



دانشگاه تهران

تمرین سری دوم مبانی ترکیبیات

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

تاریخ تحویل: جمعه ۲۲ اسفند

(۱) فرض کنید a و b اعداد صحیحی باشند که $0 \leq a \leq b$ برقرار است. تعداد جواب‌های صحیح نامعادله $a \leq |x_1| + \dots + |x_r| < b$ در هر یک از حالت زیر محاسبه کنید.

الف) x_i ها مخالف صفر باشند.

ب) x_i ها اعداد صحیح دلخواه باشند.

(۲) ثابت کنید تعداد راه‌های نوشتن n به صورت مجموعه‌ای از جمع‌وندهای $1, 2, 3$ بدون مهم بودن ترتیب جمع‌وندها، به طوری که هر یک از این جمع‌وندها حداقل یک بار مورد استفاده قرار گیرند، برابر عبارت زیر است:

$$1 + \left\lfloor \frac{n(n-6)}{12} \right\rfloor$$

(۳) ثابت کنید تعداد افزاهای n به حداکثر k جز، برابر با تعداد افزاهای $n+k$ به دقیقاً k جز است.

(۴) فرض کنید هر کدام از گزاره‌ها، زمان اجرای یک الگوریتم از اندازه ورودی n باشد. در هر مورد مشخص کنید که کوچک‌ترین کران بالا (O) برای اجرای الگوریتم چیست و با آوردن استدلال آن را اثبات کنید.

- a) $5 + 0.001n^3 + 0.025n$
- b) $0.3n + 5n^{1.5} + 2.5n^{1.75}$
- c) $n \log_3 n + n \log_2 n$
- d) $3 \log_8 n + \log_2 \log_2 \log_2 n$
- e) $2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25}$
- f) $100n \log_3 n + n^3 + 100n$

(۵) درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید و برای پاسخ‌تان دلیل بیاورید. در صورت غلط بودن، عبارت صحیحی پیشنهاد دهید.

- a) $O(f + g) = O(f) + O(g)$
- b) $O(f \cdot g) = O(f) \cdot O(g)$
- c) $g = O(f) \text{ and } h = O(f) \Rightarrow g = O(h)$
- d) $5n + 8n^2 + 100n^3 = O(n^4)$
- e) $5n + 8n^2 + 100n^3 = O(n^2 \log n)$