دانشگاه تهران

۱) رابطه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید و به موارد مطرح شده پاسخ دهید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

الف) کلیه دنباله‌های مختلط صادق در رابطه را بدست آورید.

ب) کلیه دنباله‌های حقیقی صادق در رابطه را بدست آورید.

ج) این بار رابطه بازگشتی داده شده را با شرط های اولیه $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ در نظر بگیرید و دنباله مربوطه را بدست آورید.

د) کدام یک از مثال‌ها یا فعالیت‌های مبحث استقرا را با انجام فعالیت‌های فوق به یاد می‌آورید؟

پاسخ:

الف)

$$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} \quad , \qquad n \geq 2$$

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \rightarrow \Delta(r) = r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, r_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha_1 \left(\frac{-1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{-1}{2} - \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha_1 \left(cos\frac{2n\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2n\pi}{3}\right) + \alpha_2 \left(cos\frac{2n\pi}{3} - i \cdot sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = (\alpha_1 + \alpha_2)\left(cos\frac{2n\pi}{3}\right) + (\alpha_1 - \alpha_2)\left(i \cdot sin\frac{2n\pi}{3}\right) = k_1 cos\frac{2n\pi}{3} + k_2 isin\frac{2n\pi}{3}$$

ب)

اگر ضرایب و شرایط اولیه حقیقی باشند جواب عمومی معادله بازگشتی صورت سوال را می‌توان به فرم زیر نوشت.

$$\alpha_1 \rho^n cos\theta + \alpha_2 \rho^n sin\theta$$

برای سادگی، ریشه های r_2 و r_1 که در قسمت قبل محاسبه کردیم را با استفاده از اتحاد اویلر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} r_1 = e^{\frac{2\pi}{3}.i} \\ r_2 = e^{\frac{-2\pi}{3}.i} \end{cases} \Rightarrow \rho = 1$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha_1 \left(e^{\frac{2\pi}{3}.i}\right)^n + \alpha_2 \left(e^{\frac{-2\pi}{3}.i}\right)^n = \alpha_1 \left(e^{\frac{2n\pi}{3}.i}\right) + \alpha_2 \left(e^{\frac{-2n\pi}{3}.i}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) cos \dfrac{2\cdot\pi}{3} + (\alpha_1 - \alpha_2) i \cdot sin \dfrac{2\cdot\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot sin \frac{2\cdot\pi}{3} = a_1 - a_0 cos \frac{2\cdot\pi}{3}, (\theta \neq k\pi)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = -i \left(\frac{a_1 - a_0 cos \frac{2\cdot\pi}{3}}{sin \frac{2\cdot\pi}{3}} \right)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $(\alpha_1 + \alpha_2)$ عددی حقیقی و $(\alpha_1 - \alpha_2)$ عددی مختلط و غیر حقیقی (موهومی) است.

پس α_1 و α_2 دو عدد مختلط مزدوج هستند. یعنی اعداد حقیقی ρ و φ موجوداند به‌طوری‌که :

$$\alpha_1 = \rho e^{i\varphi}, \alpha_2 = \rho e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow a_n = \acute{\rho} \left(e^{i\left(\frac{2n\pi}{3} + \varphi\right)} + e^{-i\left(\frac{2n\pi}{3} + \varphi\right)} \right) = 2\acute{\rho} cos \left(\frac{2n\pi}{3} + \varphi \right)$$

ج)

داریم:

$$a_n = \alpha_1 \left(e^{i\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} \right) + \alpha_2 \left(e^{-i\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} \right)$$

حال طبق فرض داریم:

$$n = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$n = 1 \Rightarrow \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{0} cos \left(\frac{2\pi}{3}\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) isin \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) = -i \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = (\alpha_1 - \alpha_2) isin \left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \left(-i \frac{2}{\sqrt{3}}\right) isin \frac{2n\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} sin \frac{2n\pi}{3}$$

د) در قسمت استقرا فعالیتی داشتیم که دارای رابطه بازگشتی $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, n \geq 2$ بود که دو دنباله زیر در آن صدق می‌کنند:

$$a_n = 0,1,1,0,-1,-1,0,1,1,\ldots$$

$$b_n = 1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1,\ldots$$

از آن‌جایی که این دو دنباله در رابطه بازگشتی داده شده صدق می‌کنند، پس هر ترکیب خطی از آن نیز در رابطه صدق می‌کند:

$$r_n = a_n + b_n \Rightarrow r_n = 1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,\ldots$$

