۱) فرض کنید $n = 2^a3^b5^c7^d11^e$، که در آن a,b,c,d,e عددهای صحیح مثبت‌اند. تعداد عددهایی مانند m که $0 < m \le n$ به‌طوری‌که m بر 3 و 2 بخش‌پذیر باشد ولی بر هیچ یک از اعداد $5, 7, 11$ بخش‌پذیر نباشد را بدست آورید.

پاسخ:

فرض کنیم P_1 معادل بخش‌پذیری بر عدد 2، P_2 معادل بخش‌پذیری بر عدد 3، P_3 معادل بخش‌پذیری بر عدد 5، P_4 معادل بخش‌پذیری بر عدد 7 و P_5 معادل بخش‌پذیری بر عدد 11 باشد. باید تعداد عددهایی مانند m بیابیم به‌طوری که بر اعداد 3 و 2 بخش‌پذیر باشد ولی بر هیچ یک از اعداد $5, 7, 11$ بخش‌پذیر نباشد. پس داریم:

$$N\left(P_1P_2\acute{P}_3\acute{P}_4\acute{P}_5\right) =$$

$$N(P_1P_2) - N(P_1P_2P_3) - N(P_1P_2P_4) - N(P_1P_2P_5) + N(P_1P_2P_3P_4) + N(P_1P_2P_3P_5) + N(P_1P_2P_4P_5)$$

$$-N(P_1P_2P_3P_4P_5)$$

می‌دانیم تعداد اعدادی از 1 تا n که بر x بخش‌پذیر هستند، برابر با $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ است. درنتیجه داریم:

$$N\left(P_1P_2\acute{P}_3\acute{P}_4\acute{P}_5\right) =$$

$$\frac{n}{2\times 3} - \frac{n}{2\times 3\times 5} - \frac{n}{2\times 3\times 7} - \frac{n}{2\times 3\times 11} + \frac{n}{2\times 3\times 5\times 7} + \frac{n}{2\times 3\times 5\times 11} + \frac{n}{2\times 3\times 7\times 11}$$

$$- \frac{n}{2\times 3\times 5\times 7\times 11} = \frac{n}{6} - \frac{n}{30} - \frac{n}{42} - \frac{n}{66} + \frac{n}{210} + \frac{n}{330} + \frac{n}{462} - \frac{n}{2310}$$

$$= \frac{385n - 77n - 55n - 35n + 11n + 7n + 5n - n}{2310} = \frac{240n}{2310} = \frac{8n}{77}$$

پس:

$$\frac{8\times 2^a3^b5^c7^d11^e}{77} = 2^{a+3}3^b5^c7^{d-1}11^{e-1}$$

۲) تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 40$ را با شرایط $6 \le x_1 \le 15$، $5 \le x_2 \le 20$ و $10 \le x_3 \le 25$ بیابید.

پاسخ:

قرار می‌دهیم $y_1 = x_1 - 6$، $y_2 = x_2 - 5$ و $y_3 = x_3 - 10$. بنابراین، به دنبال پیدا کردن جواب‌های صحیح نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 19$ هستیم.

فرض کنیم S مجموعه جواب‌های صحیح نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 19$ باشد. همچنین c_1، c_2 و c_3 به ترتیب شرط $y_1 \geq 10$، $y_2 \geq 16$ و $y_3 \geq 16$ باشند. بنابراین، مسئله به دنبال پیدا کردن جواب‌های $|S - (c_1 \cup c_2 \cup c_3)| = |\overline{c_1} \cap \overline{c_2} \cap \overline{c_3}|$ است.

داریم:

$$S = \binom{19+3-1}{3-1} = \binom{21}{2}$$
$$|c_1| = \binom{19-10+3-1}{3-1} = \binom{11}{2}$$
$$|c_2| = \binom{19-16+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$$
$$|c_3| = \binom{19-16+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$$
$$|c_1 \cap c_2| = |c_1 \cap c_3| = |c_2 \cap c_3| = |c_1 \cap c_2 \cap c_3| = \binom{19-10-16+3-1}{3-1} = \binom{19-10-16+3-1}{3-1}$$
$$= \binom{19-16-16+3-1}{3-1} = \binom{19-10-16-16+3-1}{3-1} = 0$$

بنابراین، تعداد جواب‌های صحیح معادله برابر است با:

$$|\overline{c_1} \cap \overline{c_2} \cap \overline{c_3}| = \binom{21}{2} - \binom{11}{2} - 2\binom{5}{2} = 135$$

۳) به ازای هر عدد طبیعی مانند n به‌طوری که $n \geq 2$ ثابت کنید:

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

پاسخ:

می‌دانیم رابطه d_n به صورت زیر است:

$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

رابطه d_{n-1} را نیز به صورت زیر داریم:

$$d_{n-1} = (\mathrm{n}-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} \Rightarrow nd_{n-1} = n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!}$$

با کم کردن دو رابطه بالا داریم:

$$d_n - \mathrm{n}d_{n-1} = n!\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{j!}\right) \Rightarrow d_n - \mathrm{n}d_{n-1} = n!\left(\frac{(-1)^n}{n!}\right) \Rightarrow d_n - \mathrm{n}d_{n-1} = (-1)^n$$

$$\Rightarrow d_n = \mathrm{n}d_{n-1} + (-1)^n$$

پس حکم ثابت شد.

۴) به چند طریق می‌توان 10 خانه از یک جدول 20×3 را علامت زد، طوری که در هر سطر، حداقل یک خانه علامت زده شده باشد

پاسخ: مجموعه های A_1 و A_2 و A_3 را به این صورت تعریف می‌کنیم که A_i شامل حالاتی است که سطر i-ام، خانه‌ی علامت زده نداشته باشد. طبق اصل شمول و عدم شمول برای حالت 3 مجموعه، داریم:

$$S = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

باتوجه به این که A_i ها از نظر تعداد شبیه هم هستند و تقارن دارند، داریم:

$$S = 3|A_1| - 3|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

از طرفی، $|A_1| = \binom{40}{10}$، $|A_1 \cap A_2| = \binom{20}{10}$ و $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. پس:

$$S = 3\binom{40}{10} - 3\binom{20}{10}$$

اگر M تعداد کل حالات علامت‌گذاری باشد، پاسخ برابر است با:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = M - S = \binom{60}{10} - 3\binom{40}{10} + 3\binom{20}{10}$$

۵) تعداد جایگشت‌های اعداد $1, 2, 3, \cdots, 8$ را بیابید به‌طوری‌که در هیچ‌کدام از آن‌ها، عدد زوجی در جای اصلی خود نباشد.

پاسخ: برای یافتن تعداد جایگشت‌هایی که هیچ عدد زوجی در جای خود نباشد، باید تعداد جایگشت‌هایی که حاوی حداقل یک عدد زوج در جای اصلی خود باشد را از تعداد کل جایگشت‌های دنباله $1, 2, 3, \cdots, 8$ کم کنیم.

تعداد $\binom{4}{1}$ حالت وجود دارد که هر کدام از اعداد زوج در جای اصلی خود باشند. 7 عدد باقیمانده به $7!$ طریق می‌توانند در جایگاه‌های باقیمانده قرار بگیرند.

تعداد $\binom{4}{2}$ حالت وجود دارد که دو عدد زوج در جای اصلی خود باشند. 6 عدد باقیمانده به $6!$ طریق می‌توانند در جایگاه‌های باقیمانده قرار بگیرند.

تعداد $\binom{4}{3}$ حالت وجود دارد که سه عدد زوج در جای اصلی خود باشند. 5 عدد باقیمانده به $5!$ طریق می‌توانند در جایگاه‌های باقیمانده قرار بگیرند.

تعداد $\binom{4}{4}$ حالت وجود دارد که تمام اعدد زوج در جای اصلی خود باشند. 4 عدد باقیمانده به $4!$ طریق می‌توانند در جایگاه‌های باقیمانده قرار بگیرند.

چون تعداد کل جایگشت‌های دنباله $1, 2, 3, \cdots, 8$ برابر با $8!$ است، بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که هیچ عدد زوجی در جای اصلی خود نباشد برابر است با:

$$8! - \binom{4}{1}7! + \binom{4}{2}6! - \binom{4}{3}5! + \binom{4}{4}4! = 24024$$

راه حل دوم:

می‌توانیم روی تعداد اعداد فردی که در جای خود قرار می‌گیرند حالت‌بندی کنیم. d_8 تعداد حالاتی است که هیچ عدد فردی سرجای خود نیست. تعداد حالاتی که یک عدد فرد درجایش است برابر $\binom{4}{1}d_7$، تعداد حالاتی که دو عدد فرد درجایش است برابر $\binom{4}{2}d_6$، تعداد حالاتی که سه عدد فرد درجایش است برابر $\binom{4}{3}d_5$ و تعداد حالاتی که چهار عدد فرد درجایش است برابر $\binom{4}{4}d_4$ است. درنتیجه:

$$d_8 + \binom{4}{1}d_7 + \binom{4}{2}d_6 + \binom{4}{3}d_5 + \binom{4}{4}d_4 = 14833 + 4 \times 1854 + 6 \times 265 + 4 \times 44 + 9 = 24024$$