دانشگاه تهران

پاسخ تمرین سری اول مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **نیمسال دوم تحصیلی ۰۰-۹۹**

---

۱) اگر m عددی صحیح باشد، عبارت زیر را ثابت کنید و برای تعریف سقف، فرم مشابه را بدست آورده و ثابت کنید.

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4}$$

$$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = ?$$

پاسخ:

ابتدا درستی فرم داده شده را برای کف اثبات میکنیم.

چون m عددی صحیح است، بنابراین میتوان آن را به دو فرم $m = 2k$ و $m = 2k + 1$ نوشت که k عددی صحیح است.حال برای هر کدام از این فرم ها، طرفین تساوی را تشکیل میدهیم و داریم:

$m = 2k$:

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = \lceil k \rceil = k$$

$$\frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4} = \frac{2k}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{2k}}{4} = k - \frac{1}{4} + \frac{((-1)^2)^k}{4} = k - \frac{1}{4} + \frac{1^k}{4} = k - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = k$$

$m = 2k + 1$:

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = k$$

$$\frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4} = \frac{2k+1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{2k+1}}{4} = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{2k}(-1)}{4} = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = k$$

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4}$$ ☺

حال فرمی مشابه برای سقف ارائه میدهیم.

در مطالب تکمیلی ۱، گفته شد رابطه $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = m$ برای هر عدد صحیح برقرار است، بنابراین میتوان نوشت:

$$\xrightarrow{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil=m\,,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}} \frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil=m$$

$$\to \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil = m-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^m}{4} = \frac{m}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^m}{4}$$

حال مشابه کف، به اثبات فرم ارائه شده می پردازیم:

چون m عددی صحیح است، بنابراین میتوان آن را به دو فرم $m=2k$ و $m=2k+1$ نوشت که k عددی صحیح است. حال برای هر کدام از این فرم ها، طرفین تساوی را تشکیل میدهیم و داریم:

$m=2k$:

$$\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{2k}{2}\right\rceil = \lceil k\rceil = k$$

$$\frac{m}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^m}{4} = \frac{2k}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^{2k}}{4} = k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = k$$

$m=2k+1$:

$$\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil = \left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil = k+\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil = k+1$$

$$\frac{m}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^m}{4} = \frac{2k+1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^{2k+1}}{4} = k+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = k+1$$

$$\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil = \frac{m}{2}+\frac{1}{4}-\frac{(-1)^m}{4}$$ ☺

۲) اگر $x \geq 0$ عددی حقیقی باشد، موارد زیر را ثابت کنید.

$$\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$$

$$\left\lceil\sqrt{\lceil x\rceil}\right\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$$

پاسخ:

چون x عددی حقیقی است، بنابراین برای $\sqrt{x}$ دو حالت رخ میدهد. حالت اول: $\sqrt{x}\in\mathbb{Z}$ و حالت دوم: $\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}$

برای حالت اول، درستی هر دو مورد به سادگی قابل اثبات است.

$$\sqrt{x} = k \in\mathbb{Z} \to x = k^2 \in\mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{\lfloor k^2\rfloor}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{k^2}\right\rfloor = \lfloor k\rfloor = k$$

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\sqrt{k^2}\right\rfloor = \lfloor k\rfloor = k$$

$$\rightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor ☺$$

$$\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\lceil k^2 \rceil} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{k^2} \right\rceil = \lceil k \rceil = k$$

$$\lceil \sqrt{x} \rceil = \left\lceil \sqrt{k^2} \right\rceil = \lceil k \rceil = k$$

$$\rightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil ☺$$

برای حالت دوم داریم:

$$\sqrt{x} \notin \mathbb{Z} \rightarrow x = k + \{x\} \qquad k \in \mathbb{Z}\ ;\ 0 \leq \{\sqrt{x}\} < 1$$

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor k + \{x\} \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{k + \{x\}} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor ☺$$

$$\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\lceil k + \{x\} \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{k+1} \rceil$$

$$\lceil \sqrt{x} \rceil = \left\lceil \sqrt{k + \{x\}} \right\rceil = \lceil \sqrt{k+1} \rceil$$

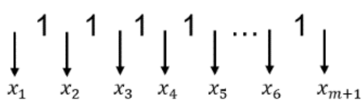
$$\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil ☺$$

۳) تعداد $m-$ زیرمجموعه‌های $[n]$ را که شامل هیچ دو عدد متوالی نیستند، محاسبه کنید.

پاسخ:

مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. حال میخواهیم زیر مجموعه ای m عضوی از این مجموعه انتخاب کنیم. به ازای هر عضو که در زیر مجموعه است 1 و به ازای مابقی اعداد که در زیرمجموعه نیستند، 0 میگذاریم. بنابراین رشته ای شامل 0 و 1 داریم که بیانگر زیرمجموعه انتخابی ما می باشد. برای مثال رشته 001101 بیانگر زیرمجموعه $\{3, 4, 6\}$ از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. برای اینکه هیچ دو عدد متوالی ای در زیرمجموعه انتخاب شده، نباشد، می بایست هیچ دو 1 ای پشت سر هم نیامده باشد. میتوان گفت بین هر دو 1 می بایست حداقل یک 0 وجود داشته باشد. چون به دنبال $m-$ زیرمجموعه هستیم، بنابراین m تا 1 داریم، پس $m-1$ خانه 0 است. حال $n-2m+1$ خانه باقی می ماند که باید در آن ها 0 قرار داده شود.

پس کافیست معادله سیاله $x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = n - 2m + 1$ را با شرط $x_i \geq 0$ حل کنیم.



در نهایت داریم: $\binom{n-2m+1-\left(-1(m+1)\right)-1}{(m+1)-1} = \binom{n-m+1}{m}$

۴) تعداد رشته‌های بیتی را به طول ۸ که شامل سه صفر متوالی و چهار یک متوالی هستند، بدست آورید.

پاسخ:

دو حالت برای خانه باقی مانده داریم. میتواند صفر یا یک باشد.

۱	۱	۱	۱

۰	۰	۰

۰ یا ۱

اگر یک باشد، میتوانیم چهار رشته $\{11111000, 11110001, 00011111, 10001111\}$ را داشته باشیم.

به طور مشابه، اگر صفر باشد، میتوانیم چهار رشته $\{11110000, 01111000, 00001111, 00011110\}$ را داشته باشیم.

بنابراین در کل، ۸ رشته خواهیم داشت.

۵)

الف) اگر $n = 1$ یا $n = 2$ باشد، دو تابع یک به یک به مجموعه $\{0,1\}$ وجود دارد. اگر $n > 2$ تابع یک به یکی به مجموعه $\{0,1\}$ وجود ندارد.

ب) تکلیف 1 و n که مشخص است و به صفر نظیر میشوند. حال برای هر کدام از $n - 2$ عدد باقی مانده، دو حالت داریم، یا به یک نظیر میشوند، یا به یک. بنابراین کل حالات برابر است با 2^{n-2}

ج) چون میخواهیم به طور دقیق، عدد یک فقط به یکی از اعداد کوچک تر از n نسبت داده شود، تنها کافی است یکی از اعداد کوچیک تر از n را انتخاب کنیم و به مابقی اعداد، صفر نظیر کنیم. بنابراین کل حالات برابر است با $\binom{n-1}{1}$