۱۳۹۷ ,۶ ,۳۱

مبانی ترکیبیات

جلسه اول

Sepehr omidvar

۱۳۹۷/۷/۲

مبانی ترکیبیات

جلسه دوم

Sepehr amidvar

«به نام یکتایی»

استقراء و بازگشت

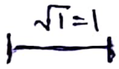
اصل استقراء: در صورتی که (۱) و (۲) برقرار باشد آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح مثبت $n\geq b$ داریم $P(n)$

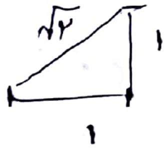
① مقدمه یا پایه استقرا $P(b)$

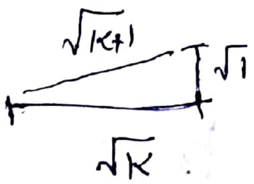
② مرحله استقراء $\forall k\geq b\,(P(k) \Rightarrow P(k+1))$

مثال ۱: ثابت کنید با در اختیار داشتن طول واحد، با استفاده از پرگار و خط‌کش غیر مندرج به ازای هر مقدار صحیح مثبت n می‌توان طول $\sqrt{n}$ را رسم کرده

حل:

$P(1)$:  ✓

$P(2)$:  ✓

$P(k) \rightarrow P(k+1)$  ✓

مثال ۲: ثابت کنید نامساوی زیر به ازای هر عدد صحیح $n\geq 4$ برقرار است.

$$2^n < n!$$

واضح است:

$P(4) = 24$

$P(k): 2^k < k! \Rightarrow 2^{k+1} < 2k! \overset{k\geq 4}{<} (k+1)k! \Rightarrow 2^{k+1} < (k+1)! \Rightarrow P(k+1)$ ✓

• فرض کنید n_1 کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که نامساوی زیر به ازای $n=n_1$ و به ازای هر عدد حقیقی مثبت x برقرار باشد

$$(1+x)^n > 1+nx+nx^2$$

الف) مقدار n_1 را حساب کنید.

ب) ثابت کنید نامساوی فوق به ازای هر عدد صحیح $n\geq n_1$ و هر عدد حقیقی

مثبت k برقرار است. *نکته

مثال ۳: فرض کنید $c>1$ عدد صحیح باشد. ثابت کنید نامساوی زیر به ازای $n=1,\dots,c$ برقرار است.

$$c^n > n!$$

حل:

$$P(1):\ c > 1! = 1$$ طبق فرض برقرار است

$$P(k):\ c^k > k! \Rightarrow c \cdot c^k > c \cdot k! \underset{k \leq c-1}{\geq} (k+1) \cdot k!$$

$$\Rightarrow c^{k+1} > (k+1)! \Rightarrow P(k+1) \checkmark$$

$$\forall k \left[(1 \leq k < c \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1) \right]$$

استقراء کران دار (ابتدا از b)

(۱) $P(b)$

(۲) $\forall k\ (b \leq k < c) \Rightarrow (P(k) \Rightarrow P(k+1))$

اصل استقراء: درصورتی که ۱ و ۲ برقرار باشد آنگاه به ازای هر عدد صحیح $b \leq n \leq c$ داریم $P(n)$

مسأله: در مثال فوق، قرار دهید $c=5$. سپس مشخص کنید که نامساوی داده شده دقیقاً به ازای کدام مقادیر صحیح مثبت n برقرار است؟

مثال ۴: مجموع n عدد فرد مثبت ابتدا از ۱ را بدست آورید.

اثبات با استقراء

$$P(n) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

● مسأله: حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$1\times 1! + 2\times 2! + \cdots n\times n! \longrightarrow (n+1)!-1$$

● مسأله: فرم ساده شده عبارات زیر را به ازای $n=0,1,2,3$ بدست آورید. سپس برای هر یک از عبارت‌ها یک فرم ساده شده در حالت کلی حدس بزنید و حدس خود را ثابت کنید.

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

$$g_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$$

$$h_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$

راهنمایی: برای $h_n(x)$ باید حاصل $h_n(x) - \frac{1}{?}$ را محاسبه کنید.

مسئله: ثابت کنید

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

مثال: به ازای عدد صحیح نامنفی n قرار دهید

$$a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \quad , \quad n \geq 0$$

جمله a_{n-2} را برحسب a_{n-1} و a_{n-2} بدست آورید. $(n \geq 2)$ سپس ثابت کنید a_n عددی صحیح و قابل قسمت بر 2^n است.

حل: الف)

$$\alpha = 3+\sqrt{5} \qquad \beta = 3-\sqrt{5}$$

$$(\alpha+\beta)a_{n-1} = (\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$
$$= \alpha^n + \beta^n + \alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$$
$$= a_n + \alpha\beta a_{n-2}.$$

$$\overset{\text{پس}}{\Longrightarrow} a_n = 6a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

ب) نتیجه بگیرید u_n عددی است صحیح و قابل قسمت بر 2^n.

حل: استقرای با دو مقدمه

$P(1) \wedge P(2)$ مقدمه‌ی استقراء

$$\forall k \big(\underbrace{(P(k) \wedge P(k+1))}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{P(k+2)}_{\text{حکم}} \big)$$ فرض استقراء و حکم

اگر الف و ب برقرار باشد آن گاه به ازای هر n صحیح مثبت داریم $P(n)$ را.

صحیح بودن و قابل قسمت بر 2^n بودن واضح است.

پایه استقراء
$$\begin{cases} P(0): 2^0 \mid u_0 = 2 \in \mathbb{Z} \checkmark \\ P(1): 2^1 \mid u_1 = 6 \in \mathbb{Z} \checkmark \end{cases}$$

فرض استقراء: $(u_k \in \mathbb{Z},\ 2^k \mid u_k) \wedge (u_{k+1} \in \mathbb{Z},\ 2^{k+1} \mid u_{k+1})$

باید حکم استقراء یعنی $(u_{k+2} \in \mathbb{Z},\ 2^{k+2} \mid u_{k+1})$ را از مفروضات فوق نتیجه بگیریم. داریم:

$$u_{k+2} = 6u_{k+1} - 4u_k \in \mathbb{Z}$$

از سوی دیگر از آن جا که $2^{k+1} \mid u_{k+1}$ ، $2^k \mid u_k$ ، اعداد صحیح v_k و v_{k+1} وجود دارند به طوری که $u_k = 2^k v_k$ و $u_{k+1} = 2^{k+1} v_{k+1}$ لذا:

$$u_{k+2} = 6u_{k+1} - 4u_k = 6 \times 2^{k+1} v_{k+1} - 4 \times 2^k v_k = 2^{k+1}(3v_{k+1} - v_k)$$

$$= 2^{k+2} \mid u_{k+2} \checkmark$$

۱۳۹۷/۷/۸

مبانی ترکیبیات

جلسه سوم

Sepehr Amidvar

«به نام یکتای»

دنباله تریبوناچی t_n ، $n \geq 0$ را با شرایط اولیه $t_0=1$, $t_1=2$, $t_2=4$ و با رابطه‌ی بازگشتی $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$ ، $n \geq 3$ تعریف می‌شود ثابت کنید به ازای هر $n \geq 3$ داریم $t_n < 2^n$

حل:

n	0	1	2	3	4	5	6
t_n	1	2	4	7	13	24	44

t_3 , t_4 , t_5 ✓

$P(K) : t_K < 2^K$

$P(K+1) : t_{K+1} < 2^{K+1}$

$P(K+2) : t_{K+2} < 2^{K+2}$

$\Rightarrow t_{K+3} = t_{K+2} + t_{K+1} + t_K < 2^{K+2} + 2^{K+1} + 2^K = 2^K(4+2+1) = 7 \cdot 2^K < 2^{K+3}$ ✓

مسأله: دنباله‌ی t'_n ، $n \geq 0$ را با شرایط اولیه $t'_0 = t'_1 = t'_2 = 1$ و با رابطه بازگشتی $t'_n = t'_{n-1} + t'_{n-2} + t'_{n-3}$ ، $n \geq 3$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید به ازای $n \geq 3$ داریم:

$t_{n-1} > t'_n > t_{n-2}$

t_{n-1} و t_{n-2} از مسئله قبل است.

t'_3 , t'_4 , t'_5 ✓

حکم ← فرض

استقراء با m مقدمه ابتدا از b :

مقدمه استقراء : $P(b) \wedge P(b+1) \wedge \cdots \wedge P(b+m-1)$

مرحله استقرائی : $\forall K \geq b \big((P(K) \wedge P(K+1) \wedge \ldots P(K+m-1)) \Rightarrow P(K+m) \big)$

اگر مقدمه‌ی استقرا و مرحله استقرائی برقرار باشد به ازای هر $n \geq b$ داریم $P(n)$.

