۱۳۹۷/۱۰/۰۹

مبانی ترکیبیات

جلسه بیست و دوم

«بنام یکتایی»

viii) $A(x)=\sum_{i\geq 0} a_i x^i \Rightarrow (xD)^p A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i i^p x^i$

ix) 〃 $\Rightarrow x^p D^p A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i i^{\underline{p}} x^i$

x) 〃 $\Rightarrow (x^2 D)^p A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i i^{\overline{p}} x^{i+p}$

توجه:

$xD A(x) = \sum i a_i x^i$

$D(x^2 D) A(x) = \sum i(i+1) a_i x^i$

$x^{-1} D x^2 D x^2 D A(x) = \sum i(i+1)(i+2) a_i x^i$

$x^{-2} D (x^3 D)^3 A(x) = \sum i(i+1)(i+2)(i+3) a_i x^i$

* همچنین قبلاً گفته شده:

تابع فاکتوریل صعودی $\Leftarrow$ $i^{\overline{p}} = i(i+1)\cdots i(i+p-1)$

p عدد صحیح نامنفی

تابع فاکتوریل نزولی نیز برعکس فوق قابل تعریف است.

$A(x) = \sum \alpha_i x^i$

$x^2 D A(x) = \sum \alpha_i i \times x^{i+1}$

$(x^2 D)^2 A(x) = \sum \alpha_i i(i+1) x^{i+2}$

مثال: مطلوب است محاسبه تعداد جواب های صحیح معادله دیوفانتی

$e_1+e_2+e_3=17$ با شرایط

$2\leq e_1\leq 5$

$3\leq e_2\leq 6$

$4\leq e_3\leq 7$

راه حل: در حالت کلی تر معادله دیوفانتی $e_1+e_2+e_3=n$ را با همان شرایط در نظر می گیریم و تعداد جواب های آن را f_n می نامیم:

$$|X|=\sum_{x\in X}1 \qquad * f_n=\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=n\\2\leq e_1\leq 5\\3\leq e_2\leq 6\\4\leq e_3\leq 7}}1$$

$$\sum f_n x^n=\sum_{2\leq e_1\leq 5}x^{e_1}\sum_{3\leq e_2\leq 6}x^{e_2}\sum_{4\leq e_3\leq 7}x^{e_3}$$

$$(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7)$$

$$*\Rightarrow \sum f_n x^n=\sum_n x^n\sum_{e_1+e_2+e_3=n}x^n \qquad x^{e_1+e_2+e_3}$$

$$\sum_{n\geq 0}f_n x^n=\sum_{n\geq 0}\sum_{e_1+e_2+e_3=n}x^{e_1+e_2+e_3}=\sum_{\substack{e_1\in A_1\\e_2\in A_2\\e_3\in A_3}}x^{e_1+e_2+e_3}$$

$$=\sum_{e_1\in A_1}x^{e_1}\sum_{e_2\in A_2}x^{e_2}\sum_{e_3\in A_3}x^{e_3}$$

$f_n=$ ضریب x^n در $F(x)$ $=[x^n]$

$$[x^n]F(x)=[x^n](x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7)$$

$$=[x^n]\left(x^9(1+x+x^2+x^3)^3\right)=[x^{n-9}](1+x+x^2+x^3)^3$$

$$=[x^{n-9}]\frac{(1-x^4)^3}{(1-x)^3}=[x^{n-9}]\left((1-3x^4+3x^8-x^{12})\sum_{i\geq 0}\binom{i+2}{2}x^i\right)\bigstar$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{i\geq 0}\binom{-3}{i}(-x)^i=\sum_{i\geq 0}\binom{i+2}{2}x^i=\sum\frac{(i+2)(i+1)}{2}x^i$$

$$(1+x)^\alpha=\sum\binom{\alpha}{i}x^i$$

$\alpha=-m$ (صحیح مثبت) $\quad \frac{1}{(1+x)^m}=\sum\binom{-m}{i}x^i$

$$\frac{1}{(1+x)^m}=\sum\binom{m+i-1}{m-1}(-x)^i$$

$$\binom{-m}{i}=\frac{-m(-m-1)\cdots(-m-i+1)}{i!}=(-1)^i\frac{(m+i-1)(m+i-2)\cdots m}{i!}=(-1)^i\binom{m+i-1}{\substack{i\\ m-1}}$$

