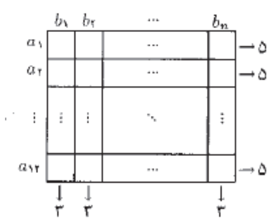
۱) توپ فوتبال از قطعات چرمی سیاه و سفید ساخته شده است. قطعات سیاه، پنج‌ضلعی منتظم و قطعات سفید، شش‌ضلعی منتظم‌اند. هر پنج‌ضلعی با ۵ شش‌ضلعی و هر شش‌ضلعی با ۳ پنج‌ضلعی و ۳ شش‌ضلعی احاطه شده است. ۱۲ قطعهٔ سیاه در توپ به‌کار رفته است. توپ چند قطعهٔ سفید دارد؟

پاسخ:

فرض کنید تعداد قطعات سفید برابر n باشد. جدولی $12 \times n$ تشکیل می‌دهیم که هر سطر آن متناظر با یک قطعه سیاه و هر ستون آن متناظر با یک قطعه سفید باشد. اگر یک قطعه سیاه با یک قطعه سفید ضلع مشترک داشته باشد، در محل تقاطع سطر و ستون متناظر با این قطعات، عدد یک و در غیر این‌صورت عدد صفر قرار می‌دهیم. طبق فرض، هر قطعه سیاه با ۵ قطعه سفید و هر قطعه سفید، با ۳ قطعه سیاه ضلع مشترک دارد، لذا در این جدول مجموع اعداد هر سطر برابر ۵ و مجموع اعداد هر ستون برابر ۳ است. بنابراین داریم:



$$3n = 12 \times 5$$
$$\Rightarrow \; n = 20$$

این سوال، از سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی مقدماتی ایران که در سال ۱۳۸۵ برگزار شد، انتخاب شده است.

۲) برنامه تمرین ماهانه یک تیم بسکتبال تنظیم شده است. این تیم در ماه ۳۰ روزه‌ای که در پیش است، قرار است هر روز حداقل یک بازی انجام دهد و همچنین کل ماه حداکثر ۴۵ بازی انجام دهد. ثابت کنید این برنامه با رعایت شرایط مذکور، به هر صورتی که چیده شود، چند روز متوالی وجود دارد که در آن روزها، تیم دقیقاً ۱۴ بازی انجام می‌دهد. بررسی کنید اگر به جای ۱۴، ۱۵ باشد، پاسخ سؤال چه تغییری می‌کند.

پاسخ:

فرض کنیم a_j تعداد بازی‌هایی باشد که تا روز $j-$ ام انجام می‌شود. آن‌گاه $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{30}$ یک دنباله صعودی از اعداد صحیح مثبت متمایز است، به‌طوری که $0 \le a_j \le 45$ برقرار می‌باشد.

اکنون اگر بتوان i و j را طوری یافت که $a_i = a_j + 14$ سوال حل می‌شود.

تعداد a_j ها، ۳۱ تاست ($a_0, a_1, \dots, a_{30}$). در تقسیم بر۱۴، ۱۴ باقی‌مانده ممکن داریم. پس طبق تعمیم اصل لانه‌کبوتری، حداقل $\left\lceil \frac{31}{14} \right\rceil = 3$ تا از a_j ها، باقیمانده یکسانی در پیمانه ۱۴ دارند. پس x, y, z موجودند به‌طوریکه:

$$a_x \equiv a_y \equiv a_z \quad \rightarrow 14 \mid a_y - a_x \quad , \quad 14 \mid a_z - a_y$$

اکنون بدون کاستن از کلیت سوال، فرض کنیم $0 \le x < y < z \le 30$ باشد. با این فرض دو حالت ممکن می‌شود:

۱) حالتی که $a_z - a_y = 14$ یا $a_y - a_x = 14$ که در این حالت سوال حل شده‌است.
۲) حالتی که $a_z - a_y = 28$ و $a_y - a_x = 28$ در اینصورت $a_z - a_x = 56$ که تناقض است (چرا؟).

در نتیجه یکی از $a_z - a_y$ یا $a_y - a_x$ باید ۱۴ باشد.

