۱۳۹۷/۰۹/۲۴

مبانی ترکیبیات

جلسه بیستم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتای حی»

قضیه اصل لانه کبوتری: فرض کنید K عددی صحیح و مثبت باشد و $K+1$ شی یا بیشتر در K جعبه قرار داده شوند، در این صورت حداقل یک جعبه وجود دارد که شامل ۲ شی یا بیشتر باشد.

نتیجه: اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A| \geq |B|+1$ آنگاه f ۱-۱ نیست.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n، مضربی از n وجود دارد که نمایش دهدهی آن فقط شامل ارقام ۱ و ۰ است.

اثبات: اعداد ۱ و ۱۱ و ۱۱۱ و ... و $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ رقم}}$ را در نظر بگیرید. اگر یکی از این اعداد بر n بخش پذیر باشد مسأله حل شده است. در غیر این صورت $n-1$ لانه با شماره های ۱ و ۲ و ... و $n-1$ را در نظر بگیرید و هر یک از اعداد فوق را در لانه هم باقی مانده با آن به پیمانه n قرار دهید، چون n شی و $n-1$ لانه داریم، حداقل یک لانه شامل دو شی وجود دارد مثلاً فرض کنید $K > L$ و

$b = \underbrace{11\cdots1}_{L\text{ رقم}}$ ، $a = \underbrace{11\cdots1}_{K\text{ رقم}}$ در نتیجه $n \mid a-b$ اما

$$a-b = \underbrace{11\cdots1}_{K-L\text{ رقم } 1}\underbrace{00\cdots00}_{L\text{ رقم } 0}$$

اصل لانه کبوتری تعمیم یافته: اگر N شی در K جعبه توزیع شود لااقل یک جعبه وجود دارد که لااقل شامل $\lceil \frac{N}{K} \rceil$ شی باشد.

صورت معادل: K و m را اعدادی صحیح و مثبت فرض کنید. اگر $mk+1$ شی یا شیء درون K لانه توزیع شوند لااقل $m+1$ شی است.

مثال: اگر ۳۶۷ نفر در یک کلاس جمع شوند لااقل دو نفر با روز جشن تولد یکسان وجود دارند.

مثال: برنامه تمرین های ماهانه یک تیم بیسبال در یک ماه سی روزه به قرار زیر است این تیم در هر روز لااقل یک بازی انجام می دهد از سوی دیگر مجموع بازی های این تیم در مدت یک ماه نباید از ۴۵ تجاوز کند. ثابت کنید چند روز متوالی وجود دارد که تعداد بازی های تیم مذکور در آن روزها مجموعاً برابر ۱۴ است.

اثبات:

$a_1 =$ تعداد بازی ها روز اول

$a_2 =$ تعداد بازی ها تا آخر روز دوم

$\vdots$

$a_i =$ تعداد بازی ها تا آخر روز i ام

$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{30} \leq 45$

$15 \leq a_1+14 < a_2+14 < \cdots < a_{30}+14 \leq 59$

$b_i := a_i + 14$

$$15 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{30} \leq 59$$

حال ۶۰ عدد $b_{30}, \ldots, b_1, a_{30}, \ldots, a_1$، ۵۹ مقدار ممکن ۵۹، ...، ۲، ۱ را به خود می گیرند پس دو تا از آنها (طبق اصل لانه کبوتری) باید باهم برابر باشند از طرفی چون هر دو a_i و هر دو b_j متمایزند پس باید اولی ای وجود داشته باشد که $a_i = b_j$ یعنی $a_i = a_j + 14$ یعنی $a_i - a_j = 14$ یعنی تعداد بازی های تیم مذکور از روز $j+1$ ام تا روز i ام دقیقاً مساوی ۱۴ است.

مثال: فرض کنید $a_1, \ldots, a_n$ دنباله ای از عدد ها حقیقی باشد و یک زیر دنباله

از دنباله مذکور، عبارت است از دنباله‌ای به صورت
$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ که i ها اعدادی صحیح‌اند که در $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ صدق می‌کنند. البته تعریف فوق را می‌توان به حالتی که طول دنباله نامتناهی باشد (یا طول دنباله و زیردنباله، هر دو نامتناهی باشند) توسیع داد.

