جلسه نهم

شرایط اولیه: $a_0 = A_0 , \dots , a_v = A_v$

$.a_n = f_n(a_{n-1},a_{n-2}, \dots , a_1, a_0) , n>v$

اگر$f_n(a_{n-1},a_{n-2}, \dots , a_1, a_0)$ برحسب$a_{n-1},\dots,a_0$خطی باشد به رابطه بازگشتی مذکور یک رابطه ی بازگشتی خطی میگوییم.دراین حالت به ازای آرایه ای دوبعدی مانند$g_{n,i}$

وتابعی مانندF_nداریم:

$$f_n(a_{n-1},a_{n-2}, \dots , a_1, a_0) = \sum_{i=0}^{n-1} g_{n,i}a_i + F_n$$

مثال:

I) $a_0 = 0$

$.a_n = \sum_{i=0}^{n-1}(n-1)ai + n , n>=1$

II) $b_0 = 1$

$.b_n = \sum(i+1)b_{i+1} \quad , n>=1$

اگردرعبارت ,$f_n(a_{n-1},a_{n-2}, \dots , a_1, a_0)$ جمله های $a_{n-k-1},a_{n-1},a_{n-2}, \dots , a_1, a_0$حضور نداشته باشندولی جملهa_{n-k} حضور داشته باشد،به معادله بازگشتی $a_n = f_n(a_{n-1},a_{n-2}, \dots , a_1, a_0) + F(n)$.یک معادله بازگشتی مرتبه$k$ گفته میشود.

-اگر درمعادله بالا داشته باشیم $F(n) = 0$به آن یک معادله همگن گفته میشود.

- معادله ی بازگشتی خطی ضرایب ثابت مرتبه kمعادله ای به صورت$a_n = c_1a_{n-1}+ \dots +c_ka_{n-k} + F(n)$ است که درآن $c_k\neq0$

اگربه علاوه $F(n) = 0$ انگاه به معادله ی فوق یک معادله ی بازگشتی خطی همگن مرتبهk گفته میشود.

-چند جمله ای مشخصه متناظر این معادله طبق تعریف عبارت است از:

$$\Delta(r) = r^k - c_1r^{k-1} - \dots - c_{k-1}r - c_k$$

-میدانیم چند جمله ای که ریشه های آن وارون ریشه های $\Delta(r)$باشد را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta^R (r) = c_kr^k + c_{k-1}r^{k-1} + \dots + c_1r - 1$$

جلسه نهم

قضیه1:فرض کنید $c_1,c_2\neq0$اعداد مفروضی باشند ومعادله ی $\Delta(r) = r^2 - c_1r - c_2 = 0$

دارای دو ریشه ی متمایزr_1,r_2باشد. دراین صورت دنباله ی$\{a_n\}_{n>=0}$جوابی از معادله ی بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1}+ c_2a_{n-2}+ \ldots$ و $n>=2$است اگروتنها اگرثابت های z_1,z_2موجود باشند بطوریکه $a_n = z_1r_1^n + z_2r_2^n$

اگر r_1 , r_2ریشه های $r^2 - c_1r - c_2$ باشند داریم:

$.r_1^2 = c_1r_1 - c_2 \rightarrow z_1 . r_1^n = c_1r_1^{n-1} +c_2r_1^{n-2}$

$+ r_2^2 = c_1r_2 - c_2 \rightarrow z_2 . r_2^n = c_1r_2^{n-1} +c_2r_2^{n-2}$

$\rightarrow z_1r_1^n + z_2r_2^n = c_1(z_1r_1^{n-1} + z_1r_2^{n-1}) + c_2(z_1r_1^{n-2} + z_2r_2^{n-2})$

درنتیجه دنباله ی $b = z_1r_1^n + z_2r_2^n$ در رابطه ی بازگشتی $b_n = c_1b_{n-1} +c_2b_{n-2}$صدق میکند.

حال فرض میکنیم دنباله مفروض $\{x_n\}_{n>=0}$دررابطه ی بازگشتی $x_n = c_1x_{n-1} +c_2x_{n-2}$صدق کند.برای انکه نشان دهیم دنباله ی $\{x_n\}_{n>=0}$نیز به همان فرم مطرح شده در صورت قضیه است،ابتدادنباله ای مانند b_nبه صورت $b_n = z_1b_{n-1} +z_2b_{n-2}$به دست می اوریم به طوری که $b_0 = x_0 , b_1 = x_1$ سپس نتیجه میگیریم به ازای هر مقدار $n>=0,b_n = x_n$و قسمت عکس قضیه از اینجا ثابت میشود.

قضیه 2 = در قضیه قبل فرض کنید معادله درجه دوم $c_1r - c_2=r^2$ به جای دو ریشه متمایزدارای ریشه مضاعف r_0باشد در این صورت دنباله $\{a_n\}$ جوابی از معادله بازگشتی$a_n = c_1a_{n-1} +c_2a_{n-2}$ است اگروتنها اگر ثابت های z_1,z_2موجود باشند به طوری که

$a_n = z_1a_{n-1} +z_2a_{n-2}.$

قضیه 3 = فرض کنید $c_k\neq0$و معادله$\Delta(r) = r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_{k-1}r - c_k$دارای kریشه متمایز$r_1 , \ldots , r_k$باشد در این صورت معادله$\{a_n\}$ جوابی از معادله بازگشتی $a_n = c_1a_{n-1}+ \ldots +c_ka_{n-k}$است اگر و تنها اگر مقادیر $z_1, \ldots , z_k$موجود باشد بطوریکه

$.a_n = z_1r_1^n + \ldots + z_kr_k^n$