جلسه هشتم

اگر m, n اعداد صحیح مثبتی باشند، یک m-جایگشت از $[n]$ عبارتست از mتایی مرتب $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ با مولفه های متمایز x_i بطوریکه $x_i\in[n]$.

تعداد m-جایگشتهای $[n]$ برابر است با:

$n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1)$

که برابر است با تعداد توابع یک به یک از $[m]$به توی $[n]$

مثال 14) جایگشتهای مجموعه $[n]$: در واقع همان n-جایگشتهای $[n]$است. بنابراین؛ یک جایگشت $[n]$یک آرایش $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ از اعداد متمایز $x_i\in[n]$ است.(تعبیر منفعل یا passive)

از سوی دیگر هر جایگشت را میتوان یک نگاشت یک به یک و پوشا از $[n]$به$[n]$ در نظر گرفت.(تعبیر فعال)

تعداد جایگشت های n برابر است با $n!$.

جایگشت های مجموعه $[3]$ را میتوان بصورت زیر لیست کرد:

تعبیر منفعل:

1 2 3

1 3 2

2 1 3

2 3 1

3 1 2

3 2 1

تعبیر فعال (نمایش دو سطری):

1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1

تعبیر فعال (نمایش دوری):

(1) (2) (3)   (1) (2 3)   (1 2) (3)   (1 2 3)   (1 3 2)   (1 3) (2)

جلسه هشتم

مثال 15) شمارش تعداد m-ترکیبهای مجموعه [n]: هر m-ترکیب [n] عبارتست از یک m-زیرمجموعه از [n]: برای شمارش آنها کافی است تعداد m-جتیگشتهای [n] را بر !m تقسیم کنیم.

تعداد m-ترکیبهای [n] را گاهی با C(n,m) و گاهی با $\binom{n}{m}$ نشان می‌دهند.

به ازای اعداد صحیح نامنفی n ,m داریم:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

مثال 16) شمارش تعداد m-ترکیبهای با تکرار مجموعه [n]: هر m-ترکیب با تکرار [n]، یک مجموعه مکرر mتایی است که محمل آن زیرمجموعه ای از [n] باشد. پس کافی است تعداد دنباله های صعودی $1<=x_1<=x_2<=\ldots<=x_m<=n$ شمرده شود. در واقع باید تعداد دنباله های اکیدا صعودی $1<=x_1<=x_2+1<=x_3+2\ldots<=x_m+m-1<=n+m-1$ را بشماریم. که برابر است با $\binom{n+m-1}{m}$. در نتیجه:

$\binom{n}{m}_R=K(m,n)= \binom{n+m-1}{m}=\binom{n+m-1}{n-1}$

مثال 17) یک مغازه نان سنتی 4 نوع نان می‌فروشد. با فرض اینکه در حال حاضر از هریک از انواع نان به تعداد زیاد موجود باشد، به چند طریق می‌توانیم k نان بخریم؟

جواب: $\binom{k+4-1}{k}$

مثال 18) مطلوبست محاسبه‌ی چهارتایی های (x,y,z,u) با مولفه‌های صحیح مثبت به طوریکه برای عدد صحیح مثبت مفروض n؛ u<=n و x,y,z<=u .

راه حل اول:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

u می‌تواند از 1 تا n مقدار بگیرد و به ازای هریک از مقادیر، x, y, z میتوانند از یک تا u مقدار بگیرند.

راه حل دوم:

حالتبندی:

1)x = y =z

جلسه هشتم

2)x = y < z, z < x = y, y = z < x, x < y = z, x = z < y, y < x = z

3)x < y < z, x < z < y, y < x < z, y < z < x, z < x < y, z < x <y

جواب:

$$\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$

مثال 19)الف)دوازده دوست قصد شرکت در بازی دوستانه والیبال دارند. این افراد را به چند طریق می‌توان به دو تیم (با اعضای مساوی) تقسیم کرد؟

جواب: $\frac{\binom{12}{6}}{2}$

ب) مجموعه‌ی [m+n]را به چند ظریق میتوان به دو جزء یکی m عضوی و دیگری n عضوی افراز کرد؟

جواب:

اگر m=n: $\binom{m+n}{m}$

در غیر اینصورت: $\frac{\binom{m+n}{m}}{2}$

مثال 20) الف) به چند طریق n نفر میتوانند دور یک میز گرد بنشینند؟ (n-1)!

ب) به چند طریق n نفر میتوانند دور دو میز گرد مشابه بنشینند به طوری که هیچ میزی خالی نماند؟(چند جایگشت روی n هست که دو دور داشته باشد؟)

ج) به چند طریق میتوان با n مهره یک گردنبند ساخت؟ $\frac{(n-1)!}{2}$