوح $U_x \cap (\bigcup_{i=1}^{n_x} V_{y_i}) = \phi$ که نشان میدهد $U_x \subseteq X - K$. این اثبات را تمام میکند. □

اثبات لم بالا از نظر تکنیک بکار رفته بسیار حائز اهمیت است. یکی نتیجه مهم که در بطن اثبات فوق بدست آمد یکی از اصول جداسازی به نام منظم بودن می باشد. بدلیل اهمیت این نتیجه آن را به صورت مستقل بیان میکنیم.

لم ۷.۴.۳. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $K \subseteq X$ یک فضای فشرده. آنگاه به ازای هر $x \in X - K$ مجموعه های باز $U, V \subseteq X$ وجود دارند به قسمی که $x \in U$ و $K \subseteq V$ و $U \cap V = \phi$.*

نکته بعدی، رفتار فشردگی تحت نگاشتهای پیوسته است.

قضیه ۸.۴.۳. *فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد و X فضای توپولوژیک فشرده. آنگاه $f(X)$ با توپولوژی زیرفضایی فشرده است.*

اثبات. فرض کنیم $\{V_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از مجموعه های باز در Y باشد به قسمی که $f(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. بنابر لم ۳.۴.۳ کافیست نشان دهیم وجود دارند $n > 0$ و $i_1, \ldots, i_n \in I$ به قسمی که $f(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$. چون f پیوسته است پس $\{f^{-1}(V_i)\}$ یک گردایه از مجموعه های باز در X می باشد. حال داریم

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

چون X فشرده است پس وجود دارد $n > 0$ و $i_1, \ldots, i_n \in I$ به قسمی که $X = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(V_i)$. این نتیجه میدهد که

$$f(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$$

که ادعای ما را ثابت میکند. $\square$

به عنوان کاربردی از این مثال یادآوری میکنیم که میتوان فضای تصویری $\mathbb{R}P^n$ را به عنوان فضای خارج قسمتی $S^n/\sim$ تعریف کرد که در آن $x \sim -x$. حال نگاشت خارج قسمتی $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ یک نگاشت پوشا و پیوسته است. بنابر مثال ۴.۴.۳ کره S^n فشرده است. پس $\mathbb{R}P^n = \pi(S^n)$ نیز با توپولوژی خارج قسمتی یک فضای توپولوژیک فشرده است.
یادآوری میکنیم که هر نگاشت یک بیک و پوشا لزوما یک همسانریختی نیست. به عنوان یکی از کاربردهای دیگر قضیه ۸.۴.۳ خواهیم دید که اگر دامنه و همدامنه نگاشت در شرایط خاصی صدق بکنند چنین اتفاقی یک امر طبیعی است. قضیه زیر صورت دقیق این مساله را بیان میکند.

قضیه ۹.۴.۳. *فرض کنید $f : X \to Y$ یک نگاشت پوشا و یک بیک باشد. اگر X فشرده و Y هاسدورف باشد، آنگاه f یک همسانریختی است.*

اثبات. کافیست نشان دهیم f^{-1} پیوسته است. از بیان پیوستگی براساس مجموعه های بسته استفاده میکنیم. بنابر لم ۶.۲.۱ کافیست نشان دهیم اگر $C \subseteq X$ بسته باشد، آنگاه $(f^{-1})^{-1}(C) \subseteq Y$ نیز بسته است. بنابرفرض X فشرده است. چون f یک بیک و پوشاست پس

$$(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$$

و کافیست نشان دهیم اگر C بسته باشد، آنگاه $f(C)$ نیز بسته است. بنابر قضیه ۵.۴.۳ اگر C در X بسته یاشد آنگاه نیز فشرده هست. پس $f(C) \subseteq Y$ فشرده است. چون Y هاسدورف است، بنابرقضیه ۶.۴.۳ $f(C)$ بسته است. این اثبات را تمام میکند. $\square$

مطلب بعد یکی از مهمترین مطالب در توپولوژی عمومی می باشد که از لحاظ نظری نیز نتیجه ای بسیار مهم، هم در توپولوژی و هم از دیدگاه منطقی است. ابتدا صورت کلی قضیه را بیان میکنیم.

قضیه ۱۰.۴.۳ (قضیه Tychonoff)**.** *فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از فضاهای توپولوژیک باشد. آنگاه فضای $\prod_{i\in I} X_i$ با توپولوژی حاصلضربی یک فضای فشرده است.*

هدف ما اثبات این قضیه در حالتی است که مجموعه اندیس گذار I متناهی باشد. به دلایل کاملا واضح، کافیست نتیجه را برای حاصل ضرب دکارتی دو فضای توپولوژیک ثابت کنیم و حالت متناهی از این حالت نتیجه میشود. برای اثبات این نتیجه، ابتدا یک لم مهم ثابت میکنیم به نام لم تیوب که به نوبه خود از اهمیت برخوردار است.

لم ۱۱.۴.۳. *فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و Y فشرده باشد. فرض کنید $x_0 \in X$ و $N \subseteq X\times Y$ یک مجموعه باز باشد که $\{x_0\}\times Y \subseteq N$. در این صورت یک مجموعه باز $W \subseteq X$ وجود دارد که $x_0 \in W$ و $W \times Y \subseteq N$.*

معمولا به $\{x_0\} \times Y$ یک قاچ از $X \times Y$ و به $W \times Y$ یک تیوب حول این قاچ گفته می شود.

اثبات. یادآوری میکنیم که بنابر قضیه ۶.۳.۲ گردایه مجموعه های به شکل $U \times V$ که $U \subseteq X$ و $V \subseteq Y$ باز هستند، یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی روی $X \times Y$ می باشد. چون N در توپولوژی حاصلضربی باز است، پس ازای هر $(x, y) \in N$ یک عضو پایه مانند $U_x \times V_y$ وجود دارد که $(x, y) \in U_x \times V_y \subseteq N$. پس گردایه ای از مجموعه های باز مانند $\{U_i \times V_i\}_{i\in I}$ به ازای یک مجموعه اندیس گذار I وجود دارد که $U_i \times V_i \subseteq N$ به ازای هر و

$$N \subseteq \bigcup_{i\in I}(U_i \times V_i).$$

از طرفی توجه کنید که Y و $\{x_0\} \times Y$ همسانریخت هستند و Y فشرده است. پس $\{x_0\} \times Y$ نیز فشرده است. حال $\{x_0\} \times Y \subseteq N$ یک مجموعه فشرده است، پس بنابر لم ۳.۴.۳ وجود دارند $n > 0$ و $i_1, \dots, i_n \in I$ به قسمی که

$$\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(U_{i_j} \times V_{i_j}).$$

توجه کنید چون $U_i \times V_i \subseteq N$ به ازای هر $i \in I$ بنابراین $\bigcup_{j=1}^{n}(U_{i_j} \times V_{i_j}) \subseteq N$. همچنین، توجه کنید که میتوانیم فرض کنیم که $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j}$ و اگر وجود داشته باشد $U \times V$ که $x_0 \notin U$ براحتی میتوانیم آن مجموعه را در پوشاندن $\{x_0\} \times Y$ در نظر نگیریم. قرار دهید $W = \bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j}$. بوضوح

$$\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N.$$

این اثبات را تمام میکند. $\square$

حال میتوانیم قضیه Tychonoff را برای حاصلضرب دو فضای توپولوژیک ثابت کنیم.

قضیه ۱۲.۴.۳. *فرض کنید X و Y دو فضای فشرده باشند. آنگاه $X \times Y$ با توپولوژی حاصلضربی یک فضای فشرده است.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک پوشش باز برای $X \times Y$ باشد. به ازای هر $x \in Y$ چون $\{x\} \times Y$ فشرده است پس وجود دارند $n_x > 0$ و $A_{x,1}, \ldots, A_{x,n_x} \in \mathcal{A}$ به قسمی که

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_x} A_{x,j}.$$

به ازای $N_x = \bigcup_{j=1}^{n_x} A_{x,j}$ بنابر لم تیوب وجود دارد مجموعه باز $W_x \subseteq X$ به قسمی که

$$\{x\} \times Y \subseteq W_x \times Y \subseteq N_x.$$

از طرفی $\{W_x\}_{x \in X}$ یک پوشش باز برای فضای فشرده X است، پس وجود دارند $x_1, \ldots, x_m \in X$ به قسمی که

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i}.$$

پس

$$X \times Y = (\bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i}) \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} (W_{x_i} \times Y) = \bigcup_{i=1}^{m} N_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} A_{x_i,j}.$$

یعنی $X \times Y$ را میتوان به صورت اجتماع تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ نوشت. این فشردگی $X \times Y$ را نشان میدهد. $\square$

در پایان این بخش به بیان تعریف ویژگی فشردگی با استفاده از مجموعه های بسته میپردازیم. این تعریف از فشردگی در اثبات قضیه Tychonoff در حالت کلی مورد استفاده خواهد بود. ابتدا یک ویژگی دیگر را معرفی میکنیم.

تعریف ۱۳.۴.۳. *به ازای گردایه $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه های مجموعه X گوییم $\mathcal{C}$ ویژگی مقطع متناهی دارد هرگاه به ازای هر $n > 0$ و $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ داشته باشیم*

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \phi.$$

قضیه ۱۴.۴.۳. *فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر گردایه $\mathcal{C}$ از زیرفضاهای بسته X که ویژگی مقطع متناهی دارد داشته باشیم*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \phi.$$

اثبات. فرض کنید T توپولوژی روی X باشد و T^c همان نماد معرفی شده در تمرین ۲.۱.۱ باشد. به ازای $\mathcal{U} \subseteq T$ از نماد $\mathcal{C}$ برای نمایش $\{X - U : U \in \mathcal{U}\}$ استفاده خواهیم کرد. براساس تعریف فشردگی و با استفاده از عکس نقیض گیری (و متمم گیری) در این تعریف داریم

$$\begin{aligned} X\text{فشرده} &\equiv \forall \mathcal{U} \subseteq T, X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \Rightarrow \exists n > 0 \exists U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}, X = \bigcup_{i=1}^n U_i \\ &\equiv \forall \mathcal{U} \subseteq T, \forall n > 0 \forall U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}, \bigcup_{i=1}^n U_i \neq X \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \neq X \\ &\equiv \forall \mathcal{U} \subseteq T, \forall n > 0 \forall U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}, \bigcap_{i=1}^n (X - U_i) \neq \phi \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (X - U) \neq \phi \\ &\equiv \forall \mathcal{C} \subseteq T^c, \forall n > 0 \forall C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}, \bigcup_{i=1}^n C_i \neq \phi \Rightarrow \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \neq \phi. \end{aligned}$$

این ادعای ما را ثابت میکند. □

۱.۴.۳ دو کاربرد آنالیزی فشردگی

در این بخش دو کاربرد از کاربرهای فراوان ویژگی فشردگی در آنالیز و فضاهای متری را به عنوان نمونه بیان میکنیم. نمونه اول عبارت است از قضیه مقادیر بیشینه و کمینه که به صورت زیر بیان میشود.

قضیه ۱۵.۴.۳. *فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید $\mathbb{R}$ دارای توپولوژی اقلیدسی باشد و X فشرده باشد. در اینصورت f مقادیر بیشینه و کمینه خود را روی X اختیار میکند. یعنی وجود دارند $x_m, x_M \in X$ به قسمی*

$$\forall x \in X, f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M).$$

اثبات. دو اثبات برای این قضیه ارائه میکنیم. اولی با استفاده از قضیه هاینه-بورل و دومی بدون اینکه این قضیه را دانسته بگیریم.
اثبات اول. چون f پیوسته است پس $f(X)$ در $\mathbb{R}$ فشرده است. بنابرقضیه هاینه-بورل این مجموعه کراندار و بسته است. بنابر کرانداری مقادیر $M = \sup_{x \in X} f(x)$ وجود دارند. از طرفی به راحتی دیده میشود که m و M نقاط حدی $f(X)$ هستند. برای نمونه اگر وجود داشته باشد $\epsilon > 0$ به قسمی که $f(X) \cap (M - \epsilon, M + \epsilon) = \phi$ در این صورت $M - \epsilon$ یک کران بالا برای $f(X)$ خواهد بود که با تعریف کوچکترین کران بالا در تناقض است. پس به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم $f(X) \cap (M - \epsilon, M + \epsilon) \neq \phi$ که نشان میدهد M نقطه حدی است. چون $f(X)$ بسته است پس $M \in f(X)$. پس وجود دارد $x_M \in X$ به قسمی که $f(x_M) = M$. به طریق مشابه $m \in f(X)$ که اثبات را تمام میکند.
اثبات دوم. اگر f بیشترین مقدار خود را روی X اختیار نکند در این صورت $\{(-\infty, t) : t \in f(X)\}$ یک پوشش باز برای $f(X)$ است. مشابه اثبات عدم فشردگی $\mathbb{R}$ میتوان نشان داد که این به تناقض می انجامد. □

کاربرد دوم لم عدد لبگ است.

