دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۹**

مرور بر مطالب درس:

- **قضیه $raney$:**

اگر $x_1, x_2, \cdots, x_m$ دنباله ای از عددهای صحیح با مجموع ۱ باشد، آنگاه دقیقاً یکی از انتقال های دوری زیر، دارای این خاصیت است که تمام مجموع های جزئی آن مثبت هستند.

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, \cdots, x_m)\\(x_2, x_3, \cdots, x_1)\\\vdots\\(x_m, x_1, \cdots, x_{m-1})\end{gathered}$$

- **اصل طرد-شمول:**

اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ زیر مجموعه‌های دلخواه مجموعه مرجع متناهی M باشند، داریم:

$$|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'| = |M| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1^n)|A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

- **اصل طرد-شمول با نمادگذاری های دیگر:**

۱.

$$|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'| = N_0 - N_1 + \cdots + (-1)^n N_n$$

که در آن

$$\begin{gathered}N_0 = |M|\\N_1 = |A_1| + \cdots + |A_n|\\N_1 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|\\\vdots\\N_n = |A_1 \cap \ldots \cap A_n|\end{gathered}$$

۲.

$$|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |A_I|$$

که در آن A_I به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \to A_I = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$$

- **نمادگذاری بر حسب خاصیت‌ها:**

فرض کنید $A_i \leftrightarrow p_i$(تناظر یک‌به‌یک بینشان برقرار است). در این حالت $|A_i| = N(p_i)$. رابطه اصل طرد-شمول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N(p_1' \cdots p_n') = N - N(p_1) - \cdots - N(p_n) + N(p_1p_2) + \cdots + N(p_{n-1}p_n) - \cdots + (-1)^n N(p_1 \dots p_n)$$

نکته: $A \leftrightarrow P\ , B \leftrightarrow Q$، آنگاه $A \cap B \leftrightarrow P \wedge Q\ or\ PQ$

- **ساده سازی فرمول در یک حالت متقارن:**

اگر به ازای هر r تایی مرتب از اعداد متمایز $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ داشته باشیم

$$N\left(p_{i_1} \cdots p_{i_r}\right) = N(p_1 \dots p_r) = t_r$$

آنگاه

$$N(p_1' \cdots p_n') = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} t_j$$

- **توابع پوشا:**

فرض کنید A مجموعه m عضوی و B مجموعه n عضوی باشد. در این صورت تعداد توابع پوشا مانند $f\colon A \to B$ برابر است با

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

- **قرار دادن n گوی متمایز در k جعبه متمایز به طوری که هیچ جعبه ای خالی نماند:**

$$T(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

- **محاسبه عدد دوم استرلینگ:**

تعداد افرازهای یک مجموعه n عضوی به k جزء ناتهی.

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} T(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n \\ i_j > 0}} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

- **تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ در مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, r\}$ برابر است با:**

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n - jr - 1}{k-1}$$

- **پریش‌ها:**

پریش، جایگشتی است که در آن هیچ مؤلفه‌ای در جایگاه طبیعی خود قرار ندارد. برای محاسبه پریش‌های n تایی داریم:

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j n!}{j!}$$

- **تابع فی-اویلر:**

تعداد اعدادی از مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ که نسبت به n اول‌اند را با $\varphi(n)$ نشان می‌دهیم و φ را تابع فی-اویلر می‌نامیم. فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه استانداراد طبیعی عدد n باشد. آن گاه داریم:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

- **تابع موبیوس کلاسیک:**

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d)$$

$$\mu(d)=\begin{cases}1 & d=1\\ (-1)^m & d=p_1\dots p_m\\ 0 & o.w\end{cases}$$

- **وارون سازی موبیوس:**

اگر f و g دو تابع با دامنه اعداد صحیح مثبت باشند، دو رابطه زیر معادلند:

$$(i)\ \forall n\geq 1 \qquad g(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

$$(ii)\ \forall n\geq 1 \qquad f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g(\frac{n}{d})$$

- **تعمیم اصل طرد-شمول:**

اگر M مجموعه ای از اشیاء و p_i $(1\leq i\leq n)$ شرایطی روی اعضایM باشند، E_m (تعداد عضوهایی از M که دقیقاً در m تا از این شرط ها صدق می‌کنند) برابر است با:

$$E_m=\sum_{j=m}^{n}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}N_j$$

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) تعداد اعضای $S=\{1,2,\dots,1000\}$ را بیابید که:

الف) بر هیچ کدام از اعداد 2,3,5 بخش‌پذیر نباشد.

ب) دقیقاً بر یکی از اعداد 2,3,5 بخش‌پذیر باشد.

۲) تعداد جواب‌های معادله $x+y+z=10$ را در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x\leq 3$، $y\leq 4$ و $z\leq 5$ بیابید.

۳) به ازای هر عدد طبیعی مانند n ($n\geq 3$) ثابت کنید

$$d_n=(n-1)(d_{n-1}+d_{n-2})$$

۴) تعداد اعداد طبیعی کوچک تر از 5000 که نسبت به 1000 اول باشند را حساب کنید.

۵) 4 راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند، در یک محل کار می‌کنند. این 4 نفر به چند طریق می‌توانند اتومبیل های خود را عوض کنند به طوری که فقط یک نفر اتومبیل خود را براند؟

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

فرض کنید p_i شرط بخش پذیری اعضای S بر $i(i=2,3,5)$ باشد. طبق تعمیم اصل طرد-شمول، قسمت الف و ب به ترتیب برابر اند با E_0 و E_1.

