برهان. بدیهی است که $0 \in \mathbf{I}(V)$ زیرا چندجمله‌ای صفر روی تمام نقاط k^n و بنابراین، به‌ویژه روی V صفر می‌شود. اکنون فرض کنیم $f, g \in \mathbf{I}(V)$ و $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$. فرض کنیم $(a_1, \ldots, a_n)$ نقطه‌ای دلخواه از V باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_n) + g(a_1, \ldots, a_n) &= 0 + 0 = 0, \\ h(a_1, \ldots, a_n)\, f(a_1, \ldots, a_n) &= h(a_1, \ldots, a_n) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

و در نتیجه $\mathbf{I}(V)$ یک ایده‌آل است. $\square$

برای مثالی از ایده‌آل یک چندگونا، چندگونای $\{(0,0)\}$ مرکب از مبدأ در k^2 را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت ایده‌آل $\mathbf{I}(\{(0,0)\})$ مرکب از تمام چندجمله‌ای‌هایی است که در مبدأ صفر می‌شوند. ادعا می‌کنیم که

$$\mathbf{I}(\{(0,0)\}) = \langle x, y \rangle.$$

یک طرف اثبات بدیهی است زیرا هر چندجمله‌ای به‌صورت $A(x,y)x + B(x,y)y$ به‌وضوح در مبدأ صفر می‌شود. برای اثبات درجهت عکس، فرض کنیم چندجمله‌ای $f = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ در مبدأ صفر شود. دراین‌صورت $a_{00} = f(0,0) = 0$ و درنتیجه

$$\begin{aligned} f &= a_{00} + \sum_{i,j \neq 0,0} a_{ij} x^i\, y^j \\ &= 0 + \Bigg(\sum_{\substack{i,j \\ i>0}} a_{ij} x^{i-1} y^j \Bigg) x + \Bigg(\sum_{j>0} a_{0j} y^{j-1} \Bigg) y \in \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین ادعا برقرار است.

برای مثال دیگر، حالتی را درنظر می‌گیریم که V کل k^n است. دراین‌صورت $\mathbf{I}(k^n)$ مرکب از چندجمله‌هایی است که همه‌جا صفر می‌شوند و بنابراین طبق گزارهٔ ۵ از ۱§، وقتی k نامتناهی است، داریم

$$\mathbf{I}(k^n) = \{0\}.$$

(در اینجا «0» چندجمله‌ای صفر در $k[x_1, \ldots, x_n]$ است.) توجه شود که گزارهٔ ۵ از ۱§ معادل حکم فوق است. در تمرین‌ها، بررسی خواهید کرد که چه اتفاقی رُخ می‌دهد وقتی k یک میدان متناهی باشد.

یک مثال جالب‌تر، مربوط به خم درجهٔ سهٔ تابدار $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ در $\mathbb{R}^3$ است. ادعا می‌کنیم

$$\mathbf{I}(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle.$$

برای اثبات این تساوی، ابتدا نشان می‌دهیم که هر چندجمله‌ای $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$ را می‌توان به‌صورت

$$f = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + r \qquad (۲)$$

نوشت که در آن $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[x,y,z]$، و r یک چندجمله‌ای از فقط متغیر x است. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که f یکجمله‌ای $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ است. دراین‌صورت قضیهٔ دوجمله‌ای می‌گوید که

$$\begin{aligned} x^\alpha y^\beta z^\gamma &= x^\alpha(x^2+(y-x^2))^\beta(x^3+(z-x^3))^\gamma \\ &= x^\alpha\Big[x^{2\beta}+\big(y-x^2 \text{ جملات شامل}\big)\Big]\Big[x^{3\gamma}+\big(z-x^3 \text{ جملات شامل}\big)\Big] \end{aligned}$$

و محاسبهٔ این حاصل‌ضرب نشان می‌دهد که برای چندجمله‌های $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[x,y,z]$،

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = h_1(y-x^2)+h_2(z-x^3)+x^{\alpha+2\beta+3\gamma}.$$

بنابراین (۲) در این حالت برقرار است. ازآنجاکه یک چندجمله‌ای دلخواه $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$ یک ترکیب $\mathbb{R}$-خطی از یک‌جمله‌ای‌ها است، نتیجه می‌شود که (۲) در حالت کلی نیز برقرار است.

اکنون می‌توانیم ثابت کنیم که $\mathbf{I}(V)=\langle y-x^2, z-x^3\rangle$. ابتدا طبق تعریف خم درجهٔ سهٔ تابدار V، داریم $y-x^2, z-x^3 \in \mathbf{I}(V)$ و ازآنجاکه $\mathbf{I}(V)$ یک ایده‌آل است، نتیجه می‌شود که $h_1(y-x^2)+h_2(z-x^3) \in \mathbf{I}(V)$. این ثابت می‌کند که $\langle y-x^2, z-x^3\rangle \subseteq \mathbf{I}(V)$. برای اثبات عکس این شمول، فرض کنیم $f \in \mathbf{I}(V)$ و

$$f = h_1(y-x^2)+h_2(z-x^3)+r$$

عبارت داده شده در (۲) باشد. برای اثبات اینکه $r=0$، از پارامتری‌سازی (t,t^2,t^3) برای خم درجهٔ سهٔ تابدار استفاده می‌کنیم. ازآنجاکه f روی V صفر می‌شود، داریم

$$0 = f(t,t^2,t^3) = 0+0+r(t).$$

(توجه شود که r یک چندجمله‌ای از فقط متغیر x است.) ازآنجاکه t می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، طبق گزارهٔ ۵ از §۱، $r \in \mathbb{R}[x]$ باید چندجمله‌ای صفر باشد. امّا $r=0$ نشان می‌دهد که f به‌صورت مطلوب است و تساوی $\mathbf{I}(V)=\langle y-x^2, z-x^3\rangle$ ثابت می‌شود.