لم ۱۶.۴.۳. *فرض کنید $\mathcal{U}$ یک پوشش باز فضای متریک و فشرده (X,d) باشد. در این صورت عدد $\delta > 0$ موجود است به قسمی که اگر $A \subset X$ و $\operatorname{diam}(A) < \delta$ آنگاه وجود دارد $U \in \mathcal{U}$ به قسمی که*

$$A \subseteq U.$$

دراینجا

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$$

قطر مجموعه A می باشد.

به عدد δ که به فضای X، متریک d و پوشش $\mathcal{U}$ وابسته است عدد لبگ پوشش گوییم.
پیش از اثبات به معرفی مفهوم فاصله یک نقطه از یک مجموعه درون یک فضای متریک میپردازیم. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، $A \subseteq X$ و $x \in X$. تعریف میکنیم

$$d(x, A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

برای توجیه تعریف فضای $\mathbb{R}^2$ و تعریف فاصله یک نقطه از یک خط را در نظر بگیرید که برابر با طول پاره خط عمود بر خط و گذرنده از نقطه است که برابر با کوتاهترین فاصله نقطه از نقاط روی خط است. این تعریف به نوعی تعمیم آن تعریف می باشد. می توان نشان داد که اگر A را ثابت در نظر بگیریم، آنگاه

$$\begin{cases} d_A : X \to \mathbb{R} \\ d_A(x) = d(x, A) \end{cases}$$

یک تابع پیوسته است.

اثبات. توجه کنید اگر $X \in \mathcal{U}$ باشد، آنگاه هر عدد $\delta > 0$ یک جواب مطلوب خواهد بود. پس فرض کنیم $X \notin \mathcal{U}$.
بنابر فشردگی، وجود دارند $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ به قسمی که

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

قرار دهید $C_i = X - U_i$ و تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_{C_i}(x)$$

تعریف کنید. این تابع یک تابع پیوسته است، چون ترکیب چند تا تابع پیوسته، یعنی توابع $d_{C_1}, \ldots, d_{C_n}$ ، و تابع جمع اعداد حقیقی است. اگر $x \in X$ آنگاه وجود دارد $j \in \{1, \ldots, n\}$ به قسمی که $x \in U_j$. پس

$$x \notin C_j \Rightarrow d_{C_j}(x) > 0.$$

توجه کنید که اگر $d(x, C_j) = 0$ آنگاه x یک نقطه حدی برای C_j خواهد بود که به همراه فرض بسته بودن C_j نشان میدهد $x \in C_j$ که یک تناقض است. حال

$$f(x) \geqslant \frac{1}{n} d_{C_j}(x) > 0.$$

پس

$$\forall x \in X, f(x) > 0.$$

چون f پیوسته است، پس دارای مقدار کمینه روی X می باشد که با توجه به نامساوی بالا بایستی باید اکیدا مثبت باشد. یعنی وجود دارد $\delta > 0$ به قسمی که $\delta \in f(X)$ و

$$\forall x \in X, f(x) \geqslant \delta.$$

نشان میدهیم این عدد همان عدد لبگ مورد نظر است. فرض کنید $A \subseteq X$ به قسمی که $\mathrm{diam}(A) < \delta$. فرض کنید $x_0 \in A$. از تعریف قطر نتیجه میشود که

$$A \subseteq B_d(x_0, \delta).$$

توجه کنید که $f(x_0) \geqslant \delta$. فرض کنید $m \in \{1, \ldots, n\}$ به قسمی که

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, d(x_0, C_m) > d(x_0, C_i).$$

در این صورت

$$\delta < f(x) \leqslant \frac{1}{n}(nd(x_0, C_m)) = d(x_0, C_m).$$

پس

$$B_d(x_0, \delta) \cap C_m = \phi \Rightarrow A \subseteq B_d(x_0, \delta) \subseteq U_m.$$

این اثبات را تمام میکند. □

۵.۳ فشردگی موضعی

به عنوان آخرین مطلب در مبحث فشردکی مایلیم به مطالب ویژگی فشردگی از دیدگاه موضعی بپردازیم. تعریف این ویژگی البته با تعریف همبندی موضعی شباهت چندانی ندارد. اما خواهیم دید که این ویژگی بسیار مفید و قوی می باشد.

تعریف ۱.۵.۳. *فضای توپولوژیک X را در X موضعا فشرده گوییم هرگاه وجود داشته باشد $K \subseteq X$ فشرده و $U \subseteq X$ باز به قسمی که*

$$x \in U \subseteq K.$$

فضای X را موضعا فشرده گوییم هرگاه در هر $x \in X$ موضعا فشرده باشد.

مثال ۲.۵.۳. *فضای اقلیدسی $X = \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید در این صورت به ازای $x \in \mathbb{R}^n$ و $\epsilon > 0$ و $U = b_d(x, \epsilon)$ مجموعه $\overline{U}$ یک مجموعه فشرده است که شامل U نیز هست. پس فضای اقلدسی موضعا فشرده است.*

حال به یکی از کاربردهای ویژگی موضعا فشرده بودن به نام فشرده سازی میپردازیم.

قضیه ۳.۵.۳. *فضای توپولوژیک X را در نظر بگیرید. این فضا هاسدورف و موضعا فشرده است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد یک فضای فشرده و هاسدورف Y به همراه یک نشاندن $i : X \to Y$ به قسمی که $|Y - X| = 1$. همچنین، فضای Y که در شرایط بالا صدق کند در صورت در حد همسانریختی یکتاست. یعنی اگر $i : X \to Y'$ یک نشاندن باشد و Y' یک فضای فشرده و هاسدورف که $|Y' - X| = 1$ آنگاه یک همسانریختی $Y \to Y'$ موجود باشد به قسمی که*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

جابجایی باشد.

اثبات. نخست یکتایی Y را به آنگونه که گفته شد نشان میدهیم. فرض کنیم $p \in Y$ و $p' \in Y'$ به قسمی که $Y - i(X) = \{p\}$ و $Y' - i'(X) = \{p'\}$. پیش از اثبات هر مطلبی، توجه کنید که چون Y هاسدورف است، پس $\{p\}$ بسته است و در نتیجه $i(X) \subseteq Y$ باز می باشد. بدلیل مشابه $i'(X) \subseteq Y'$ نیز باز می باشد. نگاشت $h : Y \to Y'$ را با ضابطه

$$h(y) = \begin{cases} i'(x) & y = i(x) \\ p' & y = p \end{cases}$$

حال نشان میدهیم که h یک همسانریختی است. چون در حالت خاص Y هاسدورف و Y' فشرده هستند، بنابر قضیه ۹.۴.۳ کافیست نشان دهیم h یک نگاشت پیوسته و وارون پذیر(یک بیک و پوشا) است. از طرفی بوضوح این تابع یک بیک و پوشاست. پس کافیست نشان دهیم h پیوسته است. فرض کنید $V' \subseteq Y'$ یک مجموعه باز باشد. دو حالت در نظر میگیریم.

حالت اول. فرض کنیم $p' \notin V'$. در این صورت $V' \subseteq i'(X)$ و یک مجموعه باز مانند $U \subseteq X$ موجود است که $V' = i'(U)$. حال براحتی میبینیم که

$$h^{-1}(V') = i(U).$$

اما چون i یک نشاندن است، پس $i(U)$ در $i(X)$ باز می باشد. اما چون $i(X)$ در Y باز است، پس $i(U)$ در Y باز می باشد. این نشان میدهد که h یک نگاشت پیوسته است و ادعای ما را ثابت میکند.

حالت دوم. فرض کنیم $p' \in V'$. در این صورت $C' = Y' - V' \subseteq i'(X)$ یک مجموعه بسته است. چون Y' فشرده است پس $C' \subseteq i'(X)$ فشرده است. چون i' یک نشاندن است، پس یک زیر مجموعه فشرده $C \subseteq X$ موجود است که $C' = i'(C)$. حال

$$h^{-1}(C') = i(C).$$

حال $i(C)$ یم مجموعه فشرده در Y است و Y هاسدورف است، پس $i(C)$ بسته است و $h^{-1}(V') = Y - i(C)$ باز خواهد بود. این ادعای ما را ثبت میکند.

حال فرض کنیم $i : X \to Y$ یک نشاندن باشد که $|Y - X| = 1$ و Y هاسدورف و فشرده باشد. نشان میدهیم که X هاسدورف و موضعا فشرده است. توجه کنیئد که X و $i(X)$ همسانریخت هستند و کافیست نشان دهیم $i(X)$ موضعا فشرده و هاسدورف است. نخست توجه کنید که $i(X) \subseteq Y$ و اگر Y هاسدورف باشد آنگاه $i(X)$ نیز هاسدورف است. حال نشان میدهیم $i(X)$ موضعا فشرده است. فرض کنیم $y \in i(X)$. چون Y هاسدورف است پس مجموعه

های باز $V_y, V_p \subseteq Y$ موجودند به قسمی که

$$y \in V_y,\ p \in V_p,\ V_y \cap V_p = \phi.$$

به ازای $K = Y - V_p$ داریم $V_y \subseteq K$. از طرفی K چون بسته است، با استفاده از فشردگی Y، میبینیم که K فشرده نیز هست و داریم

$$y \in V_y \subseteq K.$$

یعنی $i(X)$ موضعا فشرده است.
حال فرض کنیم X موضعا فشرده باشد. باید نشان دهیم یک فضای فشرده و هاسدورف Y فشرده به همراه یک جانشانی $i : X \to Y$ وجود دارد به قسمی که $|Y - X| = 1$. فرض کنیم ∞ یک نقطه باشد که در X نیست و قرار میدهیم $Y = X \cup \{\infty\}$ و نگاشت $i : X \to Y$ را نگاشت جانشانی در نظر میگیریم. بوضوح $|Y - X| = 1$. حال باید یک توپولوژی روی $X \cup \{\infty\}$ تعریف کنیم به نحوی که با این توپولوژی یک فضای فشرده و هاسدورف باشد و نگاشت i یک نشاندن باشد. توپولوژی روی Y را به صورت زیر تعریف میکنیم $U \subseteq Y$ باز است اگر و تنها اگر $U \subseteq X$ باشد و باز باشد یا اینکه وجود داشته باشد یک مجموعه فشرده $C \subseteq X$ به قسمی که $U = Y - C$. به عنوان یک تمرین به عهده خواننده میگذاریم تا نشان دهد این یک توپولوژی روی Y تعریف میکند.
در این حالت نگاشت $i : X \to Y$ همان نگاشت جانشانی می باشد. توجه کنید که چون بازهای X در Y نیز باز هستند، در حالت خاص خود X در Y باز است و به ازای هر $U \subseteq X$ با بنابر تعریف داریم $U = U \cap X$. یعنی توپولوژی X و توپولوژی زیرفضایی روی X با هم برابر هستند. این نتیجه میدهد که نگاشت جانشانی $i : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته است. براحتی دیده میشود که این نگاشت یک نشاندن نیز هست.
بایn نشان دهیم Y به همراه این توپولوژی یک فضای هاسدورف و فشرده است. اول نشان میدهیم Y هاسدورف است. فرض کنید $x, x' \in Y$. دو حالت در نظر میگیریم.
حالت اول. اگر $x, x' \in X$ آنگاه بنابر هاسدورف بودن X مجموعه های باز $U, U' \subseteq X$ وجود دارند به قسمی که

$$x \in U,\ x' \in U',\ U \cap U' = \phi.$$

اما بنابر تعریف بالا، اگر U و U' در X باز باشند، آنگاه در Y نیز باز هستند. این هاسدورف بودن را در این حالت ثابت میکند.
حالت دوم. فرض کنید $x' \in Y - X$ یعنی $x' = \infty$. چون X موضعا فشرده است پس یک مجموعه فشرده $K \subseteq X$ و یک مجموعه باز $U \subseteq X$ وجود دارند که

$$x \in U \subseteq K.$$

از طرفی بنابر تعریف توپولوژی Y مجموعه $Y - K$ در Y باز است و شامل ∞ می باشد. همچنین چون $U \subseteq K$ پس $U \cap (Y - K) = \phi$. این هاسدورف بودن را در این حالت نشان میدهد.
گام نهایی اثبات این است که نشان دهیم Y فشرده است. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک پوشش باز Y باشد. این پوشش حتما باید شامل یک عضو، مثلا A، باشد به قسمی که $\infty \in A$. اما بنابر تعریف توپولوژی Y باید وجود داشته باشد مجموعه ای فشرده مانند $K \subseteq X$ به قسمی که $A = Y - K$. چون K فشرده است و

$$K \subseteq X \subseteq Y = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

بنابر لم ۳.۴.۳ وجود دارند $n > 0$ و $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ به قسمی که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. حال داریم

$$Y = (Y - K) \cup K = (Y - K) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

پس Y توجه اجتماع تعداد محدودی از اعضای $\mathcal{A}$ پوشانده می شود. پس Y فشرده است. $\square$

معمولا از نماد X_+ (در بعضی متن های قدیمی تر از نماد X_∞) برای نمایش فضای Y استفاده می شود. به فضای X_+ فشرده سازی تک نقطه ای X گفته میشود و به فرآیند اضافه کردن یک نقطه و اعمال توپولوژی جدید فشرده سازی X گفته میشود. البته معمولا $\overline{X} = Y$ نیز جزو تعریف فشرده سازی تک نقطه ای لحاظ میشود. توجه کنید که در قضیه بالا، اگر X یک فضای فشرده باشد، آنگاه بنابر تعریف توپولوژی روی $X \cup \{\infty\}$ مجموعه

$$\{\infty\} = (X \cup \{\infty\}) - X$$

یک مجموعه باز خواهد بود. از طرفی میدانیم که مجموعه های یک عضوی در فضاهای هاسدورف بسته هستند. پس هم $\{\infty\}$ و هم X هر دو هم باز و هم بسته خواهند بود و فضای $X \cup \{\infty\}$ یک فضای ناهمبند. البته ما صحبتی از همبند یا ناهمبندی $X \cup \{\infty\}$ به میان نیاورده ایم. اما در مثالهای جالب معمولا با توپولوژی اعمال شده، از یک فضای همبند به یک فضای همبند میرسیم و در جالب ترین مثالهای فشرده سازی در حالتی است که یک فضای نافشرده را در یک فضای فشرده می نشانیم.

