دانشگاه تهران

آزمون مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **تاریخ: دوشنبه ۱۰ خرداد**

*** توجه: رقم یکان شماره دانشجویی خود را x و رقم دهگان شماره دانشجویی خود را y در نظر بگیرید و رقم صدگان شماره دانشجویی خود را z در نظر بگیرید.**

سوال اول:

عدد x را به پیمانه ۲ حساب کرده و در صورتی که باقی‌مانده ۰ بود قسمت A و در صورتی که باقی‌مانده ۱ بود قسمت B را حل کنید.

A) ثابت کنید تعداد افرازهای n به اجزاء فرد متمایز، مساوی تعداد افرازهای خود مزدوج n است.

B) ثابت کنید به ازای مقادیر بزرگ n داریم $P_r(n) \sim \frac{n^{r-1}}{r!(r-1)!}$ (r عدد صحیح مثبت ثابتی فرض می‌شود.)

سوال دوم:

عدد y را به پیمانه ۲ حساب کرده و در صورتی که باقی‌مانده ۰ بود قسمت A و در صورتی که باقی‌مانده ۱ بود قسمت B را حل کنید.

A) فرض کنید m عدد صحیح و مثبت باشد. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n، عددی صحیح و مثبت مانند p وجود دارد بطوریکه:

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)^n = \sqrt{p}+\sqrt{p-1}$$

B) برنامه‌ی بازی‌های تمرینی یک تیم بسکتبال در یک ماه سی روزه بناست که با رعایت شرط‌های زیر ریخته شود: اولاً این تیم هر روز حداقل یک بازی انجام دهد. ثانیاً تعداد کل بازی های تیم مذکور در ماه حداکثر ۴۵ بازی باشد. ثابت کنید برنامه مذکور به هر صورتی ریخته شود، تعدادی روز متوالی وجود دارد که این تیم در آن روزها مجموعاً ۲۱ بازی انجام داده باشد.

سوال سوم:

عدد $xy + z$ را به پیمانه ۲ حساب کرده و در صورتی که باقی‌مانده ۰ بود قسمت A و در صورتی که باقی‌مانده ۱ بود قسمت B را حل کنید.

A) n بچه در یک چرخ و فلک نشسته‌اند. آن‌ها می‌خواهند جاهای خود را عوض کنند بطوریکه در جلوی هر کدام، شخص دیگری غیر از فرد کنونی قرارگیرد. این کار به چند طریق ممکن است؟

B) جایگشت‌های π روی $[n]$ را ۲-منظم می‌نامیم، اگر برای هر $1 \leq i \leq n-2$، نامساوی $\pi(i) \leq \pi(i+2)$ برقرار شود. این جایگشت را ۳-منظم می‌نامیم، اگر برای هر $1 \leq i \leq n-3$، نامساوی $\pi(i) \leq \pi(i+3)$ برقرار شود. تعداد جایگشت‌های روی $[n]$ را که هم ۲-منظم و هم ۳-منظم هستند به دست آورید.

سوال چهارم:

عدد $2x + 3y + 4z$ را به پیمانه ۲ حساب کرده و در صورتی که باقی‌مانده ۰ بود قسمت A و در صورتی که باقی‌مانده ۱ بود قسمت B را حل کنید.

A) تاس استاندارد مکعبی است که روی وجوه آن اعداد از ۱ تا ۶ (هرکدام یک بار) ظاهر شده‌اند. دو تاس غیر استاندارد طراحی کنید که حالت‌های رویت شده از مجموع عددهای روی وجوه آن‌ها مانند حالت‌های رویت شده از مجموع عددهای روی وجوه دو تاس استاندارد، با همان مرتبه تکرار باشد. هر تاس را با عددهای روی وجوهش مشخص کنید.

B) اگر $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ عدد استرلینگ نوع اول بدون علامت باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n,k\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n y^k}{n!}$$

(یادآوری: عدد استرلینگ بدون علامت نوع اول، $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ به ازای مقادیر صحیح نامنفی n و k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = [n = 0]$$

همچنین اگر $n, k > 0$ باشند، آنگاه $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ تعداد راه‌های قرار گرفتن n شخص متمایز دور k میز گرد یکسان است.)

موفق و پیروز باشید