کاری که در (۲) انجام دادیم، یادآور تقسیم چندجمله‌ای‌ها است، با این تفاوت که در اینجا به‌جای یک چندجمله‌ای، بر دو چندجمله‌ای تقسیم می‌کنیم. درحقیقت، (۲) حالت خاصی از الگوریتم تقسیم تعمیم‌یافته است که در فصل ۲ آن را مطالعه خواهیم کرد.

یک نتیجهٔ خوب از مثال فوق این است که برای هر چندجمله‌ای $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$، داریم $f \in \langle y-x^2, z-x^3\rangle$ اگروفقط‌اگر $f(t,t^2,t^3)$ تماماً صفر باشد. این الگوریتمی برای تشخیص عضویت یک چندجمله‌ای در این ایده‌آل به‌دست می‌دهد. اگرچه این روش به پارامتری‌سازی (t,t^2,t^3) وابسته است. آیا روشی برای تشخیص عضویت $f \in \langle y-x^2, z-x^3\rangle$ بدون استفاده از این پارامتری‌سازی وجود دارد؟ در فصل ۲، با استفاده از پایه‌های گروبنر و الگوریتم تقسیم تعمیم‌یافته، پاسخی مثبت به این پرسش خواهیم داد.

مثال خم درجهٔ سهٔ تابدار بسیار الهام‌گر بود. با چندجمله‌ای‌های $y-x^2$ و $z-x^3$ شروع کردیم. با استفاده از آنها یک چندگونای آفین تعریف کردیم. تمام توابعی که روی این چندگونا صفر می‌شوند را درنظر گرفتیم و

دیدیم که اینها همان ایده‌آل تولید شده توسط این دو چندجمله‌ای را به‌دست می‌دهند. طبیعی است که بپرسیم آیا این اتفاق همواره رُخ می‌دهد؟ بنابراین $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ را درنظر می‌گیریم. داریم

ایده‌آل		چندگونا		چندجمله‌ای‌ها
$\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$	$\longrightarrow$	$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$	$\longrightarrow$	$f_1, \ldots, f_s$

و پرسش طبیعی این است که آیا $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)) = \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$؟ متأسّفانه، پاسخ همواره مثبت نیست. در این مرحله، بهترین پاسخی که می‌توانیم ارائه دهیم به‌صورت زیر است.

لم ۷. *فرض کنیم $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$. دراین‌صورت $\langle f_1, \ldots, f_s\rangle \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.*

برهان. فرض کنیم $f \in \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$. این بدین معنی است که برای چندجمله‌های $h_1, \ldots, h_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$، $f = \sum_{i=1}^s h_i f_i$. ازآنجاکه $f_1, \ldots, f_s$ روی $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ صفر می‌شوند، پس $\sum_{i=1}^s h_i f_i$ نیز باید چنین شود. بنابراین f روی $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ صفر می‌شود که ثابت می‌کند $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$.

برای اثبات قسمت دوم لم، لازم است مثالی ارائه دهیم که در آن $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$ اکیداً از $\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$ بزرگتر باشد. نشان می‌دهیم که شمول

$$\langle x^2, y^2\rangle \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(x^2, y^2))$$

اکید است. ابتدا $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x^2, y^2))$ را محاسبه می‌کنیم. معادلات $x^2 = y^2 = 0$، تساوی $\mathbf{V}(x^2, y^2) = \{(0,0)\}$ را ایجاب می‌کنند. امّا طبق مثال قبل، $\langle x, y\rangle$ ایده‌آل $\{(0,0)\}$ است و ازاین‌رو $\mathbf{I}(\mathbf{V}(x^2, y^2)) = \langle x, y\rangle$. برای اینکه ببینیم این ایده‌آل اکیداً شامل $\langle x^2, y^2\rangle$ است، توجه می‌کنیم که $x \notin \langle x^2, y^2\rangle$ زیرا برای چندجمله‌ای‌های به‌صورت $h_1(x,y)x^2 + h_2(x,y)y^2$ هر یکجمله‌ای دارای درجهٔ کلی حداقل دو است. $\square$

برای میدان‌های دلخواه، رابطهٔ بین $\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$ و $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$ می‌تواند نسبتاً پیچیده باشد (برای مثال‌هایی در این مورد، تمرین‌ها را ببینید). اگرچه، روی یک میدان جبری‌بسته مانند $\mathbb{C}$ رابطهٔ مستقیمی بین این ایده‌آل‌ها وجود دارد. این رابطه را هنگام اثبات قضیهٔ صفرها در فصل ۴ توضیح خواهیم داد. اگرچه برای یک میدان کلی $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$ ممکن است که با $\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$ برابر نباشد، ایده‌آل یک چندگونا همواره شامل اطلاعاتی کافی برای تعیین چندگونا به‌طور یکتا است.

