جلسه پانزدهم

قضیه 4: فرض کنید $c_1, ..., c_k$ اعداد مفروض باشند و c_k ناصفر باشد. همچنین فرض کنید معادله مشخصه $\Delta(r) = r^k - c_1.r^{k-1} - ... - c_k = 0$ دارای t ریشه متمایز $r_1, ..., r_t$ با مرتبه های تکرار به ترتیب $m_1, ..., m_t$ باشند که $m_1 + ... + m_t = 0$. در این صورت دنباله $\{a_n\}$ جوابی از معادله بازگشتی

$a_n = c_1a_{n-1} + ... + c_ka_{n-k}$ است

اگر و تنها اگر

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}.n + ... + \alpha_{1,m1-1}.n^{m1-1}).r_1^n + ... + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}.n + ... + \alpha_{t,mt-1}.n^{mt-1}).r_t^n$$

مثال:

$$a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$$

$$\Delta(r) = r^3 - r^2 - 8r + 12 = 0$$

$$(r-2)(r-2)(r+3) = 0$$

بنابراین

$$r_1 = 2, m_1 = 2 \quad r_2 = -3, m_2 = 1$$

جواب عمومی معادله همگن برابر خواهد بود با

$$a_n = (\alpha_{10} + \alpha_{11}).2^n + (\alpha_{20}).(-3)^n$$

که آلفاها با تشکیل 3 معادله 3 مجهول از روی جملات اولیه دنباله به دست می آیند

جلسه پانزدهم

قضیه 5: اگر دنباله $\{a_n^{(p)}\}$ جوابی خصوصی از معادله ناهمگن $a_n = c_1a_{n-1} + \dots + c_ka_{n-k} + F(n)$ باشد جواب عمومی معادله فوق به صورت $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ است که در آن $a_n^{(h)}$ جواب عمومی معادله همگن است.

مثال:

$$a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3} + n$$

جواب عمومی معادله همگن را صفحه قبل به دست آوردیم:

$$a_n^{(h)} = (\alpha_{10} + \alpha_{11}).2^n + (\alpha_{20}).(-3)^n$$

حال نیازمند داشتن یک جواب خصوصی معادله ناهمگن هستیم. صورت جواب خصوصی را حدس میزنیم:

$$a_n^{(p)} = An + B$$

طبق رابطه بازگشتی داریم:

$$An + B = [A.(n-1) + B] + 8[A.(n-2) + B] - 12[A.(n-3) + B] + n$$

$$An + B = (-3A + 1)n + (-3B + 19A)$$

$$A = (1 \div 4)\ ,\ B = (19 \div 16)$$

B و A به دست آمدند

$$a_n^{(p)} = (n / 4) + (19 / 16)$$

بنابراین

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (n / 4) + (19 / 16) + (\alpha_{10} + \alpha_{11}).2^n + (\alpha_{20}).(-3)^n$$

که آلفاها از روی جملات اولیه به دست می آیند

جلسه پانزدهم

اثبات قضیه 5: فرض کنید $\{a_n^{(p)}\}$ جواب خاصی از معادله ناهمگن $a_n = c_1a_{n-1} + \dots + c_ka_{n-k} + F(n)$ (❉) باشد و $\{b_n\}$ جواب دلخواهی از معادله ناهمگن (❉) باشد. داریم:

$$b_n = c_1b_{n-1} + c_2b_{n-2} + \dots + c_kb_{n-k} + F(n)$$

$$a_n^{(p)} = c_1a_{n-1}^{(p)} + \dots + c_ka_{n-k}^{(p)} + F(n)$$

با کم کردن دو عبارت بالا از هم دیگر داریم:

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + \dots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)})$$

در نتیجه $b_n - a_n^{(p)}$ در معادله همگن متناظر با (❉) صدق می کند

مثال: یک جواب خصوصی معادله ناهمگن

$$a_n = 5.a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n$$

را به دست آورید سپس جواب عمومی معادله فوق را بنویسید.

حدس:

$$a_n = c.2^n \dashrightarrow 2^n.c = 5(2^{n-1}.c) - 6(2^{n-2}.c) + 2^n \dashrightarrow 2c = 5c - 3c + 2$$

$$\dashrightarrow 0 = 2$$

که تناقض است. پس حدسمان غلط بود.

حدس جدید:

$$a_n = nc.2^n \dashrightarrow nc.2^n = 5((n-1)c.2^{n-1}) - 6((n-2)c.2^{n-2}) + 2^n$$

$$\dashrightarrow 2nc = 5c(n-1) - 3c(n-2) + 2 \dashrightarrow 2nc = 5nc - 3nc - 5c + 6c + 2$$

$$\dashrightarrow c = -2$$

جلسه پانزدهم

قضیه 6: معادله بازگشتی خطی با ضرایب ثابت ناهمگن $a_n = c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$ (❋) که در آن c_k ناصفر است را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_0).s^n$$

دو حالت داریم:

اگر s ریشه معادله مشخصه نباشد آنگاه معادله ❋ دارای جوابی خصوصی به صورت زیر است:

$$a_n^{(p)} = (p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_0).s^n$$

اگر s ریشه مرتبه m ام معادله مشخصه باشد آنگاه جوابی خصوصی به صورت زیر برای معادله وجود دارد:

$$a_n^{(p)} = n^m.(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_0).s^n$$