حال یک مثال از فشرده سازی تک نقطه ای ارائه میدهیم.

مثال ۴.۵.۳. *فضای $X = (0,1)$ را با توپولوژی زیر فضایی در نظر بگیرید. ادعا میکنیم $X_+ = S^1$. تابع*

$$\begin{cases} f : (0,1) \to S^1 \\ f(t) = e^{2\pi t i} \end{cases}$$

در نظر بگیرید. براحتی میتوان دید که

$$S^1 - \mathrm{Im}(f) = e^{0i}.$$

همچنین براحتی دیده میشود که f یک نشاندن است. دایره نیز یک فضای فشرده و هاسدورف است و

$$\overline{\mathrm{Im}(f)} = S^1.$$

این نشان میدهد که فشرده سازی تک نقطه ای بازه باز $(0,1)$ و در نتیجه هر بازه بازی و همچنین مجموعه $\mathbb{R}$ دایره می باشد. البته این مثال نشان میدهد که خط حقیقی و هر بازه باز موضعا فشرده می باشند.

مثال بعدی فشرده سازی تک نقطه ای کره ریمان می باشد. میتوان نشان داد که

$$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \equiv S^2.$$

برای دیدن این مطلب قرار دهید $n = (0,0,1)$ و نگاشت کنج نگاری

$$p : S^2 - \{n\} \to \mathbb{R}^2$$

که در آن $p(x)$ محل تقاطع نیم خط واصل n و x و صفحه XY می باشد را در نظر بگیرید. میتوان نشان داد که این نگاشت یک همسانریختی می باشد. وارون این نگاشت، نشاندن مورد نیاز برای فشرده سازی تک نقطه ای را بدست میدهد. جزییات را به عهده خواننده میگذاریم. البته میتوان نگاشت کنج نگاری را برای بعدهای بالاتر نیز تعریف کرد

و نشان داد که فشرده سازی تک نقطه ای $\mathbb{R}^n$ کره S^n می باشد.

در قسمت پایانی این بخش به چند کاربرد قضیه فوق در مطالعه فشردگی موضعی میپردازیم. معمولا منظور از موضعی بودن این است که در هر همسایگی ویژگی مورد نظر برقرار باشد. اما در تعریف فشردگی موضعی گزاره ها بیشتر به وجود یک همسایگی با خاصیتی خاص اشاره دارند. حال نشان میدهیم که در مورد فضاهای هاسدورف تعریف قابل انتظار ممکن است.

قضیه ۵.۵.۳. *فرض کنید X یک فضای هاسدورف باشد. فضای X موضعا فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ و هر مجموعه باز $U \subseteq X$ که شامل x باشد مجموعه بازی مانند V موجود باشد که $\overline{V}$ فشرده باشد و*

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

اثبات. اثبات در یک جهت واضح است. به ازی $x \in X$ در صورت وجود V با شرایط گفته شده، مجموعه $K = \overline{V}$ یک مجموعه فشرده است که شامل مجموعه باز V است که $x \in V$.
حال فرض کنیم X موضعا فشرده باشد. بنابر قضیه ۳.۵.۳ فشرده سازی تک نقطه ای X، یعنی X_+ ، یک فضای هاسدورف فشرده است. فرض کنیم $x \in X$ و U یک مجموعه باز شامل x باشد. چون U در X_+ باز است پس $K := X_+ - U$ بسته است. چون X_+ فشرده است پس K فشرده است. حال بنابر لم ۷.۴.۳ چون $x \notin K$ پس مجموعه های باز V و W وجود دارند که $x \in V$ و $K \subseteq W$ و $V \cap W = \phi$. در حال خاص $\overline{V} \cap K = \phi$ که نشان میدهد

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

این ادعای ما را ثابت میکند. □

یکی از کاربردهای این تعریف تصمیم گیری در مورد زیرفضاهایی از فضاهای موضعا همبند است که خود موضعا همبند هستند. نتیجه زیر حالت به حالت خاصی از این مساله پاسخ میدهد.

نتیجه ۶.۵.۳. *فرض کنید X یک فضای موضعا فشرده باشد و $A \subseteq X$ یک زیر فضای باز یا بسته باشد. در این صورت A موضعا فشرده است.*

اثبات. فرض کنید A بسته باشد و $x \in A$. چون X موضعا فشرده است، پس یک مجموعه قشرده مانند K و یک مجموعه باز مانند U وجود دارند که

$$x \in U \subseteq K.$$

اما چون $x \in A$ پس

$$x \in A \cap U \subseteq A \cap K.$$

مجموعه $A \cap U$ در A با توپولوژی زیرفضایی باز است. همچنین، K یک مجموعه فشرده در فضای هاسدورف X است، پس بنابر قضیه ۶.۴.۳ K در X بسته است. پس در $A \cap K$ در A با توپولوژی زیرفضایی بسته است. همچنین به عنوان اشتراک دو مجموعه بسته در X نیز بسته است. از طرفی $A \cap K \subseteq K$ و K فشرده است پس $A \cap K$ فشرده است و در A هم فشرده است. این نشان میدهد A موضعا فشرده است.

حال فرض کنید A باز باشد. چون X موضعا فشرده است، بنابر قضیه **۵.۵.۳** مجموعه بازی مانند V که $\overline{V}$ فشرده است موجود است به قسمی که

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A.$$

توجه کنید که $\overline{V}$ در A نیز فشرده است. همچنین، چون A باز است، پس $V = A \cap V$ در A با توپولوژی زیرفضایی باز است. پس نشان دادیم A به همراه توپولوژی زیرفضایی در تعریف موضعا فشرده بودن صدق میکند. $\square$

نتیجه ۷.۵.۳. *فضای توپولوژیک X هاسدورف موضعا فشرده است اگر و تنها اگر با یک زیرفضای باز از یک فضای هاسدورف فشرده همسانریخت باشد.*

اثبات. اگر X موضعا فشرده باشد، آنگاه زیرفضایی از X_+ است که هاسدورف و فشرده است بنابر قضیه **۳.۵.۳** . اما بنابر هاسدورف بودن X_+ تک نقطه ای $\{\infty\}$ بسته است، یعنی X باز است. برای اثبات در جهت عکس از نتیجه پیشین بدست می آید. $\square$

فصل ۴

اصول جداسازی

هدف از این فصل معرفی اصول جداسازی است. البته پیشتر یکی از این اصول به نام هاسدورف بودن را دیده ایم. همچنین ثابت کرده ایم که هر فضای متریک (X, d) یک فضای هاسدورف است. یعنی این اصل یک شرط لازم برای متریک بودن می باشد. خواهیم دید که برخی از این اصول شرایط کافی برای متریک بودن می باشند. از لحاظ تاریخی این اصول با نام های T_1, T_2, T_3, T_4 شناخته شده اند. البته برخی اصول مانند $T_{1\frac{1}{2}}$ و اصول دیگر نیز در برخی متون معرفی شده اند. اما مد نظر ما همان چهار اصل اول خواهد بود که امروزه اصول T_2 ، T_3 و T_4 به تربیت با نامهای هاسدورف بودن، منظم بودن و نرمال بودن شناخته می شوند. این چهار است به گونه ای تنظیم شده اند که استنتاج

$$X \text{ یک فضای } T_i \text{ است } \Rightarrow X \text{ یک فضای } T_{i+1} \text{ است}$$

به ازای هر $i \in \{2, 3, 4\}$ برقرار باشد.

لازم به ذکر است که برقراری این اصول برای یک فضای توپولوژیک جزو خواصی است که یک فضای توپولوژیک میتواند داشته باشد و هیچ لزومی به برقرار این اصول برای هر فضای توپولوژیک نیست.

۱.۴ فضاهای T_1 و فضاهای هاسدورف

تعریف ۱.۱.۴. *گوییم فضای توپولوژیک X یک فضای T_1 است هرگاه*

$$\forall x, y \in X \exists U, V \overset{\text{باز}}{\subseteq} X, ((x \in U) \wedge (y \notin U)) \wedge ((y \in V) \wedge (x \notin V)).$$

لم زیر یک کاربرد از این اصل را ارائه میدهد که به نوبه خود اجازه میدهد برخی فضاها را که T_1 نیستند را شناسایی کنیم.

لم ۲.۱.۴. *فرض کنید X یک فضای T_1 باشد. آنگاه به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\}$ در X بسته است.*

اثبات. نقطه $x \in X$ را ثابت در نظر بگیرید. نشان مدهیم $X - \{x\}$ باز است. توجه کنید بنابر T_1 بودن X به ازای هر $y \in X - \{x\}$ یک مجموعه باز مانند $V_y \subseteq$ وجود دارد که $y \in V_y$ و $x \notin V_y$. این نتیجه میدهد

$$X - \{x\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} V_y$$

که به عنوان اجتماعی از مجموعه های باز، باز میباشد. این لم را ثابت میکند. □

به عنوان مثال میتوان دید که هر فضای با توپولوژی گسسته یک فضای T_1 است. از طرفی فضای سرپینسکی، یعنی $X = \{0, 1\}$ با توپولوژی $\mathcal{S} = \{X, \phi, \{0\}\}$ ، یک فضای T_1 نیست، چون $\{0\}$ در آن بسته نیست.

پیش از ادامه مطلب تعریف هاسدورف بودن را یادآوری میکنیم.

تعریف ۳.۱.۴. *گوییم فضای توپولوژیک X یک فضای T_2 یا یک فضای هاسدورف است هرگاه*

$$\forall x, y \in X \exists U, V \overset{\text{باز}}{\subseteq} X, (x \in U) \wedge (y \in V) \wedge (U \cap V = \phi).$$

بوضوح هرفضای هاسدورف در یک فضای T_1 نیز هست. اما میتوان پرسید آیا فضای توپولوژیکی هست که T_1 باشد اما هاسدورف نباشد. میتوان نشان داد روی مجموعه های متناهی این امر درست نیست.

لم ۴.۱.۴. *فرض کنید X یک مجموعه متناهی باشد که T_1 نیز هست. آنگاه توپولوژی X توپولوژی گسسته است. پس X یک فضای هاسدورف نیز هست.*

اثبات. چون X یک فضای T_1 است، پس به ازای هر $x \in X$ $\{x\}$ بسته است. از طرفی میدانیم اجتماع تعداد متناهی مجموعه بسته، بسته است. حال به ازای نقطه ثابت $z \in X$ داریم

$$\{z\} = X - (\bigcup_{x \in X - \{z\}} \{x\}).$$

چون اجتماع یک اجتماع متناهی از مجموعه های بسته است، پس خود بسته است. پس مجموعه تک عضوی $\{z\}$ باز است. این نشان میدهد که توپولوژی ما یک توپولوژیک گسسته است، چون هر زیر مجموعه X را میتوان به صورت اجتماعی از مجموعه های تک عضوی نوشت. اثبات هاسدورف بودن واضح است. □

مشاهده میکنیم که ویژگی اصلی مورد استفاده از این اثبات، وجود تعداد متناهی مجموعه باز در توپولوژی مورد نظر است و به نظر میرسد که شاید بتوان لم فوق را به این حالت نیز تعمیم داد. بررسی این مطلب را به خواننده علاقه مند واگذار میکنیم. از دیدگاه تعیین شرایطی کافی برای متریک پذیر بودن یک فضا، میتوان پرسید T_1 بودن برای متریک

پذیر بودن کافیست یا نه؟ از طرفی توجه کنید بنابر لم ۵.۷.۱ هر فضای متریکی هاسدورف است. پس اگر بتوان مثالی زد که T_1 باشد ولی هاسدورف نباشد، مثالی ارائه داده ایم از یک فضای T_1 که متریک پذیر نیست. البته بنابر لم فوق میدانیم که نباید چنین انتظاری از مجموعه های متناهی داشته باشیم.

تمرین ۵.۱.۴. *مجموعه $X = \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید و توپولوژی X را با ضابطه زیر تعریف کنید*

$$U \subseteq X \text{ باز است } \Longleftrightarrow |X - U| < \infty.$$

نشان دهید این فضا یک فضای T_1 است اما هاسدورف نیست.

به توپولوژی تمرین فوق (و توپولوژی های مشابه آن) توپولوژی هم‌ـمتناهی (cofinite) گفته میشود.

میتوان نشان داد که T_1 بودن یک ویژگی توپولوژیک است. اثبات این مطلب را به عنوان تمرین به خواننده واگذار میکنیم.

