---

مروری بر مطالب درس:

- تعریف بازگشتی آرایه $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$:

$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & if\ n < 0\ or\ m < 0 \\ 1 & if\ m = m = 0 \\ na_{m,n-1} + ma_{m-1,n} & if\ (m,n) \neq (0,0)\ ,\ \ m,n \geq 0 \end{cases}$$

- رابطه بازگشتی افراز های مرتب عددی:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_n = 2C_{n-1} \quad n > 1 \end{cases} \Rightarrow C_n = 2^n$$

- رابطه بازگشتی افراز های مرتب عددی $C_m(n)$:

$$\begin{cases} C_1(n) = C_m(n) = 1 & if\ n < m \\ C_{m-1}(n-1) & \text{عنصر اول در لیست } m \text{ عددی } 1 \text{ باشد} \\ C_m(n-1) & \text{عنصر اول در لیست } m \text{ عددی } 1 \text{ نباشد} \end{cases} \Longrightarrow C_m(n) = C_{m-1}(n-1) + C_m(n-1)$$

- رابطه بازگشتی افراز های غیرمرتب عددی $P_m(n)$:

$$\begin{cases} P_1(n) = P_n(n) = 1 \\ P_m(n) = 0 \quad\quad if\ m > n\ or\ n < 0 \end{cases} \Longrightarrow P_m(n) = P_{m-1}(n-1) + P_m(n-m)$$

نکته ها:

- $P_{\leq m}(n) = P_m(m+n)$
- $P(n) = P_{\leq n}(n) = P_{2n}(n)$
- به ازای $m$ ثابت داریم:

$$P_m(n) \sim \frac{n^{m-1}}{m!\,(m-1)!}$$

- رابطه بازگشتی اعداد استرلینگ نوع دوم:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

- چندجمله‌ای های متقارن مقدماتی:

$$C_k(x_1, \dots, x_n) = \sum\nolimits_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

- **چندجمله‌ای های متقارن کامل:**

$$H_k(x_1, \dots, x_n) = \sum\nolimits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

- **قضیه دوجمله ای:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- **به ازای مقادیر مختلف $x$ و $y$ روابط زیر نتیجه می‌شود:**

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$[n=0] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

- **توسیع مثلث پاسکال برای هر $m$ صحیح:**

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} [m=0] & if\ n=0 \\ \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} & if\ n>0 \end{cases}$$

- **اعداد استرلینگ نوع دوم:**

تعداد نگاشت پوشا از $N_n$ به $N_m$ برابر $m!\,S(n,m)$ است که $S(n,m)$، عدد استرلینگ نوع دوم، برابر تعداد توزیع $n$ شی متمایز در $m$ جعبه‌ی همانند است به طوری که هیچ جعبه ای خالی نباشد، تعریف می‌شود. حال فرمول کلی برای تعداد نگاشت های پوشا از $N_n$ به $N_m$ بیان می‌کنیم. فرض کنید $F(n,m)$ تعداد نگاشت های پوشا از $N_n$ به $N_m$ باشد، آنگاه

$$F(n,m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

**سوالات کلاس حل تمرین:**

۱) یک ماتریس $m \times n$ دلخواه از اعداد صحیح در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد صحیح نامنفی $p$ و $q$ در $p \le m$ و $q \le n$ صدق می‌کنند. حال در هر ستون، لااقل تعداد $p$ عدد از آن ستون و در هر سطر لااقل $q$ عدد از بزرگترین اعداد آن سطر علامت‌گذاری کنید. ثابت کنید لااقل $pq$ عدد از اعداد ماتریس دوبار علامت‌گذاری شده‌اند.

۲) مقدار مجموع زیر را حساب کنید.

$$S = m! + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \dots + \frac{(m+n)!}{n!}$$

۳) $10$ نقطه روی یک دایره مشخص شده‌اند. تعداد چندضلعی‌های محدب متمایز با سه ضلع و یا بیشتر که رئوس آن تعدادی یا تمام نقاط روی دایره باشند را بیابید(دو چندضلعی متمایز هستند مگراینکه تمام رئوس آن ها منطبق باشند).