یک دنباله (زیردنباله) اکیداً صعودی است اگر هر جمله آن از جمله قبلی اکیداً بزرگتر باشد.

یک دنباله (زیردنباله) اکیداً نزولی است اگر هر جمله آن از جمله قبلی اکیداً کوچکتر باشد.

قضیه ۳: هر دنباله‌ای به طول n^2+1 از اعداد حقیقی متمایز، شامل زیردنباله‌ای به طول $n+1$ است که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

اثبات: به ازای $k=1,\dots,n^2+1$ فرض کنید i_k طول بلندترین زیردنباله اکیداً صعودی از دنباله مذکور باشد که از a_k (از موقعیت k-ام) آغاز می‌شود و d_k طول بلندترین زیردنباله‌ی اکیداً نزولی از دنباله مذکور باشد که از a_k (از موقعیت k ام) آغاز می‌شود.

حال به برهان خلف فرض کنید حکم قضیه برقرار نباشد یعنی $i_k < n+1$ و $d_k < n+1$ به ازای هر مقدار k، $1 \leq k \leq n^2+1$. در این صورت به ازای هر مقدار k، $1 \leq k \leq n^2+1$، داریم $(i_k, d_k) \in [n] \times [n]$ پس طبق اصل لانه کبوتری به ازای مقادیری از s و t با $1 \leq s < t \leq n^2+1$ داریم $(i_s, d_s) = (i_t, d_t)$

اکنون دقت کنید طبق فرض قضیه، داریم $a_s \neq a_t$ یعنی $a_s < a_t$
یا $a_s > a_t$. طبق تعریف مقادیر i و d، اگر $a_s < a_t$ آن گاه
$i_s > i_t$ و اگر $a_s > a_t$ آن گاه $d_s > d_t$. در هر حال تساوی
$(i_t, d_t) = (i_s, d_s)$ ممتنع است. این تناقض از این فرض
ناشی می شود که هیچ زیردنباله اکیداً یکنواخت به طول بیش از n
وجود ندارد پس فرض خلف باطل است.

۱۳۹۷,۰۹,۲۶

مبانی ترکیبیات

جلسه بیست و یکم

Sepehr omidvar

«به نام یکتایی»

تعریف تابع مولد: تابع مولد معمولی (ordinary generating function) یک دنباله‌ی مفروض $(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots)$ یک سری توانی به صورت زیر است:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$$

مثال:

(i) $(3, 3, \ldots, 3, \ldots) \leftrightarrow A(x) = \sum_{i \geq 0} 3x^i = \frac{3}{1-x}$

(ii) $(1, 2, 3, \ldots) \leftrightarrow A(x) = \sum_{i \geq 0} (i+1)x^i \overset{(\text{چرا؟})}{=} \frac{1}{(1-x)^2}$

(iii) $(1, 2, 4, \ldots, 2^i, \ldots) \leftrightarrow A(x) = \sum_{i \geq 0} 2^i x^i = \frac{1}{1-2x}$

(iv) $(1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots) \leftrightarrow A(x) = \sum_{i=0}^{m} x^i = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$

تبصره: اگر از جایی به بعد a_i مساوی صفر شود، تابع مولد از یک سری به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود که به آن چندجمله‌ای مولد گوییم.

m عدد صحیح مثبت مفروض

(v) $\left(1, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{m}, 0, 0, \ldots\right) \leftrightarrow A(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i$

$$= (1+x)^m$$

نکاتی درباره‌ی سری‌ها توانی

$$\sum_{i \geq 0} a_i x^i + \sum_{i \geq 0} b_i x^i = \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) x^i$$

$$\sum_{i\geq 0} a_i x^i \sum_{i\geq 0} b_i x^i = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$$