★ را می‌توان این طور نوشت:

$$[x^{n-9}]\left((1-3x^4+3x^8-x^{12})\sum\binom{i+2}{2}[i\geq 0]x^i\right)$$

$$f_n=\binom{n-7}{2}[n\geq 9]-3[n\geq 13]\binom{n-11}{2}+3[n\geq 17]\binom{n-15}{2}-[n\geq 21]\binom{n-19}{2}$$

$$f_n=\begin{cases}0 & n\geq 21 \text{ یا } n<9\\ \frac{(n-7)(n-8)}{2} & 9\leq n<13\\ -n^2+27n-170 & 13\leq n<17\\ \frac{(n-19)(n-20)}{2} & 17\leq n<21\end{cases}$$

مثال: دو تاس چهار وجهی غیر از تاس های استاندارد (تاس های استاندارد تاس هایی هستند که روی وجوه آن ها اعداد ۴، ۳، ۲ و ۱ نوشته باشد.) طراحی کنید که حالت های مجموع دو تاس همانند مجموع دو تاس استاندارد (با همان ترتیب تکرار) باشد. ← اعداد روی تاس باید مثبت صحیح باشد (عدد تکراری هم می تواند داشته باشد.)

حل: اگر اعداد نوشته شده روی تاس اول a_1, a_2, a_3, a_4 و روی تاس دوم b_1, b_2, b_3, b_4 باشد باید داشته باشیم

$$(x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}+x^{a_4})(x^{b_1}+x^{b_2}+x^{b_3}+x^{b_4})$$

$$\|$$

$$(x+x^2+x^3+x^4)^2$$

اما داریم:

$$x+x^2+x^3+x^4 = x(1+x)(1+x^2)$$

$$\Rightarrow (x^2+x^2+x^3+x^4) = x^2(1+x)^2(1+x^2)^2$$

$$= (x(1+x^2)^2)(x(1+x)^2)$$

$$= (x+2x^3+x^5)(x+2x^2+x^3)$$

$$= (x+x^3+x^3+x^5)(x+x^2+x^2+x^3)$$

مثال: برای برداشتن میوه از داخل یک مغازه میوه فروشی، کیسه ای بزرگ در اختیار داریم. می خواهیم n عدد میوه داخل این کیسه بریزیم. متاسفانه در این مغازه فقط ۴ پرتقال و ۱ گلابی موجود است اما تعداد سیب ها و موزها زیاد است. باید کیسه به نحوی با n میوه پر شود که تعداد سیب ها زوج

و تعداد موزها مضرب ۵ باشد ، به چند طریق می توان این کار را انجام داد ؟

۱۳۹۷/۱۰/۰۳

مبانی ترکیبیات

جلسه‌ی سوم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

با در اختیار داشتن سکه های ۱ و ۲ و ۵ تومانی در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید تابع مولد نظیر دنباله مربوط به چه صورتی است؟

الف) a_n برابر تعداد راه های ممکن پرداخت n تومان به دستگاه فروشنده‌ای است که ترتیب قرار دادن سکه ها در آن اهمیتی ندارد.

ب) b_n همان a_n است اما ترتیب قرار دادن سکه‌ها در آن لازم است.

قضیه: الف) اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ اعداد صحیح مثبت مفروض باشند تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_k i_k = n$ را a_n بنامیم تابع مولد دنباله $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یعنی $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ را می توان به صورت

$$A(x) = \frac{1}{(1-x^{\alpha_1})\times \dots \times (1-x^{\alpha_k})}$$ نوشت.

ب) اگر در قسمت قبل، تعداد جواب ها صحیح مثبت همان معادله را $\{b_n\}$ بنامیم داریم:

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \frac{x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{(1-x^{\alpha_1}) \dots (1-x^{\alpha_n})}$$

حل مثال بالا: الف)

$$e_1 + 2e_2 + 5e_3 = n$$

$$A(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

ب) $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-5} \qquad n \geq 5$

$\dots = b_{-2} = b_{-1} = 0 \qquad b_1 = 1 , \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 3 \quad b_4 = 5$

