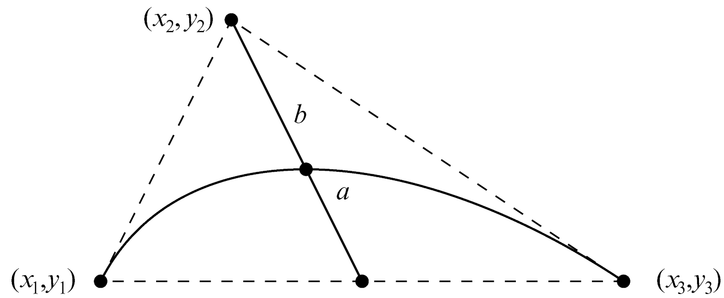
باقی می‌ماند ثابت w را توضیح دهید که *عامل شکل* نامیده می‌شود. یک راهنمایی، از پاسخ به قسمت (پ) نشأت می‌گیرد، زیرا توجه کنید که w در فرمول بردارهای مماس وقتی $t = 0$ و $t = 1$ ظاهر می‌شود. بنابراین تا اندازه‌ای «سرعت» را کنترل می‌کند و یک مقدار بزرگتر w سبب می‌شود که خم به (x_2, y_2) نزدیکتر شود. در دو قسمت آخر این مسئله، به‌طور دقیق مشخص می‌کنیم که w چه مقداری باید باشد.

ث) فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} x(\frac{1}{2}) \\ y(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+w}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) + \frac{w}{1+w}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

با استفاده از این فرمول، نشان دهید که $(x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2}))$ روی پاره‌خط واصل (x_2, y_2) و نقطهٔ میانی خط بین (x_1, y_1) و (x_3, y_3) قرار می‌گیرد.



ج) توجه کنید که همانند شکل فوق، $(x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2}))$ این پاره‌خط را به دو قسمت مثلاً به‌طول‌های a و b تقسیم می‌کند. دراین‌صورت ثابت کنید که

$$w = \frac{a}{b}.$$

ازاین‌رو w به ما می‌گوید که دقیقاً در کجا خم با این پاره‌خط تلاقی می‌کند. راهنمایی: فرمول فاصله را به‌کار ببرید.

۱۷. با استفاده از فرمول‌های تمرین قبل، کمان دایره $x^2 + y^2 = 1$ را از $(1, 0)$ تا $(0, 1)$ پارامتری کنید. راهنمایی: با استفاده از قسمت (ج) از تمرین ۱۶، نشان دهید که $w = 1/\sqrt{2}$.

§۴ ایده‌آل‌ها

در ادامه، شیء جبری اصلی مورد مطالعه در این کتاب را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱. یک زیرمجموعهٔ $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ یک **ایده‌آل** است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) $0 \in I$.

(ii) اگر $f, g \in I$، دراین‌صورت $f + g \in I$.

(iii) اگر $f \in I$ و $h \in k[x_1, \dots, x_n]$، دراین‌صورت $hf \in I$.

هدف این بخش، آشنا ساختن خواننده با بعضی از ایده‌آل‌هایی که به‌طور طبیعی پدید می‌آیند و مشاهدهٔ نحوهٔ ارتباط ایده‌آل‌ها با چندگوناهای آفین است. اهمیت واقعی ایده‌آل‌ها این است که زبانی برای محاسبه با چندگوناهای آفین به‌دست می‌دهند.

نخستین مثال طبیعی از یک ایده‌آل، ایده‌آل تولید شده توسط تعدادی متناهی از چندجمله‌ای‌ها است.

تعریف ۲. فرض کنیم $f_1,\ldots,f_s$ چندجمله‌هایی در $k[x_1,\ldots,x_n]$ باشند. دراین‌صورت قرار می‌دهیم

$$\langle f_1,\ldots,f_s\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{s}h_i\,f_i\;\middle|\;h_1,\ldots,h_s\in k[x_1,\ldots,x_n]\right\}.$$

واقعیت مهم این است که $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ یک ایده‌آل است.