همچنین دنباله‌های زیر نیز در این رابطه صدق می‌کنند:

$$c_n = e^{\frac{n\pi}{3}i}, n \geq 0$$
$$d_n = e^{\frac{-n\pi}{3}i}, n \geq 0$$

در نهایت، فضای برداری تولید شده توسط این دو دنباله روی میدان اعداد مختلط شامل همهء دنباله‌های به صورت $\alpha c_n + \beta d_n$ می‌باشد که در آن α و β اعداد مختلط دلخواه هستند. مانند:

$$\frac{r}{2}\left(e^{i\theta}c_n + e^{-i\theta}d_n\right) = r\cos\left(\theta + \frac{n\pi}{3}\right), n \geq 0$$

۲) اگر تابع مولد مربوطه، $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ و شرایط اولیه $a_0 = \beta_0, \dots, a_{k-1} = \beta_{k-1}$ در نظر گرفته شوند و رابطه زیر را داشته باشیم، $-\Delta^R(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x - 1$، حاصل $\Delta^R(x)A(x)$ را بدست آورید و همچنین $A(x)$ را به صورت یک کسر بدست آورید. از تبدیل کسر حاصل به کسرهای ساده و بسط هر یک از آن ها چه نتیجه ای به دست می آید؟

پاسخ:

$$-\Delta^R(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x - 1$$
$$\Delta^R(x) = 1 - c_1 x - \ldots - c_{k-1}x^{k-1} - c_k x^k$$

معادله مشخصه را بدست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \Delta(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \ldots - c_{k-1}x - c_k$$

و حال، دنباله بازگشتی را مشخص می کنیم:

$$\Rightarrow a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

تابع مولد را بازنویسی می‌کنیم:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \sum_{n\geq k}^{\infty} a_n\, x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty}(c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k})\, x^n$$

$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}) + c_1 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1}\, x^n + c_2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2}\, x^n + \ldots + c_k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k}\, x^n$$

$$\Rightarrow A(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}) + c_1 x(A(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{k-2}x^{k-2})$$

$$\Rightarrow A(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}) + c_1 x(A(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{k-2}x^{k-2})$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_k x^k)}_{\Delta^R(X)} A(x)$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}) - (c_1 a_0 x + c_1 a_1 x^2 + \ldots + c_1 a_{k-2}x^{k-1})$$
$$-(c_2 a_0 x + c_2 a_1 x^2 + \ldots + c_2 a_{k-3}x^{k-1}) - \ldots - (c_{k-1}a_0 x^{k-1})$$

$$\Rightarrow \Delta^R(x)A(x) = a_0 + (a_1 - c_1 a_0)x$$
$$+ (a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)x^2 + \ldots + (a_{k-1} - c_1 a_{k-2} - c_2 a_{k-3} - \ldots - c_{k-1}a_0)x^{k-1}$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{a_0+(a_1-c_1a_0)x+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)x^2+\ldots+(a_{k-1}-c_1a_{k-2}-\ldots-c_{k-1}a_0)x^{k-1}}{1-c_1x-c_2x^2-\ldots-c_kx^k}$$

$$A(x)=\frac{a_0+(a_1-c_1a_0)x+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)x^2+\ldots+(a_{k-1}-c_1a_{k-2}-\ldots-c_{k-1}a_0)x^{k-1}}{1-c_1x-c_2x^2-\ldots-c_kx^k}$$

حال اگر $r_1,r_2,\ldots,r_k$ ریشه‌های متمایز $\Delta(x)$ باشند، داریم:

$$A(x)=\frac{a_0+(a_1-c_1a_0)x+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)x^2+\ldots+(a_{k-1}-c_1a_{k-2}-\ldots-c_{k-1}a_0)x^{k-1}}{(1-r_1x)(1-r_2x)\ldots(1-r_kx)}$$

$$=\frac{B_1}{1-r_1x}+\frac{B_2}{1-r_2x}+\ldots+\frac{B_k}{1-r_kx}=B_1\sum_{n\geq0}(r_1x)^n+B_2\sum_{n\geq0}(r_2x)^n+\ldots+B_k\sum_{n\geq0}(r_kx)^n$$

$$\Rightarrow a_n=[x^n]A(x)=\beta_1r_1^n+\beta_2r_2^n+\beta_kr_k^n$$

در نهایت نتیجه می‌گیریم که :

$$|r_1|>|r_2|,|r_3|,\ldots,|r_k|\Rightarrow a_n\sim\beta_1r_1^n$$

۳) برای رابطه بازگشتی زیر، یک جواب اختصاصی بیابید.

