۱) درستی گزاره زیرا را ثابت کنید:

- به $\frac{n^{\underline{m}}}{n}$ طریق می‌توان m نفر را دور یک میز دایره‌ای با $n \geq m$ صندلی نشاند.

پاسخ:

بدون در نظر گرفتن دایره‌ای بودن میز، افراد را به صورت صف مرتب می‌کنیم. برای نفر اول، n صندلی، برای نفر دوم $n-1$ صندلی و ... و برای نفر$m-$ام $n-m+1$ صندلی موجود است. بنابراین این کار را به $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ حالت مختلف می‌توانیم انجام دهیم.

حال چون میز ما دایره‌ای می‌باشد، کافی‌ست تعداد حالات کل را بر تعداد افراد یعنی n تقسیم کنیم. زیرا هر حالت n بار شمرده شده است.

بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n}$$

یادآوری: $n^{\underline{m}} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$

پس تعداد حالات قرار گرفتن m نفر دور یک میز دایره‌ای با n صندلی، برابر است با:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n} = \frac{n^{\underline{m}}}{n}$$

۲) ثابت کنید به $\left[{n \atop 2}\right] = (n-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$ طریق می‌توان $n \geq 2$ نفر را دور ۲ میز گرد نشاند به شرطی که هیچ یک از میزها خالی نماند.

پاسخ:

ابتدا همه افراد را به $(n-1)!$ طریق دور یک میز قرار می‌دهیم، سپس از فردی که آن فرد را مبدا میز در نظر می‌گیریم، به سمت جلو حرکت می‌کنیم. در هر مرحله k نفر را به میز دیگر منقل میکنیم، ابتدا ۱ نفر، سپس ۲ نفر و ... و در نهایت $n-1$ نفر را از این میز، به میز دیگر می‌فرستیم. مشابه سوال قبل، ما می‌توانیم ابتدا به جای میز گرد، افراد را در یک صف مرتب کنیم و تعداد حالات را بدست آوریم، سپس کل حالات را بر تعداد افراد صف تقسیم کنیم تا تعداد حالات قرارگیری آن‌ها، دور یک میز گرد بدست آید. بنابراین اگر ما در هر مرحله k نفر را از میز اول به میز دوم انتقال دهیم، می‌بایست بر k تقسیم کنیم یا به عبارتی در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left((n-1)!\times\left(\frac{1}{1}\right)\right)+\left((n-1)!\times\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\cdots+\left((n-1)!\times\left(\frac{1}{n-1}\right)\right)$$

$$\rightarrow (n-1)!\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$

۳) به چند طریق می‌توان n زوج را دور یک میز گرد نشاند به‌طوری که:

الف) مردها و زن‌ها یک درمیان بنشینند.

ب) هر زنی کنار همسر خود نشسته باشد.

ج) مردها و زن‌ها یک درمیان بنشینند و هر زنی نیز کنار همسر خود نشسته باشد.

پاسخ:

الف) طبق گفته سوال، n زوج داریم. یعنی در حالت عادی و اسلامی! n مرد و n زن در جمع وجود دارد. می‌خواهیم مردها و زن‌ها یک درمیان بنشینند، برای این کار، ابتدا مردها را به $(n-1)!$ دور میز می‌نشانیم، سپس به $n!$ حالت، زن‌ها را در میان آنان قرار می‌دهیم. پس کل حالات برابر است با:

$$n!\,(n-1)!$$

ب) می‌خواهیم هر زنی کنار همسر خود نشسته باشد، برای این کار، ابتدا مردها را به $(n-1)!$ دور میز می‌نشانیم. حال برای همسر هر مرد، دو حالت وجود دارد، هر زن می‌تواند یا در سمت راست همسر خود، یا در سمت چپ همسرش بنشیند. بنابراین زن ها به 2^n حالت، می‌توانند کنار همسران خود بنشینند. پس کل حالات برابر است با:

$$(n-1)!\times 2^n$$

ج) می‌خواهیم مردها و زن‌ها یک درمیان بنشینند و هر زنی نیز کنار همسر خود نشسته باشد. برای این کار، ابتدا مردها را به $(n-1)!$ دور میز می‌نشانیم. چون می‌خواهیم مردها و زن‌ها یک درمیان بنشینند و هر زنی نیز کنار همسر خود باشد، بنابراین همگی زن‌ها، یا باید در سمت راست همسر خود بنشیندد، یا در سمت چپ. این کار به ۲ طریق قابل انجام است. پس کل حالات برابر است با:

$$2\times(n-1)!$$

۴) می‌خواهیم ۳ صندلی دسته‌دار، ۳ صندلی بدون دسته و ۳ کاناپه را دور یک میز گرد قرار دهیم. این کار به چند طریق قابل انجام است؟

پاسخ:

ابتدا بدون در نظر گرفتن گرد بودن میز، تعداد کل حالاتی که می‌توان این ۹ صندلی را در یک صف قرار داد، محاسبه می‌کنیم. این تعداد برابر است با:

$$\frac{9!}{3!\,3!\,3!}=1680$$

در مطالب تکمیلی ۵ ثابت کردیم که دوره‌ی تناوب دوری یک صف، مقسوم علیه‌ای از طول آن است.

