



## تمرین‌های تحویلی سری چهارم

مهلت تحویل: ۱۰ خرداد ۱۴۰۰

۱

دنباله‌ی تکراری زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = x_n - \tan(x_n), \quad x_0 = 3$$

الف) نشان دهید این دنباله همگراست و حد آن را به دست آورید.  
ب) مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی فوق را تعیین کنید.

۲

در مثال مطرح شده در ویدیوی کلاس (مثال‌هایی از دنباله‌های تکرار تابعی)، با  $F(x) = \frac{x^2+1}{6}$  فرضیات قضیه‌ی همگرایی تکرار ساده را بررسی کنید. به علاوه، این فرضیات را برای  $F(x) = \sqrt{6x-1}$  برای ریشه‌ی کوچک‌تر نیز بررسی کنید.

۳

دنباله‌ی تکراری

$$x_{n+1} = 2 - (1+c)x_n + cx_n^3$$

برای برخی مقادیر  $c$  به  $\alpha = 1$  همگرا می‌شود. (در صورتی که نقطه‌ی شروع به اندازه‌ی کافی نزدیک به ریشه باشد) مقادیر  $c$  را طوری تعیین کنید که همگرایی تضمین شود. به ازای چه مقادیر  $c$  این همگرایی از مرتبه‌ی ۲ است؟

۴

فرض کنید  $g \in C^1[a, b]$  و  $a \leq g(x) \leq b$ . اگر  $\lambda < 1$  و  $\max |g'(x)| = \lambda$ ، نشان دهید  $g$  نقطه‌ی ثابت یکتای  $\alpha \in [a, b]$  دارد و دنباله‌ی نقطه‌ی ثابت در رابطه‌ی

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

صدق می‌کند.

۵

ثابت کنید دنباله‌ی تولید شده به صورت  $x_{n+1} = F(x_n)$  با فرض  $|F'(x)| \leq \lambda < 1$  در بازه‌ی  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$  که در آن  $\rho = \frac{|F(x_0) - x_0|}{1-\lambda}$  همگراست. (به نقطه‌ی ثابت)

۶

فرض کنید  $r$  ریشه‌ی تکراری مرتبه  $k$  برای  $f$  باشد. به عبارتی

$$f(r) = f'(r) = \dots = f^{(k-1)}(r) = 0$$

و  $f^{(k)}(r) \neq 0$ . همچنین فرض کنید  $f^{(k+1)}$  در یک همسایگی  $r$  پیوسته است. ثابت کنید اگر  $x_0$  به اندازه‌ی کافی نزدیک به ریشه انتخاب شود دنباله‌ی

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

به شرطی که به ازای هر  $n$ ،  $f'(x_n) \neq 0$  به ریشه همگراست و این همگرایی از مرتبه‌ی حداقل ۲ است.

موفق باشید.