ادورسون

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-5} + [n=0]$$

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \in Z} b_n x^n = \sum_{n \in Z} (b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-5} + [n=0]) x^n$$

$$B(x) = x \sum b_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum b_{n-2} x^{n-2} + x^5 \sum b_{n-5} x^{n-5} + \overbrace{\sum [n=0] x^n}^{=1}$$

$$B(x) = x B(x) + x^2 B(x) + x^5 B(x) + 1$$

$$B(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^5}$$

راه دوم:

$$B(x) = \sum_{k \geq 0} (x + x^2 + x^5)^k = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^5}$$

قسمت ج مشابه صفحه قبل:

ج) اگر تعداد راههای نوشتن n را به صورت مجموع عوامل از $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ و C_n بنامیم و ترتیب عوامل جمع مهم باشد (افراز مرتب) آنگاه تابع مولد $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ برابر است با

$$C(x) = \frac{1}{1 - x^{\alpha_1} - x^{\alpha_2} - \dots - x^{\alpha_m}}$$

مثال: دنباله $\{a_n\}_{n\geq 1}$ را که در رابطه $a_1=9\ ,\ a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}\quad n\geq 2$ صدق می‌کند با بدست آوردن تابع مولد را حساب کنید.

اگر دنباله $\{a_n\}_{n\geq}$ را به نحو مناسب توسیع می‌دهیم محاسبه آسان‌تر خواهد شد.

$$n=1 \Rightarrow \overset{9}{a_1}=8a_0+1 \Rightarrow a_0=1$$

$$a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}\quad n\geq 1$$

$$a_0=1$$

$$A(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1+\sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1+\sum_{n\geq 1}\left(8a_{n-1}+10^{n-1}\right)x^n$$

$$=1+8x\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n\geq 1}10^{n-1}x^{n-1}$$

$$=1+8xA(x)+\frac{x}{1-10x} \Rightarrow (1-8x)A(x)=\frac{1-9x}{1-10x}$$

$$A(x)=\frac{1-9x}{(1-10x)(1-8x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-10x}+\frac{1}{1-8x}\right)$$

$$A(x)=\frac{1}{2}\sum 10^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}8^n x^n$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(10^n+8^n\right)$$

* فصل گراف:

گراف: زوج مرتبی مانند $G=(V,E)$ از راس ها (V) و یال ها (E) است به طوری هر یال دو راس را به هم وصل می کند. به دو راس مذکور دو راس انتهایی آن یال گفته می شود.

هنگامی که یک راس، راس انتهایی یک یال باشد می گوییم آن راس و آن یال هم وقوعند (incident)

گراف ساده گرافی است که در آن بین هر دو راس حداکثر یک یال وجود دارد به علاوه یالی که راسی را به خود وصل کند در آن وجود ندارد. به عبارت دیگر گراف ساده فاقد یال چندگانه (maltiple edge) و طوقه (Loop) است

یالی که یک راس را به خود وصل می کند.

گراف کامل n راسی، K_n، گرافی ساده است که در آن هر دو راس متمایز با یک یال به هم وصل شده اند.

مسیر (Path): یک مسیر در گراف دنباله متناوبی از راس ها و یال ها است که

(i) با یک راس شروع و به یک راس ختم می شود.

(ii) هر یال در دنباله مذکور، راس ماقبل خود را به راس مابعد خود وصل می کند.

(iii) هیچ راسی بیشتر از یک بار در دنباله مذکور ظاهر نمی شود.

یک گشت (Walk) در گراف دنباله متناوبی از راس ها و یال هاست که در دو خاصیت i و ii فوق صدق می کند اما الزاماً در خاصیت (iii) صدق نمی کند.

طول یک مسیر تعداد یال های آن است. طول کوتاه ترین مسیر

رابطه ی متصل بودن بین راس های گراف ، یک رابطه هم ارزی است . لذا مجموعه راس های گراف را به کلاس های هم ارزی افراز می کند .

اگر مجموعه ی $V \subseteq G$ یکی از کلاس های هم ارزی مذکور در فوق باشد مجموعه ی $E(G)$ زیرمجموعه ای از یال های گراف G است که دو سر هر یک از آن ها در G قرار دارد و $(G, E(G))$ زیرگرافی از G است که به آن یک مولفه ی همبندی G گفته می شود .

به بیان دیگر یک مولفه ی همبندی گراف ، یک زیرگراف همبند ماکسیمال از آن است .