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+7^n(5n+7)$$

پاسخ:

ابتدا $a_n^{(h)}$ را به وسیله معادله مشخصه مربوطه طبق قضیه 6 پیدا می‌کنیم:

$$a_n-5a_{n-1}+6_{n-2}=0$$

$$\Rightarrow r^2-5r+6=0\Rightarrow r=2,r=3$$

$$\Rightarrow a_n^{(h)}=c_1(2)^n+c_2(3)^n$$

حال برای به دست آوردن $a_n^{(p)}$ می‌دانیم:

$$F(n)=7^n(5n+7)$$

پس a_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n=7^n(A\cdot n+B)$$

همچنین از آنجایی که a_n در صورت مسئله داده شده صدق می‌کند، پس:

$$7^n(A\cdot n+B)-5\times7^{n-1}(A(n-1)+B)+6\times7^{n-2}(A(n-2)+B)=7^n(5n+7)$$

$$\div\,7^{n-2}\Rightarrow 49(A\cdot n+B)-35(A(n-1)+B)+6(A(n-2)+B)=7^n(5n+7)$$

$$20An+20B+23A=245n+343$$

از آنجایی که ضریب در دو طرف معادله باید یکسان باشد، به دست می‌آوریم:

$B=\frac{49}{16}$ و $A=\frac{49}{4}$

در نتیجه:

$$a_n^{(p)} = \left(\frac{49}{4}n + \frac{49}{16}\right)7^n = (4n+1)\frac{7^{n+2}}{16}$$

در نهایت a_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n + (4n+1)\frac{7^{n+2}}{16}$$

۴) با فرض $n \geq 2$، $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + n + 2^n$ به‌طوری‌که $a_0 = 1$ و $a_1 = 1$ همچنین $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ باشد، ضرایب a, b, c, d, e را در اتحاد داده شده مشخص کنید.

$$f(x) = \frac{a}{(1-2x)^2} + \frac{b}{(1-2x)} + \frac{c}{(1-x)^2} + \frac{d}{(1-x)} + \frac{e}{(1-3x)}$$

پاسخ:

$A(x)$ را به صورت کسر به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$$

$$A(x) - 1 - x = 5x(A(x) - 1) - 6x^2 A(x) + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^n + \left(\sum_{n=2}^{\infty}(2x)^n - 1 - 2x\right)$$

$$(1 - 5x + 6x^2)A(x) = -1 - 8x + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{1-2x}$$

$$A(x) = \frac{(-1-8x)(1-2x)(1-x)^2 + (1-2x) + (1-x)^2}{(1-2x)^2(1-x)^2(1-3x)}$$

$$A(x) = \frac{16x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x + 1}{(1-2x)^2(1-x)^2(1-3x)}$$

حال عبارت $F(x)$ را هم مخرج کرده و با $A(x)$ مساوی قرار می‌دهیم و از تساوی صورت‌ها به دست می‌آوریم:

$$16x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x + 1 = (6b + 12d + 4e)x^4 - (3a + 17b + 12c + 28d + 12e)x^3$$
$$+(7a + 17b + 16c + 21d + 13e)x^2 - (5a + 7b + 7c + 8d + 6e)x + (a + b + c + d + e)$$

ضرایب متفاوت از x را مساوی قرار می‌دهیم و دستگاه زیر را می‌نویسیم :

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 1 \\ 5a + 7b + 3c + 8d + 6e = 8 \\ 7a + 17b + 6c + 23d + 13e = 28 \\ 3a + 17b + 12c + 28d + 12e = 38 \\ 6b + 12d + 4e = 16 \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا ضرایب به صورت $a = -2.5, b = -1.5, c = 0.125, d = 0.688, e = 4.188$ به دست می‌آیند.

