دانشگاه تهران

حل تمرین مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **مطالب تکمیلی شماره ۴**

مروری بر مطالب درس (دوگانه شماری):

- در ترکیبیات **دوگانه شمردن** که به آن **شمارش مضاعف** نیز گفته می‌شود، یک روش اثبات ترکیبیاتی برای نشان دادن آن است که دو عبارت با یکدیگر برابرند؛ با ادعا کردن این که دو روش برای شمردن اندازه یک مجموعه وجود دارد.
- به این صورت عمل می‌کنیم که یک مجموعه متناهی X عضوی را از دو دیدگاه متفاوت توصیف می‌کنیم و به دو عبارت مجزا می‌رسیم. چون هر دو عبارت برابر اندازه یک مجموعه هستند پس با یکدیگر برابرند.
- یکی از روش ها، استفاده از یک ماتریس یا جدول می‌باشد. هر یک از ستون و سطرهای ماتریس را متناظر با چیزی می‌کنیم. سپس به خانه-های ماتریس، عددی را متناظر کرده و آنگاه مجموع اعداد موجود در ماتریس یک‌بار با جمع اعداد در سطرها و یک‌بار جمع اعداد ستون‌ها محاسبه می‌کنیم. جمع اعداد سطرها و جمع اعداد ستون‌ها دو روش شمردن اعداد موجود در ماتریس هستند و دو عبارت مساوی با هم را تولید می‌کنند.

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) اعداد ۱ تا n در خانه‌های یک جدول $n \times n$ قرار دارند به طوری که در هر سطر و در هر ستون هر یک از این اعداد دقیقا یک‌بار ظاهر شده‌اند. یک خانه از این جدول را ویژه می‌نامیم اگر عدد واقع شده در این خانه از شماره ستون آن بزرگ‌تر باشد. به ازای چه n هایی جدولی وجود دارد که تعداد خانه‌های ویژه هر سطر آن با هم برابر باشند؟

۲) ۲۰۰۹ نقطه در صفحه، آبی و قرمز شده‌اند به‌طوری که روی هر دایره به شعاع واحد به مرکز نقطه‌ای آبی، دقیقا دو نقطه قرمز قرار دارند. حداکثر تعداد نقاط آبی بر روی صفحه را بیابید.

۳) ۱۰ مجموعه ۳ عضوی داده شده است به طوری که اشتراک هر دوتا ناتهی است. بزرگ‌ترین عدد n را بیابید که همواره عضوی متعلق به حداقل n تا از این مجموعه‌ها موجود باشد.

۴) مجموعه $A = \{۱,۲,\cdots,k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله $T_۱, T_۲, \cdots, T_n$ یک زنجیره به طول n خوانده می‌شود، اگر هر یک از T_i ها، یک زیرمجموعه از مجموعه A باشد و برای $۱ \leq i \leq n - ۱$ داشته باشیم $T_i \subseteq T_{i+۱}$، تعداد زنجیرهای به طول n را محاسبه کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱) یک مربع لاتین مرتبه n را در نظر بگیرید. در ستون j-ام آن هر کدام از اعداد ۱ تا n یک‌بار ظاهر می‌شوند، بنابراین در این ستون $n-j$ خانه ویژه وجود دارد. در نتیجه در کل جدول

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

خانه ویژه وجود دارد. حال چنان‌چه در هر سطر از مربع لاتین دقیقا k خانه وجود داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت $nk=\frac{n(n-1)}{2}$ و در نتیجه مقدار k برابر $\frac{(n-1)}{2}$ خواهد بود و بنابراین n باید عددی فرد باشد. حال ثابت می‌کنیم برای هر عدد فرد n مربع لاتین از مرتبه n وجود دارد که تعداد خانه‌های ویژه همه سطرها با هم برابر هستند. فرض کنید که $n=2k+1$ باشد. مربع لاتینی را در نظر بگیرید که سطر i-ام آن به صورت زیر است:

$$i,i-1,\cdots,1,n,n-1,\cdots,i+1$$

ثابت می‌کنیم که در هر سطر این مربع لاتین k خانه ویژه وجود دارد.

در i خانه اول سطر i-ام $\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor$ خانه ویژه و در $n-i$ خانه بعدی $\left\lfloor\frac{n-i}{2}\right\rfloor$ خانه ویژه وجود دارد. بنابراین در این سطر:

$$\left\lfloor\frac{n-i}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2k+1-i}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor+k+\left\lfloor\frac{1-i}{2}\right\rfloor=k+\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1-i}{2}\right\rfloor=k$$

خانه ویژه داریم.

۲) فرض کنید تعداد نقاط آبی موجود در صفحه b و تعداد نقاط قرمز r باشد. حال ماتریس $b\times\binom{r}{2}$ را در نظر بگیرید. به طوری که هر سطر آن متناظر با یکی از نقاط آبی ($B_i\ ,1\le i\le b$) و هر ستون آن متناظر با یک دوتایی از نقاط قرمز $\left(\{R_i,R_j\}\ ,1\le i,j\le r\right)$ باشد. در خانه محل تقاطع B_i و $\{R_j,R_k\}$ عدد ۱ را می‌گذاریم. اگر فاصله هر یک از R_j,R_k با B_i برابر با ۱ باشد و در غیر این‌صورت عدد ۰ می‌گذاریم.

