دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۸**

مرور بر مطالب درس:

- **ضریب چند جمله‌ای:**

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \ \dots \ n_k!}$$

- **تعداد جایگشت‌ها با اشیاء مشابه:**

تعداد جایگشت‌های n شیء که n_i تا از آن‌ها تایپ i را دارند. برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \ \dots \ n_k!}$$

- **مسئله توزیع ۱:**

تعداد راه‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبه‌ی متمایز به صورتی که، n_i تا شیء در جعبه‌ی i قرار گیرد. برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \ \dots \ n_k!}$$

- **مسئله توزیع ۲:**

تعداد راه‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبه‌ی متمایز به صورتی که، هیچ جعبه‌ای خالی نماند را با نماد $T(n,k)$ نمایش می‌دهیم:

$$T(n,k) = \sum_{i_1+\dots+i_k=n} \binom{n}{i_1, \dots, i_k}$$

- **عدد استرلینگ نوع دوم:**

تعداد راه‌های افراز $[n]$ به k جزء که آن را عدد استرلینگ نوع دوم می‌نامیم و با نماد $S(n,k)$ یا $\left\{ n \atop k \right\}$ نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} T(n,k)$$

- **اعداد بل:**

دنباله‌ی اعداد بل $B(n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B(0) := 1$$

$n > 0$ $\quad$ $B(n) =$ تعداد راه‌های افراز $[n]$

و همین‌طور داریم:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$$

- **قضیه‌ی بسط چند جمله‌ای:**

اگر n عددی صحیح و نامنفی باشد. داریم:

$$(a_1 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$$

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) اتحاد واندرموند را به کمک مشبکه ثابت کنید.

$$\sum_{i+j=r} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{r}$$

۲) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) با حروف FALAFEL چند واژه به طول ۵ می‌توان ساخت.

ب) با حروف SUBSTITUTE چند واژه به طول ۵ می‌توان ساخت.

۳) به چند طریق می‌توان kn نفر را به k تیم n نفری تقسیم کرد.

۴) رابطه‌ی بازگشتی زیر را برای اعداد بل اثبات کنید.

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B(n-k) = B(n)$$

۵) برابری زیر را ثابت کنید.

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$$

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

تعداد روش‌های رفتن از نقطه‌ی $(0,0)$ به $(r, m+n-r)$ با عملیات بالا و راست را در نظر بگیرید. می‌دانیم تعداد این راه‌ها برابر است با:

$$\binom{r+m+n-r}{r} = \binom{m+n}{r}$$

با دوگانه شماری اتحاد را اثبات می‌کنیم. نقاط $(i, m-i)$ را در نظر بگیرید. برای رسیدن به مقصد دقیقاً یک بار از یکی از این نقاط عبور خواهیم کرد. تعداد روش‌های رفتن از نقطه‌ی $(0,0)$ به $(r, m+n-r)$ با شرط آنکه از نقطه‌ی $(i, m-i)$ عبور کنیم را به دست می‌آوریم.

$$(0,0) \to (i, m-i) = \binom{m-i+i}{i} = \binom{m}{i}$$

می‌دانیم که $(r, m+n-r) = (i+j, m-i+n-j)$. پس برای رفتن از $(i, m-i)$ به $(r, m+n-r)$. دقیقا j تا حرکت به راست و $n-j$ تا حرکت به بالا نیاز داریم.

$$(i, m-i) \to (r, m+n-r) = \binom{n-j+j}{j} = \binom{n}{j}$$

پس کل حالات برابر است با $\binom{m}{i}\binom{n}{j}$ حال برای هر i خواهیم داشت:

$$\sum_{i+j=r} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{r}$$

۲)

الف) روی تعداد تکرارها حالت بندی می‌کنیم. حروف F,A,L هر کدام ۲ بار تکرار شده‌اند. و E تنها ۱ بار آمده است.

حالت اول: واژه دارای ۲ تکرار باشد: $\binom{3}{2} \times \frac{5!}{2!2!} = 90$

حالت دوم: واژه دارای ۱ تکرار باشد. $\binom{3}{1} \times \frac{5!}{2!} = 180$

توجه داشته باشید حالت بدون تکرار وجود نخواهد داشت. پس جواب کل برابر است با ۲۷۰ واژه.

ب) حالت بندی خواهیم کرد. توجه کنید که T ۳ بار تکرار شده است و U,S هر کدام ۲ بار تکرار شده‌اند و B,I,E هر کدام ۱ بار آمده‌اند.

حالت اول: T در واژه موجود باشد و ۱ حرف ۲ بار تکرار شده باشد: $\binom{2}{1} \times \frac{5!}{2!3!} = 20$

حالت دوم: T در واژه موجود باشد و حروف بی‌تکرار: $\binom{3}{2} \times \frac{5!}{3!} = 60$

حالت سوم: ۱ حرف با ۲ تکرار و بقیه بی‌تکرار: $\binom{2}{1} \times \frac{5!}{2!} = 120$

حالت چهارم: ۲ حرف با ۲ تکرار و ۱ حرف بی‌تکرار: $\binom{3}{1} \times \frac{5!}{2!2!} = 90$

پس جواب کل برابر است با ۲۹۰ واژه.

۳)

تعداد نفرات برابر kn است و این افراد همگی متفاوت‌اند. k تیم متفاوت هم داریم و می‌دانیم در هر تیم باید n نفر قرار گیرند. پس مسئله برابر است با توزیع اشیاء متفاوت در جعبه‌های متفاوت است به طوری که مقدار مشخصی در هر جعبه قرار گیرد، پس طبق مسئله توزیع ۱ جواب برابر است با:

$$\frac{kn!}{n! \dots n!} = \frac{kn!}{n!^k}$$

۴)

برای روشن شدن مسئله از یک مثال کمک می‌گیریم. فرض کنید مجموعه $\{1, \dots, n\}$ نشانگر دانشجویانی باشند که می‌خواهیم درون کلاس‌هایی جای بدهیم. دانشجوی n را در نظر بگیرید. این دانشجو همراه تعدادی دانشجو درون یک کلاس قرار دارد. روی تعداد همکلاسی‌های n حالت بندی می‌کنیم.

فرض کنید تعداد هم کلاسی‌ها برابر $k-1$ باشد. به $\binom{n-1}{k-1}$ حالت می‌توانیم دانشجو انتخاب کنیم که در این کلاس قرار بگیرند. حال $n-k$ دانشجو داریم که عضو این کلاس نیستند و باید به تعدادی کلاس افراز شوند که این کار به $B(n-k)$ حالت قابل انجام است. پس داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B(n-k)=B(n)$$

۵)

تعریفی که از اعداد استرلینگ ارائه دادیم را می‌نویسیم.

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = \frac{1}{n!}T(n,n)$$

منظور از $T(n,n)$ برابر تعداد حالات توزیع n شیء متفاوت در n جعبه‌ی متفاوت (به شرطی که هیچ جعبه‌ی خالی نماند) است. در هر جعبه دقیقا یک شیء قرار می‌گیرد. برای شیء اول n انتخاب برای دومی $n-1$ انتخاب و ... پس واضح است این کار به $n!$ قابل انجام است. نتیجه می‌گیرم $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$.

برای اثبات برابری $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ مجدداً $T(n,1)$ را در نظر بگیرید. واضح است تنها یک حالت برای توزیع n شیء به یک جعبه موجود است. پس $T(n,1)$ و $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \times 1$ و برابری نتیجه خواهد شد.