جلسه‌ی چهارم

تعریف دنباله‌های بازگشتی

مثال‌های قبلی

- تصاعد حسابی

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_n = u_{n-1} + d \quad n \geq 1 \end{cases}$$ (تعریف بازگشتی)

$$u_n = n\,d + \alpha \quad n \geq 0$$ (تعریف صریح)

- تصاعد هندسی

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_n = q\,u_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$ (تعریف بازگشتی)

$$u_n = \alpha\,q^n \quad n \geq 0$$ (تعریف صریح)

- تابع $n!$ (n صحیح و نامنفی)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n\,(n-1)! \quad n \geq 1 \end{cases}$$

- تابع a^n (a حقیقی و n صحیح و نامنفی)

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a\,.\,a^{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

- دنباله‌ی فیبوناچی

$$\begin{cases} f_0 = 0\,,\, f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

جلسه‌ی چهارم

- دنباله‌ی تریبوناچی

$$\begin{cases} t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

- دنباله‌ی لوکا

$$\begin{cases} l_0 = 2, l_1 = 1 \\ l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

- دنباله‌ی کلوث

$$\begin{cases} k_0 = 1 \\ k_{n+1} = 1 + \min\left(2k_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 3k_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}\right) \end{cases}$$

تمرین: ثابت کنید که با تعریف مذکور از k_n به ازای هر $n \geq 0$ داریم $k_n \geq n$. (با استقرای قوی)

مثال نامناسب:

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ (n - 5) f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

تمرین: ثابت کنید یک دنباله‌ی $\{f_n\}_{n \geq 0}$ با مقادیر حقیقی وجود دارد که در روابط زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} f_0 = 3, f_1 = 5 \\ f_n = f_{n-1} + \sqrt{f_{n-2} - n + 1} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

جلسه‌ی چهارم

مثال: فرض کنید $\alpha \neq \beta \,,\, s = \alpha + \beta \,,\, p = \alpha\beta$ و دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\geq 1}$ با روابط

$$\begin{cases} a_0 = s - 1 \\ a_n = s - \dfrac{p}{a_{n-1}} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

تعریف‌شده باشد، ثابت کنید $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - \alpha^n + \beta^n}{\alpha^n - \beta^n - \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}$

دنباله‌ی متناوب $\{u_n\}_{n\geq 0}$ با دوره تناوب t (t عددی صحیح و مثبت) $u_{n+t} = u_n \,,\, n \geq 0$

بازنویسی رابطه فوق به‌صورت بازگشتی با شرایط اولیه‌ی مناسب

$$\begin{cases} u_0 = \alpha_0 \;,\; u_1 = \alpha_1, \dots, u_{t-1} = \alpha_{t-1} \\ u_n = u_{n-t} \quad n \geq t \end{cases}$$

نکته*: رابطه‌های فوق را به کمک دستور ایورسون می‌توان در رابطه‌ی زیر خلاصه کرد که به ازای هر $u \geq 0$ برقرار است.(چرا؟)

$$u_n = u_0\left[t|n\right] + u_1\left[t|n-1\right] + \dots + u_{t-1}\left[t|n-t+1\right]$$

مثال: در حالت t=2 (یعنی وقتی که دنباله‌ی $\{u_n\}_{n\geq 0}$ دارای دوره تناوب ۲ است داریم

$u_n = u_0\left[2|n\right] + u_1\left[2|n-1\right]$ اما به آسانی می‌توان دید که

$\left[2\nmid n\right] = \dfrac{1-(-1)^n}{2} \,,\, \left[2 \mid n\right] = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ در نتیجه

$$u_n = \frac{u_0 + u_1}{2} + (-1)^n \frac{u_0 - u_1}{2} \,,\, n \geq 0 .$$

- اولاً با فرض $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ و $n \geq 0$ ثابت کنید:

جلسه‌ی چهارم

$$\left[n \overset{3}{\equiv} 0 \right] = \frac{1 + w^{n} + w^{2n}}{3}$$

$$\left[n \overset{3}{\equiv} 1 \right] = \frac{1 + w^{2} w^{n} + w\, w^{2n}}{3}$$

$$\left[n \overset{3}{\equiv} 2 \right] = \frac{1 + w\, w^{n} + w^{2} w^{2n}}{3}$$

- ثانیاً از ترکیب تساوی‌های فوق با نکته ❋ چه رابطه‌ای برای دنباله‌های متناوب با دوره تناوب ۳ به دست می‌آید؟ آیا می‌توان این رابطه‌ها را برای عدد صحیح مثبت m تعمیم دهیم؟

توسیع دنباله‌ها

مثال: دنباله‌ی $\{t_n\}_{n\geq 0}$ با شرط اولیه‌ی $t_1 = 1$ و رابطه‌ی بازگشتی $t_n = 2t_{n-1} + 1 ,\ n \geq 2$ داده شده است. t_nرا در n=0 به نحوی تعریف کنید که رابطه‌ی بازگشتی فوق به ازای n=1 برقرار بماند.

$$1 = 2t_0 + 1 \rightarrow t_0 = 0$$

دنباله‌ی مثال قبل را می‌خواهیم به ازای $n \in Z$ تعریف کنیم. اگر این تعریف به نحوی انجام شود که رابطه‌ی $t_n = 2 \times t_{n-1} + 1$ به ازای هر n صحیح محفوظ بماند مقادیر $t_{-1} , t_{-2} , \ldots$ را مشخص کنید.

n	...	-2	-1	0	1	2	...
t_n	...	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	...

$$t_n = 2^n - 1 \quad n \in Z$$

مثال: بررسی توسیع چپ صفر $t_n = 2^n - 1$

جلسه‌ی چهارم

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
t_n	...	0	0	0	0	1	3	7	...

سؤال: در این حالت رابطه‌ی بازگشتی به چه صورت درمی‌آید؟

$$t_n = 2 \times t_{n-1} + 1 - [n \le 0]$$

مثال: توسیع دنباله فیبوناچی با حفظ رابطه

n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
f_n	...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	...

تمرین: ثابت کنید که در این توسیع داریم $f_{-n} = (-1)^{n-1} f_n$

تمرین: اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ی فیبوناچی به‌صورت توسعه‌یافته باشد ثابت کنید به ازای هر n صحیح داریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

مثال: در توسیع چپ صفر دنباله‌ی فیبوناچی، رابطه‌ی بازگشتی به چه صورت درمی‌آید؟

دنباله‌های عمومی فیبوناچی (فیبوناچیح): هر دنباله‌ی $\{u_n\}_{n \ge 0}$ که در رابطه‌ی

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad n \ge 2$ صدق کند یک دنباله‌ی فیبوناچیح نامیده می‌شود.

مثال: دنباله‌ی فیبوناچی و لوکا

مثال: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$