تمرین ۶.۱.۴. *الف. نشان دهید که T_1 بودن یک ویژگی توپولوژیک است.*
ب. نشان دهید اگر $A \subseteq X$ و X یک فضای T_1 (T_2) باشد، آنگاه A نیز با توپولوژی زیرفضایی T_1 (T_2) است.

البته بررسی هاسدورف بودن حاصلضرب فضاهای هاسدورف تحت توپولوژی حاصلضربی را پیشتر انجام داده ایم. بررسی درستی گزاره مشابه برای حاصلضرب فضاهای T_1 را نیز به عنوان تمرین به عهده خواننده میگذاریم.

۲.۴ فضاهای منظم

ویژگی منظم بودن تعمیمی از اصل هاسدورف بودن است. در حالت خاص، منظم بودن یک تعمیم از خاصیتی است که در لم ۷.۴.۳ مشاهده کردیم.

تعریف ۱.۲.۴. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که مجموعه های تک عضوی $\{x\}$ در آن بسته اند. گوییم X یک فضای منظم (Regular) است هرگاه به ازای هر مجموعه بسته $C \subseteq X$ و هر $x \in X - C$ مجموعه های باز $U, V \subseteq X$ وجود داشته باشند به قسمی که*

$$(x \in U) \wedge (C \subseteq V) \wedge (U \cap V = \phi).$$

به یک فضای منظم فضای T_3 نیز گفته میشود.

توجه کنید که در این تعریف، بسته بودن مجموعه های تک عضوی قسمتی از تعریف است و نه یک نتیجه تعریف. دلیل این امر این است که مثلا در تعریف منظم بودن، از قسمت دوم تعریف نمیتوان بسته بودن تک نقطه ها را نشان داد. اما چون علاقه مندیم این اصول هاسدورف بودن و T_1 بودن را نتیجه بدهند، به همین دلیل، و اینکه بسته بودن تک نقطه ای ها یک شرط مفید است، این فرض را به تعریف اضافه میکنیم. توجه کنید، همچنانکه پیشتر اشاره کردیم، هر فضای متناهی که T_1 باشد دارای توپولوژی گسسته خواهد بود. از این مطلب میتوان براحتی نشان داد که هر مجموعه متناهی منظم نیز هست. مثالهایی از فضاهای توپولوژیک موجود هستند که هاسدورف هستند ولی منظم نیستند.

مثال ۲.۲.۴. مجموعه $X=\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مجموعه

$$K=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}=\{1,1/2,1/3,\ldots\}$$

را در نظر بگیرید و $\mathcal{B}_K$ را گردایه همه بازه های باز در $\mathbb{R}$ و نیز مجموعه هایی به فرم $(a,b)-K$ در نظر بگیرید. میتوان نشان داد که این یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. از نماد $\mathbb{R}_K$ برای نمایش X به همراه توپولوژی تولید شده توسط $\mathcal{B}_K$ استفاده خواهیم کرد. براحتی دیده میشود که این فضا هاسدورف است، چون هر دو نقطه داده شده را میتوان توسط دوبازه باز از هم جدا نمود. نشان میدهیم این فضا منظم نیست. برای دیدن این مطلب توجه کنید که به ازای بازه دلخواه (a,b) مجموعه $(a,b)-K$ در پایه توپولوژی است، و در نتیجه باز است. پس K در $\mathbb{R}_K$ بسته است. همچنین توجه کنید که $0\notin K$. میتوان نشان داد که K و 0 را نمیتوان توسط مجموعه های باز از هم جدا کرد.
برای این کار، فرض کنید U و V دو مجموعه باز باشند که $0\in U$ و $K\subseteq V$ و $U\cap V=\phi$. بنابر تعریف پایه، وجود دارد بازه بازی مانند $(a,b)-K$ به قسمی که

$$0\in(a,b)-K\subseteq U.$$

توجه کنید که اگر بازه ای مانند (a,b) را انتخاب کنیم که $0\in(a,b)$ آنگاه

$$(a,b)\cap K\neq\phi\Rightarrow U\cap V\neq\phi$$

که یک تناقض است. حال داریم

$$0\in(a,b)-K\Rightarrow 0\in(a,b)\Rightarrow a<0<b\Rightarrow \exists n>0, 0<1/n<b.$$

از طرفی $1/n\in K$ پس بازه بازی مانند (c,d) هست که

$$1/n\in(c,d)\subseteq K\subseteq V.$$

حال هر $z\in\mathbb{R}$ به قسمی که

$$\max\{c,\frac{1}{n+1}\}<z<1/n$$

به $U\cap V$ تعلق دارد که یک تناقض است. پس فضای $\mathbb{R}_K$ منظم نیست.

گام بعدی، ارائه یک تعریف معادل برای منظم بودن است. این تعریف در اثبات برخی از قضایا بسیار مفید است.

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که تک نقطه ای ها در آن بسته هستند. آنگاه فضای X منظم است اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in X$ و هر U باز شامل x مجموعه بازی مانند V شامل x وجود داشته باشد به قسمی که

$$x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید X یک فضای منظم باشد و $x\in X$ ، $U\subseteq X$ مجموعه بازی که $x\in U$. در این صورت $C=X-U$ یک مجموعه بسته است که شامل x نیست. پس مجموعه های بازی مانند $V,W\subseteq X$ وجود دارند که

$$(x\in V)\wedge(C\subseteq W)\wedge(V\cap W=\phi).$$

از طرف دیگر $X-W$ یک مجموعه بسته است که شامل V می باشد و اشتراک آن با W تهی است. چون $\overline{V}$ اشتراک همه مجموعه های بسته شامل V می باشد پس $\overline{V} \subseteq (X-W)$. از طرفی چون $W \cap (X-W) = \phi$ پس $\overline{V} \cap W = \phi$. چون $X-U \subseteq W$ پس

$$\overline{V} \cap (X-U) = \phi \Rightarrow \overline{V} \subseteq U.$$

پس مجموعه باز V در شرط مورد نظر صدق میکند. یعنی

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

حال فرض کنیم که تک نقطه ای ها بسته باشند و به ازای هر $x \in X$ و هر مجموعه باز U شامل x مجموعه بازی مانند V شامل x وجود داشته باشد که

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

نشان میدهیم X منظم است. کافیست نشان دهیم هر مجموعه بسته C و هر $x \in X-C$ را میتوان توسط مجموعه های باز از هم جدا نمود. اگر C یک مجموعه بسته باشد که شامل x نباشد آنگاه $U := X-C$ یک مجموعه باز شامل x است. پس مجموعه باز V وجو دارد به قسمی که شامل x است و $\overline{V} \subseteq U$. حال $W := X-\overline{V}$ یک مجموعه باز است که شامل $C \subseteq W$ و $W \cap V = \phi$. این ادعای ما را ثابت میکند. □

قضیه فوق به همراه خاصیت پخش پذیری عمل بستارگرفتن نسبت به ضرب دکارتی در اثبات قضیه ۵.۲.۴ مورد استفاده خواهند بود. ابتدا این خاصیت پخش پذیری را یادآوری میکنیم.

تمرین ۴.۲.۴. *فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه ای دلخواه از فضاهای توپولوژیک باشد و $A_i \subseteq X_i$. همچنین فرض کنید حاصلضرب $\prod_{i\in I} X_i$ دارای توپولوژی حاصلضربی یا جعبه ای باشد. در این صورت*

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}.$$

به بیان دقیق تر

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i\in I} X_i}(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{cl}_{X_i}(A_i).$$

در گام بعد، مانند آنچه پیشتر برای فضاهای هاسدورف انجام دادیم، رفتار این ویژگی ها در مقابل اعمال زیر مجموعه گرفتن و نیز حاصلضرب گرفتن را مطالعه میکنیم. از این جهت، فضاهای منظم شبیه فضاهای هاسدورف هستند.

قضیه ۵.۲.۴. *الف. زیر مجموعه هر فضای منظم یا توپولوژی زیرفضایی منظم است.*
ب. حاصلضرب دلخواه فضاهای منظم با توپولوژی حاصلضربی یک فضای منظم است.

اثبات. الف. فرض کنید $Y \subseteq X$ باشد و X یک فضای منظم. فرض کنید $B \subseteq Y$ یک مجموعه بسته در توپولوژی زیرفضایی باشد و $x \in Y-B$. از بسته بودن B در توپولوژی زیرفضایی و با استفاده از تمرین ۴.۱.۳ نتیجه میگیریم که

$$B = \mathrm{cl}_Y(B) = Y \cap \mathrm{cl}_X(B).$$

چون $x \notin B$ پس $x \notin \mathrm{cl}_X(B)$. بنابر منظم بودن X مجموعه های باز U و V وجود دارند که

$$(x \in U) \wedge (\mathrm{cl}_X(B) \subseteq V) \wedge (U \cap V = \phi).$$

این نتیجه میدهد

$$(x \in Y \cap U) \wedge (B = Y \cap \mathrm{cl}_X(B) \subseteq V) \wedge ((Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \phi).$$

از اینکه $Y \cap U$ و $Y \cap V$ در Y باز هستند، گزاره فوق نتیجه میدهد که Y نیز منظم است.

ب. فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ گردایه از فضاهای منظم باشد. چون هر فضای منظم هاسدورف است، پس با توپولوژی حاصلضربی $\prod_{i\in I} X_i$ هاسدورف است. پس مجموعه های تک عضوی در این فضا بسته هستند. برای اثبات منظم بودن از قضیه ۳.۲.۴ استفاده میکنیم. فرض کنیم $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ و U مجموعه بازی شامل x باشد. بنابر تعریف پایه، یک عضو پایه توپولوژی حاصلضربی مانند $\prod_{i\in I} U_i$ وجود دارد که

$$x \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq U.$$

چون $\prod_{i\in I} U_i$ یک عضو پایه توپولوژی حاصلضربی است، پس بجز تعداد محدودی از اعضای I مثلا $i_1, \ldots, i_n$ به ازای هر $i \in I - \{i_1, \ldots, i_n\}$ خواهیم داشت $U_i = X_i$. در این حالت قرار دهید $V_i = U_i = X_i$. توجه کنید که در این حالت $\overline{V_i} = \overline{U_i} = X_i$. به ازای $i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ بنابر منظم بودن X_i مجموعه باز $V_i \subseteq X_i$ وجود دارد به قسمی که

$$x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq X_i.$$

بنابر تمرین ۴.۲.۴ داریم

$$\overline{\prod_{i\in I} V_i} = \prod_{i\in I} \overline{V_i}.$$

از طرفی چون $\overline{V_i} \subseteq U_i$ پس نتیجه میگیریم

$$x \in \prod_{i\in I} V_i \subseteq \overline{\prod_{i\in I} V_i} = \prod_{i\in I} \overline{V_i} \subseteq \prod_{i\in I} U_i \subseteq U.$$

این نشان میدهد که $\prod_{i\in I} X_i$ با توپولوژی حاصلضربی یک فضای منظم است. $\square$

توجه کنید که میتوان اثبات مشابهی ارائه داد برای حالتی که توپولوژی حاصلضربی را با توپولوژی جعبه ای جایگزین کنیم.

۳.۴ فضاهای نرمال

خاصیت نرمال بودن نیز تعمیمی از خاصیت منظم بودن است. این ویژگی در بیان و اثبات برخی از قضایای متریک پذیری بسیار مهم و اساسی است. البته همانگونه که خواهیم دید این ویژگی از لحاظ رفتار نسبت به برخی از اعمال روی مجموعه ها، مانند حاصلضرب دکارتی گرفتن، خوش رفتار نیست.

تعریف ۱.۳.۴. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\}$ بسته باشد. فضای X را نرمال گوییم هرگاه به ازای هر دو مجموعه بسته $C, D \subseteq X$ که $C \cap D = \phi$ مجموعه های باز $U, V \subseteq X$ وجود داشته باشند به قسمی که*

$$(C \subseteq U) \wedge (D \subseteq V) \wedge (U \cap V = \phi).$$

به فضاهای نرمال، فضاهای T_4 نیز گفته میشود.

براحتی، با انتخاب $C = \{x\}$ به قسمی که $x \in X - D$ می بینیم که نرمال بودن یک فضای توپولوژیک، منظم بودن آن را نتیجه میدهد. مثالهایی از فضاهای توپولوژیکموجود هستند که منظم هستند، اما نرمال نیستند.

