جلسه ششم

قضیه: اگر T یک درخت دودویی پر باشد ، ثابت کنید $n^T \leq 2^{h(T)+1}$

اثبات: با مراجعه به تعریف بازگشتی درخت دودویی پر ، اثبات استقرایی به صورت زیر به دست می آید:

مقدمه استقرا: اکر یک راس تنها باشد داریم:

$$n(T) = 1 \,, h(T) = 0 \rightarrow h(T) = 1 \leq 2^1 - 1 = 2^{h(T)+1}$$

مرحله استقرایی: فرض کنیم حکم مورد نظر برای $T2, T1$ برقرار باشد، درستی آن را برای $T = T1.T2$ به صورت زیر نتیجه میگیریم :

$$n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2) \leq 1 + \left(2^{h(T_1)+1} - 1\right) + \left(2^{h(T_2)+1} - 1\right)$$

$$\leq 2\max\left(2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}\right) - 1 = 2.2^{\max\left(h(T_1), h(T_2)\right)+1} - 1$$

$$= 2.2^{h(T)} - 1 = 2.2^{h(T)+1} - 1 \rightarrow P(T)$$

*اصل استقرا معادل خوشترتیبی اعداد صحیح مثبت است که طبق آن هر زیر مجموعه از اعداد صحیح مثبت با ترتیب عادی اعداد دارای کوچکترین عضو (عضو ابتدا) است .

*برای اثبات برخی احکام میتوان مستقیما از خاصیت خوشترتیبی مجموعه اعداد صحیح مثبت (نامنفی) استفاده کرد.

مثال.ثابت کنیدa عددی صحیح و d عددی صحیح و مثبت باشد آنگاه عدد های صحیح و یکتای عدد های صحیح و یکتای r,q موجودند بطوریکه $a = pq + r, \ 0 \leq r \leq q$

اثبات: فرض کنید $S = \{a - dq \geq 0 \,, q \in Z\}$ با توجه به اینکه به ازای $q = -|a|$ داریم :

$$a - dq = d|a| + a = |a|(d + sgn(a)) \geq 0$$

لذا $S \neq \emptyset$

جلسه ششم

طبق خاصیت خوشترتیبی مجموعه اعداد صحیح نامنفی ، S دارای کوچکترین عضو است آن را V می نامیم:

$r = a - dq \geq 0$ از سوی دیگر به برهان خلف ، به صورت زیر می توان ثابت کرد

$r - d \geq 0$ یعنی $r - d \geq 0$ یعنی $r - d = a - dq = a - d(q+1) \geq 0$

یعنی $r - d \in S$ و $r - d < r$ و این با عضو ابتدا بودن r در تناقض است.

الگوریتم های بازگشتی:

مثال.محاسبه b^n *mod m*

Procedure m power (b,n,m:integer with m>=2,n>=0)

1) if n=0 then:

2)m power(b,n,m)=1

3)else if n is even then:

4)m power (b,n,m)= $(\boldsymbol{m\,power}\ (\boldsymbol{b},\frac{\boldsymbol{n}}{2},\boldsymbol{m}))^2$ *mod m*

5)else

6)m power (b,n,m) = $((\boldsymbol{m\,power}\ (\boldsymbol{b},\frac{\boldsymbol{n}}{2},\boldsymbol{m}))^2$ *mod m).b)mod m*

ثابت کنید الگوریتم فوق به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ مقدار (b^n *mod m*) را محاسبه می کند.

اثبات:استقرا نسبت به *n* به ازای *n=0* با توجه به اولین *if* برنامه ،خروجی برنامه *1* است و میدانیم

$1 = b^0$ *mod m* .