گزارهٔ ۸. *فرض کنیم V و W چندگوناهایی آفین در k^n باشند. دراین‌صورت*

(i) $V \subseteq W$ *اگروفقط‌اگر* $\mathbf{I}(V) \supseteq \mathbf{I}(W)$.

(ii) $V = W$ *اگروفقط‌اگر* $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(W)$.

برهان. اثبات اینکه (ii) نتیجهٔ مستقیم (i) است را به‌عنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم. برای اثبات (i)، ابتدا فرض می‌کنیم $V \subseteq W$. دراین‌صورت هر چندجمله‌ای که روی W صفر شود، باید روی V هم صفر شود.

این نشان می‌دهد که $\mathbf{I}(W) \subseteq \mathbf{I}(V)$. اکنون فرض کنیم $\mathbf{I}(W) \subseteq \mathbf{I}(V)$. فرض کنیم چندگونای W توسط چندجمله‌ای‌های $g_1,\ldots,g_t \in k[x_1,\ldots,x_n]$ تعریف شود. دراین‌صورت $g_1,\ldots,g_t \in \mathbf{I}(W) \subseteq \mathbf{I}(V)$ و درنتیجه g_iها روی V صفر می‌شوند. ازآنجاکه W مرکب از *تمام* صفرهای مشترک g_iهاست، نتیجه می‌شود که $V \subseteq W$. $\square$

رابطه‌ای غنی بین ایده‌آل‌ها و چندگوناهای آفین وجود دارد. مباحثی که تاکنون مطرح شده‌اند، تنها گوشهٔ کوچکی از این ارتباط را نمایان می‌سازند. این ارتباط را در فصل ۴ بیشتر مورد بررسی قرار خواهیم داد. به‌ویژه، خواهیم دید که قضایایی که راجع به ایده‌آل‌ها ثابت می‌شوند، نتایج هندسی قوی دارند. درحال‌حاضر، سه پرسش را در ارتباط با ایده‌آل‌های در $k[x_1,\ldots,x_n]$ مطرح می‌کنیم:

- (توصیف ایده‌آل‌ها) آیا هر ایده‌آل $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ را می‌توان به‌صورت $\langle f_1,\ldots,f_s \rangle$ برای عناصر $f_1,\ldots,f_s \in k[x_1,\ldots,x_n]$ نوشت؟
- (عضویت در ایده‌آل‌ها) برای چندجمله‌ای‌های $f_1,\ldots,f_s \in k[x_1,\ldots,x_n]$، آیا الگوریتمی وجود دارد که تشخیص دهد یک چندجمله‌ای دلخواه $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ متعلق به $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ است؟
- (قضیهٔ صفرها) برای چندجمله‌ای‌های $f_1,\ldots,f_s \in k[x_1,\ldots,x_n]$، چه رابطهٔ دقیقی بین $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ و $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s))$ وجود دارد؟

در فصل‌های آتی، می‌خواهیم این مسائل را به‌طور کامل حل کنیم (و وجه تسمیه قضیهٔ صفرها را توضیح خواهیم داد)، اگرچه لازم است نسبت به میدانی که روی آن کار می‌کنیم دقت کنیم.

تمرین‌های §۴

۱. معادلات

$$\begin{aligned} x^2+y^2-1 &= 0,\\ xy-1 &= 0 \end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم که اشتراک یک دایره و یک هذلولی را توصیف می‌کنند.

الف) با استفاده از جبر، y را از معادلات فوق حذف کنید.

ب) نشان دهید که چندجمله‌ای به‌دست آمده در قسمت (الف) در $\langle x^2+y^2-1, xy-1\rangle$ قرار دارد. پاسخ شما باید مشابه با کاری باشد که در (۱) انجام دادیم. راهنمایی: معادلهٔ دوم را در $xy+1$ ضرب کنید.

۲. فرض کنیم $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ یک ایده‌آل باشد و $f_1,\ldots,f_s \in k[x_1,\ldots,x_n]$. نشان دهید که احکام زیر با یکدیگر هم‌ارزند:

(i) $f_1,\ldots,f_s \in I$.

(ii) $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subseteq I$.

این نکته مفید است وقتی می‌خواهیم نشان دهیم که یک ایده‌آل مشمول دیگری است.

۳. با استفاده از تمرین قبل، تساوی‌های زیر از ایده‌آل‌های در $\mathbb{Q}[x,y]$ را ثابت کنید:

الف) $\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,y\rangle$.

ب) $\langle x+xy, y+xy, x^2, y^2\rangle = \langle x,y\rangle$.

پ) $\langle 2x^2+3y^2-11, x^2-y^2-3\rangle = \langle x^2-4, y^2-1\rangle$.