می‌دانیم $N(p_2) = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$ است. و به طور مشابه

$N(p_3) = 333 \, , N(p_5) = 200 \, , N(p_2p_3) = 166 \, , N(p_2p_5) = 100 \, , N(p_3p_5) = 66 \, , N(p_2p_3p_5) = 33$

در نتیجه داریم:

$$N_0 = 1000, N_1 = 500 + 333 + 200 = 1033, N_2 = 166 + 100 + 66 = 332, N_3 = 33$$

الف) $E_0 = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 266$

ب) $E_1 = N_1 - 2N_2 + 3N_3 = 648$

۲)

M را مجموعه همه جواب های نامنفی معادله موردنظر در اعداد صحیح و نامنفی در نظر می‌گیریم. پس داریم

$$N_0 = |M| = \binom{10+3-1}{3-1} = 66$$

می‌گوییم جواب (x, y, z) به ترتیب دارای ویژگی p_1، p_2 و p_3 است هرگاه $x > 3$، $y > 4$ و $z > 5$. بنابراین پاسخ مسئله برابر با تعداد اعضایی در M است که هیچ یک از این 3 ویژگی را ندارند. $N(p_1)$ برابر با تعداد جواب‌های معادله $x + y + z = 10$ در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی با شرط $x > 3$ است. با فرض $x_1 = x - 4$، تناظر یک‌به‌یک بین جواب‌های این معادله و معادله $x_1 + y + z = 6$ در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی به‌دست می‌آید. پس $N(p_1) = \binom{6+3-1}{3-1} = 28$. به طور مشابه معلوم می‌شود $N(p_2) = \binom{5+3-1}{3-1} = 21$ و $N(p_3) = \binom{4+3-1}{3-1} = 15$.

$N(p_1p_2)$ برابر با تعداد جواب‌های معادله $x + y + z = 10$ در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x > 3$ و $y > 4$است. با فرض $x_1 = x - 4$ و $y_1 = y - 5$، تناظر یک‌به‌یک بین جواب‌های این معادله و معادله $x_1 + y_1 + z = 1$ در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی به‌دست می‌آید. پس $N(p_1p_2) = \binom{1+3-1}{3-1} = 3$. به طور مشابه معلوم می‌شود $N(p_1p_3) = 1$ و $N(p_2p_3) = 0$.

و در آخر واضح است که $N(p_1p_2p_3) = 0$. پس

$$N_1 = N(p_1) + N(p_2) + N(p_3) = 64$$

$$N_2 = N(p_1p_2) + N(p_1p_3) + N(p_2p_3) = 4$$

$$N_3 = N(p_1p_2p_3) = 0$$

پس تعداد جواب‌های موردنظر برابر است با

$$N(p_1'p_2'p_3') = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 66 - 64 + 4 - 0 = 6$$

۳)

فرض کنید X مجموعه همه پریش‌های $\{1,2, \dots, n\}$ باشد. در این صورت $|X| = d_n$. X را به $n-1$ زیرمجموعه $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ افراز می‌کنیم به این صورت که x_i را مجموعه همه پریش‌هایی مانند $a_1 a_2 \dots a_n$ از $\{1,2, \dots, n\}$ می‌گیریم که $a_i = n$. $(i = 1,2, \dots, n-1)$

پس $|X| = \sum_{i=1}^{n-1} |X_i|$.

برای محاسبه $|X_1|$ به این صورت عمل می‌کنیم. به ازای هر عضو از X_1 مانند $a_1 a_2 \dots a_n$ داریم $a_1 = n$ و $a_n \in \{1,2, \dots, n-1\}$. پس X_1 را به دو دسته افراز می‌کنیم.

دسته اول اعضایی مانند $a_1a_2 \dots a_n$ که در آن‌ها $a_n = 1$. تعداد اعضای این دسته برابر با تعداد جایگشت هایی مانند $a_1a_2 \dots a_n$ است که $a_n = 1$ و $a_1 = n$، و به ازای هر $2 \le i \le n-1$، $a_i \ne i$. بنابراین تعداد اعضای این دسته برابر است با d_{n-2}.

دسته دوم اعضایی مانند $a_1a_2 \dots a_n$ که در آن‌ها $a_n \ne 1$. به ازای هر چنین عضوی، $a_na_1 \dots a_{n-1}$ یک پریش از $\{1,2,\dots,n-1\}$ است زیرا $a_n \ne 1$، $a_2 \ne 2$، ...، $a_{n-1} \ne n-1$. پس تعداد اعضای این دسته برابر است با d_{n-1}.

در نتیجه $|X_1| = d_{n-1} + d_{n-2}$ و به طور مشابه برای $1 \le i \le n-1$ داریم $|X_i| = d_{n-1} + d_{n-2}$. پس

$$d_n = |X| = \sum_{i=1}^{n-1} |X_i| = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

۴)

این را می‌دانیم هر عددی که نسبت به 1000 اول باشد، نسبت به 5000 نیز اول است و بالعکس. پس این مسئله مقدار $\varphi(5000)$ را می‌خواهد. $5000 = 2^3 \times 5^4$، پس

$$\varphi(5000) = 5000 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2000$$

۵)

کافی‌است که یک راننده دلخواه را انتخاب کنیم و او را در ماشین خود قرار دهیم و 3 راننده باقی‌مانده را طبق تعریف پریش‌ها به d_3 طریق در اتومبیل هایی که برای آن‌ها نیستند، بنشانیم. پس تعداد راه های مطلوب برابر است با

$$\binom{4}{1} \times d_3 = 4 \times 2 = 8$$