
مروری بر مطالب درس:

- **رابطه بازگشتی همگن خطی:**

یک رابطه بازگشتی همگن خطی از درجه k با ضرایب ثابت، یک رابطه بازگشتی از فرم $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ است به‌طوری‌که $c_1, c_2, \ldots, c_k$ اعداد حقیقی هستند و $c_k \neq 0$ باشد.

- **قضیه اول:**

اگر c_1 و c_2 اعداد حقیقی باشند، فرض می‌کنیم $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ دارای ۲ ریشه متفاوت r_1 و r_2 می‌باشد. در نتیجه دنباله $\{a_n\}$ یک راه حل برای رابطه بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ می‌باشد، اگر و تنها اگر $a_n = \alpha_1{r_1}^n + \alpha_2{r_2}^n$ به ازای $n = 0,1,2,\ldots$ و همچنین α_1 و α_2 ثابت، برقرار باشد.

- **قضیه دوم:**

اگر c_1 و c_2 اعداد حقیقی باشند به طوری که $c_2 \neq 0$، فرض کنید $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ تنها یک ریشه حقیقی r_0 دارد. دنباله $\{a_n\}$ یک راه حل برای رابطه بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ می‌باشد، اگر و تنها اگر $a_n = \alpha_1{r_1}^n + \alpha_2{r_2}^n$ به ازای $n = 0,1,2,\ldots$ و همچنین α_1 و α_2 ثابت، برقرار باشد.

- **قضیه سوم:**

اگر $c_1, c_2, \ldots, c_k$ اعداد حقیقی باشند، فرض کنید $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$، k ریشه حقیقی متفاوت $r_1, r_2, \ldots, r_k$ دارد. دنباله $\{a_n\}$ یک راه حل برای رابطه بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ می‌باشد، اگر و تنها اگر $a_n = \alpha_1{r_1}^n + \alpha_2{r_2}^n + \ldots + \alpha_k{r_k}^n$ به ازای $n = 0,1,2,\ldots$ و همچنین $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ثابت، برقرار باشد.

- **قضیه چهارم:**

اگر $c_1, c_2, \ldots, c_k$ اعداد حقیقی باشند، فرض کنید $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$، t ریشه حقیقی متفاوت $r_1, r_2, \ldots, r_t$ با مراتب $m_1, m_2, \ldots, m_t$، به ترتیب، به طوری که به ازای $i = 1,2,\ldots,t$، $m_i \geq 1$ و $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$. در نتیجه دنباله $\{a_n\}$ یک راه حل برای رابطه بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ می‌باشد، اگر و تنها اگر:

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n$$
$$+(\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n$$

$$+\ldots+\left(\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}n+\ldots+\alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1}\right)r_2^n$$

به ازای $n = 0,1, \ldots$ به طوری که $\alpha_{i,j}$ به ازای $1 \le i \le t$ و $0 \le j \le m_i - 1$ ثابت باشد.

- **قضیه پنجم:**

اگر $\left\{a_n^{(p)}\right\}$ یک جواب مشخص برای رابطه غیرهمگن بازگشتی خطی با ضرایب ثابت $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$ باشد، پس هر راه حل به فرم $\left\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\right\}$ است، به طوری که $\left\{a_n^{(h)}\right\}$ یک راه حل برای رابطه همگن بازگشتی مربوطه $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ می‌باشد.

- **قضیه ششم:**

فرض کنید $\{a_n\}$ در رابطه غیرهمگن بازگشتی خطی $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$ صدق می‌کند. به‌طوری‌که $c_1, c_2, \ldots, c_k$ اعداد حقیقی هستند و $F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_1n + b_0)s^n$ به‌طوری‌که $b_0, b_1, \ldots, b_t$ و s اعداد حقیقی هستند. زمانی که s ریشه معادله همگن بازگشتی خطی مربوطه نیست، یک جواب خاص به فرم $(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)s^n$ وجود دارد و زمانی که s ریشه این رابطه مربوطه است و مرتبه آن m است، یک جواب خاص به فرم $n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)s^n$ وجود دارد.