اکنون سوال را در حالت دیگر بررسی می‌کنیم:

فرض کنیم a_j تعداد بازی‌هایی باشد که تا روز $j-$ام انجام می‌شود. آن‌گاه $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{30}$ یک دنباله صعودی از اعداد صحیح مثبت متمایز است، به‌طوری که $0 \le a_j \le 45$ برقرار می‌باشد.

اکنون اگر بتوان i و j را طوری یافت که $a_i = a_j + 15$ سوال حل می‌شود.

تعداد a_j ها، ۳۱ تاست ($a_0, a_1, \dots, a_{30}$). در تقسیم بر ۱۵، ۱۵ باقی‌مانده ممکن داریم. پس طبق تعمیم اصل لانه‌کبوتری، حداقل $\left\lceil \frac{31}{15} \right\rceil = 3$ تا از a_j ها، باقی‌مانده یکسانی در پیمانه ۱۵ دارند. پس x, y, z موجودند به‌طوریکه:

$$a_x \equiv a_y \equiv a_z \quad \rightarrow 15 \,|a_y - a_x \quad , \quad 15 \,|a_z - a_y$$

اکنون بدون کاستن از کلیت سوال، فرض کنیم $0 \le x < y < z \le 30$ باشد. با این فرض دو حالت ممکن می‌شود:

۱) حالتی که $a_z - a_y = 15$ یا $a_y - a_x = 15$ که در این حالت سوال حل شده است.
۲) حالتی که $a_z - a_y = 30$ و $a_y - a_x = 30$ در اینصورت $a_z - a_x = 60$ که تناقض است (چرا؟).

در نتیجه یکی از $a_z - a_y$ یا $a_y - a_x$ باید ۱۵ باشد.

۳) فرض کنید $n \ge 3$ عددی فرد باشد. نشان دهید عددی در مجموعه $\{1, 3, 7, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ وجود دارد که بر n بخش‌پذیر باشد.

پاسخ:

فرض کنیم $A = \{1, 3, 7, \dots, 2^{n-1} - 1\} = \{2^1 - 1,\ 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$

ابتدا دقت کنید که برای هر عدد صحیح مثبت k، داریم:

$(2^k, n) = 1$، که در آن ( ) نماد ب.م.م است. از این موضوع نتیجه می‌گیریم:

$$2^k \not\equiv 0 \pmod n$$

و در نتیجه باید برای هر عدد صحیح مثبت k داشته باشیم:

$$2^k - 1 \not\equiv n - 1 \pmod n$$

اکنون به برهان‌خلف فرض کنید n هیچ یک از اعضای مجموعه A را نمی‌شمارد. برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$، مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{a \in A \mid a \equiv i \pmod n\}$$

هر عنصر A در یکی از A_k- ها برای $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ قرار گرفته است؛ بنابراین طبق اصل لانه‌کبوتری $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ وجود دارد که شامل حداقل دو عضو متمایز از A است. فرض کنیم این دو عدد $2^P - 1$ و $2^q - 1$ باشند. بدون کاستن از کلیت حل، فرض کنیم $p > q$.

اکنون داریم:

$$2^q(2^{p-q} - 1) = (2^p - 1) - (2^q - 1) \equiv j - j \pmod n \equiv 0 \pmod n$$

از هم‌نهشتی بالا نتیجه می‌شود $n \mid 2^q(2^{p-q} - 1)$. پس چون $(2^q, n) = 1$، باید $n \mid (2^{p-q} - 1)$، که تناقض است!

پس عضوی در A وجود دارد که بر n بخش‌پذیر است.

این سوال، از سوالات المپیاد ریاضی شوروی که در سال ۱۹۸۰ برگزار شده انتخاب شده است.

۴) هرکدام از پاره‌خط‌هایی که ۹ نقطه مجزا روی محیط دایره را به هم وصل کرده‌اند، با قرمز یا آبی رنگ آمیزی می‌کنیم. هر مثلثی که از ۳ نقطه از این ۹ نقطه تشکیل شده است، حداقل شامل یک ضلع قرمز است. ثابت کنید ۴ نقطه وجود دارد که تمام ۶ پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل کرده است، قرمز باشد.

پاسخ:

یک **دسته نقطه** را گروهی از رئوس تعریف می‌کنیم که هردوتای آن‌ها توسط یک و فقط یک یال به هم متصل شده باشند.