لم ۳. *اگر* $f_1,\ldots,f_s\in k[x_1,\ldots,x_n]$، *دراین‌صورت* $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ *ایده‌آلی از* $k[x_1,\ldots,x_n]$ *است. ایده‌آل* $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ *را* **ایده‌آل تولید شده توسط** $f_1,\ldots,f_s$ *می‌نامیم.*

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که $0\in\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ زیرا $0=\sum_{i=1}^{s}0\cdot f_i$. اکنون فرض کنیم $f=\sum_{i=1}^{s}p_i\,f_i$، $g=\sum_{i=1}^{s}q_i\,f_i$ و $h\in k[x_1,\ldots,x_n]$. دراین‌صورت معادلات

$$\begin{aligned}f+g&=\sum_{i=1}^{s}(p_i+q_i)f_i,\\ hf&=\sum_{i=1}^{s}(hp_i)f_i\end{aligned}$$

اثبات ایده‌آل بودن $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ را کامل می‌کند. □

ایده‌آل $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ تعبیری جالب برحسب معادلات چندجمله‌ای دارد. برای عناصر مفروض $f_1,\ldots,f_s$ در $k[x_1,\ldots,x_n]$، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned}f_1&=0,\\ &\vdots\\ f_s&=0\end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم. از این معادلات، با استفاده از جبر، می‌توانیم سایر معادلات را استخراج کنیم. برای مثال، با ضرب معادلهٔ نخست در h_1، معادلهٔ دوم در h_2 و همین‌طور تا آخر، و جمع معادلات حاصل، معادلهٔ

$$h_1\,f_1+h_2\,f_2+\cdots+h_s\,f_s=0$$

را به‌دست می‌آوریم که «نتیجه»ای از دستگاه معادلات اصلی است. توجه شود که سمت چپ این معادله دقیقاً عنصری از ایده‌آل $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ است. بنابراین می‌توانیم $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرکب از تمام «نتایج چندجمله‌ای» از معادلات $f_1=f_2=\cdots=f_s=0$ درنظر بگیریم.

برای اینکه بفهمیم این در عمل به چه معناست، مثال از ۳§ را درنظر می‌گیریم که در آن

$$\begin{aligned}x&=1+t,\\ y&=1+t^2\end{aligned}$$

بود و با حذف t

$$y = x^2 - 2x + 2$$

را به‌دست می‌آوریم [بحث بعد از معادلهٔ (۷) در ۳§ را ببینید]. می‌خواهیم با استفاده از ایده‌های فوق، این مثال را دوباره مورد بررسی قرار دهیم. با نوشتن معادلات به‌صورت

$$\begin{aligned} x - 1 - t &= 0, \\ y - 1 - t^2 &= 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

شروع می‌کنیم. برای حذف جملات شامل t، معادلهٔ نخست را در $x - 1 + t$ و معادلهٔ دوم را در -1 ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - t^2 &= 0, \\ -y + 1 + t^2 &= 0 \end{aligned}$$

و سپس جمع می‌کنیم تا معادلهٔ

$$(x-1)^2 - y + 1 = x^2 - 2x + 2 - y = 0$$

حاصل شود. برحسب ایده‌آل تولید شده توسط معادلات (۱)، می‌توانیم این را به‌صورت

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 - y &= (x - 1 + t)(x - 1 - t) + (-1)(y - 1 - t^2) \\ &\in \langle x - 1 - t, y - 1 - t^2 \rangle \end{aligned}$$

بنویسیم. به‌طور مشابه، هر «نتیجهٔ چندجمله‌ای» دیگر از (۱) منجر به عضوی از این ایده‌آل می‌شود.

یک ایده‌آل I را *متناهی‌مولد* گوییم هرگاه عناصر $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ و در این حالت می‌گوییم $f_1, \ldots, f_s$ یک پایه برای I هستند. در فصل ۲، این حقیقت شگفت‌انگیز را ثابت خواهیم کرد که هر ایده‌آل از $k[x_1, \ldots, x_n]$ متناهی‌مولد است (این به قضیهٔ پایهٔ هیلبرت شناخته می‌شود). توجه کنید که یک ایده‌آل مفروض می‌تواند تعداد زیادی پایهٔ متفاوت داشته باشد. در فصل ۲، نشان خواهیم داد که می‌توان یک نوع پایهٔ به‌طور خاص مفید به‌نام پایهٔ گروبنر را انتخاب کرد.

شباهت خوبی با جبرخطی وجود دارد که در اینجا به آن می‌پردازیم. تعریف یک ایده‌آل شبیه تعریف یک زیرفضا است: هر دو باید تحت جمع و ضرب بسته باشند با این تفاوت که برای یک زیرفضا، ضرب در اسکالرها است، درحالی‌که برای یک ایده‌آل، ضرب در چندجمله‌ای‌ها است. به‌علاوه، توجه شود که ایده‌آل تولید شده توسط چندجمله‌های $f_1, \ldots, f_s$ شبیه به زیرفضای پدید آمده توسط تعداد متناهی بردار $v_1, \ldots, v_s$ است. در هر حالت، ترکیبات خطی را درنظر می‌گیریم، برای زیرفضای پدید آمده از ضرایب میدان استفاده می‌کنیم و برای ایده‌آل از ضرایب چندجمله‌ای. روابط با جبرخطی در تمرین ۶ بیشتر بررسی می‌شوند.