استقرای قوی ابتدا از b :

الف) مقدمه استقراء : $P(b)$

ب) مرحله استقرایی : $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \dots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1)$

اگر الف و ب برقرار باشد آن گاه به ازای هر $n \geq b$ داریم $P(n)$.

مثال : هر عدد صحیح بزرگتر از 1 قابل تجزیه به حاصل ضرب تعدادی عدد اول است. (حاصل ضرب مذکور می‌تواند شامل تنها یک عامل باشد مثلاً هر عدد اول قابل تجزیه به صورت فوق است.)

حل :

چون عدد ۲ عددی اول است $P(2)$ خود به خود برقرار است.

حال فرض می‌کنیم به ازای هر $2 \leq k < k+1$ ، $P(k)$ برقرار باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $P(k+1)$ برقرار است. برای این منظور، توجه می‌کنیم اگر $k+1$ عددی اول باشد طبق توضیح بالا، حکم خود به خود برای آن برقرار است و اگر $k+1$ اول نباشد طبق تعریف می‌توان آن را به صورت $k+1 = ab$ نوشت که در آن $2 \leq a \leq k$ ، $2 \leq b \leq k$.

بنابراین $P(a)$ و $P(b)$ برقرار است یعنی هر یک از عددهای a و b قابل تجزیه به حاصل ضرب عددهای اول هستند و با جایگذاری در رابطه (*)، نتیجه می‌شود که $k+1$ نیز چنین است یعنی $P(k+1)$ برقرار است.

توجه : حکم عدد n قابل تجزیه به حاصل ضرب عددهای اول است را با $P(n)$ نمایش می‌دهیم و $P(n)$ را به استقراء قوی ثابت می‌کنیم.

مسأله : هر عدد صحیح مثبت n را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌ها (با نماهای نامنفی) متمایز ۲ نوشت.

مسأله: به ازای هر عدد صحیح مثبت n که $n < (m+1)!$ ، اعداد $a_1, \dots, a_m$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{cases} n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_m (m!) \\ 0 \leq a_i \leq i \qquad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

حل: برای $n=1$ واضح است که حکم برقرار است زیرا $a_1 = 1$ و $m=1$ پس

$1 = 1 \cdot 1!$ ✓

این حالت یکی از حالت‌های خاص نمایش ا بود و می‌توان به حالت‌های دیگر به ازای m ها متفاوت نشان داد.

فرض می‌کنیم برای K حکم برقرار است باید برای $K+1$ ثابت کنیم.

$$\begin{aligned} & K = a_1 \cdot 1! + \dots + a_m (m!) \\ + \; & 1 = b_1 \cdot 1! + \dots + b_n (n!) \end{aligned}$$

$\Rightarrow K+1 = (a_1 + b_1$

۱۳۹۷ ,۷ ,۹

مبانی ترکیبیات

جلسه چهارم

Sepehr Aamdar

«به نام یکتایی»

نکاتی درباره دنباله ها و آرایه هایی که به صورت بازگشتی تعریف می شوند.

مثال هایی که از قبل دیده اید:

$$\begin{cases} a_0=\alpha \\ a_n=a_{n-1}+d \end{cases}$$ تصاعد حسابی

$$\begin{cases} a_0=\alpha \\ a_n=q a_{n-1} \end{cases}$$ تصاعد هندسی

حالت خاص تابع a^n به ازای n صحیح نامنفی:

$$\begin{cases} a^0=1 \\ a^n=a \cdot a^{n-1} & n\geq 1 \end{cases}$$

$$n! = \begin{cases} 1 & n=0 \text{ اگر} \\ n\cdot(n-1)! & n\geq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0=0 , f_1=1 \\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \end{cases}$$ دنباله فیبوناچی

$$\begin{cases} t_0=1 , t_1=2 , t_2=4 \\ t_n=t_{n-1}+t_{n-2}+t_{n-3} \end{cases}$$ دنباله تریبوناچی

$$\begin{cases} L_0=2 , L_1=1 \\ L_n=L_{n-1}+L_{n-2} & n\geq 2 \end{cases}$$ دنباله لوکا (Lucas)

$$\begin{cases} F_0^{(k)}=\dots , F_1^{(k)}=\dots , \dots , F_{k-1}^{(k)}=\dots \\ F_n^{(k)}=F_{(n-1)}^{(k)}+\dots+F_{(n-k)}^{(k)} \end{cases}$$ دنباله k-بوناچی

t عدد صحیح مثبت داده شده ای است. $a_n=a_{n-t} , n\geq t$ در این صورت دنباله a_n متناوب است.

مثال: ثابت کنید اگر دنباله ی $\{a_n\}_{n\geq 0}$ متناوب با دوره تناوب $t\in\mathbb{Z}^+$ باشد

آنگاه به ازای $n\geq t$ داریم: اگر بخش پذیر بود 1 و اگر نبود 0 است.

$$a_n=[t|n]a_0+[t|n-1]a_1+\cdots+[t|n-t+1]a_{t-1}$$

به عنوان حالت خاص نتیجه بگیرید به ازای $t=2$ برای $n\geq 0$ داریم

$$a_n=\frac{a_0+a_1}{2}+(-1)^n\frac{a_0-a_1}{2}$$

در حالت های $t=3$ و $t=4$ چه نتیجه ای بدست می آید.

توجه:

$$[2|n]=\frac{1+(-1)^n}{2}$$ n زوج است

$$[2|n-1]=\frac{1-(-1)^n}{2}$$ n فرد است

$$a_n=a_0[2|n]+a_1[2|n-1]=a_0\times\frac{1+(-1)^n}{2}+a_1\times\frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$=\frac{a_0+a_1}{2}+(-1)^n\times\frac{a_0-a_1}{2}$$ ✓

ادامه به عهده خودتان

$$[3|n]=\frac{1+w^n+w^{2n}}{3},\quad w=e^{\frac{2\pi}{3}i}=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$$

- دنباله $\{a_n\}_{n\geq 0}$ از اعداد مثبت با رابطه بازگشتی $a_n=\frac{1+a_{n-1}}{a_{n-2}}$, $n\geq 2$ تعریف شده است. ثابت کنید این دنباله متناوب است؟ دوره تناوب آن چیست؟

کاربردی دیگر از نماد ایورسون: تعریف بازگشتی دنباله فیبوناچی را با نماد ایورسون به صورتی بازنویسی کنید که نیازی به ذکر جداگانه شرایط اولیه نباشد.

$$f_{(n)}=(f_{(n-1)}+f_{(n-2)})[n\geq 2]+f_1[n=1]+\cancel{f_0[n=0]}$$

$$=f_{n-1}+f_{n-2}[n\geq 2]+[n=1]$$

- مسأله: هر یک از دنباله های فیبوناچی و لوکا در رابطه بازگشتی $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ، $n\geq 2$

را صدق می‌کنند.

الف) آیا دنباله‌ای را می‌شناسید که به صورت یک تصاعد هندسی باشد و رابطه فوق صدق کند؟

حل: باید به جای u_n، aq^n گذاشت و سپس حل کرد: $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

هر دنباله‌ای که $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=d$ یا q باشد.