بنابراین یک دسته نقطه $k-$ تایی دارای دقیقا k راس و $\binom{k}{2}$ یال است. یک دسته نقطه تک، فقط یک رأس و یک دسته نقطه دوتایی، فقط یک یال دارد. یک دسته نقطه ۳ تایی یک مثلث است. حال برای دو عدد طبیعی p و q، $R(p,q)$ را کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم که اگر یال‌های یک دسته نقطه n تایی را با دو رنگ مثل آبی و قرمز، رنگ کنیم، آن‌گاه یک دسته نقطه $p-$ تایی آبی یا یک دسته نقطه $q-$ تایی قرمز وجود داشته باشد.

قضیه رمزی: برای تمام اعداد طبیعی $p,q \geq 2$، عدد $R(p,q)$ با شرط مذکور، وجود دارد.

فرانک رمزی در سال ۱۹۳۰، و در سن ۲۷ سالگی بعد از یک عمل جراحی درگذشت.

قضیه: برای تمام اعداد طبیعی $p,q \geq 2$،

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1)$$

اثبات در کلاس حل تمرین مطرح شده است.

تعمیم قضیه: اعداد طبیعی $p,q \geq 2$ را درنظر بگیرید، اگر $R(p-1,q)$ و $R(p,q-1)$ اعداد زوجی باشند، آن‌گاه:

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1$$

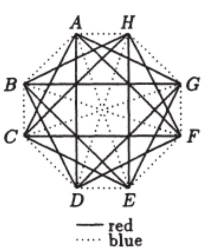
اثبات مشابه حالت ساده‌تر قضیه است که به خودتان واگذار می‌کنیم. (در صورتی که درباره اثبات سوالی داشتید، میتوانید در سوال خود را در کوئرا مطرح کنید.)

همچنین می‌دانیم که $R(2,n) = n$ و $R(3,3) = 6$.

عبارت اول در کلاس حل تمرین ثابت شده و عبارت دوم اولین مثال اعداد رمزی است.

از آنجا که هر دو عدد بالا زوج هستند، داریم:

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) - 1 = 9$$



حال نشان می‌دهیم که $R(3,4) \geq 9$ می‌باشد. برای این‌کار، مانند شکل مقابل در دسته نقطه‌ی ۸ تایی یال‌های $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA, AE, BF, CG, DH$ را به رنگ آبی و بقیه را به رنگ قرمز در می‌آوریم. می‌توان فهمید که در این شکل هیچ مثلث آبی و هیچ دسته نقطه ۴ تایی قرمز وجود ندارد. پس $R(3,4) \geq 9$.

بنابراین $R(3,4) = 9$.

مطالب بالا چه ارتباطی به سوال مطرح شده دارند؟

دقت کنید که $R(3,4) = 9$. این نشان می‌دهد که رنگ آمیزی مطرح شده در سوال یک رنگ آمیزی دوتایی روی یک دسته نقطه $R(3,4) = 9$-تایی تعریف می‌کند. طبق فرض هیچ دسته نقطه ۳-تایی آبی رنگی در شکل وجود ندارد (زیرا هرمثلثی که با انتخاب ۳ نقطه از ۹ نقطه مشخص می‌شود دارای حداقل یک ضلع قرمز رنگ است). پس باید یک دسته نقطه ۴ تایی قرمز رنگ در شکل موجود باشد. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که ۴ نقطه وجود دارد که تمام $\binom{6}{2} = 6$ پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل کرده‌اند، قرمز باشند.

این سوال، از سوالات المپیاد ریاضی کانادا که در سال ۱۹۷۰ برگزار شده انتخاب شده‌است.

۵) هر یک از اتحادهای ترکیبیاتی زیر را با استفاده از استدلالی ترکیبیاتی ثابت کنید.

a) $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$

b) $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1}$

c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

پاسخ:

(a

سوال: چگونه می‌توان یک کمیته شامل m نفر از یک کلاس $n+1$ نفری انتخاب کرد؟

جواب اول: m نفر از این کلاس را انتخاب کنیم☺. این کار طبق تعریف به $\binom{n+1}{m}$ طریق ممکن است.

