جلسه چهاردهم

فرم کلی روابط بازگشتی :

شرایط اولیه :

$a_0=A_0$,$a_1=A_1$,........,$A_v=a_v$.

$a_n=f_n(a_{n-1},a_{n-2},.......a_1,a_0)$, $n>v$.

اگر $f_n(a_{n-1},.........,a_0)$ برحسب $a_{n-1},.....,a_0$ خطی باشد به رابطه بازگشتی مذکور یک رابطه بازگشتی خطی می گوییم.

در این حالت به ازای آرایه ی دو بعدی مانند $\{g_{n,i}\}$ **و تابعی مانند** $F(n)$ داریم :

$$f_n(a_{n-1},.........,a_0)=\sum_{i=0}^{n-1} g_{n,i} \times a_i+F(n)$$

مثال :

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)a_i+n \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_n=\sum(i+1)b_i+1, n\geq 1 \\ b_0=1 \end{cases}$$

جلسه چهاردهم

اگر در عبارت $f_n(a_{n-1},\dots\dots,a_0)$ جمله های $a_{n-k-1}\dots\dots a_0$ حضور نداشته باشند ولی جمله a_{n-k} وجود نداشته باشد به معادله بازگشتی $a_n= f_n(a_{n-1},\dots\dots,a_0) +F(n)$ (❈) یک معادله مرتبه k گفته میشود.

اگر در معادله (❈) داشته باشیم $F(n) =0$ به آن یک معادله همگن گفته میشود.

معادله بازگشتی خطی با ضرایب ثابت مرتبه k معادله ای به صورت :

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots\dots+c_ka_{n-k}+F(x)$$

است که در آن $c_k\neq0$ اگر بعلاوه $F(n) =0$ آنگاه به معادله فوق یک معادله بازگشتی خطی همگن مرتبه k با ضرایب ثابت گفته میشود . چند جمله ای مشخصه متناظر این معادله طبق تعریف عبارتست از :

$$\Delta(r)=r^k-c_1r^{k-1},\dots\dots,c_{k-1}r-c_k$$

میدانیم چند جمله ای که ریشه های آن $\Delta(r)$ باشد را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta^{(R)}(r)=c_kr^k+c_{k-1}r^{k-1}+\dots\dots+c_1r$$

قضیه1.فرض کنید $c_1,c_2\neq0$ اعداد مفروضی باشند و معادله $\Delta(r)=r^2-c_1r-c_2$ دارای دو ریشه متمایز r_1,r_2 باشد. در اینصورت دنباله $\{a_n\}_{n\geq0}$ جوابی از معادله بازگشتی $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}\ ,\ n\geq2$

است.

اگر و تنها اگر ثابت های α_1 و α_2 موجود باشند بطوریکه : $a_n=\alpha_1r_1^n +\alpha_2r_2^n$.

اگر r_1,r_2 ریشه های $r^2=c_1r-c_2$ باشند داریم :

$$r_1^2=c_1r_1+c_2\Rightarrow\times\alpha_1 \qquad r_2^2=c_1r_2+c_1\Rightarrow\times\alpha_2 \qquad \begin{cases} r_1^n=c_1r_1^{n-1}+c_2r_1^{n-2} \\ r_2^n=c_1r_2^{n-1}+c_1r_2^{n-2} \end{cases}$$

در نتیجه دنباله : $b_n=\alpha_1r_1^n +\alpha_2r_2^n$ در رابطه بازگشتی $b_n=c_1b_{n-1}+c_2b_{n-2}$ صدق میکند .

جلسه چهاردهم

حال فرض کنیم دنباله مفروض $\{x_n\}_{n\geq 0}$ در رابطه بازگشتی $x_n=c_1x_{n-1}+c_2x_{n-2}$ صدق کند . برای آنکه نشان دهیم دنباله $\{x_n\}_{n\geq 0}$ نیز به همان فرم مطرح شده در صورت قضیه هست ابتدا دنباله ای مانند

$b_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$ به دست می آوریم بطوریکه:

$$\begin{cases} b_0=x_0 \\ b_1=x_1 \end{cases}$$

(در واقع برای این منظور باید α_1 و α_2 را بطور مناسب تعیین کنیم)

سپس نتیجه میگیریم به ازای هر مقدار $b_n=x_n, n>0$ و قسمت عکس قضیه از اینجا ثابت میشود.

حکم فوق به کمک استقرا با دو مقدمه نسبت به n ثابت میشود).

معادله فیبونانچی به این روش حل شود.

قضیه2.در قضیه قبل فرض کنید معادله درجه دوم $r^2-c_1r-c_2=0$ به جای دو ریشه متمایز دارای ریشه مضاعف r_0 باشد.در اینصورت دنباله $\{a_n\}$ جوابی از معادله بازگشتی $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ است.اگر و تنها اگر ثابت های α_1 و α_2 موجود باشند بطوریکه: $a_n=\alpha_1r_0^n+\alpha_2nr_0^n$

قضیه3.فرض کنید $c_k\neq 0$ و معادله $\Delta(r)=r^k-c_1r^{k-1}-\dots\dots-c_k=0$ دارای k ریشه متمایز $r_1\dots r_k$ باشد در اینصورت دنباله $\{a_n\}$ جوابی از معادله بازگشتی $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ است اگر و تنها اگر مقادیر $\alpha_1\dots\dots\alpha_2$ موجود باشند بطوریکه: $a_n=\alpha_1r_1^n+\dots\dots+\alpha_kr_k^n$