ضرب کوشی دو دنباله $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ که

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\right) = \sum_{i\geq 1} i a_i x^{i-1} = \sum_{i\geq 0} (i+1) a_{i+1} x^i$$

مثال:

(vi) $(0, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \dots) \leftrightarrow Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots = \sum_{i\geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$

(vii) $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots) \leftrightarrow exp(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

مثال: تابع مولد دنباله $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ (با تعریف $a_i = [2 | i]$) را بدست آورید و آن را به کسرهای ساده تبدیل کنید. از بسط کسرها چه نتیجه‌ای بدست می‌آید؟

$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \leftrightarrow A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geq 0} x^i + \sum_{i\geq 0} (-1)^i x^i\right) = \sum_{i\geq 0} \frac{1+(-1)^i}{2} x^i$$

$$\Rightarrow [2 | i] = \frac{1+(-1)^i}{2}$$

اگر در مثال بالا $(1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ بود:

$$B(x) = 1 + x^3 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-wx} + \frac{1}{1-w^2x}\right)$$

$$1-x^3=(1-x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x) \quad \omega=e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$\frac{1}{1-x^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-\omega x}+\frac{C}{1-\omega^2 x}$$

$$[3|i]=\frac{1}{3}(1+\omega^i+\omega^{2i}) \ , \ \omega=e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

در حالت کلی:

$$(1-x^m)=\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-e^{\frac{2\pi k}{m}i}x\right)$$

مسأله: فرض کنید m عدد صحیح مثبتی باشد. حاصل $A(x)=\sum_{i\geq 0}a_i x^i$ و $\sum_{i\geq 0} a_{\lfloor \frac{i}{m} \rfloor} x^i$ را برحسب $A(x)$ بدست آورید.

مسأله: اگر $A(x)$ تابع مولد دنباله $(a_0, a_1, \dots)$ باشد تابع مولد دنباله $(b_0, b_1, \dots)$ که $b_i=ia_i$ را برحسب $A(x)$ محاسبه کنید.

$$(0, a_1, 2a_2, 3a_3, \dots) \longleftrightarrow ?$$

$$A(x)=\sum a_i x^i \Rightarrow \sum_{i\geq 1} i a_i x^{i-1}=\frac{d}{dx}(A(x))$$

$$\Rightarrow \sum i a_i x^i = x\frac{d}{dx}A(x)=(xD)A(x)$$

قضیه: فرض کنید m عدد صحیح مثبتی باشد و $A(x)=\sum_{i\geq 0}a_i x^i$.

تابع مولد دنباله‌ی $(b_i)_{i\geq 0}$ که با $b_i=i^m a_i$ مشخص می‌شود را بدست آورید. جواب:

$$(xD)^m A(x)$$

مثال:

$m=2$

$$(xD)^2 A = xD\,xD\,A = xD(xA')$$

$$= xA' + x^2A'' = (xD + x^2D^2)A$$

$$(xD)^2 = xD + x^2D^2$$

$$(xD)^3 \overset{?}{=} xD + 3x^2D^2 + x^3D^3$$

ضرایب دوجمله‌ای توسیع یافته:

اگر α یک عدد دلخواه باشد و m عدد صحیح باشد طبق تعریف داریم

$$\binom{\alpha}{m} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m<0 \\ \dfrac{\alpha^{\underline{m}}}{m!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} & \text{اگر } m\geq 0 \end{cases}$$

مثال:

$$\binom{-2}{3} = \frac{-2(-3)(-4)}{3!} = -4$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{-3+\sqrt{3}}{2}}{4!} = \frac{1}{12}$$

قضیه دوجمله‌ای توسیع یافته:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i\geq 0} \binom{\alpha}{i} x^i$$

مثال: تعمیم رابطه واندرموند: ثابت کنید به ازای هر
مقدار حقیقی α , β و هر عدد صحیح مثبت m داریم:

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{m-i}=\binom{\alpha+\beta}{m}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\alpha^{i}\beta^{m-i}=(\alpha+\beta)^{m}$$