مثال ۲.۳.۴. *مجموعه $X = \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. قرار دهید*

$$\mathcal{B}_l = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

میتوان نشان داد که این یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. به این توپولوژی توپولوژی حد پایینی روی $\mathbb{R}$ گفته می شود و از نماد $\mathbb{R}_l$ برای نمایش $\mathbb{R}$ به همراه توپولوژی حدپایینی استفاده میکنیم. نشان میدهیم فضای $\mathbb{R}_l$ یک فضای نرمال است. نخست توجه کنید که رابطه

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a + 1/n, b)$$

نشان میدهد که هر عضو پایه توپولوژی اقلیدسی عضو $\mathcal{B}_l$ نیز هست. پس توپولوژی حدپایینی از توپولوژی اقلیدسی ظریفتر است. حال چون تک نقطه ای ها در توپولوژی اقلیدسی بسته هستند، پس در $\mathbb{R}_l$ نیز بسته هستند. حال فرض کنید C, D دو مجموعه بسته جدا از هم باشند. نشان میدهیم این دو مجموعه توسط مجموعه های باز از هم جدا میشوند. فرض کنید $a \in A$. در این صورت وجود دارد $x_a \in \mathbb{R}$ به قسمی که

$$a < x_a, \ [a, x_a) \cap B = \phi.$$

در غیر اینصورت میتوان نشان داد که a به بستار B تعلق دارد که بنابر بسته بودن یعنی a به B تعلق دارد. حال به ازای $U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$ داریم $A \subseteq U$. به طریق مشابه میتوان مجموعه باز $V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$ را یافت که $B \subseteq V$. همچنین نحوه انتخاب x_a و x_b نشان میدهد که $U \cap V = \phi$. این ادعای ما را ثابت میکند.

چون هرفضای نرمال منظم نیز هست، پس $\mathbb{R}_l$ یک فضای منظم هم هست. بنابر قضیه ۵.۲.۴ فضای $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ یک فضای منظم است.

مثال ۳.۳.۴. *نشان میدهیم $\mathbb{R}_l^2$ یک فضای نرمال نیست.*
نشان خواهیم داد که فرض نرمال بودن این فضا به تناقض می انجامد. در واقع این اثبات بیشتر از یک اثبات توپولوژیک صرف است. نشان خواهیم داد با فرض نرمان بودن، به ازای زیرفضای L که در زیر معرفی شده است، یک تابع یک بیک

$$P(L) \longrightarrow L$$

وجود دارد که یک تناقض است که در واقع نقض کننده یک نتیجه مهم در نظریه مجموعه ها می باشد. این تناقض، نشان خواهد داد که $\mathbb{R}_l^2$ نرمال نیست.
زیرفضای
$$L = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_l\}$$
را در نظر بگیرید. نشان دادیم که $\mathbb{R}_l$ ظریفتر از $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی میباشد. از این مطلب نتیجه میشود که $\mathbb{R}_l^2$ نیز از $\mathbb{R}^2$ ظریفتر است. یعنی بازهای $\mathbb{R}^2$ در $\mathbb{R}_l^2$ نیز باز هستند. حال چون $\mathbb{R}^2 - L$ در $\mathbb{R}^2$ باز است، پس در $\mathbb{R}_l^2$ نیز باز است. پس L در $\mathbb{R}_l^2$ بسته میباشد. از طرفی، به ازای هر $(x, -x)$ و هر $\epsilon > 0$ داریم
$$\{(x, -x)\} = L \cap [x, x + \epsilon) \times [-x, -x + \epsilon)$$
که بنابر تعریف توپولوژی زیرفضایی نشان میدهد که هر مجموعه تک عضوی $\{(x, -x)\}$ در توپولوژی زیرفضایی L باز می باشد. این نشان میدهد که توپولوژی زیرفضایی روی L به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}_l^2$ همان توپولوژی گسسته است. پس هر زیر مجموعه L هم باز است و هم بسته در این توپولوژی زیرفضایی. از طرفی چون L در $\mathbb{R}_l^2$ بسته است، پس هر $A \subseteq L$ در $\mathbb{R}_l^2$ بسته است. در حالت خاص زیر مجموعه نابدیهی A در نظر بگیرید، یعنی $A \notin \{\phi, L\}$ ، در این صورت A و $L - A$ در $\mathbb{R}_l^2$ بسته خواهند بود. فرض نرمال بودن نشان میدهد که مجموعه های بازی مانند $U_A, V_A \subseteq \mathbb{R}_l^2$ موجود هستند به قسمی که
$$A \subseteq U_A,\ L - A \subseteq V_A,\ U_A \cap V_A = \phi.$$
حال زیر مجموعه $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ را درون $\mathbb{R}_l^2$ در نظر بگیرید. این مجموعه در $\mathbb{R}^2$ چگال می باشد. پس در $\mathbb{R}_l^2$ نیز چگال است، یعنی
$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}_l^2}(D) = \mathbb{R}_l^2.$$
حال نگاشت
$$\theta : P(L) \to P(D)$$
را با ضابطه
$$\theta(A) = \begin{cases} U_A \cap D & \phi \subset A \subset L \\ \phi & A = \phi \\ D & A = L. \end{cases}$$
نشان میدهیم که θ یک نگاشت یک بیک است. از تعریف نتیجه میشود که اگر $A \notin \{\phi, L\}$ آنگاه $\theta(A) \notin \{\phi, D\}$. از طرف دیگر اگر $A, B \in P(D) - \{\phi, D\}$ به قسمی که $A \neq B$ آنگاه $A - B \neq \phi$ یا $B - A \neq \phi$. فرض کنیم $A - B \neq \phi$ و $x \in A - B$. در این صورت $x \in L - B$. از تعریف مجموعه های U_A, V_A نتیجه میشود که
$$x \in U_A \cap V_B \neq \phi.$$
بنابر باز بودن $U_A \cap V_B$ باید یک مجموعه باز، در واقع یک عضو پایه توپولوژی حاصلضربی روی $\mathbb{R}_l^2$ به مرکز x مانند $B_l(x, \epsilon) = [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times [x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon)$ اگر $x = (x_1, x_2)$ ، موجود باشد که درون $U_A \cap V_B$ باشد. از طرفی بنابر چگال بودن D در $\mathbb{R}_l^2$ این گوی باید $B_l(x, \epsilon) \cap D \neq \phi$. این نشان میدهد که $D \cap (U_A \cap V_B) \neq \phi$ که نشان میدهد U_A شامل نقاطی است که در U_B نیستند، یعنی
$$\theta(A) = U_A \neq U_B = \theta(B).$$

این نشان میدهد که θ یک بیک است.
از طرفی $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ در تناظر یک بیک با $\mathbb{N}$ است. اگر $\psi : D \to \mathbb{N}$ یک تناظر یک بیک باشد، یک تابع القاء شده مانند $\overline{\psi} : P(D) \to P(\mathbb{N})$ موجود است که یک تناظر یک بیک است. همچنین توجه کنید که تابع

$$\begin{cases} \phi : L \to \mathbb{R} \\ \phi(x, -x) = x \end{cases}$$

یک تناظر یک بیک است. همچنین یاد آوری میکنیم که $\mathbb{R}$ و $(0, 1)$ هم در در تناظر یک بیک هستند. تابع

$$\eta : P(\mathbb{N}) \to (0, 1)$$

با ضابطه

$$\eta(S) = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

به قسمی که

$$a_i = \begin{cases} 0 & i \in S \\ 1 & i \notin S \end{cases}$$

یک تابع یک بیک می باشد. در نتیجه یک تابع یک بیک

$$P(D) \to \mathbb{R}$$

موجود است. حال ترکیب

$$P(L) \longrightarrow P(D) \longrightarrow P(\mathbb{N}) \longrightarrow (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow L$$

یک تابع یک بیک است. این یک تناقض است و ادعای ما را ثابت میکند.

توجه کنید که فضای $\mathbb{R}_l^2$ مثال نقض برای دو گزاره مهم ارائه میدهد. نخست یک فضای منظم معرفی میکند که نرمال نیست. دوم آنکه نشان میدهد حاصلضرب دو فضای نرمال با توپولوژی حاصلضربی لزوما نرمال نیست. که این خود نشان میدهد فضاهای نرمال چندان هم نرمال نیستند!!!

مطلب بعدی، معرفی یک تعریف معادل برای نرمال بودن است. قضیه زیر مشابه قضیه ۳.۲.۴ برای نرمال بودن است.

قضیه ۴.۳.۴. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که تک نقطه ای ها در آن بسته هستند. آنگاه فضای X نرمال است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه بسته $C \subseteq X$ و هر U باز شامل C مجموعه بازی مانند V شامل C وجود داشته باشد به قسمی که*

$$C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید X یک فضای منظم باشد و $C \subseteq X$ یک مجموعه بسته و $U \subseteq X$ مجموعه بازی که شامل C می باشد. در این صورت $D = X - U$ یک مجموعه بسته است که $C \cap D = \phi$. . پس مجموعه های بازی مانند $V, W \subseteq X$ وجود دارند که

$$(C \subseteq V) \wedge (C \subseteq W) \wedge (V \cap W = \phi).$$

از طرف دیگر $X-W$ یک مجموعه بسته است که شامل V می باشد و اشتراک آن با W تهی است. چون $\overline{V}$ اشتراک همه مجموعه های بسته شامل V می باشد پس $\overline{V} \subseteq (X-W)$. از طرفی چون $W \cap (X-W) = \phi$ پس $\overline{V} \cap W = \phi$. چون $X-U \subseteq W$ پس

$$\overline{V} \cap (X-U) = \phi \Rightarrow \overline{V} \subseteq U.$$

پس مجموعه باز V در شرط مورد نظر صدق میکند. یعنی

$$C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

حال فرض کنیم که تک نقطه ای ها بسته باشند و به ازای هر $C \subseteq X$ بسته و هر مجموعه باز U شامل C مجموعه بازی مانند V شامل C وجود داشته باشد که

$$C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

نشان میدهیم X منظم است. کافیست نشان دهیم هر دو مجموعه بسته C, D را که $C \cap D = \phi$ میتوان توسط مجموعه های باز از هم جدا نمود. چون $C \cap D = \phi$ ، مجموعه $U := X - D$ یک مجموعه باز شامل C است. پس مجموعه باز V وجو دارد به قسمی که شامل C است و $\overline{V} \subseteq U$. حال $W := X - \overline{V}$ یک مجموعه باز است که شامل $D \subseteq W$ و $W \cap V = \phi$. این ادعای ما را ثابت میکند. $\square$

حال چند دسته از فضاهای نرمال را معرفی میکنیم.

لم ۵.۳.۴. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. در این صورت (X, T_d) یک فضای نرمال است.*

اثبات. نخست توجه کنید که هر فضای متریک یک فضای هاسدورف است و تک نقطه ای ها در هر فضای هاسدورف بسته هستند. حال فرض کنید C, D دو مجموعه بسته باشند که $C \cap D = \phi$. به ازای $x \in C$ چون $X - D$ یک مجموعه باز است پس وجود دارد $\epsilon_x > 0$ به قسمی که

$$B_d(x, \epsilon_x) \subseteq (X - D) \Rightarrow B_d(x, \epsilon_x) \cap D = \phi.$$

به همان شیوه، به ازای $y \in D$ وجود دارد $\epsilon_y > 0$ به قسمی که $B_d(y, \epsilon_y) \cap C = \phi$. حال قرار دهید

$$U = \bigcup_{x \in C} B_d(x, \epsilon_x/2),\ V = \bigcup_{y \in D} B_d(y, \epsilon_y/2).$$

اگر $U \cap V \neq \phi$ در این صورت وجود دارند $x \in C$ و $y \in D$ یه قسمی که

$$B_d(x, \epsilon_x/2) \cap B_d(y, \epsilon_y/2) \neq \phi.$$

به ازای $z \in B_d(x, \epsilon_x/2) \cap B_d(y, \epsilon_y/2)$ نامساوی مثلثی نشان میدهد که

$$d(x, y) < (\epsilon_x + \epsilon_y)/2.$$

اگر $\epsilon_x \leqslant \epsilon_y$ آنگاه

$$d(x, y) < \epsilon_y$$

که نشان میدهد $x \in B_d(y, \epsilon_y)$ که یعنی $C \cap B_d(y, \epsilon_y) \neq \phi$ که یک تناقض است. به طریق مشابه $\epsilon_y \leqslant \epsilon_x$ نیز به تناقض میانجامد. پس $U \cap V = \phi$. این اثبات نرمال بودن را تمام میکند. $\square$

رده دیگری از مثالها که در زیر معرفی میکنیم از دو شرط مهم و مفید هاسدورف بودن و فشرده بودن بهره می برد. برای مثال هر کره ای در فضای اقلیدسی، یا هر رویه بسته و کرانداری در یک فضای اقلیدسی این خاصیت را دارد.

قضیه ۶.۳.۴. *هر فضای فشرده هاسدورف، نرمال است.*

اثبات. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده باشد. نشان میدهیم این فضا نرمال است. نخست توجه کنید که اگر C یک مجموعه بسته باشد، با استفاده از فشردگی X و بنابر قضیه ۵.۴.۳ آنگاه C فشرده خواهد بود. حال به ازای هر $x \in X - C$ بنابر لم ۷.۴.۳ مجموعه های باز U_x, V_x موجود هستند به قسمی که

$$x \in U_x,\ C \subseteq V_x, U_x \cap V_x = \phi.$$

برای هر $x \in X - C$ یک چنین مجموعه بازی را انتخاب شده در نظر بگیرید. اگر D یک مجموعه بسته دیگر باشد که بسته نیز هست، با استدلال مشابه یک مجموعه فشرده است. فرض کنید $C \cap D = \phi$. گردایه $\{U_x\}_{x\in D}$ یک پوشش باز D است. چون D فشرده است، بنابر وجود دارند $n > 0$ و $x_1, \ldots, x_n \in D$ یه قسمی که

$$D \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

حال قرار دهید

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i},\ V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

بوضوح

$$U \cap V = \phi.$$

همچنین $C \subseteq V$ و $D \subseteq U$. این نشان میدهد که X یک فضای نرمال است. □

رده دیگر از مثالها که معرفی میکنیم دو شرط در کنار هم دارد، یک شرط از اصول جداسازی و یک اصل از اصول شمارایی (که این اصول را هنوز معرفی نکرده ایم).