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) روابط بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 3, a_0 = 2\left(3 + \sqrt{3}\right)$

ب) $a_n - a_{n-1} = 3 \times 2^n - 4n, a_1 = 2$

۲) فرض کنید a_n دنباله‌ای از اعداد باشد که در رابطه بازگشتی $pa_n + qa_{n-1} + ra_{n-2} = 0$ صدق می‌کند و شرایط اولیه $a_0 = s$ و $a_1 = t$ را دارا می‌باشد، که t, s, q, r, p اعداد ثابتی هستند، به‌طوری‌که $p + q + r = 0$ و $p \ne 0$ و $s \ne t$. رابطه بازگشتی را حل کنید.

۳) می‌خواهیم یک مستطیل $(n \in N)2 \times n$ را با موزاییک‌های 2×1 و 2×2 بپوشانیم. a_n را تعداد راه‌های انجام دادن این کار تعریف می‌کنیم. یک رابطه بازگشتی برای a_n یافته و آن را حل کنید.

۴) فرض کنید $\{a_n\}$و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد صحیح باشند که به صورت زیر تعریف شده اند:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad n \ge 2$$

$$b_0 = 1, b_1 = 7, b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2} \quad n \ge 2$$

در نتیجه چند جمله اول آن‌ها به صورت زیر است:

$$a: 1,1,3,5,11,21, \ldots$$

$$b: 1,7,17,55,161,487, \ldots$$

ثابت کنید به جز 1 این دو دنباله جمله مشترک دیگری ندارند.(USA MO 1973)

۵) نشان دهید مجموع n جمله اول بسط دو جمله‌ای $(2-1)^{-n}$ با فرض $n \in N$ برابر $\frac{1}{2}$ است. (Putnam 1957)

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

الف) ابتدا باید مقدار $a_n^{(h)}$ محاسبه شود. معادله مشخصه $a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = 0$ برابر با $x - \frac{1}{2} = 0$ است. بنابراین ریشه مشخصه آن برابر با $a = \frac{1}{2}$ می‌باشد. بدین ترتیب داریم: $a_n^{(h)} = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ که در آن A ثابت می‌باشد.

حال به پیدا کردن $a_n^{(p)}$ می‌پردازیم. از آنجایی که $f(n) = -3$ چند جمله‌ای از n و با درجه صفر است و ۱ ریشه مشخصه نیست : $B = a_n^{(p)}$ به طوری که B ثابت باشد.

چون $a_n^{(p)}$ در $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 3$ صدق می‌کند، داریم $B = \frac{1}{2}B - 3$ که برابر است با $B = a_n^{(p)} = -6$. جواب عمومی $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 3$ برابر با $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$ می‌باشد. از شرط اولیه $a_0 = 2\left(3+\sqrt{3}\right)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$A - 6 = 2\left(3+\sqrt{3}\right)$$

در نتیجه، جواب عمومی رابطه بازگشتی برابر است با:

$$a_n = 2\left(\sqrt{3}+6\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\sqrt{3}+6\right) - 6$$ به ازای هر $n \geq 0$.

ب) ابتدا باید مقدار $a_n^{(h)}$ محاسبه شود. معادله مشخصه $a_n - 3a_{n-1} = 0$ برابر با $x - 3 = 0$ است و ریشه مشخصه آن برابر با $a = 3$ می‌باشد. بدین ترتیب داریم : $a_n^{(h)} = A \cdot 3^n$ که در آن A ثابت می‌باشد.

حال به پیدا کردن $a_n^{(p)}$ می‌پردازیم. از آنجایی که $f(n) = 3 \cdot 2^n - 4n$ مجموعی از تابع نمایی 3.2^n و چند جمله‌ای $-4n$ از n و با درجه‌ی ۱ است و ۱ و ۲ ریشه مشخصه نیستند، معادله‌ای به صورت $a_n^{(p)} = B \cdot 2^n - Cn + D$ می‌نویسیم که در آن B, C, D ثابت هستند. چون $a_n^{(p)}$ در معادله ی $a_n - 3a_{n-1} = 3 \cdot 2^n - 4n$ صدق می‌کند، داریم:

$$(B \cdot 2^n - Cn + D) - 3(B \cdot 2^{n-1} - C(n-1) + D) = 3 \cdot 2^n - 4n$$

با برابر قرار دادن ضرایب مشترک داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{2}B = 3 \\ -2C = -4 \\ 3C - 2D = 0 \end{cases}$$

که در نتیجه این برابری ها می‌توان به معادله $a_n^{(p)} = -6 \cdot 2^n + 2n + 3$ رسید. جواب عمومی $a_n - 3a_{n-1} = 3 \cdot 2^n - 4n$ برابر $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n + 2n + 3$ می‌باشد. از شرط اولیه $a_1 = 2$ می‌توان نتیجه گرفت $3A - 7 = 2$.