می‌دانیم که مجموع اعداد هر سطر دقیقا برابر با ۱ می‌باشد زیرا که بر روی دایره به مرکز هر نقطه آبی دقیقا دو نقطه قرمز موجود می‌باشد. هم‌چنین مجموع اعداد هر ستون **حداکثر** ۲ می‌باشد زیرا که برای دو نقطه در صفحه حداکثر دو دایره با شعاع برابر وجود دارند که از این دو نقطه بگذرند (دو دایره متقاطع را در نظر بگیرید). بنابراین برای دو نقطه قرمز موجود در صفحه حداکثر دو نقطه آبی موجود است به طوری که این دو نقطه روی دایره‌ای به طول واحد به مرکز این دو نقطه قرار داشته باشند.

بنابراین اگر مجموع اعداد موجود در ماتریس S باشد:

$$S=b\le\binom{r}{2}\times 2$$

$$2009-r\le\binom{r}{2}\times 2=r^2-r$$

$$r\ge 45\ \to b\le 1964$$

حال اگر بتوانیم مثال بزنیم که در صفحه ۱۹۶۴ نقطه آبی و ۴۵ نقطه قرمز موجود باشد آنگاه جواب مسئله این خواهد بود که حداکثر ۱۹۶۴ نقطه آبی در صفحه می‌توانیم داشته باشیم. پاره خطی به طول حداکثر ۲ را نظر بگیرید. ۴۵ نقطه با فاصله یکسان بر روی این پاره خط در نظر بگیرید. حال می-

دانیم که از هر دو نقطه‌ای بر روی این خط دایره‌ای به شعاع ۱ عبور می‌کند. هم‌چنین تمامی این دایره‌ها از هم متمایز هستند زیرا که یک دایره حداکثر یک پاره‌خط را در دو نقطه قطع می‌کند و اگر دو دایره از این مجموع دایره‌ها یکسان باشند آنگاه آن دایره باید پاره‌خط را حداقل در ۳ نقطه قطع کند که این اتفاق رخ نمی‌دهد. حال در مرکز هر دایره یک نقطه آبی قرار می‌دهیم. پس در مجموع $\binom{۴۶}{۲} = ۱۹۶۴$ نقطه آبی خواهیم داشت.

۳) فرض کنید ۱۰ مجموعه $A_{۱۰} = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$ باشند. حال مجموعه $\{A_۱, A_۲, \cdots, A_{۱۰}\}$ در نظر بگیرید. می‌دانیم که اشتراک این مجموعه با دیگر مجموعه‌ها، ناتهی است. حال فرض کنید یک عضو از A_i ها حداکثر متعلق به p تا از مجموعه‌ها باشد.

حال ماتریس ۹×۳ را در نظر بگیرید که هر سطر آن متناظر با x_i باشد و هر ستون آن متناظر با A_i $(i \leq ۹)$ باشد. در خانه محل تقاطع x_i و A_i، ۱ می‌گذاریم اگر $x_i \in A_i$ باشد و در غیر این‌صورت ۰ می‌گذاریم.

مجموع اعداد هر سطر حداکثر $p - ۱$ خواهد بود زیرا هر عضو $A_{۱۰}$ در حداکثر $p - ۱$ مجموع دیگر قرار دارد.

مجموع اعداد هر ستون هم حداقل ۱ می‌باشد زیرا هر دو مجموعه‌ای اشتراکشان ناتهی می‌باشد.

پس اگر مجموع اعداد داخل ماتریس S باشد:

$$۹ \leq S \leq (p - ۱) \times ۳$$

$$p - ۱ \geq ۳$$

$$p \geq ۴$$

حال ثابت می‌کنیم که p نمی‌تواند مساوی با ۴ باشد. اگر p برابر با ۴ باشد، همه نامساوی‌های بالا به تساوی تبدیل شده و آن‌گاه هر کدام از $x_۱, x_۲, x_۳$ در دقیقا ۳ تا از مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \cdots, A_۹$ قرار می‌گیرند. این استدلال را برای دیگر A_i ها $(i \leq ۹)$ می‌توانیم انجام دهیم و نتیجه بگیریم که هر عضو $\bigcup_{i=۱}^{i=۱۰} A_i$ در دقیقاً ۴ تا ازمجموعه‌های $A_۱, A_۲, \cdots, A_{۱۰}$ قرار دارد. پس اگر مجموعه $\bigcup_{i=۱}^{i=۱۰} A_i$، r عضوی باشد آن‌گاه داریم:

$$۴ \times r = ۱۰ \times ۳ = ۳۰$$

در رابطه بالا r صحیح نخواهد بود پس p نمی‌تواند مساوی با ۴ باشد.

حال می‌توانیم مثالی بزنیم که $p = ۵$ باشد و عضوی در ۶ تا از مجموعه‌ها نباشد.(این مثال بر عهده شما! r را ۶ در نظر بگیرید.)

بنابراین همواره عضوی وجود دارد که حداقل متعلق به ۵ تا از A_i ها باشد و ۵ بزرگترین عدد ممکن است.

۴) ماتریس به اندازه $n \times k$ را در نظر بگیرید. سطر های این ماتریس را به هر یک از T_i ها متناظر و ستون های آن را به هر یک از اعضای مجموعه A متناظر می‌کنیم. اگر j متعلق به T_i باشد آن‌گاه خانه (i, j) در ماتریس را برابر با ۱ و در غیر این‌صورت برابر با صفر قرار می‌دهیم. در این ماتریس اگر در هر ستون یک ظاهر نمی‌شود ولی اگر بشود آن‌گاه تا سطر n-ام ۱ ظاهر خواهد شد. بنابراین هر ستون $n + ۱$ حالت دارد. (همه ستون صفر قرار گیرد یا همه ستون ۱ باشد یا سطر اول ستون صفر و بقیه ستون ۱ یا ... تا سطر n-ام صفر و سطر n-ام ۱ باشد.) بنابراین در کل $(n + ۱)^k$ حالت خواهیم داشت.