جواب دوم: دو نفر A و B را از این کلاس در نظر بگیرید. اکنون حالت‌بندی زیر را انجام می‌دهیم:

حالت اول: نفر A برای کمیته انتخاب شده و $m-1$ نفر باقی‌مانده را از بین n نفر باقی‌مانده به $\binom{n}{m-1}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

حالت دوم: A برای حضور در کمیته انتخاب نشده و B انتخاب شده باشد. اکنون $m-1$ نفر باقی‌مانده را از بین $n-1$ نفر باقی‌مانده به $\binom{n-1}{m-1}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

حالت سوم: هیچ یک از A و B برای حضور در کمیته انتخاب نشده باشند. آن‌گاه m عضو کمیته را از بین $n-1$ نفر باقی‌مانده به $\binom{n-1}{m}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

اکنون طبق اصل جمع، باید مجموع این ۳ حالت با جواب اول یکسان شود، یعنی :

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

(b

سوال: به چند طریق می‌توانیم یک کمیته (با اندازه های مثبت!) از یک کلاس شامل n دانش آموز انتخاب کنیم، به‌طوری که یکی از دانش آموزان، سرگروه باشد؟

جواب اول: برای یک کمیته به سایز r که $0 < r \leq n$، $\binom{n}{r}$ تعداد حالات انتخاب اعضای کمیته است، همچنین r حالت برای انتخاب سرگروه داریم که بنابر اصل ضرب، $r\binom{n}{r}$ تعداد کمیته، با فرض‌های سوال می‌توان تشکیل داد، که با درکنار هم قرار دادن همه حالات برای r به عبارت $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}$ می‌رسیم.

جواب دوم: ابتدا سرگروه را از میان n دانش‌آموز حاضر در کلاس انتخاب می‌کنیم. اکنون $n-1$ دانش‌آموز دیگر، هرکدام یا در کمیته هستند یا نیستند. پس با شمارش از این طریق به $n \cdot 2^{n-1}$ می‌رسیم.

(c

ابتدا عبارت سمت راست را کمی ساده تر می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \binom{n+1}{2}^2$$

مجموعه اول: فرض کنیم S نمایان‌گر مجموعه ۴ تایی‌های اعداد صحیح از ۰ تا n است که درایه‌ی آخر آن از همگی درایه‌های قبلی اکیداً بزرگ‌تر باشد،

$$S = \{(h, i, j, k) \mid 0 \leq h, i, j < k \leq n\}$$

برای $1 \leq k \leq n$، اگر k را به عنوان آخرین درایه داشته باشیم، برای انتخاب h, i, j، k^3 انتخاب داریم. در نتیجه:

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

مجموعه دوم: فرض کنیم T نمایانگر مجموعه زوج مرتب‌هایی از زیر مجموعه‌های دو عضوی $\{0,1, \dots, n\}$ باشد.

اگر اعضای زیرمجموعه‌های خود را با ترتیب صعودی بنویسیم، T را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$T = \{(\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}) \mid 0 \leq x_1 < x_2 \leq n \quad and \quad 0 \leq x_3 < x_4 \leq n$$

مشخصاً داریم:

$$|T| = \binom{n+1}{2}^2$$

تناظر یک به یک:

برای آن‌که نشان دهیم اندازه T و S یکسان است، نشان می‌دهیم یک تناظر یک به یک مثل $f: S \to T$ بین این مجموعه‌ها وجود دارد.مثلا:

$$f\big((h, i, j, k)\big) = \begin{cases} (\{h, i\}, \{j, k\}) & if \quad h < i \\ (\{j, k\}, \{j, h\}) & if \quad h > i \\ (\{i, k\}, \{j, k\}) & if \quad h = i \end{cases}$$

برای مثال:

$$f\big((1,2,3,4)\big) = (\{1,2\}, \{3,4\})$$

$$f\big((2,1,3,4)\big) = (\{3,4\}, \{1,2\})$$

$$f\big((1,1,2,4)\big) = (\{1,4\}, \{2,4\})$$

به عنوان یک تمرین مبانی ریاضی، می‌توانید ثابت کنید که تابع بالا، در واقع یک تناظر یک به یک است!

روش دیگری نیز برای اثبات این اتحاد بجز استقرا وجود دارد که اثبات به کمک شکل و دوگانه شماری است که در کتاب کرجی آورده شده و ایده اثبات در کلاس توضیح داده شده است.