جلسه هفدهم:

تابع مولد

تعریف: تابع مولد (معمولی) دنباله $(\mathrm{a}_0.\mathrm{a}_1.\dots.\mathrm{a}_\mathrm{k}.\dots)$ یک سری توانی به صورت زیر است:

$$A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k+\cdots=\sum_{k\geq 0}a_kx^k$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر(1)

$$(i)(1.0.\dots.0\dots)\leftrightarrow 1$$

$$(ii)(0.\dots.0.1.0.\dots)\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}[k=m]x^k=x^m$$

تبصره: اگر مقادیر دنباله مورد نظر از جایی به بعد مساوی 0 باشد، تابع مولد به یک چندجمله ای تبدیل می شود که به آن، چندجمله ای مولد می گوییم.

$$(iii)(c.c.\dots.c.\dots)\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}cx^k=\frac{c}{1-x}$$

$$(iv)(1.0.1.0.1.0.\dots)\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}[2\,|k]x^k=\frac{1}{1-x^2}$$

یادآوری: (کاربرد دستور ایورسون) در مورد عبارت فوق لازم به یادآوری است که به عنوان نمونه، با استفاده از نماد ایورسون داریم

$$\sum\nolimits_{k\geq 0}x^{2\,k}=\sum\nolimits_{k\geq 0.2|k}x^k=\sum\nolimits_{k\geq 0}[2\,|k]x^k=\sum\nolimits_{k\in Z}[k\geq 0][2\,|k]x^k$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر(3)

$$(v)(1.0.\dots.0.1.0.\dots.0.1.0.\dots)\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}[m\,|k]x^k=\frac{1}{1-x^m}$$

$$(vi)(1.c.c^2.\dots.c^k.\dots)\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}c^k\,x^k=\frac{1}{1-cx}$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر(4)

$$(vii)(1.2.3.\dots)\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}(k+1)x^k=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(viii)(1.\binom{m}{1}.\dots.\binom{m}{m}.0.\dots) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k = (1+x)^m$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر(5)

$$(ix)\left(0.1.\frac{-1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{-1}{4}.\dots\right) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = \log(1+x)$$

$$(x)(0.1\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\dots) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 1}\frac{1}{k}x^k = \log\frac{1}{1-x}$$

$$(xi)(1.1.\frac{1}{2!}.\frac{1}{3!}.\frac{1}{4!}.\dots) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر(6)

$$(xii)\left(1.0.\frac{1}{2!}.0.\frac{1}{4!}.\dots\right) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} = \cosh x$$

$$(xiii)(0.1.0.\frac{1}{3!}.0.\frac{1}{5!}.\dots) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 1}\frac{x^{2\,k-1}}{(2\,k-1)!} = \sinh x$$

$$(ixv)\left(1.0.\frac{-1}{2!}.0.\frac{1}{4!}.\dots\right) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{(-1)^k x^{2\,k}}{(2\,k)!} = \cos x$$

$$(xv)\left(0.1.0.\frac{-1}{3!}.0.\frac{1}{5!}.\dots\right) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}x^{2\,k-1}}{(2\,k-1)!} = \sin x$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر (7)

$$(xvi)(0.\sin\beta\,.\sin\;2\,\beta.\dots) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\sin(k\beta)\,x^k = \frac{x\sin\beta}{1-2\,x\cos\beta+x^2}$$

$$(xvii)(1.\cos\beta\,.\cos 2\,\beta.\dots) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\cos(k\beta)\,x^k = \frac{1-x\cos\beta}{1-2\,x\cos\beta+x^2}$$

$$(xviii)(0.e^{\alpha}\sin\beta\,.e^{2\,\alpha}\sin 2\,\beta.\dots) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}e^{k\alpha}\sin(k\beta)\,x^k$$
$$= \frac{xe^{\alpha}\sin\beta}{1-2\,xe^{\alpha}\cos\beta+e^{2\,\alpha}x^2}$$

$$(ixx)(1.e^{\alpha}\cos\beta\,.e^{2\,\alpha}\cos 2\,\beta\,.\dots)$$
$$\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}e^{k\alpha}\cos(k\beta)\,x^k = \frac{1-xe^{\alpha}\cos\beta}{1-2\,xe^{\alpha}\cos\beta+e^{2\,\alpha}x^2}$$

برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر (8)

$$(xx)\left(1.3.6.\ldots.\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\ldots\right) \leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$(xxi)(1.m+1.\frac{(m+1)(m+2)}{2}.\ldots.\binom{m+k}{m}.\ldots)$$
$$\leftrightarrow \sum\nolimits_{k\geq 0}\binom{k+m}{m}x^k = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$$

اثبات رابطه (vii):

روش 1:

$$\sum\nolimits_{k\geq 0}(k+1)\,x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum\nolimits_{k\geq 0}x^k = \frac{1}{1-x} \to \sum\nolimits_{k\geq 1}k\,x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \to \sum\nolimits_{k\geq 0}(k+1)\,x^k$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

روش 2:

$$A(x) = \sum x^i\,.B(x) = \sum x^i$$

$$A(x)B(x) = C(x) = \sum\nolimits_{n\geq 0}c_n x^n$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{n}a_i b_{n-i} = (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

بحث درباره $x\underbrace{D}_{\text{مشتق}}$ و $x^2\underbrace{D}_{\text{مشتق}}$(عملگر)

$$xD\sum\nolimits_{k\geq 0}a_k x^k \to \sum\nolimits_{k\geq 0}k\,a_k x^k \to xDxDA(x) = \sum\nolimits_{k\geq 0}k^2 a_k x^k$$

$$x^2D\sum\nolimits_{k\geq 0}a_k x^k = x\sum\nolimits_{k\geq 0}k\,a_k x^k \to \sum\nolimits_{k\geq 0}k(k+1)\,a_k x^k$$

$$xDf(x)\ .\ xDxDf(x) = xD\big(xf'(x)\big) = x(f'(x) + xf''(x)) = xf'(x) + x^2 f''(x) =$$
$$(xD + x^2D^2)f(x) \to xD = xD + x^2D^2$$

عددهای استرلینگ نوع دوم هستند که ظاهر میشوند

جبرهایزنبرگ:

$$(xD)^2 \frac{1}{1-x} = xD\frac{1}{1-x} + x^2D^2\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1+x)^3}$$

$$|\{(\underbrace{e_1.e_2.e_3.e_4)}_{e}: e_1 + 3e_2 + 5e_3 + 7e_4 = 12 \,.\, e_1.e_2 \geq 0 \,.\, 0 \leq e_3 \leq 2 \,.\, 0 \leq e_4 \leq 1\}|$$

$$= f_n = |\varepsilon|$$

$$f_n = \sum\nolimits_{e\epsilon\varepsilon.|e|=n} 1$$

$$|e| \coloneqq e^1 + 3e^2 + 5e^3 + 7e^4 = n$$

$$\varepsilon = \{(e_1.e_2.e_3.e_4): e_1.e_2 \geq 0.0 \leq e_3 \leq 2 \,.0 \leq e_4 \leq 1\}$$

$$F(x) = \sum\nolimits_{n\geq 0} f_n x^n = \sum\nolimits_{n\geq 0} x^n \sum_{\substack{e\epsilon\varepsilon \\ |e|=n}} 1 = \sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{e\epsilon\varepsilon \\ |e|=n}} x^{|e|} = \sum\nolimits_{e\epsilon\varepsilon} x^{|e|} =$$

$$= \sum_{\substack{e_2.e_1\geq 0 \\ 0\leq e_3\leq 2.0\leq e_4\leq 1}} x^{e_1+3e_2+5e_3+7e_4} = \sum_{e_1\geq 0} x^{e_1} \sum_{e_2\geq 0} x^{3e_2} \sum_{0\leq e_3\leq 2} x^{5e_3} \sum_{0\leq e_4\leq 1} x^{7e_4}$$

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10})(1 + x^7)$$

$\begin{cases} 1 + \omega + \omega^2 = 0 \\ \omega^3 = 1 \end{cases} \rightarrow$ بخشپذیر (x^2+x+1) بر $(1+x^5+x^{10})$

$$\begin{aligned} x^{10} + x^5 + 1 &= x^{10} - x + x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x(x^3-1)(x^6+x^3+1) + x^2(x^3-1) + x^2 + x + 1 \\ &= (x^2+x+1)(x^8+x^5+x^2-x^7-x^4+x^3-x^2+1) \\ &= (x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(1+x^7) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(1+x^7) \end{aligned}$$