دانشگاه تهران

تمرین سری دهم مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **تاریخ تحویل: جمعه ۳۱ اردیبهشت**

---

۱) ثابت کنید $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$، سپس نتیجه بگیرید که $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$. ($\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ عدد استرلینگ نوع اول می‌باشد.)

۲) ثابت کنید $\frac{1}{k!}(ln(1+x))^k = \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-k}$. ($\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ عدد استرلینگ نوع اول می‌باشد.)

۳) به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$، فرض کنید $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. فرمول تابع مولد نمایی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ را بدست آورید. (تابع $f(x)$ ای را بدست آورید که بسط مک‌لورن آن برابر $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ شود.)

۴) به ازای هر عدد طبیعی n، فرض کنید a_n تعداد حالاتی باشد که در پرتاب‌های متوالی یک تاس، مجموع اعداد ظاهر شده برابر n باشد. برای مثال $a_3 = 4$، همچنین قرار دهید $a_0 = 1$. حال فرمول تابع مولد $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ را بدست آورید. (تابع $f(x)$ ای را بدست آورید که بسط مک‌لورن آن با تابع مولد دنباله $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ برابر باشد.)

۵) به ازای هر عدد صحیح $r \geq 1$، فرض کنید a_r تعداد راه‌های انتخاب 4 عدد صحیح متمایز از مجموعه $\{1,2,\dots,r\}$ باشد به‌طوری‌که هیچ دو عددی متوالی نباشند. تابع مولد دنباله‌ی $(a_r)_{r=1}^{+\infty}$ را محاسبه کنید و با استفاده از آن نشان دهید $a_r = \binom{r-3}{4}$.