قضیه ۷.۳.۴. *فرض کنید X یک فضای منظم باشد که دارای پایه شماراست. در اینصورت X یک فضای نرمال است.*

معمولا از پایه شمارا داشتن با عنوان شمارای نوع دوم بودن نیز یاد میشود. این شرط میگوید که توپولوژی روی فضای توپولوژیک ما پایه دارد که یا متناهی است یا در تناظر یک بیک با مجموعه اعداد صحیح مثبت است. برای نمونه، پیشتر نشان دادیم که

$$\{B_d(x, r) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ می باشد. چون گردایه فوق روی $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0}$ اندیس گذاری شده است که خود یک مجموعه شماراست، پس پایه فوق یک پایه شمارا برای توپولوژی اقلیدسی است. البته فضای اقلیدسی چون دارای توپولوژی متریک است، پس نرمال است. اما میبنیم که به عنوان رده مهمی از فضاهای توپولوژیک این فضاها دارای پایه شمارا هستند. حال به اثباف قضیه میپردازیم.

اثبات. بنابر فرض پایه شمارا داشتن، پایه ای مانند $\mathcal{B}$ وجود دارد که توپولوژی X را تولید میکند و خود به عنوان یک مجموعه شماراست. یک چنین پایه ای را ثابت در نظر میگیریم. فرض کنید A و B دو مجموعه بسته باشند که اشتراکشان تهی است. فرض کنید $x \in A$. چون $X - B$ مجموعه بازی است که شامل x نیست، بنابر منظم بودن مجموعه بازی مانند U_x وجود دارد که

$$x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq X - B.$$

در حالت خاص چون $\overline{U_x} \subseteq X - B$ پس $\overline{U_x} \cap B = \phi$. حال یک عضو پایه مانند B_x انتخاب کنید به قسمی که $x \in B_x \subseteq U_x$. بوضوح $\{B_x\}_{x \in A}$ یک پوشش باز برای A می باشد. از طرفی

$$\{B_x\}_{x \in A} \subseteq \mathcal{B}.$$

یک $\{B_x\}_{x \in A}$ یک مجموعه شمارا (در تناظر یک بیک با اعداد صحیح مثبت) یا متناهی است. فرض کنید $\{U_i\}$ نمایش دهنده این پوشش با یک اندیس گذاری روی اعداد صحیح مثبت یا یک زیر مجموعه متناهی آن باشد. پس U_i ها دارای این خاصیت هستند که

$$A \subseteq \bigcup U_i, \ \overline{U_i} \cap B = \phi.$$

به طریق مشابه یک گردایه شمارا یا متناهی مانند $\{V_j\}$ از اعضای $\mathcal{B}$ میتوان یافت به قسمی که

$$B \subseteq \bigcup V_j, \ \overline{V_j} \cap A = \phi.$$

توجه کنید که اگر گردایه $\{U_i\}$ متناهی باشد، یعنی وجود داشته باشد n صحیح مثبت به قسمی که بتوان $i \in \{1, \ldots, n\}$ در نظر گرفت، با قرار دادن $U_i = \phi$ به ازای $i > n$ میتوان $\{U_i\}$ را گردایه ای از مجموعه های باز اندیس گذاری شده روی مجموعه اعداد صحیح مثبت در نظر گرفت به قسمی که

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i, \ \overline{U_i} \cap B = \phi.$$

به همین ترتیب میتوان $\{V_j\}$ را نیز ادیس گذاری شده روی مجموعه اعداد صحیح مثبت در نظر گرفت. به این ترتیب هر دو گردایه روی یک مجموعه اندیس گذاری شده اند. توجه کنید تساوی

$$(\bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j) = \phi$$

لزوما برقرار نیست. برای همین به ازای $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید

$$U'_n = U_n - (\bigcup_{j=1}^{n} \overline{V_j}), \ V'_n = V_n - (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}).$$

بوضوح U'_n و V'_n ها باز هستند. همچنین توجه کنید که $A \cap \overline{V_j} = \phi$ نتیجه میدهد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} \overline{V_j}) = \phi.$$

از طرفی چون $\{U_i\}$ یک پوشش باز A هست، پس به ازای هر $x \in A$ وجود دارد n به قسمی که $x \in U_n$. این نتیجه میدهد که وجود دارد n به قسمی که

$$x \in U_n - (\bigcup_{j=1}^{n} \overline{V_j}) = U'_n.$$

پس $\{U'_i\}$ یک پوشش باز برای A می باشد. به طریق مشابه نشان داده میشود که $\{V'_j\}$ یک پوشش باز برای B می باشد. حال قرار دهید

$$U' = \bigcup U'_n,\ V' = \bigcup V'_n.$$

بنابر آنچه پیشتر نشان دادیم

$$A \subseteq U',\ B \subseteq V'.$$

حال نشان میدهیم

$$U' \cap V' = \phi.$$

توجه کنید که

$$U' \cap V' = \bigcup_i \bigcup_j (U'_i \cap V'_j).$$

پس اگر $U' \cap V' \neq \phi$ آنگاه وجود دارند i و j مثبت به قسمی که

$$U'_i \cap V'_j \neq \phi.$$

فرض کنید $x \in U'_i \cap V'_j$. فرض کنید $i \leqslant j$. داریم

$$x \in U'_i \cap V'_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x \in U'_i & \Rightarrow & x \in U_i \qquad\qquad \Rightarrow \quad x \in \overline{U_i} \\ x \in V'_j & \Rightarrow & x \notin \overline{U_k} \text{ if } k \leqslant j \end{array} \right.$$

در حالت خاص به ازای $k = i$ داریم

$$(x \in \overline{U_i}) \wedge (x \notin \overline{U_i})$$

که یک تناقض است. حالت $i \leqslant j$ نیز به شیوه مشابه به تناقض می انجامد. پس فرض $U' \cap V' \neq \phi$ به تناقض میانجامد. پس

$$U' \cap V' = \phi.$$

این اثبات را تمام میکند. □

۴.۴ معرفی لم اوریسون

لم اوریسون یکی از مهم ترین نتایج در توپولوژی عمومی و در بحث متری سازی فضاهای توپولوژیک است. پیش از هر کاری به بیان صورت این لم می پردازیم.

لم ۱.۴.۴ (Urysohn Lemma)**.** *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک نرمال باشد. فرض کنید A و B دو مجموعه بسته باشند به قسمی که $A \cap B = \phi$. در اینصورت یک تابع پیوسته*

$$f_{A,B} : X \to [0,1]$$

وجود دارد به قسمی که

$$f_{A,B}(A) = \{0\},\ f_{A,B}(B) = \{1\}.$$

در اینجا $[0,1]$ دارای توپولوژی زیرفضایی به عنوان زیرفضایی از خط حقیقی با متریک اقلیدسی است. توجه کنید که $[0,1]$ با هر بازه بسته $[a,b]$ همسانریخت است به قسمی که 0 به a نگاشته می شود و 1 به b. پس بنابرلم اوریسون به ازای هر چنین بازه ای تابع پیوسته ای مانند $g : X \to [a,b]$ موجود است به قسمی که

$$g(A) = \{a\},\ g(B) = \{b\}.$$

ابتدا توجه کنید که عکس لم اوریسون بوضوح برقرار است.

لم ۲.۴.۴. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که مجموعه های تک نقطه ای در آن بسته هستند. همچنین فرض کنید به ازای هر دو مجموعه بسته A و B جدا از یک تابع پیوسته مانند $f_{A,B} : X \to [0,1]$ وجود دارد به قسمی که*

$$f_{A,B}(A) = \{0\},\ f_{A,B}(B) = \{1\}.$$

در اینصورت X یک فضای نرمال است.

اثبات. بنابر فرض مجموعه های تک نقطه ای بسته هستند. کافی است به ازای هر دو مجموعه بسته جدا از هم A و B مجموعه های باز U و V را پیدا کنیم به قسمی که

$$A \subseteq U,\ B \subseteq V,\ U \cap V = \phi.$$

فرض کنید $f_{A,B}$ تابعی باشد که در مفروضات قضیه صدق میکند. توجه کنید که $[0,1/2)$ و $(1/2,1]$ در $[0,1]$ باز هستند. قرار دهید

$$U = f_{A,B}^{-1}([0,1/2)),\ V = f_{A,B}^{-1}(91/2,1]).$$

بنابر پیوستگی $f_{A,B}$ این مجموعه ها باز هستند و جدا از هم. بوضوح این مجموعه ها مجموعه های باز مطلوب هستند، یعنی

$$A \subseteq U,\ B \subseteq V,\ U \cap V = \phi.$$

پس X یک فضای نرمال است. $\square$

اهمیت لم اوریسون، به همراه وارون آن که در لم ۲.۴.۴ بیان شد، از یک جهت در شناسایی رده مهمی از فضاهای توپولوژیک است که مابین فضاهای نرمال و فضاهای منظم قرار دارند. این رده از فضاها این ویژگی را دارند که تک نقطه ای در آنها بسته هستند و هر مجموعه بسته و هر تک نقطه ای در آن مجموعه بسته نیست، توسط یک تابع پیوسته از هم جدا می شوند.

تعریف ۳.۴.۴. *فضای توپولوژیک X را کاملا منظم (completely regular) گوییم هرگاه تک نقطه ای ها در آن بسته باشند و به ازای هر مجموعه بسته $C \subseteq X$ و هر $x \in X - C$ تابع پیوسته ای مانند $f_{x,C} : X \to [0,1]$ موجود باشد به قسمی که*

$$f_{x,C}(x) = \{0\}, f_{x,C}(C) = \{1\}.$$

گاهی به فضاهای کاملا منظم، فضاهای $T_{3\frac{1}{2}}$ نیز گفته میشود. اثبات گزاره زیر را به عنوان تمرین به خوانند واگذار میکنیم.

قضیه ۴.۴.۴. *الف. هر فضای توپولوژی کاملا منظم، منظم نیز هست.*
ب. زیر فضای هرفضای کاملا منظم، خود کاملا منظم است.
پ. حاصلضرب دلخواه فضاهای کاملا منظم با توپولوژی حاصلضربی، خود یک فضای کاملا منظم است.

دلیل دیگر اهمیت لم اوریسون در کاربرد آن در متری سازی فضاهای توپولوژیک منظم با پایه شماراست. پیشتر در لم ۳.۳.۱ نشان دادیم که هر فضایی که با یک فضای متریک همسانریخت باشد دارای توپولوزی متریک است. از طرفی میدانیم که تحدید متریک به زیرمجموعه های یک فضای متریک، خود یک متریک بدست میدهد. این گزاره زیر را نتیجه میدهد.

گزاره ۵.۴.۴. *فرض کنید (Y, T_Y) یک فضای متریک پذیر باشد و یک نشاندن*

$$f : (X, T_X) \longrightarrow (Y, T_Y)$$

موجود باشد. آنگاه (X, T_X) یک فضای متریک پذیر است.

لم اوریسون یک وسیله مهم برای ساختن یک چنین نشاندنی است. به ازای فضای توپولوژیک منظم X با پایه شمارا، یک نشاندن

$$X \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$$

خواهیم ساخت. با توجه به متریک بودن $\mathbb{R}^\omega$ متریک پذیری X از گزاره بالا نتیجه خواهد شد.

۵.۴ اثبات لم اوریسون

اثبات لم اوریسون یک اثبات معمولی نیست. اثبات به نوعی از اصل انتخاب استفاده میکند. همچنین از ویژگی منحصربفرد مجموعه اعداد حقیقی که همان اصل کمال هست استفاده میکند.

