



# توپولوژی عمومی

بهار ۱۴۰۱

استاد درس: استاد زارع

دانشکده ریاضی، آمار و علوم  
کامپیوتر

## تمرین سری چهارم

مهلت تحویل: ۱۳ خرداد ساعت ۲۴

۱. فرض کنید  $p : X \rightarrow Y$  نگاشت خارج قسمتی باشد و  $Y$  همبند باشد. نشان دهید اگر برای هر مجموعه  $\{y\}$  که  $y \in Y$  داشته باشیم  $p^{-1}(\{y\})$  همبند است، آنگاه  $X$  همبند است.

۲. فرض کنید  $X$  فضای خارج قسمتی بدست آمده از  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  باشد که در آن به ازای هر  $|x| > 1$  دو عضو  $x \times 0$  و  $x \times 1$  با هم رابطه دارند، بررسی کنید که آیا  $X$  هاسدورف است یا خیر.

۳. فرض کنید  $X = \mathbb{Z} \times [0, 1]$  و رابطه  $\sim$  روی آن به شکل زیر باشد:

$$(n, 1) \sim (n + 1, 0) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

الف) شکل آن را رسم کنید.

ب) نشان دهید یک تابع پیوسته و دوسویی از فضای خارج قسمتی  $X^*$  به  $\mathbb{R}$  وجود دارد.

۴. یک فضا کاملاً ناهمبند است اگر تنها زیرفضاهای همبند آن مجموعه‌های تک نقطه‌ای باشند. نشان دهید اگر  $X$  توپولوژی گسسته داشته باشد، یک فضای کاملاً ناهمبند است. بررسی کنید که عکس این مطلب نیز برقرار هست یا خیر.

۵. فرض کنید  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  خانواده‌ای از فضاهای همبند باشد. فرض کنید

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

و فرض کنید  $a = (a_\alpha)$  نقطه‌ای ثابت در  $X$  باشد.

الف) برای هر زیر مجموعه ی متناهی  $K$  از  $J$ ، فرض کنید

$$X_K = \{x = (x_\alpha) \mid (x_\alpha) = (a_\alpha) \ \forall \alpha \notin K\}$$

نشان دهید که  $X_K$  زیرفضایی همبند از  $X$  است.

ب) نشان دهید فضای  $Y$  که از اجتماع تمام فضاهای  $X_K$  به دست می آید، همبند است.

پ) نشان دهید  $X$  بستار  $Y$  است و در نتیجه  $X$  فضایی همبند است.

---

۶. نشان دهید اگر  $A$  زیرمجموعه ای شمارا از  $\mathbb{R}^2$  باشد آنگاه  $\mathbb{R}^2 - A$  همبند مسیری است.

(راهنمایی: به تعداد خطوط گذرنده از هر نقطه ی دلخواه  $\mathbb{R}^2$  توجه کنید.)

---

۷. فرض کنید  $X$  همبند و موضعا همبند مسیری باشد، آنگاه  $X$  همبند مسیری است.

---