دانشگاه تهران

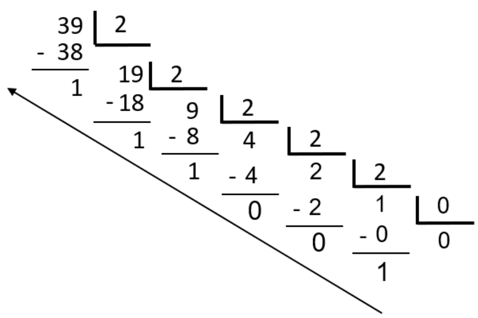
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

مطالب تکمیلی اصول سیستم‌های کامپیوتری | **نیم‌سال دوم تحصیلی سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰**

مطالب فصل اول مدار منطقی:

- یک رقم دودویی بیت خوانده می‌شود که دو مقدار ۰ یا ۱ می‌تواند داشته باشد.
- ارقام عددی که در مبنای n است، شامل $0, 1, 2, \ldots, n-1$ می‌شود.
- تبدیل عدد دسیمال به باینری:

به صورت متوالی عدد مورد نظر را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا زمانی که خارج قسمت برابر صفر شود. سپس باقی‌مانده‌های ایجاد شده در این تقسیم-ها را آخر به اول می‌نویسیم. به این صورت عدد باینری متناظر با عدد دسیمال داده شده به دست می‌آید. مثال:



بنابراین باینری عدد ۳۹ برابر است با: ۱۰۰۱۱۱

- تبدیل عدد صحیح دسیمال به هر مبنای دیگری نیز مشابه فوق است. با این تفاوت که تقسیم‌های متوالی بر مبنای خواسته شده صورت می‌گیرد.
- تبدیل قسمت اعشاری عدد دسیمال به باینری:

به صورت متوالی، قسمت اعشاری عدد را در ۲ ضرب می‌کنیم تا زمانی که قسمت اعشاری حاصل ضرب برابر صفر شود. سپس قسمت‌های صحیح ایجاد شده در این ضرب‌ها را به ترتیب از اول به آخر می‌نویسیم.

مثال: فرض کنید میخواهیم عدد ۳۹.۱۲۵ را به عدد باینری تبدیل کنیم. می‌دانیم باینری قسمت صحیح آن (۳۹)، برابر ۱۰۰۱۱۱ است. (در قسمت قبل حساب کردیم). حال قسمت اعشاری (۰.۱۲۵) را مطابق دستور گفته شده به باینری تبدیل می‌کنیم.

$$0.125 \times 2 = 0.25 \rightarrow \text{قسمت صحیح} : 0$$

$$0.25 \times 2 = 0.5 \rightarrow \text{قسمت صحیح} : 0$$

$$0.5 \times 2 = 1.0 \rightarrow \text{قسمت صحیح} : 1$$

بنابراین باینری ۰.۱۲۵ برابر است با: ۰.۰۰۱

در نتیجه باینری ۳۹.۱۲۵ برابر با مقدار ۱۰۰۱۱۱.۰۰۱ است.

- تبدیل عدد اعشاری دسیمال به هر مبنای دیگری نیز مشابه فوق است. با این تفاوت که ضرب‌های متوالی در مبنای خواسته شده صورت می‌گیرد.

- تبدیل عدد باینری به عدد دسیمال:

برای تبدیل عدد باینری به عدد دسیمال، رقم i-ام در سمت راست را در 2^i ضرب می‌کنیم و در نهایت تمام حاصل ضرب‌های بدست آمده را با هم جمع می‌کنیم. (دقت کنید که شروع i از صفر است).

مثال: می‌خواهیم عدد ۱۰۰۱۱۱ را به دسیمال تبدیل کنیم. برای این کار داریم:

$$(1 \times 2^0) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^4) + (1 \times 2^5) = 1 + 2 + 4 + 32 = 39$$

- تبدیل عددی بر هر مبنای دلخواهی(n) به عدد دسیمال، مشابه فوق است. با این تفاوت که رقم i-ام در سمت راست را در n^i ضرب می‌کنیم.
- تبدیل قسمت اعشاری باینری به اعشاری دسیمال:

برای تبدیل قسمت اعشاری عدد باینری به اعشاری دسیمال، رقم i اعشاری از سمت چپ را در 2^{-i} ضرب می‌کنیم. (دقت کنید که شروع i از ۱ است).

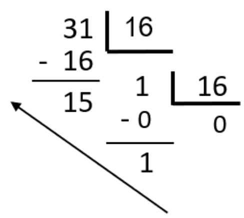
مثال: می‌خواهیم عدد ۰.۰۰۱ را به دسیمال تبدیل کنیم. برای این کار داریم:

$$(0 \times 2^{-1}) + (0 \times 2^{-2}) + (1 \times 2^{-3}) = \frac{1}{8} = 0.125$$

- تبدیل عددی بر هر مبنای دلخواهی (n) به عدد دسیمال، مشابه فوق است. با این تفاوت که رقم i-ام در سمت چپ را در n^{-i} ضرب می‌کنیم.
- تبدیل عدد دسیمال به عدد هگز:

مشابه تبدیل عدد دسیمال با باینری است با این تفاوت که اگر باقی‌مانده تقسیم به ترتیب ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ بود، به ترتیب از حروف *A*، *B*، *C*، *D*، *E* و *F* قرار می‌دهیم.