اثبات لم اوریسون. اثباتی که ارائه میدهیم در چهار مرحله است. در این مراحل ابتدا تابع را روی مجموعه اعداد گویای بازه $[0, 1]$ خواهیم ساخت. سپس تابع را به همه مجموعه اعداد گویا گسترش خواهیم داد. سپس با استفاده از اصل

کمال، تابع را روی همه مجموعه اعداد حقیقی تعمیم خواهیم داد. تهایتا پیوستگی تابع را نشان خواهیم داد.
گام یکم. قرار دهید $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. گردایه ای از مجموعه های باز مانند $\{U_p\}_{p\in P}$ وجود دارد به قسمی که

$$\forall p, q \in P, p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q.$$

در اینجا منظور از $p < q$ همان ترتیب معمولی اعداد حقیقی است.
اثبات گام یکم. P مجموعه ای است که در تناظر یک بیک با اعداد صحیح مثبت قرار دارد و در حالت خاص دارای کوچکترین عضو یعنی 0 و بزرگترین عضو یعنی 1 است. برای ساختن گردایه مورد ادعا یک ترتیب روی P با این ویژگی در نظر میگیریم که 1 اولین عضو آن باشد و 0 عضو دوم. یعنی اگر P را به صورت یک دنباله بنویسیم

$$P : (p_1, p_2, \ldots)$$

آنگاه

$$p_1 = 1, p_2 = 0.$$

همچنین $P_n \subseteq P$ را محموعه ای بگیرید که شامل n عضو اول P با این ترتیب باشد، یعنی

$$P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

بوضوح $P = \bigcup P_n$ و ما گردایه مورد نظر را با استقراء روی این مجموعه خواهیم ساخت. مجموعه های بسته و جدا از هم A و B داده شده اند. توجه کنید که حالت پایه استقراء از $n = 2$ آغاز میشود. در غیر اینصورت گزاره $p < q$ معنی نخواهد داست و بنابر انتفاع مقدم، هر انتخابی از یک مجموعه باز کافی خواهد بود. فرض کنید

$$U_1 = X - B.$$

در نتیجه مجموعه بازی داریم که شامل A می باشد. بنابر قضیه ۴.۳.۴ مجموعه بازی مانند U_0 موجود است که

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1.$$

در حالت خاص $\overline{U_0} \subseteq U_1$. پس استنتاج

$$0 < 1 \Rightarrow \overline{U_0} \subseteq U_1$$

برقرار است. حال فرض کنیم که گردایه $\{U_p\}_{p\in P_n}$ را ساخته ایم به قسمی که

$$\forall p, q \in P_n, p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q.$$

فرض کنید $P_{n+1} = P_n \cup \{p_{n+1}\}$. برای روشن شدن قضیه، حالت $n = 2$ را در نظر بگیرید. در این حالت

$$P_3 = \{0, 1, p_3\}.$$

توجه کنید که با ترتیب اعداد حقیقی داریم

$$0 < p_3 < 1.$$

در این حالت، چون $\overline{U_0}$ یک مجموعه بسته است که $\overline{U_0} \subseteq U_1$ پس مجموعه بازی مانند U_{p_3} وجود دارد به قسمی که

$$U_0 \subseteq U_{p_3} \subseteq \overline{U_{p_3}} \subseteq U_1.$$

این مجموعه مورد نظر را به ما میدهد. در حالت کلی، توجه کنید که $p_{n+1} \not\in \{0,1\}$ و همه اعضای p_{n+1} با ترتیب اعداد حقیقی بین 0 و 1 هستند. چون این مجموعه متناهی است، میتوان تالی بلافصل p_{n+1} را که میتواند خود 1 باشد و عضو پیشین بلافصل p_{n+1} را که میتواند خود 0 باشد در نظر گرفت. فرض کنیم p و q به ترتیب اعضای پیشین پسین بلافصل p_{n+1} باشند، یعنی

$$p < p_{n+1} < q.$$

حال چون $p < q$ پس بنابر شیوه ساختن P_n و با فرض استقراء مجموعه های باز U_p و U_q موجود هستند به قسمی که

$$\overline{U_p} \subseteq U_q.$$

حال با استفاده از نرمال بودن X و به ازای مجموعه بسته $\overline{U_p}$ مجموعه باز $U_{p_{n+1}}$ وجود دارد به قسمی که

$$\overline{U_p} \subseteq U_{p_{n+1}} \subseteq \overline{U_{p_{n+1}}} \subseteq U_q.$$

بوضوح مجموعه $\{U_i\}_{i\in P_{n+1}}$ دارای خواص موردنظر هست. پس بنابر اصل استقراء، گردایه $\{U_p\}_{p\in P}$ با ویژگی مورد ادعا موجود است. یک انتخاب از چنین گردایه ای را ثابت در نظر میگیریم.
گام دوم. گردایه ای مانند $\{U_p\}_{p\in\mathbb{Q}}$ از مجموعه های باز در X موجود است که

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q.$$

به ازای $p \in \mathbb{Q} - P$ با تعریف

$$U_p = \begin{cases} \phi & p < 0, \\ X & p > 1 \end{cases}$$

گردایه $\{U_p\}_{p\in P}$ به گردایه ای مانند $\{U_p\}_{p\in\mathbb{Q}}$ توسیع میابد که دارای ویژگی مورد نظر است.
گام سوم. به ازای $x \in X$ قرار دهید

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}.$$

توجه کنید که بنابر تعریف گام دوم به ازای $p < 0$ داریم $U_p = \phi$. پس به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\mathbb{Q}(x)$ دارای کران پایین هست. همچنین توجه کنید که بنابر تعریف فوق به ازای $p > 1$ داریم $U_p = X$. یعنی

$$\forall x \in X, p > 1 \Rightarrow p \in \mathbb{Q}(x).$$

پس $\mathbb{Q}(x)$ یک مجموعه ناتهی، زیر مجموعه اعداد گویاست، و دارای کران پایین. بنابر اصل کمال این مجموعه در $\mathbb{R}$ دارای بزرگترین کران پایین است. تعریف میکنیم

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x).$$

گام چهارم. تابع $f : X \to [0,1]$ با ضابطه $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x)$ تابعی پیوسته است که

$$f(A) = \{0\},\ f(B) = \{1\}.$$

اثبات گام چهارم. ابتدا ادعای خودمان در مورد مقادیر f روی مجموعه های A و B را ثابت میکنیم. توجه کنید که $A \subseteq U_0$ و بنابر نحوه ساختن گردایه $\{U_p\}_{p\in\mathbb{Q}}$ به ازای هر $p > 0$ داریم

$$U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_p.$$

همچنین به ازای هر $p < 0$ داریم $U_p = \phi$. این نشان میدهد

$$\forall x \in A, \mathbb{Q}(x) = [0, +\infty) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \forall x \in A, f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0.$$

همچنین بنابر انتخاب، داریم $U_1 = X - B$ و بنابر نحوه ساختن گردایه $\{U_p\}_{p\in\mathbb{Q}}$ اگر $p < 1$ آنگاه

$$U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq U_1.$$

این نتیجه میدهد که

$$\forall x \in B, p \leqslant 1 \Rightarrow x \notin U_p.$$

از طرفی به ازای $p > 1$ داریم $U_p = X$. پس

$$\forall x \in B, p > 1 \Rightarrow x \in U_p.$$

نتیجه میشود که

$$\forall x \in B, \mathbb{Q}(x) = (1, +\infty) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \forall x \in B, f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 1.$$

حال باید پیوستگی f را ثابت کنیم. نخست دو گزاره نسبتا واضح را ثابت میکنیم. نشان میدهیم
الف.

$$x \in \overline{U_r} \Rightarrow f(x) \leqslant r.$$

ب.

$$x \not U_r \Rightarrow f(x) \geqslant r.$$

برای اثبات الف توجه کنید که بنابر انتخاب مجموعه های باز U_p داریم

$$r < s \Rightarrow \overline{U_r} \subseteq U_s \Rightarrow \forall s > r, x \in U_r \Rightarrow \mathbb{Q}(x) \subseteq \bigcup_{s>r}(r, +\infty) \Rightarrow f(x) \leqslant r.$$

برای اثبات ب. توجه کنید که اگر $x \notin U_r$ آنگاه به ازای $s < r$ نیز $x \notin U_s$. در نتیجه

$$s \leqslant r \Rightarrow s \notin \mathbb{Q}(x) \Rightarrow f(x) \geqslant r.$$

برای اثبات پیوستگی f پیوستگی را در هر $x_0 \in X$ نشان میدهیم. توجه کنید که بازه های باز یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی روی خط حقیقی هستند و بنابر لم ۹.۴.۱ کافیست نشان دهیم به ازای هر بازه باز (c, d) که $f(x_0) \in (c, d)$ مجموعه بازی مانند $U \subseteq X$ وجود دارد به قسمی که

$$x_0 \in U \subseteq f^{-1}(c, d)$$

یا به طور معادل

$$f(x_0) \in f(U) \subseteq (c, d).$$

اعداد گویای p, q را به قسمی انتخاب کنید که

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

توجه کنید که بنابر چگال بودن اعداد گویا در مجموعه اعداد حقیقی چنین اعدادی حتما، و به تعداد شمارا، وجود دارند و ما انتخابهایی برای p و q را ثابت در نظر میگیریم. قرار دهید

$$U = U_q - \overline{U_p}.$$

بوضوح این مجموعه باز است. توجه کنید بنابر عکس نقیض الف

$$f(x_0) > p \Rightarrow f(x_0) \notin \overline{U_p}.$$

همچنین بنابر عکس نقیض قسمت ب

$$f(x_0) < q \Rightarrow f(x_0) \in U_q.$$

این دو نتیجه نشان میدهند که

$$f(x_0) \in U_q - \overline{U_p} = U.$$

حال نشان میدهیم

$$f(U) \subseteq (c, d).$$

فرض کنید $x \in U$. یعنی $x \in U_q$ و $x \notin \overline{U_p}$. با استفاده از گزاره الف که در بالا ثابت کردیم داریم

$$x \in U_q \subseteq \overline{U_q} \Rightarrow f(x) \leqslant q.$$

همچنین با استفاده از گزاره ب داریم

$$x \notin \overline{U_p} \Rightarrow x \notin U_p \Rightarrow f(x) \geqslant p.$$

پس

$$f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d).$$

این نشان میدهد که

$$f(U) \subseteq (c, d)$$

و اثبات این گام و در نتیجه اثبات لم اوریسون را تمام میکند. $\square$

۶.۴ متریک پذیری $\mathbb{R}^\omega$

هدف این بخش این است که نشان دهیم $\mathbb{R}^\omega$ به همراه توپولوژی حاصلضربی متریک پذیر است. بسیار مفید است تا در مورد نخست متریک پذیری $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی حاصلضربی بحث نماییم. یادآوری میکنیم که $\mathbb{R}^n$ به همراه توپولوژی اقلیدسی متریک پذیر است و این توپولوژی توسط متریک معمول اقلیدسی (متناظر به نرم $\| \ \|_2$) که فعلا با d_{Euc} نمایش میدهیم القاء شده است. در اینجا به ازای $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

و به ازای $x,y\in\mathbb{R}^n$ داریم

$$d_{\rm Euc}(x,y)=\|x-y\|_2.$$

از طرفی پیشتر در مثال ۴.۶.۱ نشان دادیم که توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی اقلیدسی تولید شده توسط مجموعه مکعب های nـبعدی، که با $\mathcal{B}_{\rm cell}$ نشان دادیم، یکی است. این نشان میدهد که $\mathbb{R}^n$ به همراه توپولوژی حاصلضربی متریک پذیر است. اگر بخواهیم به شیوه مستقیم متریک پذیری فضای اقلیدسی با توپولوژی حاصلضربی را نشان دهیم، کافیست متریکی تعریف کنیم که گوی های باز آن مکعب های nـبعدی باشند. با کمی تلاش، به طور شهودی میتوان ضابطه ای برای متریک مناسب که گوی های باز متناظر آن مکعب های nـبعدی باشند ارائه نمود. اثبات این مطلب را به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار میکنیم.

تمرین ۱.۶.۴. *فرض کنید $\{(X_i,d_i)\}_{i=1}^n$ گردایه از فضاهای متریک باشد. تابع*

$$d_{\rm prod}:(\prod_{i=1}^n X_i)\times(\prod_{i=1}^n X_i)\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

را با ضابطه

$$d_{\rm prod}((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i(x_i,y_i)\}$$

تعریف کنید. نشان دهید این یک متریک است و توپولوژی القاء شده با این متریک با توپولوژی حاصلضربی روی $\prod_{i=1}^n X_i$ برابر است.

توجه کنید که در حالت خاص مورد علاقه ما، با انتخاب $X_i=\mathbb{R}$ و d_i به عنوان متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ آنگاه گوی های باز در $\mathbb{R}$ بازه های باز هستند و خواهیم داشت

$$d_{\rm prod}((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i-y_i|\}.$$

از طرفی بنابر قضیه ۸.۳.۲ مجموعه حاصلضربهای چنین بازه هایی که مکعب های باز (با اضلاع نه لزوما برابر) هستند یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی است. اما در متریک تعریف شده روی فضای حاصلضربی، گویهای باز مکعب های باز با اضلاع برابر هستند. اثبات از مقایسه این دو پایه نتیجه خواهد شد.

میتوان پرسید که آیا با این شیوه میتوان یک متریک مناسب روی $\mathbb{R}^\omega$ تعریف نمود. بوضوح تعریفی مانند

$$d(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}}\{|x_i-y_i|\}$$

نمیتواند تعریف مناسبی باشد. این امر به دلیل وجود تعداد نامتناهی مولفه می باشد که در آن امکان دارد به ازای نقاطی در $\mathbb{R}^\omega$ داشته باشیم $d(x,y)=+\infty$ که یک عدد حقیقی نیست. برای مثال، با این تعریف، به ازای

$$x=(1,2,3,4,5,\ldots)=(i)_{i\in\mathbb{N}},\ y=(-1,-2,-3,-4,-5,\ldots)=(-i)_{i\in\mathbb{N}}$$

خواهیم داشت

$$d(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}}\{2i\}=+\infty.$$

یک راه حل برای این مشکل، کراندار نمودن متریک است. چون متریک فوق از روی متریک $\mathbb{R}$ ساخته شده است. پس منطقی است اگر بتوان متریک اقلیدسی را با یک متریک کراندار تعویض نمود به قسمی که توپولوژی القاء شده توسط این متریک جایگزین همان توپولوژی اقلیدسی باشد. ابتدا یک مشاهده تکنیکی نسبتا واضح را ثبت میکنیم.

