دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۳**

مروری بر مطالب درس:

- **اصل لانه کبوتری**

اگر $k+1$ شیء در k جعبه قرار داده شوند، حداقل یک جعبه وجود دارد که شامل ۲ شیء یا بیشتر باشد.

- **اصل تعمیم یافته لانه کبوتری**

اگر N شیء در k جعبه قرار داده شوند، حداقل یک جعبه وجود دارد که شامل $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ شیء باشد.

- **مثال هایی از اصل لانه کبوتری**

۱) در میان ۱۳ نفر، حداقل دو نفر هستند که در یک ماه به دنیا آمده‌اند.

۲) n نفر در یک اتاق حاضر هستند. میان آن‌ها حداقل دو نفر وجود دارد که تعداد یکسانی دوست در اتاق داشته باشند.

حل: ما n نفر و n جعبه شماره‌گذاری شده با $0, 1, \dots, n-1$ داریم. باید توجه داشته باشیم رابطه دوستی دوطرفه است. یک نفر که i دوست داشته باشد، به جعبه شماره i می‌رود. از طرفی می‌دانیم که جعبه‌های شماره 0 و $n-1$ نمی‌توانند باهم پر باشد(زیرا اگر در جمع کسی دوستی نداشته باشد، قطعاً کسی نخواهد بود که $n-1$ دوست داشته باشد). حال ما n نفر داریم و $n-1$ جعبه پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو جعبه با مقدار یکسان وجود دارند، یعنی حداقل دو نفر هستند که تعداد دوستان آن ها، یکسان است.

- **قضیه**
  - هر دنباله به طول n^2+1 از اعداد حقیقی متمایز، شامل زیردنباله‌ای به طول $n+1$ است که اکیداً یکنوا می‌باشد.
  - **قضیه اردش-ژیکرس:** فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_k$ دنباله‌ای از k عدد حقیقی متمایز باشد و m, n دو عدد طبیعی‌اند که برای آن‌ها رابطه $k > mn$ برقرار است. در این صورت، زیردنباله‌ای صعودی به طول $n+1$ و یا زیردنباله‌ای نزولی به طول $m+1$ و یا هردو وجود دارد.

- **اعداد رمزی**

قضیه رمزی بیان می‌کند که در رنگ آمیزی یال‌های هر گراف کامل، می‌توان زیرگراف‌های کامل تک‌رنگ یافت.

$\boldsymbol{R(m,n)}$: طبق تعریف برابر است با کوچکترین عدد صحیح N که اگر یال های k_N را، با ۲ رنگ آبی و قرمز به هر صورت رنگ کنیم، یک k_m تکرنگ آبی و یا یک k_n تک‌رنگ قرمز به وجود می‌آید.

  - $R(3,3) = 6$

- **اثبات های ترکیبیاتی**

اثبات هایی که در آن با هر ابزار و تکنیکی، چیزی شمارش شود و یا به بیان دقیق‌تر، یک تساوی با شمارش اعضای مجموعه ها باشد.

- **دوگانه‌شماری**

یک نوع خاص از اثبات‌های ترکیبیاتی، شمارش دوگانه است.

محاسبه یک کمیت به دو روش مختلف و به دست آوردن یک تساوی را دوگانه‌شماری می‌گوییم.

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) موارد زیر را اثبات کنید.

a) $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$
b) $R(2,n) = n$
c) $R(n,m) = R(m,n)$

۲) S زیرمجموعه‌ای از n عدد صحیح مثبت است. هیچ یک از عضوهای S بر n بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از S وجود دارد به گونه‌ای که مجموع اعضایش بر n بخش‌پذیر باشد.

۳) درون مستطیلی به اضلاع ۳ و ۴، شش نقطه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید فاصله حداقل دو تا از این نقاط حداکثر برابر $\sqrt{5}$ است.

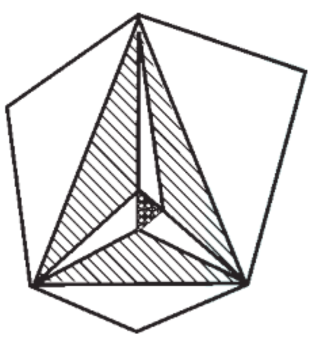
۴) ۱۰ نفر در یک امتحان شرکت کرده‌اند. هر مسئله دقیقاً توسط ۷ نفر حل شده و ۹ نفر دقیقاً ۴ مسئله را حل کرده‌اند. نفر دهم چند مسئله را حل کرده است؟

۵) یک مثلث‌بندی، افرازی از سطح یک n-ضلعی به مثلث‌ها است به نحوی که برای هر دو مثلث یکی از حالات زیر برقرار باشد:

الف) دو مثلث دقیقاً در یک ضلع کامل مشترک باشند.