نمایش دیگر نقشی که توسط ایده‌آل‌ها ایفا می‌شود، گزارهٔ زیر است که نشان می‌دهد یک چندگونا فقط به *ایده‌آل* تولید شده توسط معادلات تعریفش وابسته است.

گزارهٔ ۴. *اگر* $f_1, \ldots, f_s$ *و* $g_1, \ldots, g_t$ *پایه‌هایی برای یک ایده‌آل مفروض در* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *باشند و ازاین‌رو* $\langle f_1, \ldots, f_s\rangle = \langle g_1, \ldots, g_t\rangle$*، درایـن‌صورت* $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)$.

برهان. اثبات بسیار سرراست است و به‌عنوان یک تمرین واگذار می‌شود. $\square$

به‌عنوان یک مثال، چندگونای $\mathbf{V}(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3)$ را درنظر می‌گیریم. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\langle 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3\rangle = \langle x^2 - 4, y^2 - 1\rangle$ (تمرین ۳ را ببینید) و ازاین‌رو طبق گزارهٔ فوق،

$$\mathbf{V}(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3) = \mathbf{V}(x^2 - 4, y^2 - 1) = \{(\pm 2, \pm 1)\}.$$

بنابراین با تغییر پایهٔ ایده‌آل، آن را برای تعیین چندگونا ساده‌تر کردیم.

قابلیت تغییر پایه بدون تاثیر روی چندگونا بسیار مهم است. بعداً در این کتاب، این مطلب به این مشاهده منجر خواهد شد که چندگوناهای آفین توسط *ایده‌آل‌ها* تعیین می‌شوند و نه معادلات. (درواقع، تناظر بین ایده‌آل‌ها و چندگوناها مبحث اصلی فصل ۴ است.) از نقطه نظر عملی‌تر، همچنین خواهیم دید که گزارهٔ ۴ وقتی با پایه‌های گروبنر سابق‌الذکر ترکیب می‌شود، ابزاری قدرتمند برای شناخت چندگوناهای آفین فراهم می‌کند.

در ادامه، خواهیم دید که چطور چندگوناهای آفین منجر به ردهٔ جالبی از ایده‌آل‌ها می‌شوند. فرض کنیم یک چندگونای آفین $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \subseteq k^n$ داریم که توسط $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ تعریف می‌شود. می‌دانیم که $f_1, \ldots, f_s$ روی V صفر می‌شوند، امّا آیا اینها تمام چندجمله‌ای‌های با این خاصیت هستند؟ آیا چندجمله‌ای‌های دیگری وجود دارند که روی V صفر شوند؟ برای مثال، خم درجهٔ سهٔ تابدار که در §۲ بررسی شد را درنظر می‌گیریم. این خم توسط صفر شدن $y - x^2$ و $z - x^3$ تعریف می‌شود. از پارامتری سازی (t, t^2, t^3) که در §۳ بحث شد، می‌بینیم که $z - xy$ و $y^2 - xz$ دو چندجمله‌ای دیگرند که روی خم درجهٔ سهٔ تابدار صفر می‌شوند. آیا چنین چندجمله‌ای‌های دیگری وجود دارند؟ چگونه می‌توانیم تمام آنها را بیابیم؟

برای بررسی این پرسش، مجموعهٔ *تمام* چندجمله‌ای‌هایی که روی یک چندگونای مفروض صفر می‌شوند را درنظر می‌گیریم.

تعریف ۵. فرض کنیم $V \subseteq k^n$ یک چندگونای آفین باشد. درایـن‌صورت قرار می‌دهیم

$$\mathbf{I}(V) = \{ f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ ،}(a_1, \ldots, a_n) \in V \text{ برای هر } \}.$$

مشاهدهٔ کلیدی این است که $\mathbf{I}(V)$ یک ایده‌آل است.

لم ۶. *اگر* $V \subseteq k^n$ *یک چندگونای آفین باشد، درایـن‌صورت* $\mathbf{I}(V) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ *یک ایده‌آل است.* $\mathbf{I}(V)$ *را* **ایده‌آل** V *می‌نامیم.*