

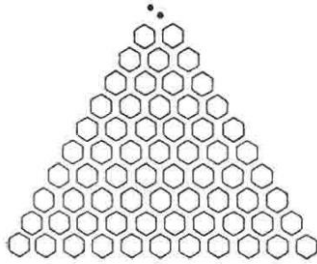


دانشگاه تهران

تاریخ تحویل: جمعه ۱۷ اردیبهشت

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

تمرین سری هشتم مبانی ترکیبیات



(۱) 2^{1000} توپ در بالای یک ذخیره کننده به شکل زیر قرار دارد. این ماشین عملاً ۱۰۰۱ سطر از شش ضلعی ها دارد. هر توپ در نقطه اتصال با احتمال $\frac{1}{2}$ به راست و به $\frac{1}{2}$ چپ می‌رود.

(الف) چند توپ نهایتاً در چپ‌ترین حجره قرار می‌گیرد؟

(ب) چند توپ در حجره K -ام از سمت چپ قرار می‌گیرد؟

(۲) به سوالات زیر پاسخ دهید.

(الف) ثابت کنید با به کار بردن حروف واژه *ALFALFA*، ۶۲ واژه به طول ۴ می‌توان ساخت.

(ب) ۳ قوطی آبی، ۲ قوطی صورتی و ۲ قوطی زرد در اختیار داریم. قرار است ۴ اتاق را رنگ کنیم. رنگ‌آمیزی هر اتاق با یک رنگ صورت می‌گیرد. این رنگ‌آمیزی به چند حالت امکان‌پذیر است؟

(۳) فرض کنید n عدد صحیح مثبت و $\{n \atop k\}$ نمایانگر عدد استرلینگ نوع ۲ باشد:

$$\{n \atop 2\} = 2^{n-1} - 1 \quad \text{(الف) ثابت کنید}$$

$$\text{(ب) اگر } n \geq 2 \text{ را محاسبه کنید.} \quad \{n \atop n-2\}$$

(۴) فرض کنید K, n اعداد صحیح مثبتی باشند، تعداد K تایی‌های مرتب (A_1, A_2, \dots, A_k) که در آن به ازای $i = 1, \dots, k$ داریم $A_i \subseteq [n]$ در هر یک از شرایط محاسبه کنید.

$$\text{(الف)} \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k$$

$$\text{(ب)} \quad \emptyset \neq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$$

(۵) خانواده‌ای با ۹ فرزند در روستایی که دارای چهار مدرسه A, B, C, D است، ساکن است، قرار است تمام فرزندان در مدرسه ثبت‌نام شوند. این کار در هر یک از حالت‌ها به چند طریق ممکن است؟

(الف) دقیقاً دو فرزند در مدرسه A ثبت‌نام شوند.

(ب) در هر مدرسه لااقل یکی از فرزندان ثبت‌نام شود.