لم ۲.۶.۴. *الف. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $\epsilon > 0$ را ثابت در نظر بگیرید. در این صورت*

$$\mathcal{B}_{d,\epsilon} = \{B_d(x,r) : r \leqslant \epsilon, x \in X\}$$

یک پایه برای توپولوژی متریک روی X است.
ب. فرض کنید d_1, d_2 دو متریک روی مجموعه X باشند و $\epsilon > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $r \leqslant \epsilon$ و هر $x \in X$ داشته باشیم

$$B_{d_1}(x,r) = B_{d_2}(x,r).$$

در این صورت این دو متریک یک توپولوژی روی X القاء میکنند.

اثبات. الف. از مثال ۲.۴.۱ یادآوری میکنیم که

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x,r) : x \in X, r > 0\}$$

یک پایه برای توپولوژی متریک می باشد و از توصیف صورت لم نتیجه میشود که

$$\mathcal{B}_{d,\epsilon} \subseteq \mathcal{B}_d.$$

این نتیجه میدهد که

$$U \in T_{\mathcal{B}_{d,\epsilon}} \Rightarrow U \in T_d.$$

حال فرض کنید $U \subseteq X$ در توپولوژی متریک باز باشد، یعنی $U \in T_d$. فرض کنید $x \in U$. بنابر تعریف باز بودن در توپولوژی تولید شده توسط یک پایه، با توجه به اینکه T_d در واقع همان $T_{\mathcal{B}_d}$ مباشد، وجود دارد $r > 0$ به قسمی که

$$B_d(x,r) \subseteq U.$$

بوضوح به ازای هر $0 < \delta < \min\{r, \epsilon\}$ داریم

$$B_d(x,\delta) \subseteq B_d(x,r) \subseteq U \Rightarrow U \in T_{\mathcal{B}_{d,\epsilon}}.$$

این اثبات را تمام میکند.
ب. از قسمت الف نتیجه میشود. $\square$

قضیه زیر یک حالت کلی این جایگزین کردن متریک با متریک دیگری که توپولوژی معادل القاء میکند را بررسی میکند.

قضیه ۳.۶.۴. *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ را با ضابطه*

$$\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

در این صورت $\overline{d}$ یک متریک روی X است و همان توپولوژی القاء شده توسط d را روی X القاء میکند، یعنی $T_d = T_{\overline{d}}$.

به $\overline{d}$ متریک استاندارد کراندار متناظر به d می گویند.

اثبات. توجه کنید که اگر $\overline{d}$ یک متریک باشد، آنگاه به ازای هر $\epsilon < 1$ بنابر تعریف این متریک نتیجه میشود

$$B_d(x,\epsilon) = B_{\overline{d}}(x,\epsilon).$$

از لم ۲.۶.۴ نتیجه میشود که d و $\overline{d}$ یک توپولوژی القاء میکنند. پس کافیست نشان دهیم $\overline{d}$ یک متریک است. توجه کنید که به غیر از نامساوی مثلثی دو شرط دیگر متریک بودن بوضوح برای $\overline{d}$ برقرار است. برای برقرار بودن نامساوی مثلثی باید نشان دهیم به ازای هر $x,y,z \in X$ داریم

$$\overline{d}(x,z) \leqslant \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z).$$

دو حالت در نظر میگیریم.
حالت اول. حداقل یکی از دو نامساویهای $d(x,y) \geqslant 1$ یا $d(y,z) \geqslant 1$ برقرار باشد. فرض کنید $d(x,y) \geqslant 1$. در اینصورت $\overline{d}(x,y) = 1$ که نشان میدهد

$$\overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z) = 1 + \overline{d}(y,z) \geqslant 1.$$

از طرفی بنابر تعریف داریم $\overline{d}(x,z) \leqslant 1$. این دو نامساوی در کنار هم نتیجه میدهند که

$$\overline{d}(x,z) \leqslant 1 \leqslant \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z)$$

که همان نامساوی مثلثی است.
حالت دوم. فرض کنید $d(x,y) < 1$ و $d(y,z) < 1$. در این صورت

$$\overline{d}(x,y) = d(x,y),\ \overline{d}(y,z) = d(y,z).$$

حال نامساوی مثلثی برای متریک d نتیجه میدهد

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) = \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z).$$

از طرفی بنابر تعریف $\overline{d}(x,z) \leqslant d(x,z)$. این به همراه نامساوی بالا، نامساوی مثلثی برای متریک $\overline{d}$ را بدست میدهد. این اثبات قضیه را تمام میکند. $\square$

حال ابزار لازم برای معرفی یک متریک روی $\mathbb{R}^\omega$ را داریم به قسمی که توپولوژیک متریک با توپولوژی حاصلضربی برابر باشد.

قضیه ۴.۶.۴. *فرض کنید d متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ باشد. به ازای $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ قرار دهید*

$$D(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i} \right\}.$$

در این صورت D یک متریک روی $\mathbb{R}^\omega$ است که همان توپولوژی حاصلضربی را روی این مجموعه القاء میکند. در نتیجه $\mathbb{R}^\omega$ با توپولوژی حاصلضربی متریک پذیر است.

۷.۴ قضیه متری سازی اوریسون

قضیه متری سازی اوریسون یکی از قضایای مهم است. پیش از هر چیزی صورت این قضیه را بیان میکنیم.

قضیه ۱.۷.۴. *فرض کنید X یک فضای منظم با پایه شمارا باشد. آنگاه X متریک پذیر است.*

اثبات انی قضیه متکی بر چند نتیجه مهم و مستقل از هم است. نخست، توجه کنید که دو شرط منظم بودن و پایه شمارا بودن، نرمال بودن X را نتیجه میدهند که به ما اجازه میدهد از لم اوریسون استفاده کنیم. لم اوریسون و با استفاده شرط پایه شمارا داشتن نشان میدهیم که یک نشاندن

$$F \longrightarrow \mathbb{R}^{\omega}$$

وجود دارد. بنابر قضیه ۴.۶.۴ فضای $\mathbb{R}^{\omega}$ متریک پذیر است. چون F یک نشاندن است، گزاره ۵.۴.۴ نتیجه میدهد که X متریک پذیر است. این مراحل را در طی چند لم اثبات میکنیم.

لم ۲.۷.۴. *فرض کنید X یک فضای منظم با پایه شمارا باشد، آنگاه یک خانواده شمارا از نگاشتهای پیوسته*

$$\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

وجود دارد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ و هر $U \subseteq X$ باز استنتاج

$$x \in U \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ f_n(x) > 0, f_n(X - U) = \{0\}$$

برقرار است.

اثبات. چون X منظم و دارای پایه شماراست، پس بنابر قضیه ۷.۳.۴ نرمال است. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک پایه شمارا برای X باشد. فرض کنیم $U \subseteq X$ باز باشد و $x \in U$. بنابر تعریف باز بودن در توپولوزی تولید شده توسط پایه وجود دارد m به قسمی که

$$x \in B_m \subseteq U.$$

بنابر منظم بودن، با استفاده از ۳.۲.۴ چون B_m باز است، وجود دارد $V_m \subseteq X$ باز که

$$x \in V_m \subseteq \overline{V_m} \subseteq B_m.$$

چون توپولوژی X توسط پایه شمارای $\mathcal{B}$ تولید شده، بنابر تعریف باز بودن در توپولوژی تولید شده توسط پایه، وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ به قسمی که

$$x \in B_n \subseteq V_m.$$

توجه کنید که $B_n \subseteq V_m$ نتیجه میدهد $\overline{B_n} \subseteq \overline{V_m}$. از این مشاهدات نتیجه میشود که

$$x \in B_n \subseteq \overline{B_n} \subseteq B_m.$$

حال به ازای مجموعه های بسته و جدا از هم $\overline{B_n}$ و $X - B_m$ چون X نرمال است، با استفاده از لم اوریسون وجود دارد نگاشت پیوسته ای مانند
$$g_{n,m} : X \to [0,1]$$
به قسمی که
$$g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{1\},\ g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}.$$
توجه کنید که تساوی $g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}$ به همراه $B_m \subseteq U$ نتیجه میدهد
$$g_{n,m}(X - U) = \{0\}.$$
همچنین، تساوی $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{1\}$ به همراه $x \in B_n$ نتیجه میدهد
$$g_{n,m}(x) = 1 > 0.$$
پس خانواده توابع $g_{n,m}$ دارای ویژگی مورد انتظار است. توجه کنید که این خانواده روی مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ اندیس گذاری شده است که خود در تناظر یک بیک با $\mathbb{N}$ می باشد. با یک اندیس گذاری مجدد، از این خانواده خانواده نگاشتهای $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با ویژگی مورد انتظار را بدست می آوریم. $\square$

گام بعدی اثبات وجود یک نشاندن
$$F : X \to \mathbb{R}^\omega$$
می باشد. قضایای نشاندن، رده مهمی از نتایج در توپولوژی را تشکیل میدهند. قضیه زیر یکی از نخستین مورد از این قضایاست.

قضیه ۳.۷.۴ (قضیه نشاندن)**.** *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که زیر مجموعه های تک عضوی ها آن بسته هستند. فرض کنید $\{f_i : X \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ خانواده ای از نگاشتهای پیوسته باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ و هر مجموعه باز $U \subseteq X$ که شامل x باشد وجود داشته باشد $i \in I$ به قسمی که*
$$f_i(x) = 0,\ f_i(X - U) = \{0\}.$$
در اینصورت تابع $F : X \to \mathbb{R}^I$ تعریف شده با
$$F(x) = (f_i(x))_{i\in I}$$
وقتی که $\mathbb{R}^I$ دارای توپولوژی حاصلضربی است، یک نشاندن است. همچنین اگرتصویر هر f_i درون $[0,1]$ باشد، آنگاه یک نشاندن X درون $[0,1]^I$ بدست می آوریم.

اثبات. نخست توجه کنید که بنابر قضیه ۱۱.۳.۲ چون توابع f_i پیوسته هستند و $\mathbb{R}^I$ دارای توپولوژی حاصلضربی است، پس F پیوسته هست. نکته دوم اینست که نشان دهیم F یک بیک است. فرض کنید $x, y \in X$ به قسمی که $x \neq y$. چون $\{y\}$ بسته است، پس $U = X - \{y\}$ باز است و $x \in U$. بنابر فرض، وجود دارد $i \in I$ به قسمی که
$$f_i(x) > 0,\ f_i(X - U) = \{0\}.$$

این نشان میدهد که $F(x) \neq F(y)$ پس F یک بیک است. حال باید ثابت کنیم وقتی $F(X)$ مجهر به توپولوژی زیرفضایی به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}^I$ است، نگاشت $h : X \to F(X)$ تعریف شده با

$$h(x) = F(x)$$

یک همسانریختی است. توجه کنید که نگاشت h پیوسته و یک بیک و پوشاست. کافیست نشان دهیم که وارون آن نیز پیوسته است. چون این نگاشت وارون پذیر است، به طور معادل باید نشان دهیم اگر $U \subseteq X$ باز باشد، آنگاه $h(U) = F(U) \subseteq F(X)$ نیز باز است. به ازای هر $z \in F(U)$ یک مجموعه باز $W_z \subseteq F(X)$ پیدا میکنیم که $W_z \subseteq F(U)$. این نشان خواهد داد که

$$F(U) = \bigcup_{z \in F(U)} W_z$$

باز است. توجه کنید که باز بودن W_z در توپولوژی زیرفضایی یعنی مجموعه بازی مانند $V_z \subseteq \mathbb{R}^I$ وجود دارد به قسمی که $W_z = V_z \cap F(X)$. به ازای $z_0 \in F(U)$ فرض کنید $x_0 \in U$ عضو یکتایی باشد که $z_0 = F(x_0)$. بنابر فرض وجود دارد $i \in I$ به قسمی که

$$f_i(x) > 0,\ f_i(X - U) = \{0\}.$$

قرار دهید

$$V = \pi_i^{-1}(0, +\infty)$$

و

$$W = V \cap F(X).$$

بوضوح V به عنوان تصویر وارون یک مجموعه باز یک مجموعه باز است، و W بنابر تعریف توپولوژی زیرفضایی در $F(X)$ باز است. در اینجا

$$\pi_i : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$$

نگاشت تصویر روی مولفه iـام است. توجه کنید که

$$f_i(x_0) = \pi_i F(x_0) > 0 \Rightarrow z_0 = F(x_0) \in V \Rightarrow z_0 \in W.$$

حال باید نشان دهیم $W \subseteq F(U)$. فرض کنید $z \in W$. در اینصورت به ازای $z = F(x)$ داریم

$$f_i(x) = \pi_i F(x) \in (0, +\infty) \Rightarrow f_i(x) > 0.$$

در حالیکه اگر $x \in X - U$ آنگاه $f_i(x) = 0$. پس $x \in U$ که نشان میدهد $z \in F(U)$. این اثبات را تمام میکند. □

حال با انتخاب $I = \mathbb{N}$ و انتخاب مجموعه نگاشتهایی که در لم ۲.۷.۴ بدست آوردیم، اثبات قضیه متری سازی اوریسون کامل می شود.