در نتیجه، راه حل مورد نیاز برابر است با $a_n = 3 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n + 2n + 3 = 3^{n+1} - 6 \cdot 2^n + 2n + 3$ به ازای هر $n \geq 1$.

۲)

معادله مشخصه رابطه بازگشتی داده شده، به صورت $px^2 + qx + r = 0$ است و تفکیک کننده D (دلتای خودمون!) برابر است با

$$q^2 - 4pr = (-p-r)^2 - 4pr = p^2 + 2pr + r^2 - 4pr = p^2 - 2pr + r^2 = (p-r)^2$$

دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $p \neq r$. آنگاه ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از $1 = \frac{-q+p-r}{2p} = \alpha_1$ و $\alpha_2 = \frac{-q+r-p}{2p} = \frac{r}{p}$. بنابراین، جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت $a_n = A + B\left(\frac{r}{p}\right)^n$ است که A و B مقادیر ثابت هستند. شرایط اولیه $a_0 = s$ و $a_1 = t$ نتیجه می‌دهد که

$$A + B = s \wedge A + \frac{rB}{p} = t$$

داریم:

$$A = s + \frac{p(t-s)}{p-r} \wedge B = \frac{-p(t-s)}{p-r}$$

درنتیجه:

$$a_n = s + \frac{p(t-s)}{p-r}\left(1 - \left(\frac{r}{p}\right)^n\right)$$

حالت دوم: $p = r$. آنگاه ریشه معادله مشخصه $\alpha_1 = \frac{-q}{2p} = 1$ با تکرر 2 است. بنابراین، جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت $a_n = A + Bn$ است که A و B مقادیر ثابت هستند. شرایط اولیه $a_0 = s$ و $a_1 = t$ نتیجه می‌دهد که

$$A = s \wedge A + B = t$$

داریم:

$$A = s \wedge B = t - s$$

درنتیجه:

$$a_n = s + (t-s)n$$

لذا:

$$a_n = \begin{cases} s + \frac{p(t-s)}{p-r}\left(1 - \left(\frac{r}{p}\right)^n\right) & if \;\; p \neq r \\ s + (t-s)n & if \;\; p = r \end{cases}$$

۳)

هر طریقه ممکن پوشاندن مستطیل $n \times 2$ توسط بلوک های یکسان 2×1 و 2×2 را در نظر می‌گیریم. اکنون حالت های مختلف را بررسی می‌کنیم:

حالت اول:

بالا-چپ‌ترین مربع از مستطیل $n \times 2$ توسط بلوک عمودی 2×1 پوشانده شده. هیچ محدودیتی برای چگونگی پوشانده شدن بالا-چپ‌ترین مربع از مستطیل $(n-1) \times 2$ باقی‌مانده وجود ندارد. در نتیجه در این حالت a_{n-1} روش وجود دارد.

حالت دوم:

بالا-چپ ترین مربع از مستطیل $n \times 2$ توسط بلوک افقی 2×1 پوشانده شده. در نتیجه پایین-چپ ترین مربع از این مستطیل نیز باید حتما توسط بلوک افقی 2×1 پوشانده شود. هیچ محدودیتی برای چگونگی پوشانده شدن بالا-چپ ترین مربع از مستطیل $(n-2) \times 2$ باقی‌مانده وجود ندارد. در نتیجه در این حالت a_{n-2} روش وجود دارد.

حالت سوم:

بالا-چپ ترین مربع از مستطیل $n \times 2$ توسط بلوک 2×2 پوشانده شده. استدلالی مشابه با استدلال استفاده شده در حالت یک نشان می‌دهد که a_{n-2} روش وجود دارد.