ب) هر دنباله‌ای که در رابطه بازگشتی فوق صدق کند یک دنباله فیبوناچیت است (فیبوناچی تعمیم یافته). ثابت کنید ترکیب خطی هر دو دنباله فیبوناچی، یک دنباله‌ی فیبوناچی است.

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1}+v_{n-2} \\ u_n &= u_{n-1}+u_{n-2} \end{aligned} \Rightarrow \alpha v_n+\beta u_n=(\alpha v_{n-1}+\beta u_{n-1})+(\alpha v_{n-2}+\beta u_{n-2})$$

پ) اگر $\{u_n\}$ یک دنباله‌ی فیبوناچیت باشند $\{w_n\}$ انتقال یافته آن به اندازه یک واحد باشد یعنی $w_n=u_{n+1}$، آنگاه $\{w_n\}$ نیز یک دنباله فیبوناچیت است.

$w_n = Eu_n \leftarrow$ E یعنی به واحد انتقال می‌دهد
E^2 یعنی ۲ تا و ...

$$E^2u_n=u_{n+2}$$

n	۰	۱	۲	۳	۴
f_n	۰	۱	۱	۲	۳

n	۰	۱	۲	۳	۴
Ef_n	۱	۱	۲	۳	۵

ت) بعداً گفته خواهد شد.

بررسی توسیع هایی از دنباله فیبوناچی: اگر $\{f_n\}_{n\geq 0}$ را به عنوان توسیعی از دنباله ی فیبوناچی در نظر بگیریم که $f_0=0, f_1=1$ و به ازای هر عدد صحیح n رابطه ی $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ برقرار است. جدول زیر بدست می آید.

ثابت کنید $f_{-n}=(-1)^{n-1}f_n$

← صفحه قبل

یک توسیع دیگر دنباله فیبوناچی که ممکن است جالب باشد توسیعی است که در آن جمله ها منفی صفرند: $n<0 \Rightarrow f_n=0$

در این حالت به ازای هر عدد صحیح n داریم:

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+[n=1]$$

تمرین ۳ صفحه قبل: جمله ها دنباله فیبوناچی را با فرض $u_1=\beta$ و $u_0=\alpha$ تا $n=10$ بنویسید و فرمول برای u_n حدس زده و آن را ثابت نمایید.

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
u_n	α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha+2\beta$	$2\alpha+3\beta$	$3\alpha+5\beta$	---	---	

$$u_n=(u_{n-1}+u_{n-2})[n\geq 2]+\alpha[n=0]+\beta[n=1]$$

۱۳۹۷/۰۷/۲۱

مبانی ترکیبیات

جلسه پنجم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

روش جایگذاری و تکرار
iteration

مثال: با اعمال روش جایگذاری و تکرار، از رابطه بازگشتی $t_n = 2t_{n-1} + 1$ که $n \geq 1$ چه نتیجه‌ای بدست می‌آید؟

$$t_n = 1 + 2t_{n-1}$$
$$= 1 + 2(1 + 2t_{n-2}) = 1 + 2 + 2^2 t_{n-2} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 t_{n-3} = \cdots$$

پس الگویی دارد به دست می‌آید:

$$t_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{i-1} + 2^i t_{n-i} \qquad 1 \leq i \leq n$$
$$t_n = 2^i - 1 + 2^i (t_{n-i})$$

با استقرای کرانه‌دار نسبت به i، $1 \leq i \leq n$، رابطه فوق ثابت می‌شود:

$$i = n \Rightarrow t_n = 2^n - 1 + 2^n t_0 \qquad t_0 = c$$

فرمول صریح بدست آمد.

ادامه مثال: اگر رابطه فوق را به صورت $t_n = 1 + t_{n-1} + t_{n-1}$، $n \geq 1$ در نظر بگیریم. از روش جایگذاری و تکرار چه نتیجه‌ای بدست می‌آید؟

$$t_n = 1 + t_{n-1} + 1 + t_{n-2} + t_{n-2}$$
$$= t_{n-1} + t_{n-2} + 2 + 1 + t_{n-3} + t_{n-3}$$
$$= t_{n-1} + t_{n-2} + 3 + t_{n-3} + t_{n-3}$$

$$\xRightarrow{\text{پس}} t_n = t_{n-1} + \cdots + t_{n-i+1} + i + 2t_{n-i} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$i = n \Rightarrow t_n = t_{n-1} + \cdots + t_1 + 2t_0 + n$$

مسأله: رابطه بازگشتی $x_n = x_{n-1}^2 - x_{n-1} + 1$ را که به ازای $n \geq 1$ برقرار

است. توام با شرط اولیه $x_0=2$ در نظر بگیرید. ثابت کنید
که به ازای هر $m,n \geq 0$، جمله‌های x_n و x_m نسبت به هم اول
اند.

قضیه (Lame): فرض کنید a و b اعداد صحیح باشند که $a \geq b$
در این صورت تعداد تقسیم‌هایی که الگوریتم اقلیدسی برای به دست
آوردن ب.م.م عددهای a و b انجام می‌دهد، کوچکتر یا
مساوی ۵ برابر تعداد رقم‌های دهدهی عدد b است.

اثبات: قرار دهید $r_0=a$ و $r_1=b$ و فرض کنید و فرض کنید اعمال الگوریتم
به صورت روبه‌رو باشد که در آن $r_n=\gcd(a,b)$

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$r_n \geq 1$$

$$r_{n-1} \geq 2r_n \geq 2$$

$$r_{n-2} \geq r_{n-1} + r_n \geq 1+2=3$$

$$r_{n-3} \geq r_{n-2} + r_{n-1} \geq 2+3=5$$

$$r_{n-4} \geq r_{n-3} + r_{n-2} \geq 5+3=8$$

$$\vdots$$

$$r_2 \geq r_3 + r_4 \geq f_{n-2} + f_{n-1} = f_n$$

در واقع با استقرا کرانه‌دار
نسبت به i ثابت کرده‌ایم
$r_{n-i} \geq f_{i+2}$
به طور خاص

به طور خاص:

$$b = r_1 \geq \underbrace{f_{n+1}}_{\text{طبق یکی از مثال‌ها}} > \varphi^{n-1}, \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\log_{10} b > (n-1)\log_{10}\varphi > \frac{n-1}{5} \Rightarrow n-1 < 5\log_{10} b$$

که حکم مطلوب را نتیجه می‌دهد.

تعریف بازگشتی چندجمله‌ای‌های تسلسل $\leftarrow$ $K_n(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} K_0(\,) = 1 \\ K_1(x_1) = x_1 \\ K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) & n \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه مقادیر این چندجمله‌ای به ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ به صورت زیر است.

کومورس $x_1 \; x_2 \; x_3 \checkmark$ $\leftarrow$ نقطه طولش ۱ و خط طولش ۲ است چکار کنیم که مجموع ۳ شود؟

$x_1x_2x_3 \rightarrow \underline{x_1x_2} \times \; x_3 \checkmark$

$x_1 \checkmark \; \underline{x_2x_3} \times \rightarrow x_1x_2x_3 + x_3 + x_1$

$$K_0(\,) = 1$$

$$K_1(x_1) = x_1$$

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 K(x_1) + K_0(\,) = x_1x_2 + 1$$

$$K_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 K_2(x_1, x_2) + K_1(x_1) = x_1x_2x_3 + x_3 + x_1$$

$$K_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 K_3(x_1, x_2, x_3) + K_2(x_1, x_2) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_1x_2 + 1$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد

$$K_n(1, 1, \dots, 1) = f_{n+1} \rightarrow \text{عدد فیبوناچی}$$

حال می‌توان توسیع داد:

$\vdots$

$K_{-3}(x_{-1}, x_{-2}, x_{-3})$

$K_{-2}(x_{-1}, x_{-2})$

$K_{-1}(x_{-1})$

$K_0(\,)$

$K_1(x_1) \quad K_2(x_1, x_2) \dots$

اگر فرض کنیم رابطه بازگشتی $K_n = x_n K_{n-1} + K_{n-2}$ به ازای هر عدد صحیح n برقرار باشد داریم

$$K_1 = x_1 K_0 + K_{-1} \Rightarrow K_{-1} = 0$$

$$K_0 = x_0 K_{-1} + K_{-2} \Rightarrow K_{-2} = 1$$

$$K_{-1} = x_{-1} K_{-2} + K_{-3} \Rightarrow K_{-3} = -x_{-1}$$

$$K_{-2} = x_{-2} K_{-3} + K_{-4} \Rightarrow K_{-4} = 1 + x_{-1} x_{-2}$$

می توان ثابت کرد

$$K_{-n} = (-1)^n \delta(K_{n-2})$$

که در آن δ عملگری است که اندیس ها را به منفی خود تبدیل می کند

نتیجه: الف) اگر فرض کنیم $x_{-i} = x_i$ آنگاه $K_{-n} = (-1)^n K_{n-2}$.