مثال: می‌خواهیم عدد ۳۱ را به هگز تبدیل کنیم. داریم:



بنابراین هگز عدد ۳۱ برابر است با: *1F*

- تبدیل عدد باینری به مبنای ۸:

از سمت راست سه رقم سه رقم جدا می‌کنیم و به دسیمال تبدیل می‌کنیم. اعداد بدست آمده را در کنار هم به ترتیب قرار می‌دهیم. عدد بدست آمده، بر مبنای ۸ است.

مثال: می‌خواهیم عدد ۱۰۱۰۰۱۰۱۱۱۰را به اوکتال تبدیل کنیم. داریم:

$$\underbrace{10}_{2} \quad \underbrace{100}_{4} \quad \underbrace{101}_{5} \quad \underbrace{110}_{6}$$

بنابراین اوکتال عدد فوق برابر ۲۴۵۶ است.

- تبدیل عدد باینری به مبنای ۱۶:

از سمت راست چهار رقم چهار رقم جدا می‌کنیم و به دسیمال تبدیل می‌کنیم. اعداد بدست آمده را در کنار هم به ترتیب قرار می‌دهیم. عدد بدست آمده، بر مبنای ۱۶ است.

مثال: می‌خواهیم عدد ۱۰۱۰۰۱۰۱۱۱۰را به هگز تبدیل کنیم. داریم:

$$\underbrace{101}_{5} \quad \underbrace{0010}_{2} \quad \underbrace{1110}_{14}$$

بنابراین هگز عدد فوق برابر $52E$ است.

- متمم ۱ یا $1's\ complement$:

تمام ۰-ها را به ۱ و تمام ۱-ها را به ۰ تبدیل می‌کنیم.

مثال: متمم ۱ عدد ۱۱۰۰۱۰۱ برابر ۰۰۱۱۰۱۰ است.

- متمم ۲ یا $2's\ complement$:

دو روش ارائه می‌دهیم.

روش اول: ابتدا متمم ۱ عدد را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را با ۱ جمع می‌کنیم.

روش دوم: از سمت راست تا جایی به اولین ۱ برسیم پیش می‌رویم و پس از آن، تمام ۱-ها را به ۰ و تمام ۰-ها را به ۱ تبدیل می‌کنیم.

- متمم ۹ یا $9's\ complement$:

تمام ارقام را از ۹ کم می‌کنیم.

مثال: متمم ۹ عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ برابر ۸۷۶۵۴۳۲۱۰ است.

- متمم ۱۰ یا $10's\ complement$:

ابتدا متمم ۹ را حساب می‌کنیم. سپس حاصل را با ۱ جمع می‌کنیم.

- تفریق با استفاده از متمم:

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $a-b$ را در مبنای n بدست آوریم. ابتدا متمم n عدد b را بدست می‌آوریم. سپس حاصل را با a جمع می‌کنیم.
اگر در حاصل، رقم نقلی ایجاد شد، از آن صرف نظر می‌کنیم و عدد را با علامت مثبت گزارش می‌کنیم. اما اگر در حاصل رقم نقلی ایجاد نشد، حاصل را متمم n می‌کنیم و با علامت منفی آن را گزارش می‌کنیم.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم با استفاده از متمم دو، دو تفریق زیر را انجام دهیم.

a) $1010100-1000011$

ابتدا عدد دوم را متمم ۲ می‌کنیم. متمم ۲ عدد ۱۰۰۰۰۱۱ برابر ۰۱۱۱۱۰۱ است. بنابراین داریم:

$$\begin{array}{r} 1010100 \\ +\ 0111101 \\ \hline 10010001 \end{array}$$

رقم نقلی ایجاد شد، بنابراین از آن صرف نظر می‌کنیم و حاصل را با علامت مثبت گزارش می‌کنیم. حاصل برابر است با: ۰۰۱۰۰۰۱

b) $1000011-1010100$

ابتدا عدد دوم را متمم ۲ می‌کنیم. متمم ۲ عدد ۱۰۱۰۱۰۰ برابر ۰۱۰۱۱۰۰ است. بنابراین داریم:

$$\begin{array}{r} 1000011 \\ +\ 0101100 \\ \hline 1101111 \end{array}$$

رقم نقلی ایجاد نشد، بنابراین حاصل را متمم ۲ می‌کنیم و با علامت منفی گزارش می‌کنیم. پس حاصل برابر -0010001 است.

- عدد علامت‌دار:

در صورت بیان علامت‌دار بودن عدد، بیت سمت چپ بیانگر علامت است. اگر ۰ باشد، نمایانگر علامت مثبت و اگر ۱ باشد، بیانگر علامت منفی است.