در اینجا، ۳ صندلی دسته‌دار، ۳ صندلی بدون دسته و ۳ کاناپه داریم. پس طول صف ما برابر با ۹ است. همچنین مقسوم علیه‌های عدد ۹ برابر با اعداد $\{1,3,9\}$ است. بنابراین دوره تناوب دوری این صف، برابر با یکی از ارقام ۱، ۳ یا ۹ است. حال به بررسی هر کدام می‌پردازیم.

صندلی دسته‌دار با a، صندلی بدون دسته را با b و کاناپه را با c نشان می‌دهیم.

حالات مختلف با دوره تناوب ۱: چون ۳ مدل صندلی و از هر کدام ۳ عدد موجود است، حالتی با این دوره تناوب وجود ندارد.

حالات مختلف با دوره تناوب ۳:

$$abc\ abc\ abc\ , acb\ acb\ acb\ , bac\ bac\ bac\ , bca\ bca\ bca\ , cab\ cab\ cab\ , cba\ cba\ cba\ \Rightarrow 6 \text{ حالت}$$

کافی‌ست تعداد حالات به‌دست آمده را بر طول صف یعنی ۳ تقسیم کنیم تا تعداد چیدمان این حالات در یک میز گرد بدست آید.

$$\frac{6}{3} = 2 \Rightarrow 2 \text{ حالت} \quad (I)$$

حالات مختلف با دوره تناوب ۹:

دقت کنید که مجموع حالات مختلف با ۹ برابر با کل حالات، یعنی ۱۶۸۰ می‌باشد. همچنین حالات مختلف با دوره تناوب ۳، زیر مجموعهٔ حالات با دوره تناوب ۹ هستند که چون قبلا شمرده شده‌اند، تعدادشان را از تعداد کل کم می‌کنیم تا تعداد حالات با دوره تناوب ۹ و مخالف با دوره تناوب ۳ به‌دست آید : $1680 - 0 - 6 = 1674$ حالت.

کافی‌ست تعداد حالات به‌دست آمده را بر طول صف یعنی ۹ تقسیم کنیم تا تعداد چیدمان این حالات در یک میز گرد بدست آید.

$$\frac{1674}{9} = 186 \Rightarrow 186 \text{ حالت} \quad (II)$$

کل حالات برابر است با $(I) + (II)$.

بنابراین به $186 + 2 = 188$ حالت می‌توانیم ۳ صندلی دسته‌دار، ۳ صندلی بدون دسته و ۳ کاناپه را دور یک میز گرد قرار دهیم

۵) بستنی فروشی که فقط یک نوع بستنی به قیمت ۱۰۰۰۰ می‌فروشد، دارای طرفداران زیادی در منطقه شده است. یک روز صبح که دیر به محل کارش می‌رسد، مشاهده می‌کند که کارت‌خوان مغازه خراب است و ۴۰۰ نفر جلوی مغازه صف کشیده‌اند و هیچ پولی همراه خود یا در کشوی مغازه ندارد. آرزو می‌کند که صف خریداران به نحوی تشکیل شده باشد که هنگام فروش، همواره به جز لحظه آغاز، حداقل یک ۱۰۰۰۰ تومانی در کشو داشته باشد. اگر بدانیم ۱۰۰ نفر از خریداران فقط دارای اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی و ۳۰۰ نفر دیگر دارای اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی هستند، احتمال برآورده شدن آرزوی فروشنده چقدر است؟

پاسخ:

افراد دارای اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی را a و افراد دارای اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی را b می‌نامیم.

دقت کنید که هر فرد a، یک ۱۰۰۰۰ تومانی به کشوی فروشنده اضافه و هر فرد b یک ۱۰۰۰۰ تومانی از کشوی فروشنده کم می‌کند. زیرا فروشنده باید ۱۰۰۰۰ تومان به هر فرد b بازگرداند. پس هر ab که کنار یک‌دیگر قرار بگیرند، هم دیگر را خنثی می‌کنند.

زمانی آرزوی فروشنده برآورده می‌شود که واژه‌ای غالب از این ۴۰۰ حرف تشکیل شود، کافی‌ست تعداد واژه‌های غالبی که با ۳۰۰ حرف a و ۱۰۰ حرف b می‌توانیم بسازیم را بیابیم.

با توجه به توضیحات داده شده و بنابر لم دور، $300 - 100 = 200$ انتقال دوری که واژه‌هایی غالب هستند، وجود دارد. همچنین در کل ما قادر به ساختن $400 = 300 + 100$ واژه هستیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$P\left(\text{احتمال برآورده شدن آرزوی بستنی فروش}\right) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

پس به احتمال $\frac{1}{2}$ آرزوی بستنی‌فروش برآورده می‌شود.