ب) اگر فرض کنیم $x_{-i} = -x_i$ آنگاه $K_{-n} = K_{n-2}$.

به ازای عدد صحیح نامنفی n، عدد صحیح K، دنباله ی $C_{n,K}(x_1, \dots, x_n)$ به صورت زیر توصیف می شود.

$$C_{n,K}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} [n=K] & \text{اگر } n=0 \\ x_n C_{n-1,K-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + C_{n-1,K}(x_1, \dots, x_{n-1}) & n>0 \end{cases}$$

	$K=-2$	$K=-1$	$K=0$	$K=1$	$K=2$	$K=3$	$K=4$
$n=0$	0	0	1	0	0	0	
$n=1$	0	0	1	x_1	0	0	
$n=2$	0	0	1	x_2+x_1	x_2x_1	0	
$n=3$	0	0	1	$x_3+x_2+x_1$	$x_3x_2+x_3x_1+x_2x_1$		

۱۳۹۷,۰۷,۲۳

مبانی ترکیبیات

جلسه ششم

Sepehr amidvar

«به نام یکتایی»

جمله های آرایه ی $\{S(n,k)\}$ به ازای $n\geqslant 0$ ، $k\in\mathbb{Z}$ با $S(0,k)=[0=k]$
و رابطه ی بازگشتی $S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$ مشخص می شوند

جمله های این آرایه را به ازای $n\leqslant 5$ بدست آورید. (گاهی دنباله ی $S(n,k)$ را که به این صورت تعریف می شود با نماد $\left\{ n \atop k \right\}$ نمایش می دهند)

	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	0	0	1	0	0	0	0	0
$n=1$	0	0	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	0	0	1	1	0	0	0
$n=3$	0	0	0	1	3	1	0	0
$n=4$	0	0	0	1	7	6	1	0
$n=5$	0	0	0	1	15	25	10	1

* ← استرلینگ نوع دوم

تعداد افرازهای مجموعه $\{1,\dots,n\}$ به k جزء ← نماد $\left\{ n \atop k \right\}$

جمله های آرایه $\{C(n,k)\}$ به ازای $n\geqslant 0$ و $k\in\mathbb{Z}$ با $C(0,k)=[0=k]$
رابطه ی بازگشتی $n>0$ و $C(n,k)=(n-1)C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$ تعریف شده اند.

به ازای $n\leqslant 5$ جمله های

* ← استرلینگ نوع اول

	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	0	0	1	0	0	0	0	0
$n=1$	0	0	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	0	0	1	1	0	0	0
$n=3$	0	0	0	2	3	1	0	0
$n=4$	0	0	0	6	11	6	1	0
$n=5$	0	0	0	24	50	35	10	1

$\left[n \atop k \right]$ ← نماد ← تعداد حالت ها n نفر وارد اتاق بشوند و دور میز بنشینند و تعداد میز k است

عدد استرلینگ نوع اول با علامت: $s_{(n,k)}=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

مسأله: ثابت کنید اگر با به کار بردن رابطه بازگشتی $\left\{ {n \atop k} \right\}=\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}+k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$

به ازای $n\in\mathbb{Z}$ عددهای استرلینگ نوع دوم را توسیع دهیم به آرایه جدیدی می رسیم که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\left\{ {-k \atop -n} \right\}=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

استقراء قهقرایی (پسرو): مثال: اگر x_i ها اعداد نامنفی باشند:

$$\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\dots x_n}$$

2^n ها ثابت می کنیم بعد عقب آمده بقیه را ثابت می کنیم.

① $P(2)$ $\quad \frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}\Rightarrow\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0$ ✓

② $P(k)\overset{?}{\Longrightarrow}P(2k)$

$$\frac{x_1+x_2\dots+x_{2k}}{2k}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\dots+\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}}{k}\geqslant\frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+\dots+\sqrt{x_{2k-1}x_{2k}}}{k}$$

$$\overset{\text{فرض صدق}}{\Longrightarrow}\geqslant\sqrt[k]{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}\dots\sqrt{x_{2k-1}x_{2k}}}=\sqrt[2k]{x_1x_2\dots x_{2k}}\Longrightarrow P(2k)$$

حال قهقرایی:

$$P(k)\overset{?}{\Longrightarrow}P(k-1)$$

$$a=\frac{x_1+\dots+x_{k-1}}{k-1}\qquad g=\sqrt[k-1]{x_1\dots x_{k-1}}$$

$$P(k)\Rightarrow\frac{x_1+x_2+\dots+x_{k-1}+a}{k}\geqslant\sqrt[k]{x_1\dots x_{k-1}a}$$

$$\Rightarrow\frac{(k-1)a+a}{k}\geqslant\sqrt[k]{g^{k-1}a}\Longrightarrow a\geqslant\sqrt[k]{g^{k-1}a}$$

$$a^k\geqslant g^{k-1}a\Rightarrow a^{k-1}\geqslant g^{k-1}\Longrightarrow a\geqslant g=P(k-1)\checkmark$$

ثابت کنید یک (و فقط یک) تابع $f:\{0,1,\dots\} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\begin{cases} f_0=3,\ f_1=5 \\ f_n=\sqrt{f_{n-2}-(n-1)}+f_{n-1},\quad n\geq 2 \end{cases}$$

فصل ۴ قسمت ۳ ← ۴.۳ کتاب Rosen

مثال: زیرمجموعه S از اعداد صحیح را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید

$3\in S$: مرحله مقدمه

$x\in S,\ y\in S \Rightarrow x+y\in S$: مرحله بازگشتی

قانون طرد: (exclusion Rule) ← باید همواره کوچکترین مجموعه را در نظر گرفت ← در مثال بالا پس:

با توجه به این موضوع می‌توان ثابت کرد:

$S=\{3k : k\in\{1,2,\dots\}\}$ ← کوچکترین مجموعه

مجموعه ی Σ^* از رشته های روی الفبای Σ به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف می شود ← از کنار هم گذاشتن الفبا ساخته می شود

$\lambda\in\Sigma^*$

$w\in\Sigma^*,\ x\in\Sigma \Rightarrow wx\in\Sigma^*$

تعریف بازگشتی عمل الحاق (Concatenation) رشته ها

$w\in\Sigma^* \Rightarrow w\circ\lambda=w$

$w_1\in\Sigma^*,\ w_2\in\Sigma^*,\ x\in\Sigma \Rightarrow w_1\circ(w_2x)=(w_1 w_2)x$

تعریف بازگشتی طول یک رشته:

$\ell : \Sigma^* \rightarrow$ اعداد صحیح نامنفی

$\ell(\lambda) = 0$

$w \in \Sigma^*, x \in \Sigma \Rightarrow \ell(wx) = \ell(w) + 1$

۱۳۹۷/۰۳/۲۸

مبانی ترکیبیات

جلسه هفتم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

تعریف بازگشتی درخت ریشه دار

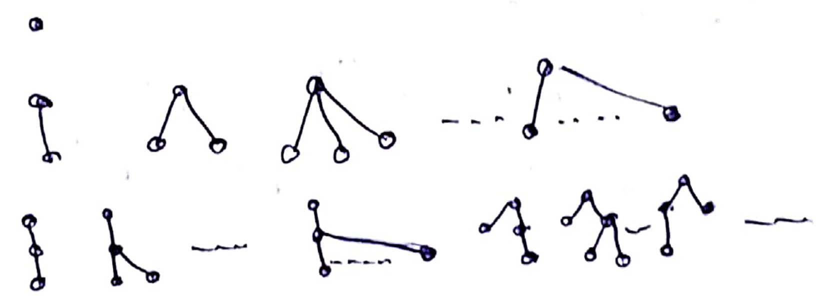
مرحله مقدمه یا پایه: یک رأس تنهای r یک درخت ریشه دار است.

