

تمرین‌های فصل دوم سیستم‌های دینامیکی

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران

زمستان ۱۳۹۹ - بهار ۱۴۰۰

سوال ۱) برای هر یک از سیستم‌های زیر، تمامی نقاط تعادل را پیدا کنید و نوع هر نقطه تعادل تنها را مشخص کنید

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{16}x_1^5 - x_2 \quad (۱)$$

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2 \quad (۲)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - \psi(x_1 - x_2) \quad (۳)$$

که در سیستم شماره (۳) داریم $\psi(y) = y^3 + 0.5y$ اگر داشته باشیم $|y| \leq 1$ و $\psi(y) = 2y - 0.5 \operatorname{sgn}(y)$ اگر داشته باشیم $|y| > 1$.

سوال ۲) سیستم زیر دارای یک نقطه تعادل در مبدا است.

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{x_2}{\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1}{\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

الف: سیستم را حول مبدا خطی کنید و نشان دهید که مبدا یک گره پایدار سیستم است

ب: پیکره فاز سیستم غیرخطی را حول مبدا بیابید و نشان دهید که پیکره شبیه یک کانون پایدار است.

پ: ناهم‌انگهی میان بند الف و ب را شرح دهید و توجیه مناسبی برای آن ارائه دهید.

سوال ۳) پیکره فاز سیستم دینامیکی زیر را رسم کنید و نقاط تعادل و نوع آنها را مشخص کنید.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + ax_2 - bx_1x_2 + x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -(a+b)x_1 + bx_1^2 - x_1x_2$$

که در آن $a > 0$ و $b \neq 0$.

سوال ۴) برای هر یک از سیستم‌های زیر نشان دهید که چرخه حدی ندارند.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = g(x_1) + ax_2, \quad a \neq 1 \quad (۱)$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 + x_1x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^3 + x_1^2x_2 \quad (۲)$$

$$\dot{x}_1 = x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 \quad (۳)$$

سوال ۵) اگر a و b و c ثابت‌های مثبت باشند به طوری که $a < b$ اگر

$$D = \left\{ x \in R^2 \mid x_1 < -a, x_2 < \frac{x_1+b}{x_1+a} \right\}$$

نشان دهید که هر مسیر که از D آغاز شود در D باقی می‌ماند. و نشان دهید که هیچ مدار متناوبی با شروع از هیچ نقطه $x \in D$ وجود ندارد.

سوال ۶) با استفاده از محک پوانکاره-بندیکسون نشان دهید که دستگاه زیر دارای مدار متناوب است

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(2 - 3x_1^2 - 2x_2^2)$$