
مروری بر مطالب درس:

- **توابع سقف و کف**

$x = k + \{x\}$ $\qquad$ $0 \leq \{x\} < 1$ و $k \in \mathbb{Z}$

$\lfloor x \rfloor = k$

$\lceil x \rceil = k + 1$

- **تابع ایورسون**

$$[P(x)] = \begin{cases} 0 & ; \ \text{if P(x) False} \\ 1 & ; \ \text{if P(x) True} \end{cases}$$

- **مباحث شمارش**
  - جایگشت

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  - انتخاب

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

  - معادله دیوفانتی یا معادله سیاله

$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n \qquad x_1 > c_1,\ x_2 > c_2\,, \ldots,\ x_r > c_r$

تعداد جواب های معادله : $\binom{n-(c_1+c_2+\cdots+c_r)-1}{r-1}$

  - **افراز**
    - مجموعه ای تهی نباشد.
    - اجتماع تمامی مجموعه های مفروز برابر با مجموعه اصلی شود.
    - اشتراک دو به دو مجموعه های مفروز، تهی باشد.

$$p_r(n) \sim \frac{n^{r-1}}{r!\,(r-1)!}$$

- **تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی**
  - تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی$(m \geq n)$:

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1)^m$$

  - تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه n عضوی دیگر برابر با $n!$ است.
  - تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی که در آن $n < m$ است، برابر صفر است.
  - تعداد توابع یک به یک و پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی که در آن $n \neq m$ است، برابر صفر است.

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) اگر m عددی صحیح باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = ?$$

۲) اگر α و β اعداد حقیقی باشند، تعداد اعداد صحیح هر یک از بازه های زیر را با شرایط مربوطه محاسبه کنید.

$[\alpha, \beta] \qquad \alpha \leq \beta \qquad ?$

$[\alpha, \beta) \qquad \alpha \leq \beta \qquad ?$

$(\alpha, \beta] \qquad \alpha \leq \beta \qquad ?$

$(\alpha, \beta) \qquad \alpha < \beta \qquad ?$

۳) تعداد رابطه ها از $[m]$ به $[n]$ را محاسبه کنید.

۴) با اختیار داشتن a حرف بزرگ و b حرف کوچک، چه تعداد کلمه به طول n با m حرف بزرگ می توان ساخت؟

۵) نشان دهید تعداد افرازهای n عضو به ۲ جزء برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

۶) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$ با دانستن شروط $x_3 > 4$ و $x_1, x_4 \geq 2$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

چون m عددی صحیح است، بنابراین می توان آن را به دو فرم $m = 2k$ یا $m = 2k + 1$، $(k \in \mathbb{Z})$ نوشت. حال برای هر یک از این فرم ها، داریم:

$$m = 2k : \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil = \lfloor k \rfloor + \lceil k \rceil = k + k = 2k \rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = m$$

$$m = 2k + 1 : \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = k + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + k + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$= k + 0 + k + 1 = 2k + 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = m$$

بنابراین برای هر عدد صحیح m داریم: $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = m$

۲)

$[\alpha, \beta]$	$\alpha \le \beta$	$\lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1$
$[\alpha, \beta)$	$\alpha \le \beta$	$\lceil \beta \rceil - \lceil \alpha \rceil$
$(\alpha, \beta]$	$\alpha \le \beta$	$\lfloor B \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$
(α, β)	$\alpha < \beta$	$\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$

۳)

توجه: تفاوت رابطه و تابع: در تابع هر یک از اعضای دامنه، تنها به یک عضو از اعضای برد میتوانند نظیر شوند اما در رابطه، هر یک از اعضای دامنه، میتوانند به هر یک از اعضای برد نظیر شوند.

بنابراین هر یک از m عضو دامنه، می توانند به هر یک از n عضو برد، نظیر شوند یا نشوند. بنابراین برای هر یک از اعضای دامنه، 2^n حالت داریم.

حال، تعداد کل رابطه ها از $[m]$ به $[n]$ برابر است با : $(2^n)^m = 2^{nm}$

۴)

ابتدا m خانه را جهت قرار دادن حروف بزرگ انتخاب میکنیم. برای هر یک از این m خانه، a حالت داریم(دقت کنید که تکرار مجاز است). برای هر یک از مابقی خانه ها ($n - m$ خانه) نیز به طور مشابه، b حالت داریم. بنابراین کل حالات برابر است با : $\binom{n}{m} a^m b^{n-m}$

۵)

میخواهیم به ۲ جزء افراز کنیم، بنابراین تعداد اعضای هر جزء بدین صورت است: $n-r$ و r

$1\,, n\ -1$

$2\,, n-2$

$3\,, n\ -3$

$\vdots$

$n-2\,,2$

$n-1\,,1$

چون افراز مرتب خواسته نشده است، بنابراین تفاوتی بین افراز به صورت $r\,, n-r$ و $n-r, r$ وجود ندارد.

پس کافی است این تقسیم بندی را تا $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ادامه دهیم، زیرا بعد از آن، حالت تکراری پدیدار میشود.

۶)

$$x_1, x_4 \geq 2\,, x_3 > 4\,, x_2, x_5 \geq 0\ \rightarrow\ x_1, x_4 > 1\,, x_3 > 4\,, x_2, x_5 > -1$$

تعداد کل جواب های معادله برابر است با:

$$\binom{19-(1+1-1-1+4)-1}{5-1} = \binom{14}{4}$$