مرحله بازگشتی: فرض کنید T_1، ...، T_n درخت های ریشه دار مجزا با ریشه های r_1، ...، r_n باشند در این صورت، گرافی که با شروع از یک راس r که متمایز از r_1، ...، r_n است و وصل کردن یال از r به ریشه های هر یک از درختان فوق الذکر حاصل می شود، یک درخت ریشه دار است.

مرحله مقدمه

مرحله 1

مرحله ۲



تعریف بازگشتی درخت دودویی توسیع یافته به صورت زیر است

مرحله مقدمه: مجموعه تهی یک درخت دودویی توسیع یافته است.

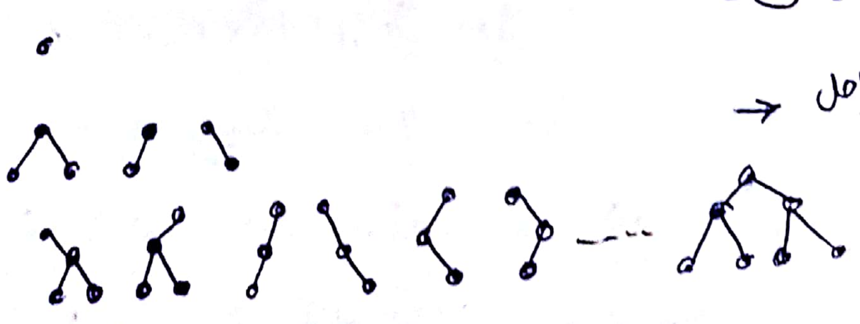
مرحله بازگشتی: اگر T_1 و T_2 درخت های توسیع یافته مجزا باشند آنگاه یک درخت دودویی توسیع یافته که با نماد $T_1 \cdot T_2$ نمایش داده می شود وجود دارد که شامل یک ریشه r و دو یال است که r را به هر یک از ریشه های T_1 و T_2 در حالتی که درخت متناظر ناتهی باشد وصل می کند.

مرحله مقدمه $\emptyset$

مرحله 1

مرحله ۲

مرحله ۳



حالات تکراری مراحل قبل هم ساخته می شود اما تکراری را نمی نویسیم

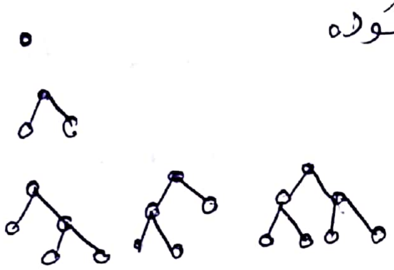
تعریف بازگشتی درخت های دودویی کامل (پر) (Full binary tree)
شامل یک راس تنهای v است.

مرحله‌ی استقرایی: اگر T_1 و T_2 درخت‌های دودویی پر مجزایی باشند، یک درخت باینری پر به نام $T_1 \cdot T_2$ وجود دارد که شامل ریشه v و یال‌هایی است که v را به هر یک از ریشه‌های T_2 و T_1 وصل می‌کند. به T_1 زیر درخت راست و به T_2 زیر درخت چپ گفته می‌شود.

مرحله مقدمه

مرحله ۱

مرحله ۲



اگر به ازای درخت دودویی پر T، $n(T)$ نشان دهنده تعداد راس‌های T باشد، تابع n را می‌توان به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف کرد.

راس تنها

$$n(\bullet) = 1$$

$$n(T_1 \cdot T_2) = n(T_1) + n(T_2) + 1$$

اگر $h(T)$ تابع ارتفاع چنین درختی باشد، می‌توان h را نیز بازگشتی تعریف کرد.

راس تنها

$$h(\bullet) = 0$$

$$h(T_1 \cdot T_2) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2))$$

قضیه: اگر T یک درخت دودویی پر باشد آن‌گاه $n(T) \leqslant 2^{h(T)+1} - 1$

اثبات: استقرا ــ با مراجعه به تعریف بازگشتی درخت دودویی پر، اثبات به صورت زیر بدست می‌آید.

مقدمه استقرا: اگر T یک راس تنها باشد داریم $n(T)=1$ و $h(T)=0$ بنابراین $h(T)=1 \leqslant 2^1-1 = 2^{h(T)+1}-1$ و در این جا حکم محقق است.

مرحله استقرایی: فرض می کنیم حکم مورد نظر برای T_1 و همچنین برای T_2 برقرار باشد و درستی آن را برای $T_1 \circ T_2$ به صورت زیر نتیجه بگیریم

$T = T_1 \circ T_2$

$$n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2) \overset{\text{طبق فرض استقرا}}{\leqslant} 1 + (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1)$$

$$\leqslant 2\max(2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}) - 1 = 2 \times 2^{\max(h(T_1), h(T_2))+1} - 1$$

$$= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 = 2^{h(T)+1} - 1$$

استقرا تعمیم یافته و یک مثال: بعداً گفته می شود

خطا در استدلال های استقرائی:

مثال ۱:

$$P(n): 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

$P(k) \rightarrow P(k+1)$ ✓ اما $P(1)$ غلط است

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{8}(2k+1)^2$$

$$+k+1 = \dots = \frac{1}{8}(2k+3)^2 \ \checkmark$$

باید چک می شد که آیا $P(1)$ درست است یا نه

مثال ۲: به ازای $n \geqslant 2$ هر n خط دو به دو غیر موازی واقع در یک صفحه از یک نقطه می گذرند

اثبات: مقدمه استقراء: $P(2)$ به وضوح درست است.

مرحله استقرایی: $P(k)$ را به عنوان فرض استقرا درست در نظر می گیریم و $P(k+1)$ را نتیجه می گیریم:

$k+1$ خط دو به دو غیر موازی $l_1, \dots, l_{k+1}$ را در نظر می گیریم

طبق فرض استقرا خط های $l_1, \dots, l_k$ از یک نقطه مانند A می گذرند

همچنین طبق فرض استقرا، خط های $l_1, \dots, l_{k-1}, l_{k+1}$ از یک نقطه مانند B می گذرند. *

هر یک از نقطه های A و B به طور همزمان روی خط های l_1 و l_2 قرار دارند پس $A = B$. در نتیجه همه ی خط های $l_1, \dots, l_k, l_{k+1}$ از یک نقطه می گذرند و $P(k+1)$ درست است.

$l_1, l_2 \to A$

$l_1, l_3 \to B$

* غلط است چون در حالت $k=2$ درست نیست.

مثال: به ازای هر n صحیح مثبت داریم

$$n = \sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{1+\dots}}}$$

$P(1): \quad 1 = \sqrt{1+0} = 1$

$P(k): \quad k = \sqrt{1+(k-1)\sqrt{1+k\sqrt{1+\dots}}} \Rightarrow k^2-1 = (k-1)\sqrt{1+k\sqrt{1+(k+1)\sqrt{\dots}}}$

$\Rightarrow k+1 = \sqrt{1+k\sqrt{1+(k+1)\sqrt{\dots}}} \Rightarrow P(k+1)$

اینجا اشکال دارد چون تقسیم بر $k-1$ می کنیم و $k \neq 1$ چون از 1 به 2 نمی شود رسید.