۵) چند کلمه n حرفی با الفبای $\{0,1,2,3,4\}$ می‌توان ساخت به طوری که هر دو حرف مجاور، یک واحد با هم اختلاف داشته باشند؟

پاسخ:

برای $m = 0,1,2,3,4$ و $n \in N$، تعداد کلمه‌هایی که n رقم دارند را به صورت $a(m,n)$ تعریف می‌کنیم، به طوری که هر رقم از بین رقم‌های $\{0,1,2,3,4\}$ است و m رقم اول است و اختلاف رقم های مجاور دقیقاً یک واحد است. همچنین a_n را به صورت کلمه‌هایی تعریف می‌کنیم که n رقمی هستند، به طوری‌که هر رقم از بین رقم‌های $\{0,1,2,3,4\}$ است و اختلاف رقم‌های مجاور دقیقاً یک واحد است. پس در نتیجه به وضوح می بینیم:

$$a_n = \sum_{m=0}^{4} a\,(m,n)$$

و همچنین برای $n \geq 2$ و $i = 1,2,3$ داریم:

$$\{0,1,2,3,4\}$$

$$\{0,1,2,3,4\}$$

$$a(i,n) = a(i-1,n) + a(i+1,n)$$

حال یا جایگزین کردن هر رقم i در کلمه با $4-i$ می‌بینیم که:

$$a(0,n) = a(4,n)$$

و

$$a(1,n) = a(3,n)$$

پس در نتیجه برای $n \geq 3$ داریم:

$$\text{❉}\quad a(0,n) = a(1,n-1) = a(0,n-2) + a(2,n-2)$$

$$\begin{aligned} a(1,n) &= a(0,n-1) + a(2,n-1) \\ &= 2a(1,n-2) + a(3,n-2) \\ &= 3a(1,n-2), \\ a(2,n) &= a(1,n-1) + a(3,n-1) \\ &= a(0,n-2) + 2a(2,n-2) + a(4,n-2) \\ a(3,n) &= a(1,n) = 3a(1,n-2), \\ a(4,n) &= a(0,n) = a(0,n-2) + a(2,n-2) \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که برای هر $n \geq 3$ داریم:

$$a_n = \sum_{m=0}^{4} a\,(m,n) = 4a(1,n-2) + 6a(1,n-2) + 4a(2,n-2)$$

حال طبق معادله ❉، برای هر $n \geq 3$ داریم:

$$a(2,n) = a(1,n-1) + a(3,n-1) = 2a(1,n-1) = 2a(0,n)$$

و اگر $n \geq 4$ ، داریم:

$$a_n = 6a(0, n-2) + 6a(1, n-2) + 3a(2, n-2) = 3a_{n-2}$$

به‌طوری‌که از $a(i, n-2) = a(4-i, n-2)$ در معادله آخر استفاده می‌کنیم. حال $b_n = a_{2n}, c_n = a_{2n+1}$ را برای $n \geq 1$ در نظر می‌گیریم. پس داریم $b_{n+1} = 3b_n$ و $c_{n+1} = 3c_n$ برای $n \geq 1$. از این می‌توان نتیجه گرفت که داریم $b_n = B \cdot 3^n$ و $c_n = C \cdot 3^n$ برای $n \geq 1$، به‌طوری‌که B و C ثابت‌هایی هستند که باید مشخص شوند.

شرط‌های اولیه $b_1 = a_2 = 8$ و $c_1 = a_3 = 14$ نتیجه می‌دهند که $B = \frac{8}{3}$ و $C = \frac{14}{3}$ پس داریم $a_{2n} = b_n = 8 \cdot 3^{n-1}$ و $a_{2n+1} = c_n = 14 \cdot 3^{n-1}$ برای $n \geq 1$. از این نتیجه می‌گیریم که:

$$a_n = \begin{cases} 5 \Rightarrow if \quad n = 1 \\ 14 \cdot 3^{\frac{n-3}{2}} \Rightarrow if n \equiv 1 (mode 2), n > 1 \\ 8 \cdot 3^{\frac{n-2}{2}} \Rightarrow if \quad n \equiv 0 \quad (mode 2) \end{cases}$$