



دانشگاه تهران

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

نیم سال دوم تحصیلی سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مطالب تکمیلی اصول سیستم‌های کامپیوتری

مطالب فصل دوم مدار منطقی:

- معرفی گیت‌های منطقی:

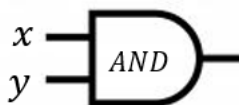
○ گیت OR : در عبارات، با علامت $+$ نشان داده می‌شود و جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



○ گیت AND : در عبارات معمولاً با علامت \cdot نشان داده می‌شود. در برخی موارد نیز ممکن است علامتی گذاشته نشود. جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



○ گیت NOT : در عبارات با علامت $'$ نشان داده می‌شود. جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	x'
0	1
1	0



$$(x)' = x'$$

○ گیت XOR : در عبارات با علامت \oplus نشان داده می‌شود. جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$x \oplus y = xy' + x'y$$

○ گیت $NAND$: نقیض AND است. جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	y	$(xy)'$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$(xy)' = x' + y'$$

○ گیت NOR : نقیض OR است. جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	y	$(x + y)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



$$(x + y)' = x'y'$$

○ گیت $XNOR$: نقیض XOR است. جدول درستی عملکرد و مدار آن به صورت زیر است:

x	y	$(x \oplus y)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$$(x \oplus y)' = xy + x'y'$$

• خواص جبر بول:

- بسته بودن
- شرکت پذیری
- جابه جایی
- توزیع پذیری
- وجود عضو خنثی جمع و ضرب
- وجود عضو معکوس
- در تفسیر عبارات، تقدم عملگرها ابتدا با پرانتز، سپس با NOT ، بعد از آن با AND و در نهایت با OR است.
- جدول درستی، لیستی از 0 و 1-ها می باشد، به طوری که برای n متغیر، 2^n سطر داریم. ترتیب n متغیر برای ما اعداد 0 تا $2^n - 1$ را تولید می کند.
- پیاده سازی توابع با استفاده از گیت های منطقی:
- ابتدا بخش های کوچک تر از تابع را با گیت ها تشکیل می دهیم. سپس عبارت کلی را ایجاد می کنیم.
- برای مثال فرض کنید می خواهیم تابع $x'y'z + xz'$ را با گیت های منطقی رسم کنیم. برای این کار ابتدا مدار $x'y'z$ و مدار xz' را تشکیل می دهیم. سپس خروجی این دو مدار را به یک گیت OR ورودی می دهیم.
- در هنگام پیاده سازی توابع با استفاده از گیت های منطقی، بهتر است ابتدا تابع را ساده کنیم سپس مدار آن را رسم کنیم.

- لیترال: به هر شیء منطقی یا نقیض آن در عبارات منطقی، لیترال گفته می‌شود.
مثال: لیترال‌های عبارت $x'yz + xz$ برابر است با: x, x', y, z
- در ساده‌سازی عبارات و توابع منطقی، هدف مینیمم کردن تعداد لیترال‌هاست.
- در هنگام متمم کردن، عملکرد AND به OR و عملگر OR به AND تبدیل می‌شود.
- محاسبه دوگان عبارت منطقی: تمام عملگرهای AND را به OR و تمام عملگرهای OR را به AND تبدیل می‌کنیم.
- متمم کردن عبارات منطقی با استفاده از دوگان:
ابتدا دوگان عبارت را بدست می‌آوریم، سپس تمام لیترال‌ها را نقیض می‌کنیم.
مثال: فرض کنید می‌خواهیم با استفاده از دوگان متمم عبارت $x'yz' + x'y'z$ را بدست آوریم.
دوگان عبارت فوق برابر $(x' + y + z')(x' + y' + z)$ است. حال اگر هر لیترال را نقیض کنیم به عبارت زیر می‌رسیم که متمم عبارت داده شده است.
$$(x + y' + z)(x + y + z')$$
- معرفی فرم‌های استاندارد و متعارف:
 - ماکسترم‌ها: به صورت M_i نشان داده می‌شود به طوری که عملگرهای میان لیترال‌ها OR یا همان $+$ است.
 - مینترم‌ها: به صورت m_i نشان داده می‌شود به طوری که عملگرهای میان لیترال‌ها AND یا همان \cdot است.

برای مثال، برای ۳ متغیر، ماکسترم‌ها و مینترم‌ها به صورت جدول زیر است.

			مینترم‌ها		ماکسترم‌ها	
x	y	z	جمله	علامت	جمله	علامت
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

- نوشتن توابع و عبارات منطقی با استفاده از مینترم‌ها و ماکسترم‌ها:
به این صورت عمل می‌کنیم اگر متغیری در بخش‌های عبارت ظاهر نشده بود، به نوعی آن را ایجاد کنیم. برای فهم بهتر به مثال توجه کنید.
مثال: تابع $F = A + B'C$ را به صورت جمع مینترم‌ها و ضرب ماکسترم‌ها بنویسید.
می‌دانیم حاصل $x + x'$ همواره برابر ۱ است. همچنین می‌دانیم حاصل $x \cdot 1$ نیز همواره برابر x است. بنابراین می‌توانیم متغیرهایی که در بخش‌های تابع داده شده ظاهر نشده‌اند را در عبارت ایجاد کنیم.
برای این کار داریم:

$$F = A(B + B')(C + C') + B'C(A + A')$$

$$\rightarrow F = ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C$$

$$\rightarrow F = ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'B'C$$

$$F = \sum (1,4,5,6,7)$$

همچنین توجه کنید که ایندکس‌هایی که در جمع مینترم‌ها و ضرب ماکسترم‌ها می‌آیند، همواره مکمل یکدیگرند. بنابراین:

$$F = \prod (0,2,3)$$

- فرم SOP : در این فرم، عبارت را به صورت جمع حاصل ضرب‌ها می‌نویسند. مثال: $xy + x'$
- فرم POS : در این فرم، عبارت را به صورت ضرب حاصل جمع‌ها مینویسند. مثال: $(x')(x + y + z')(z)$