۴) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. ثابت کنید

الف)

$$\sum_{r=1}^{n} r^4 \binom{n}{r} = n(n+1)(n^2+5n-2)2^{n-4}$$

ب)

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$$

۵) دنباله $\beta_i$ را اینگونه تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \beta_r = \sum_{k=1}^{r} S(r,k) \end{cases}$$

عدد $\beta_r$، $r$امین عدد بل نامیده می‌شود و $S(r,k)$ عدد استرلینگ نوع دوم است. نشان دهید اگر رابطه زیر را برای عدد استرلینگ نوع دوم را داشته باشیم

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k {C_k}^m (m-k)^n$$

می‌توان رابطه زیر را نتیجه گرفت

$$S(r,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^r$$

**پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:**

۱)

از استقرا روی $m+n$ استفاده می‌کنیم. حالت $m=n=p=q=1$ برقرار است. اگر همه اعداد علامت دار در ماتریس دو بار علامت‌گذاری شده باشند، آنگاه تعداد آن ها حداقل (فرض کنید $m \leq n$) $p \times n$ خواهد بود که این تعداد بزرگتر از $pq$ است. در غیر اینصورت، در بین اعدادی که یک بار علامت‌گذاری شده‌اند، بزرگ‌ترین عدد، برای مثال $M$ را انتخاب می‌کنیم که یکی از بزرگ‌ترین اعداد در سطر یا ستون خودش است(در هر دو نیست). فرض کنیم $M$ یکی از بزرگ‌ترین اعداد در ستون خودش باشد، آنگاه همه اعداد بزرگ‌تر از $M$ در این سطر، دو بار علامت‌گذاری شده‌اند زیرا که اگر عددی باشد که یکبار علامت گذاری شده باشد، آنگاه بزرگتر از $M$ خواهد بود که خلاف فرض اولیه می باشد که $M$ بزرگترین عددی است که یکبار علامت گذاری شده است. پس در این سطر حداقل q عنصر وجود دارد که دوبار علامت گذاری شده است. این سطر را از ماتریس حذف می‌کنیم و به یک ماتریس $(m-1) \times n$ می‌رسیم که حداقل $q$ عدد بزرگ‌تر از هر سطر و حداقل $p-1$ عدد از هر ستون علامت‌گذاری شده‌اند. طبق فرض استقرا، حداقل $(p-1) \times q$ عدد در این ماتریس کوچک‌تر و همینطور ماتریس $m \times n$ دوبار علامت‌گذاری شده‌اند. بنابراین در ماتریس $m \times n$، $(p-1)q + q = pq$ عدد دوبار علامت‌گذاری شده‌اند.

۲)

داریم

$$S = m! + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \cdots + \frac{(m+n)!}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(m+i)!}{i!} = m! \sum_{i=0}^{n} \frac{(m+i)!}{i!\, m!} = m! \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{m}$$
$$= m! \binom{m+n+1}{m+1} = m! \binom{m+n+1}{n}$$

۳)

می‌دانیم برای هر $n \in \{3,4, \dots ,10\}$ و هر $n$امین عضو زیرمجموعه 10 راسی، دقیقا یک چندضلعی محدب وجود دارد که می‌تواند با استفاده از همه عناصر موجود در زیرمجموعه 10 راسی ساخته شود. همانطور که تعداد چندضلعی‌های مجزا $n$وجهی محدب قابل ترسیم با استفاده از برخی و یا تمام 10 نقطه به عنوان رئوس برابر با $\binom{10}{n}$ است، میبینیم که تعداد چندضلعی‌های محدب مجزا 3 راسی یا بیشتر که با استفاده از برخی و یا تمام 10 نقطه رسم می‌شود، برابر با عبارت زیر است

$$\sum_{n=3}^{10} \binom{10}{n} = \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} - \sum_{n=0}^{2} \binom{10}{n} = 2^{10} - 1 - 10 - 45 = 968$$

۴)

الف) برای $n = 1$ واضح است. فرض کنیم $n > 1$، داریم

$$\sum_{r=1}^{n} r^4 \binom{n}{r} = \sum_{r=1}^{n} r^3 n \binom{n-1}{r-1}$$
$$= n(\sum_{r=1}^{n} ((r-1)^3 + 3(r-1)^2 + 3(r-1) + 1) \binom{n-1}{r-1})$$
$$= n(\sum_{r=2}^{n} (r^3 - 1) \binom{n-1}{r-1} + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r})$$
$$= n(\sum_{r=1}^{n-1} (r^3 + 3r^2 + 3r) \binom{n-1}{r} + 2^{n-1})$$
$$= n(n-1)\big((n-1)(n+2)2^{n-4} + 3n2^{n-3} + 3.\, 2^{n-2}\big) + n2^{n-1}$$
$$= n(n+1)(n^2 + 5n - 2)2^{n-4}$$

ب) برای $n = 1$ واضح است. فرض کنیم $n > 1$، داریم

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = \sum_{r=1}^{n} rn \binom{n-1}{r-1}$$
$$= n \sum_{r=1}^{n} (r-1+1) \binom{n-1}{r-1} = n \left( \sum_{r=2}^{n} (r-1) \binom{n-1}{r-1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} \right)$$
$$= n \left( \sum_{r=1}^{n-1} r \binom{n-1}{r} + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \right) = n\big((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}\big) = n(n+1)2^{n-2}$$

۵)

داریم:

$$S(r,k)=\frac{1}{k!}F(r,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}(k-i)^{r}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{k-j}j^{r}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{r}$$