۱۳۹۷/۰۷/۳۰

مَباحثِ ترکیبات

جلسه هشتم

sepehr omidvar

«به نام یکتایی»

خاصیت خوش ترتیبی: هر زیرمجموعه ناتهی از مجموعه اعداد صحیح مثبت نامنفی دارای یک کوچکترین عضو است.

مجموعه اعداد صحیح نامنفی / مثبت خوش ترتیب است.

با توجه به این که خاصیت خوش ترتیبی اعداد صحیح مثبت، معادل اصل استقراء است، می توان از آن در اثبات بعضی قضایا به صورت مستقیم استفاده کرد.

اصل استقراء معادل گزاره زیر است: اگر زیرمجموعه X از اعداد صحیح مثبت در خاصیت $1\in X$ (*) $\forall k(k\in X\Rightarrow k+1\in X)$ باشد آن گاه $X=\mathbb{Z}_{>0}$

چگونه می توان اصل استقراء را از خوش ترتیبی نتیجه گرفت؟ اگر خواص فوق برقرار باشند و $X\neq\mathbb{Z}_{>0}$ قرار می دهیم $X'=\mathbb{Z}_{>0}\setminus X$. اگر $X'\neq\emptyset$ آن گاه X' دارای عضو ابتدا (همان کوچکترین عضو) است مانند $k>0$. چون $1\in X$ پس $k\neq 1$ یعنی $k>1$.
در نتیجه $0<k-1\in X$ اما طبق (*) داریم $k\in X$.:.

سوال: چگونه می توان خوش ترتیبی را از اصل استقرا نتیجه گرفت؟

با به کار بردن خوش ترتیبی، الگوریتم تقسیم را ثابت کنید. به طور دقیق تر ثابت کنید اگر a عدد صحیح و d عدد صحیح مثبت باشد آن گاه اعداد صحیح یکتای q و r موجودند به طوری که

$$a=dq+r\ ,\ 0\leq r<d$$

اثبات:

فرض کنید $S := \{a - dq : q \in \mathbb{Z}, a - dq \geq 0\}$ با توجه به این که

$$a - d(-|a|) = |a|(\operatorname{sgn}(a) + d) \geq 0$$

پس :

S ناتهی است یعنی یک زیرمجموعه ناتهی از اعداد صحیح نامنفی است و لذا دارای کوچکترین عضو است.

اگر این کوچکترین را r بنامیم به ازای عدد صحیح q داریم $r = a - dq \geq 0$

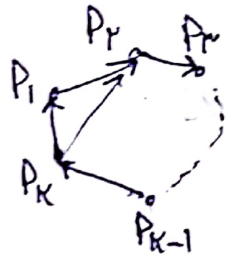
حال به برهان خلف ثابت می کنیم که $r < d$. اگر $r \geq d$ آن گاه $r > r - d = a - d(q+1) \geq 0$ یعنی مجموعه S شامل $r - d$ است که از کوچکترین عضو آن یعنی r کوچکتر است و این یک تناقض است.

اثبات یکتایی به عنوان تمرین به شما واگذار می شود.

مثال : در یک تورنمنت دوره ای هر بازیکن با هر بازیکن دیگر دقیقا یک بازی می کند و نتیجه هر بازی، برد یک بازیکن و باخت دیگری است. (حالت تساوی وجود ندارد.) می گوییم که بازیکنان $P_1, \ldots, P_m$ تشکیل یک دور می دهند اگر P_1 از P_2، P_2 از P_3، ... و P_{m-1} از P_m و P_m از P_1 برده باشد. با به کاربردن خاصیت خوش ترتیبی نشان دهید اگر در یک تورنمنت دوره ای یک دور به طول $m \geq 3$ بین تیم های شرکت کننده وجود داشته باشد، آن گاه حتما یک دور به طول ۳ بین این ها وجود دارد.

اثبات : به برهان خلف، فرض می کنیم با شرایط فوق، دوری به طول ۳ بین بازیکن ها وجود ندارد. طبق فرض مجموعه اعداد صحیح مثبت مانند n که

دوری به طول n در تورنمنت مورد نظر وجود داشته باشد،
ناتهی است. بنابراین طبق خاصیت خوش ترتیبی دارای کوچکترین عضو
است که آن را K می نامیم. با توجه به فرض خلف داریم $K>3$. در نتیجه
کوتاه ترین دور را می توان به صورت P_K و --- و P_1 با $K>3$ فرض کرده. لذا
حال اگر P_2، P_K را بوده باشد مثلث (دور به طول ۳) $P_1P_2P_K$ را داریم که
با فرض در تناقض است پس P_K، P_2 را برده است. حال دور به طول
$K-1$، $P_2P_3 --- P_K$ را داریم که با کوچکترین بودن K در تناقض
است. این تناقض از فرض عدم وجود دور به طول ۳ در تورنمنت حاصل شده



یک الگوریتم بازگشتی نامیده می شود اگر مسئله ای را با کاستن آن به مسئله
مشابه با ورودی کوچکتر حل کند.

مثال: تابع نوشتن $n!$

مثال: تابع نوشتن a^n

مثال:

Recursive Modular Expentition:

```
Procedure mpower(b, n, m: integers with m≥2, n≥0)
 if n=0 then
     mpower(b,n,m)=1
 else if n is even then
     mpower(b,n,m) = mpower(b, n/2, m)^2 mod m
 else
     mpower(b,n,m) = ((mpower(b, n/2, m)^2 mod m)·b) mod m
```

۱۳۹۷/۰۸/۰۵

مبانی ترکیبیات

جلسه نهم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

اصل جمع: اگر کار W_1 به n طریق و کار W_2 به n_2 طریق قابل انجام باشد، کار W_1 یا W_2 به n_1+n_2 طریق قابل انجام است.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$

اصل ضرب: اگر کار W_1 به n_1 طریق پس از انجام آن نتیجه هرچه باشد و کار W_2 به n_2 طریق قابل انجام باشد، کار W_1W_2 (که عبارت است از انجام W_1 و سپس انجام W_2) به n_1n_2 طریق قابل انجام است.

اگر A مجموعه متناهی و $f: A \to B$ تابعی ۱-۱ و پوشا از A به روی B باشد ($B = f$ برد)، آن گاه $|A| = |B|$

مثال: چند تابع از یک مجموعه‌ی m عضوی مانند $[m]$ به یک مجموعه n عضو مانند $[n]$ وجود دارد؟ (قرار داد $[n] = \{1, \ldots, n\}$)

$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m \qquad f: M \to N$

مثال بالا در حالت یک به یکی f:

$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = n^{\underline{m}} \longrightarrow$ فاکتوریل نزولی

با به کاربردن اصل ضرب ثابت کنید که تعداد زیرمجموعه‌ها یک مجموعه n عضو مساوی 2^n است.

به هر زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, \ldots, n\}$، یک بردار مشخص کوییم و $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ به صورت زیر نسبت می‌دهیم

$$\begin{cases} i \in S \Rightarrow x_i = 1 \\ i \notin S \Rightarrow x_i = 0 \end{cases}$$

به این طریق یک تناظر ۱-۱ بین بردارهای $\{0,1\}^n$ و زیرمجموعه‌های S به دست می‌آید، پس تعداد مطلوب مساوی 2^n است.

$n=3$

x_1	x_2	x_3	
0	0	0	$\varnothing$
0	0	1	$\{3\}$
0	1	0	$\{2\}$
0	1	1	$\{2,3\}$
1	0	0	$\{1\}$
1	0	1	$\{1,3\}$
1	1	0	$\{1,2\}$
1	1	1	$\{1,2,3\}$

یک به یک و پوشا

تناظر یک به یک

پس طبق سومی صفحه قبل ← اثبات می‌شود.