پس باید داشته باشیم $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. این معادله بازگشتی را می‌توان به صورت $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ نوشت که معادله مشخصه آن برابر با $x^2 - x - 2 = 0$ و ریشه‌های مشخصه آن برابر با $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = -1$ می‌باشد. جواب عمومی معادله بازگشتی برابر با $a_n = A \cdot 2^n + B(-1)^n$ می‌باشد که A و B ثابت می‌باشند. از شرط اولیه $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} 2A - B = 1 \\ 4A + B = 3 \end{cases}$$

با حل دستگاه مشخص می‌شود $A = \frac{2}{3}$ و $B = \frac{1}{3}$.

در نتیجه داریم:

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \quad \text{به ازای هر } n \geq 1.$$

۴)

معادله مشخصه برای دنباله بازگشتی $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ برابر $x^2 - x - 2 = 0$ است و ریشه‌های مشخصه آن $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = -1$ است. در نتیجه جواب عمومی رابطه بازگشتی توسط $a_n = A \cdot 2^n + B(-1)^n$ مشخص می‌شود. حال برای به دست آوردن A و B:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \qquad n \geq 0$$

معادله مشخصه برای دنباله بازگشتی b برابر $x^2 - 2x - 3 = 0$ است و ریشه‌های مشخصه آن $\beta_1 = -1$ و $\beta_2 = -1$ است. در نتیجه جواب عمومی رابطه بازگشتی توسط $b_n = C \cdot 3^n + D(-1)^n$ مشخص می‌شود. حال برای به‌دست آوردن C و D :

$$\begin{cases} C + D = 1 \\ 3C - D = 7 \end{cases} \Rightarrow C = 2, D = -1 \Rightarrow b_n = 2 \cdot 3^n + (-1)^{n+1} \qquad n \geq 0$$

حال متغیر k را در نظر می‌گیریم که در هر دو دنباله ظاهر می شود، پس داریم:

$$k = a_m = b_n \Rightarrow \frac{1}{3}(2^m + (-1)^{m+1}) = 2 \cdot 3^{n-1} + (-1)^n \Rightarrow 2^m = 2 \cdot 3^n + 3(-1)^n + (-1)^m \quad m, n \in N$$

اگر $m = 1,2$، تنها جواب معادله بالا برابر $n = 1$ می‌باشدکه نتیجه می‌دهد $k = 1$. حال خلاف آن را تصور می‌کنیم و فرض می‌کنیم عدد مثبتی وجود دارد به طوری که (m, n) نیز جواب معادله بالا باشد به‌طوری‌که $m \geq 3$. در نتیجه $2^m \equiv 0$ (همه مبناها 8 است) است. از طرفی با استفاده از اینکه $s^2 \equiv 1$ می‌باشد برای همه s های فرد، پس در نتیجه $2 \cdot 3^n + 3(-1)^n \equiv 3,5$ و از آنجایی که $(-1)^m \equiv 1,7$. پس باید داشته باشیم $2 \cdot 3^n + 3(-1)^n + (-1)^m \neq 0$ که تناقض است. بنابراین تنها جواب برای (m, n) برابر $(1,1)$ و $(2,1)$ است که یعنی 1 تنها جواب است.

۵)

طبق قضایایی که قبلا مورد بحث قرار گرفته‌اند، می‌دانیم:

$$(2-1)^{-n} = 2^{-n}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-n} = 2^{-n}\sum_{r=0}^{+\infty}\binom{r+n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r \ \forall n \geq 1$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$a_n = 2^{-n}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{r+n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r \ \forall n \geq 1$$

آن‌گاه برای هر $n > 1$ داریم:

$$a_n = 2^{-n}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{r+n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$2^{-n}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{r+n-2}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r + 2^{-n}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{r+n-2}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$2^{-n}\sum_{r=0}^{n-2}\binom{r+n-2}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r + \binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1} + 2^{-n}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{r+n-2}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$\frac{1}{2}a_{n-1} + \binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1} + 2^{-n-1}\sum_{r=0}^{n-2}\binom{r+n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$\frac{1}{2}a_{n-1} + \binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1} + 2^{-n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{r+n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r - \binom{2n-2}{n-1}2^{-2n}$$

$$\frac{1}{2}a_{n-1} + \binom{2n-3}{n-1}2^{-2n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{2n-2}{n-1}\binom{2n-3}{n-2}2^{-2n}$$

$$\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n$$

یا معادلاً، $a_{n-1} = a_n$

در نتیجه داریم:

$$a_1 = a_n = \frac{1}{2} \forall n \geq 1$$