ب) دو مثلث دقیقاً در یک رأس مشترک باشند.

پ) دو مثلث هیچ اشتراکی نداشته باشند.



می‌خواهیم هر یک از این مثلث ها را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم به نحوی که هر دو مثلث مشترک در یک ضلع، رنگ متفاوت داشته باشند و در ضمن اضلاع n-ضلعی متعلق به مثلث‌های سفید باشند. به عنوان مثال در شکل بالا چنین مثلث بندی‌ای برای یک شش‌ضلعی داده شده است. آیا می‌توان یک مثلث بندی با شرایط فوق برای یک هشت‌ضلعی ارائه داد؟

۶) اتحاد ترکیبیاتی زیر را با استفاده از استدلال ترکیبیاتی استدلال کنید.

a) $3^n = \binom{n}{0}2^0 + \binom{n}{1}2^1 + \cdots + \binom{n}{n}2^n$

b) $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

a) یک گراف کامل با $R(m-1,n)+R(m,n-1)$ رأس را در نظر بگیرید. رأس v از گراف داده شده را انتخاب کنید و رأس های باقی مانده را به دو مجموعه M و N تفکیک کنید، به گونه‌ای که هر رأسی مانند w در مجموعه M باشد، اگر یال (v,w) آبی باشد و w در N باشد. اگر یال (v,w) قرمز باشد. پس داریم $|N| \geq R(n-1,m)$ یا $|M| \geq R(m-1,n)$. اگر M دارای زیرگراف کامل k_n به رنگ قرمز باشد آن‌گاه گراف اصلی نیز شامل این بخش می‌شود. در غیر این‌صورت، M دارای زیرگراف کامل k_{m-1} است، پس $M \cup \{v\}$، دارای زیرگراف کامل k_m به رنگ آبی است. برای حالت دیگر، یعنی $|N| \geq R(n-1,m)$، استدلال مشابه است. در نتیجه $R(m,n) \leq R(m-1,n)+R(m,n-1)$.

b) ابتدا یک گراف کامل $n-1$ رأسی را در نظر بگیرید که تمام یال‌هایش با آبی رنگ‌آمیزی شده است. در این حالت نه یال قرمزی وجود دارد و نه هیچ گراف n رأسی آبی. پس $R(2,n) > n-1$. حال یک گراف کامل n رأسی کامل را در نظر بگیرید. اگر حداقل یک یال آن با قرمز رنگ‌آمیزی شده باشد، آن‌گاه مسئله حل شده است. در غیر این‌صورت همه رأس‌های این گراف، آبی هستند. پس یک گراف کامل آبی با n رأس پیدا کردیم. در نتیجه $R(2,n) \leq n$. از ترکیب این دو رابطه داریم $R(2,n)=n$.

c) گراف کامل G را در نظر بگیرید که با ۲ رنگ آبی و قرمز، رنگ‌آمیزی شده است. حال گراف G' را در نظر بگیرید که هر یال قرمز G، در G' آبی می‌شود و برعکس. می‌دانیم $R(m,n)$ به این معناست که در گراف $k_{R(m,n)}$ یا یک گراف قرمز k_m و یا یک گراف آبی k_n وجود دارد. این بدان معناست که در $K'_{R(m,n)}$، یا یک گراف آبی k_m و یا یک گراف قرمز k_n وجود دارد.(تعریف$R(n,m)$)

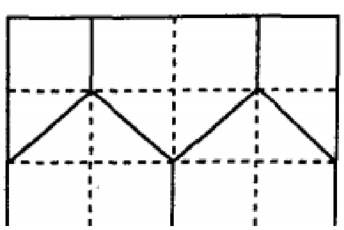
از آن‌جایی که در گراف G'، فقط رنگ یال ها تغییر می‌کند، $R(n,m)=R(m,n)$.

۲)

s را مجموعه روبرو فرض می‌کنیم $s=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

مجموع‌های $a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ldots,\ a_1+a_2+\cdots+a_n$ را در نظر بگیرید. اگر یکی از n-مجموع بر n بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه کار پایان یافته است. در غیر این‌صورت، دو تا از مجموع های $a_1+a_2+\cdots+a_i$ و $a_1+a_2+\cdots+a_j$ باقی‌مانده یکسان در تقسیم بر n دارند. زیرا n عدد داریم و $n-1$ حالت باقی‌مانده (چون 0 جزء باقی‌مانده ها نیست). بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود، فرض کنید $j>i$ باشد، در این صورت $a_{i+1}+\cdots+a_j$ بر n بخش‌پذیر است.