مثال: اگر $[n]$ فرد باشد، نگاشت $f: O \to E$ با ضابطه $f(A) = [n] \setminus A$، هر فرد زیرمجموعه‌ی $[n]$ را به یک زوج زیرمجموعه $[n]$ می‌برد. بنابراین در حالتی که n فرد است، داریم $|O| = |E|$. (یعنی تعداد فرد زیرمجموعه‌های $[n]$ مساوی تعداد زوج زیرمجموعه‌های $[n]$ است.)

مثال: فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد و تابع با دامنه O (فرد زیرمجموعه‌های $[n]$) را با ضابطه‌ی $g(X) = X \Delta \{1\}$ تعریف کنیم. برد g چیست؟ آیا g یک تناظر ۱-۱ است؟ چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

$$g: \begin{array}{l} \{3\} \to \{1,3\} \\ \{2\} \to \{1,2\} \\ \{1\} \to \varnothing \\ \{1,2,3\} \to \{2,3\} \end{array}$$

بله - تعداد زوج زیرمجموعه‌ها برابر فرد زیرمجموعه‌هاست.

$n > 0 \Rightarrow |O| = |E|$

$f: A \to B$

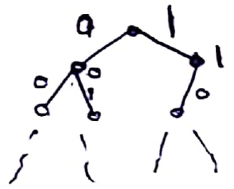
$\underset{1-1}{f} \Rightarrow |A| \leq |B|$

اگر f یک به یک باشد الزاماً تعداد اعضای مجموعه B بزرگتر از A است.

$f: A \to B$ $\qquad |A| = k|B|$

اگر f تناظر k به ۱ باشد
پوشا باشد

مثال: چند رشته بیت دودویی به طول ۴ وجود دارد که شامل دو ۱ متوالی نباشد؟



مثال: فرض کنید $A \subseteq [n]^2$ مجموعه زوج‌های (i,j) باشد که $i \neq j$. ثابت کنید که آیا $f: [n]\times[n-1] \to A$ با ضابطه

ایورسون

$$f(x,y) = (x, y + [y \geq x])$$

یک تناظر یک به یک است؟ اگر نیست لیست آورید که یک به یک باشد.

$n = ۳$

(۱,۱) → (۱,۲) $\qquad \{۱,۲,۳\} \times \{۱,۲\}$
(۱,۲) → (۱,۳)
(۲,۲) → (۲,۳)
(۲,۱) → (۲,۱)
(۳,۱) → (۳,۱)
(۳,۲) → (۳,۲)

اثبات: به عهده خودمان

فرض کنید A مجموعه m تایی‌ها مرتب $(x_1, \dots, x_m)$ با اعضای صحیح صادق در $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq n$ و S مجموعه m-زیرمجموعه‌های $[n]$ باشد. می‌توانید یک تناظر یک به یک طبیعی بین A، S تعریف کنید؟ بله، مفید

مثال بعد: $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ مرتب می‌کنیم (متوالی نیستند.)

$$1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m \leq n \to 1 \leq s_1 < s_2 - 1 < s_3 - 2 < \dots < s_m - (m-1) \leq n-m+1$$

تعداد m زیرمجموعه‌هایی از $[n]$ که شامل دو عدد متوالی نیست = تعداد m زیرمجموعه‌های $[n-m+1]$

$n = ۴$ $[n] = \{۱,۲,۳,۴\}$

$m = ۳$

$\{۱,۲,۳\} \rightarrow ۱ \leq ۱ \quad ۲ \quad ۳ \leq ۴$

$\{۱,۲,۴\} \rightarrow ۱ \leq ۱ \quad ۲ \quad ۴ \leq ۴$

$\{۱,۳,۴\} \rightarrow ۱ \leq ۱ \quad ۳ \quad ۴ \leq ۴$

$\{۲,۳,۴\} \rightarrow ۱ \leq ۲ \quad ۳ \quad ۴ \leq ۴$

→ یک به یک و پوشا

۱۳۹۷/۰۸/۰۷

مبانی ترکیبیات

جلسه دهم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

$[n]=\{1,\dots,n\}$ 　 multiset 　 مجموعه مکرر 　 $\{x_1,\dots,x_r\}_R$

عضو تکراری دارد.

مجموعه ی مجموعه ها مکرر r-تایی $[n]$ را در نظر بگیرید. آیا می توانید بین بعضی مجموعه هایی که در جلسه قبل درباره ی آن ها بحث شد یک تناظر ۱-۱ پیدا کنید؟

$x_1,\dots,x_r$

صعودی

$$1\leq x_1\leq x_2\leq\dots\leq x_r\leq n \Rightarrow 1\leq \underbrace{x_1}_{y_1}<\underbrace{x_2+1}_{y_2}<\underbrace{x_3+2}_{y_3}<\dots<\underbrace{x_r+(r-1)}_{y_r}\leq n+r-1$$

۱	۱	$\rightarrow$	۱	۲
۱	۲	$\rightarrow$	۱	۳
۱	۳	$\rightarrow$	۱	۴
۲	۲	$\rightarrow$	۲	۳
۲	۳	$\rightarrow$	۲	۴
۳	۳	$\rightarrow$	۳	۴

$\rightarrow n=3, r=2$

زیر مجموعه ها غیر مکرر ۲ عضوی $\{1,2,3,4\}$

تناظر یک به یک بین مجموعه های مکرر و یه چیز دیگر

زیر مجموعه ها مکرر ۲ عضوی $\{1,2,3\}$

$$K(n,r) = C(n+r-1,r)$$

برای مکرر 　　 برای غیر مکرر

قسمت ۵.۳ روزن

تعداد r-جایگشت های یک مجموعه n عضوی با $P(n,r)$ نمایش داده می شود.

قضیه: اگر n و r اعداد صحیح باشند که $1\leq r\leq n$ آنگاه:

$P(n,r)=n(n-1)\dots(n-r+1) \xrightarrow{\text{به عبارت دیگر}} P(n,r)=n^{\underline{r}}$

اثبات: با استفاده از اصل ضرب

نتیجه ۰: $P(n,r) = P(n-1,r-1) \times n$ ← بازگشتی

نتیجه ۱: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

تعریف: یک r-ترکیب از اشیاء یک مجموعه متناهی، عبارت از لیست انتخاب شده مرتب r شئ از اشیاء آن مجموعه. بنابر این تعریف، یک r-ترکیب از اشیاء مجموعه‌ی متناهی A را می‌توان با یک r-زیرمجموعه‌ی A یکی گرفت. تعداد r-ترکیب‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را با $C(n,r)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲: اگر n یک عدد صحیح نامنفی و r عدد صحیح باشد که $0 \leq r \leq n$، داریم $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

اثبات:

اصل ضرب ← $C(n,r)\,r! = P(n,r) \Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ✓

نتیجه: با مفروضات قضیه‌ی قبل داریم: $C(n,r) = C(n,n-r)$

مثال: چند رشته بیت دودویی به طول n با دقیقاً r مولفه ۱ وجود دارد؟

پاسخ: $C(n,r)$

زیرا اگر در یک رشته بیت به طول n جایگاه‌ها را به صورت $(*_1, *_2, \dots, *_n)$ در نظر بگیریم، کافی r جایگاه از میان n جایگاه انتخاب کرده و در آن‌ها ۱ قرار دهیم

و در سایر جایگاه ها صفر. به این طریق تناظر ۱-۱ بین رشته بیت های مطلوب و r-زیرمجموعه های [n] به دست می آید.