مرحله استقرایی: فرض کنید حکم مطلوب به ازای هر عدد صحیح K' که $0 \leq K \leq K'$ برقرار باشد.حال درستی حکم را به ازای K نتیجه میگیریم.این نتیجه گیری در دو حالت بیان می شود:

الف)اگر K زوج باشد ؛ $\frac{K}{2}$ عددی صحیح است، در این حالت با توجه به خط *4* برنامه داریم:

m power (b,k,m)=m power(b,$\frac{k}{2}$*,m)=* $(\boldsymbol{m\,power}\ (\boldsymbol{b},\frac{\boldsymbol{k}}{2},\boldsymbol{m}))^2$ *mod m*

اما بنابر فرض استقرا داریم *m power(b,*$\frac{k}{2}$*,m)=(*$\boldsymbol{b^{\frac{k}{2}} mod\ m}$)

جلسه ششم

در نتیجه:

m power(b,k,m)= $(b^{\frac{k}{2}} \boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{b^k mod\ m}$

ب)حالتی که $\boldsymbol{k}$ به صورت مشابه اثبات قابل تکمیل است.

*اثبات یکی از مثال های جلسات قبل بدون استفاده از قضیه دو جمله ای

$$\boldsymbol{2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3}$$

n ,k اعداد صحیح و مثبت :

$$\boldsymbol{1+\frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3}$$

$$\boldsymbol{1 \leq k \leq n \ \rightarrow \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n}}$$

(استقرای کراندار)

$$\boldsymbol{P(1): (1+\frac{1}{n})^{1} < 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\boldsymbol{k < n\ , P(k): \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2} \rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\boldsymbol{= 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3} = 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+k+\frac{k^2}{n}}{n^2}}$$

$$\boldsymbol{\leq 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2} \ \rightarrow P(k+1)}$$

مثال.

$$\boldsymbol{m\ \&n \in Z\ , m\&n\ \geq 0\ \rightarrow \exists\ p \in z\ , p \geq 0\ \ s.t\ \left(\sqrt{m}+\sqrt{m+1}\right)^{n} = \sqrt{p}.\sqrt{p-1}}$$

جلسه ششم

برای n زوج:

$$P(n): \exists an, bn \in Z+ \quad s.t \ \left(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}\right)^{n}$$

$$= an \pm bn\sqrt{m(m-1)} \ \& \ an^{2} - bn^{2}\, m(n-1) = 1$$

برای n فرد :

$$Q(n): \exists Cn, dn \in Z+ \quad s.t \ \left(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}\right)^{n}$$

$$= cn\, \sqrt{m} \pm dn\sqrt{m-1} \ \& \ cn^{2}\, m - dn^{2}\,(m-1) = 1$$

$$Q(n) \rightarrow P(n+1)$$

$$P(n) \ \rightarrow Q(n+1)$$

پس $Q(n)$ به ازای n های فرد و $P(n)$ به ازای n های زوج برقرار است .در نتیجه به ازای هر n دلخواه ، یکی از $P(n)$ یا $Q(n)$ برقرار خواهد بود.حال اگر n زوج باشد قرار دهید $P = an^{2}$ و اگر n فرد باشد قرار دهید $P = \ Cn^{2}\, m$ دیده می شود که :

$$(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^{n} = \sqrt{P} \, \pm \, \sqrt{p-1}$$

چند جمله ای های متقارن مقدماتی :

برای $C_{\mathrm{n},\,\mathrm{k}}(x_{1}, x_{2}, \ldots . x_{\mathrm{n}})$ داریم:

$$x_{\mathrm{n}}\, C_{\mathrm{n},\,\mathrm{k}-1}(x_{1}, \ldots, x_{\mathrm{n}}) + C_{\mathrm{n}-1}, k(x_{1}, \ldots., x_{\mathrm{n}}) \ , n > 0 \ \text{اگر}$$

$$[k = 0] \qquad\qquad , \quad n = 0$$

$$[k \leq 0] \qquad\qquad , \quad n \leq 0$$

جلسه ششم

	K=-1	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4
n=0	0	1	0	0	0	0
n=1	0	1	X_1	0	...	...
n=2	0	1	X_2+X_1	0	...	...
n=3	0	1	$X_3+X_2+X_1$	$X_1X_2+X_2X_3+X_3X_1$	...	...