توپولوژی عمومی

بهار ۱۴۰۱

استاد درس: استاد زارع

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پاسخ تمرین سری اول

۱. الف) فرض کنید $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ خانواده ای از توپولوژی ها روی X باشد.

داریم:

$$\forall \omega \in \Omega : X, \varnothing \in T_\omega \implies X, \varnothing \in \bigcap_\omega T_\omega$$

فرض کنید $A, B \in \bigcap_\omega T_\omega$ آنگاه

$$\begin{aligned} A, B \in \bigcap_\omega T_\omega &\implies \forall \omega : A, B \in T_\omega \\ &\implies \forall \omega : A \cap B \in T_\omega \\ &\implies A \cap B \in \bigcap_\omega T_\omega \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\{A_i\}$ خانواده ای از مجموعه ها باشد که:

$$\begin{aligned} \forall i : A_i \in \bigcap_\omega T_\omega &\implies \forall i : \forall \omega : A_i \in T_\omega \\ &\implies \forall \omega : \bigcup_i A_i \in T_\omega \\ &\implies \bigcup_i A_i \in \bigcap_\omega T_\omega \end{aligned}$$

بنابراین تحت اشتراک متناهی و اجتماع دلخواه بسته است و در نتیجه توپولوژی است. □

ب) مجموعه ی $X = \{a, b, c\}$ و دو توپولوژی زیر روی آن را در نظر بگیرید

$$T_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \ , \ T_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$$

$$\implies T_1 \cup T_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$$

و این مجموعه توپولوژی نیست زیرا تحت اجتماع بسته نیست. (شامل $\{a,b\}$ نیست.) $\square$

۲.

الف) با توجه به $f(b)=0$ داریم: $s\in f^{-1}[[0,\frac{1}{n})]$ و این مجموعه در $[0,1]$ با توپولوژی متر معمولی باز است. (برای هر با توجه به اینکه تصویر وارون مجموعه ای باز باید باز باشد بنابراین تصویر وارون این بازه زیرمجموعه ای باز از X شامل b است و وتنها زیرمجموعه با این ویژگی X است.(طبق توپولوژی تعریف شده.) درنتیجه داریم $f(a)=0$ $\square$

ب) قرار میدهیم $f(0)=b$ و

$$f(x)=a \ \forall x>0$$

به وضوح داریم

$$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$$

و

$$f^{-1}([0,1])=X$$

کافیست نشان دهیم که تصویر وارون a از است که طبق تعریف تابع داریم

$$f^{-1}(a)=(0,1]$$

که این مجموعه با توپولوژی داده شده در $[0,1]$ باز است.

$\square$

۳.

طبق تعریف توپولوژی باید داشته باشیم: $A\cap B\in T$ بنابراین یکی از حالت های زیر اتفاق میافتد:

۱. $A\cap B=\varnothing$
۲. $A\cap B=A$
۳. $A\cap B=B$

اگر حالت ۱ اتفاق بیفتد آنگاه: $A\neq A\cup B\neq B$ و همچنین $A\cup B\neq\varnothing$ و درنتبجه

$$A\cup B=X$$

اگر حالت ۲ اتفاق بیفتد:

$$\varnothing\subset A\subset B\subset X$$

اگر حالت ۳ اتفاق بیفتد:

$$\varnothing\subset B\subset A\subset X$$

$\square$

۴. ب) $\Longrightarrow$ الف)

فرض کنیم $x \in \overline{A}$ باید نشان دهیم $f(x) \in \overline{f(A)}$

همسایگی باز U از $f(x)$ را در نظر میگیریم. چون f پیوسته است، $f^{-1}(U)$ در X باز است و شامل x است. چون $x \in \overline{A}$ و $f^{-1}(U)$ یک همسایگی از x است پس $f^{-1}(U) \cap A \neq \varnothing$ و میتوانیم $y \in f^{-1}(U) \cap A$ را اختیار کنیم. پس $f(y) \in U \cap f(A)$ و چون اشتراک ناتهیست $f(x) \in \overline{f(A)}$

ج) $\Longrightarrow$ ب)

فرض کنیم B در Y بسته باشد، نشان میدهیم $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$ که چون این مجموعه با بستارش برابر میشود یعنی خودد مجموعه ای بسته است.

داریم:

$$\begin{aligned} f(\overline{f^{-1}(B)}) &\subset \overline{f(f^{-1}(B))} \\ &\subset \overline{B} = B \\ &\Longrightarrow f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset B \end{aligned}$$

f^{-1} را روی دو طرف معادله اثر میدهیم، سپس داریم:

$$f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subset f^{-1}(B)$$

از طرفی

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)}))}$$

پس $\overline{f^{-1}(b)} \subset f^{-1}(B)$ و همیشه داریم $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(b)}$ پس تساوی $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(b)}$ را داریم.

الف) $\Longrightarrow$ ج)

اگر برای هر B بسته در Y داشته باشیم $f^{-1}(B)$ در X بسته، میخواهسم نشان دهیم f پیوسته است. فرض کنید U در Y باز باشد. پس $Y - U$ بسته است و طبق فرض $f^{-1}(Y - U)$ در X بسته است. و از طرفی $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ پس $X - f^{-1}(U)$ نیز در X بسته است که یعنی $f^{-1}(U)$ در X باز است و درنتیجه طبق تعریف f پیوسته است.

$\square$

---

۵. الف) سه شرط متر بودن را چک میکنیم:

۱. $d'(x, y) = 2d(x, y) \geq 0$ و اگر

$$\begin{aligned} d'(x, y) = 0 &\iff 2d(x, y) = 0 \\ &\iff d(x, y) = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

۲. $d'(x,y) = 2d(x,y) = 2d(y,x) = d'(y,x)$

۳.

$$d'(x,z) = 2d(x,z) \leq 2(d(x,y) + d(y,z)) = d'(x,y) + d'(y,z)$$
$$\implies d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$$

ب) اگر T' توپولوژی القا شده توسط متر d' و T توپولوژی القا شده توسط d باشد میخواهیم نشان دهیم $T' = T$. هرگوی در T یک گوی در T' با شعاع متفاوت است. اگر $B_d(x,\epsilon)$ گویی با شعاع ϵ و مرکز x در متر d باشد، آنگاه

$$B_d(x,\epsilon) = B_{d'}(x, 2\epsilon)$$

(طبق تعریف متر ها به سادگی قابل اثبات است)
حال فرض کنیم $A \in T$ آنگاه

$$\forall\, x \in A\ \exists \epsilon > 0\ s.t.\ B_d(x,\epsilon) \subset A$$

پس $B_{d'}(x, 2\epsilon) \subset A$ که یعنی A در توپولوژی القا شده توسط d' نیز باز است که یعنی $A \in T'$ در نتیجه

$$T \subset T'$$

برعکس اگر $A \in T'$ آنگاه

$$\exists \epsilon' > 0\ s.t.\ B_d(x,\epsilon') \subset A$$

و در نتیجه $B_d(x, \frac{\epsilon'}{2}) \subset A$ که یعنی $A \subset T$ و در نتیجه

$$T' \subset T$$

و نتیجتا

$$T = T'$$

پ) اگر X فضایی با توپولوژی متری باشد که توسط متر d القا شده است، در اینصورت برای هر عدد مثبت حقیقی نگاشت $d_c(x,y) = cd(x,y)$ متری به ما میدهد(طبق قسمت الف) که توپولوژی القا شده توسط این متر همان توپولوژی T است.(طبق قسمت ب)

$\square$