۳)



ایده حل این مسئله باید طوری باشد که مستطیل را به ۵ بخش، قسمت بندی کنیم که حداکثر فاصله در آن $\sqrt{5}$ باشد. پس کافیست مستطیل را به صورت مقابل تقسیم کنید.همان طور که می‌بینید این مستطیل به ۵ قسمت تقسیم شده‌است به طوری که حداکثر فاصله در آن برابر $\sqrt{5}$ است. حال ما ۶ نقطه داریم و ۵ محل برای قرار دادن آن‌ها. پس طبق اصل لانه کبوتری، فاصله حداقل ۲ تا از این نقاط کمتر یا مساوی $\sqrt{5}$ است.

۴)

فرض کنید نفر دهم، n مسئله را حل کرده باشد و تعداد مسئله‌های امتحان برابر p باشد، در این صورت با تشکیل جدولی $p \times 10$ که سطرهای آن متناظر با شرکت‌کنندگان و ستون های آن متناظر با مسئله‌ها است. از محاسبه مجموع اعداد جدول به دو روش نتیجه میگیریم $7p = 36 + n$

همچنین می‌دانیم $0 \leq n \leq P$، در نتیجه:

$$36 + n = 7P \geq 7n \Rightarrow 6n \leq 36 \Rightarrow n \leq 6$$

از بین اعداد 0 تا 6، فقط به ازای $n = 6$، حاصل $36 + n$ بر 7 بخش‌پذیر است، بنابراین $n = 6$ می‌باشد.

۵)

فرض کنید بتوان یک مثلث‌بندی برای یک هشت‌ضلعی ارائه داد. تعداد مثلث‌های سفید و سیاه را در این مثلث‌بندی به ترتیب a و b درنظر می‌گیریم. در این‌صورت، اگر مجموع تعداد اضلاع ناحیه‌های سفید را برابر s و مجموع تعداد اضلاع ناحیه‌های سیاه را برابر t تعریف کنیم، آنگاه خواهیم داشت $s = 3a$ و $t = 3b$. از سوی دیگر، $s = t + 8$ زیرا هر ضلع از یک مثلث سیاه، ضلعی از یک مثلث سفید است، به علاوه اینکه هر ضلع از هشت‌ضلعی، ضلعی از یک مثلث سفید است. نتیجه می‌گیریم $3a = 3b + 8$. ولی این تساوی نمی‌تواند برقرار باشد زیرا سمت چپ این تساوی بر ۳ بخش پذیر است، ولی سمت راست آن این ویژگی را ندارد.

۶)

a) هر دو طرف، تعداد رشته‌هایی به طول n، متشکل از اعداد $\{0, 1, 2\}$ را نشان می‌دهند. طرف چپ تساوی، می‌گوید n کاراکتر داریم که هر کدام می‌توانند ۰، ۱ و یا ۲ باشد. پس در کل 3^n حالت می‌شود. حال طرف راست تساوی، تعداد این حالات را بر اساس موقعیت عددهایی در رشته افراز می‌کند که ۲ نیستند. برای مثال، اگر ۵ موقعیت در رشته، ۲ نباشند، اول آن‌ها را از n کاراکتر انتخاب می‌کنیم، سپس در می‌یابیم که 2^5 راه وجود دارد تا ۵ عدد ۰ و ۱ را در آن موقعیت ها بنشانیم. پس در کل، $\binom{n}{0} 2^0 + \binom{n}{1} 2^1 + \cdots + \binom{n}{n} 2^n$ راه برای شمردن تعداد رشته‌ها وجود دارد.

b) هر دو طرف تساوی، تعداد رشته هایی به طول $2n$ را می‌شمارند، که فقط نصف آن ها 0 است. همان طور که مشاهده می‌شود، تعداد این رشته‌ها برابر است با انتخاب موقعیت n صفر از $2n$ موقعیت موجود، یعنی $\binom{2n}{n}$ که همان سمت چپ تساوی است. در سمت راست تساوی، ما رشته را به تعداد رخدادهای ۱ در n قسمت اول رشته افراز می‌کنیم و همین‌طور از تساوی $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ استفاده شده‌است.

برای مثال اگر در n قسمت اول دو تا عدد 1 بیاید، پس $n - 2$ تا 0 در کل وجود دارد. پس برای این حالت $\binom{n}{2} \times \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}^2$ راه وجود دارد. در نتیجه از $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ راه، می‌توان تعداد این رشته‌ها را شمرد.