قضیه: $C(n+1,k)=C(n,k)+C(n,k-1)$ ← رابطه پاسکال

که k و n اعداد صحیح مثبت اند و $n\geq k$

اثبات: اثبات محاسباتی با باز کردن دو طرف

قضیه دوجمله ای (برای توان های نامنفی): اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد داریم:

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{j}y^{n-j}$$

که در آن، به ازای عددهای صحیح نامنفی n و j داریم $\binom{n}{j}=C(n,j)$

اثبات ۱: استقرا روی n و استفاده از رابطه پاسکال

اثبات ۲: جبری ترکیباتی ← $(x+y)^n=\overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n}$

← از پرانتزها (n تا) مثلاً j تا x برمی داریم و بقیه y

اثبات ۳: کاملاً ترکیباتی ← $x+y$ تعداد واژه های با حروف بزرگ و کوچک

سمت چپ تعداد کل است، سمت راست n-j تا حرف بزرگ با j تا حرف کوچک

$\sum$ یکجا جمع میزنیم

اما این روش برای اعداد صحیح مثبت است.

مثلث خیام-پاسکال:

n=0 1

n=1 .... 1 1

n=2 .... 1 2 1

n=3 .... 1 3 3 1

n=4 .... 1 4 6 4 1

1 5 10 5 1

r=0, r=1, r=2, r=3, r=4

1, 2, 3, 5, 8, ...

جمع روی قطر فیبوناچی را می دهد.

به ازای x=1 و y=-1 تعداد زوج زیرمجموعه ها با فرد زیرمجموعه ها برابر است.

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}=[n=0]\qquad x=-y=-1$$

	$r=-\infty$	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=+\infty$
$n=-2$	——— 0	1	-2	3	-4	———
$n=-1$	——— 0	1	-1	1	-1	———
$n=0$	——— 0	1	0	0	0	———
$n=1$	——— 0	1	1	0	0	———
$n=2$	——— 0	1	2	1	0	———
$n=3$	——— 0	1	3	3	1	———

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i} = ?$$ فرمول بسته ندارد

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right) = \sum_{i=0}^{m}\left((-1)^i\binom{n-1}{i} - (-1)^{i-1}\binom{n-1}{i-1}\right)$$

سری تلسکوپی

$$= (-1)^m\binom{n-1}{m}$$

۱۳۹۷,۰۸,۱۲

مبانی ترکیبیات

جلسه یازدهم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتایی»

اعمال روش جایگذاری و تکرار در رابطه پاسکال:

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1} \quad ①$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n-2}{r}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-2}{r-2}$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n-2}{r}+2\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-2}{r-2} \quad ②$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n-3}{r}+\binom{n-3}{r-1}+2\binom{n-3}{r-1}+2\binom{n-3}{r-2}+\binom{n-3}{r-2}+\binom{n-3}{r-3}$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n-3}{r}+3\binom{n-3}{r-1}+3\binom{n-3}{r-2}+\binom{n-3}{r-3} \quad ③$$

$$\binom{n}{r}=\sum_{i=0}^{m}\binom{n-m}{r-i}\binom{m}{i}$$

m شماره رابطه است

تمرین: روش جایگذاری و تکرار را روی جمله آخر سمت راست که در رابطه فوق با خط قرمز مشخص شده پیاده کنید چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ $\binom{n}{r}=\sum_{i=0}^{m}\binom{n-1-i}{r-i}$ یا به صورت مستقل از m: $\binom{n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{n-1-i}{r-i}$

در رابطه بالا به جای n، $n+m$ می‌گذاریم:

$$\binom{n+m}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{r-i}\binom{m}{i}$$

واندرموند

اگر $m=n$ باشد:

$$\binom{2n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{r-i}\binom{n}{i}$$

اگر $r=n$ باشد:

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

اثباتی جبر استقرا برای واندرموند :

$$(x+1)^{n+m} = (x+1)^n \times (x+1)^m$$

اگر این را i بگیریم

آنگاه

این باید $r-i$ باشد

تا r امین را بدهد.

قانون جذب : $n \geqslant r \geqslant k \geqslant 0$ صحیح

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}\binom{k}{s} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r-s}\binom{n-r}{r-k} \qquad n \geqslant r \geqslant k \geqslant s \geqslant 0$$

صحیح

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-s}\binom{k}{s} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-s}\binom{r}{s} \qquad n \geqslant k \geqslant r \geqslant s \geqslant 0$$

صحیح

۱۳۹۷,۰۸,۱۴

مبانی ترکیبیات

جلسه دوازدهم

Sepehr Omidvar

«به نام یکتا»

رابطه شش ضلعی:

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

مثال: ضریب x^6y^4 را در عبارت $(x-2y)^{10}$ بیابید:

$$\binom{10}{6}(1)^6(-2)^4$$

مثال: ضریب x^5 را در عبارت $(x+\frac{1}{x})^9$ محاسبه کنید.

$$(x+\frac{1}{x})^9 = \sum_{t=0}^{9}\binom{9}{i}x^i \times \left(\frac{1}{x}\right)^{9-i} = \sum_{t=0}^{9} x^{2i-9} \to \binom{9}{7} = 36$$

$$2i-9=5 \to i=7$$

مثال: ضریب ثابت در عبارت $(x+\frac{1}{x})^n$ پیدا کنید.

$$(x+\frac{1}{x})^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(x^{-1})^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{2i-n}$$

عاد کردن

جواب $\to$ $[2|n]$ $\binom{n}{\frac{n}{2}}$

ایورسون

$2i-n=0 \to i=\frac{n}{2}$ $\quad n$ زوج

مثال: ضریب ثابت در عبارت $(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y})^{2n}$ بیابید.

$$\left((x+\frac{1}{x})+(y+\frac{1}{y})\right)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(x+\frac{1}{x})^i(y+\frac{1}{y})^{2n-i}$$

$$\text{جواب} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}\binom{2j}{j}\binom{2n-2j}{n-j} = \underset{\text{تمرین}}{=} \binom{2n}{n}^2$$

$i=2j$

مسأله: از محاسبه ضریب x^i در دو طرف رابطه $1=((1+x)-x)^n$ چه نتیجه‌ای بدست می‌آید؟

مثال: سبدی شامل ۳ نوع میوه سیب و گلابی و پرتقال است. از هر نوع میوه به تعداد دلخواه موجود است. میوه های همانند، همنوع فرض شوند. به چند طریق می توان ۴ میوه از این سبد برداشت؟

طبق مالتی ست:
multy set

$$K(n,r) = C(n+r-1,r)$$

$$\binom{6}{4} = \boxed{15} \checkmark$$

تناظر یک به یک:

1	2	3					
1	2	3	4				
1	1	1	1	→ 1	2	3	4
1	1	1	2	→ 1	2	3	5
1	1	1	3	→ 1	2	3	6

⋮

به جایگاه ها نمره بدهیم:
به جایگاه ۱ نمره ۰ به جایگاه ۲ نمره ۱
به جایگاه ۳ نمره ۲ به جایگاه ۴ نمره ۳ می دهیم
با آن نمره جمع می کنیم.

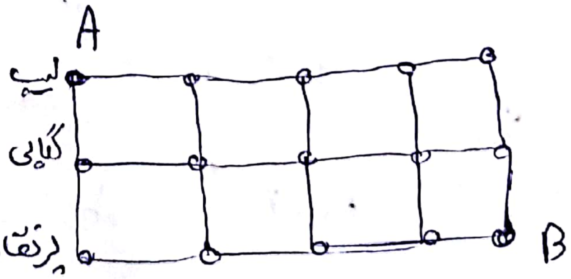
مثال ۷ روزن: چه تعداد رشته متمایز با تغییر آرایش حروف کلمه SUCCESS می توان بدست آورد؟

جواب:

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} \quad \text{یا} \quad \binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$$

قضیه ۳ روزن: تعداد جایگشت ها مختلف n شی که n_1 تا از آن ها از نوع ۱ و n_2 تا از نوع ۲ و ... و نهایتاً n_k تا از نوع k است برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$



۴ R راست
۲ D پایین

تعداد مسیر از A به B

$$\overbrace{RRRR}^{۴تا}\overbrace{DD}^{۲تا} \rightarrow \frac{6!}{4!2!}$$