سوال ۱: بخش الف

ابتدا یافتن نقطه تعادل:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{16} x_1^5 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 (x_1^4 - 16) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, 2, -2$$

$$x_2 = 0$$

پس دارای نقاط تعادل $(0,0)$ ، $(2,0)$ و $(-2,0)$ هستیم. با استفاده از خطی سازی نوع هر یک را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{5}{16} x_1^4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (I)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (II)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(-2,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$(I) \longrightarrow \lambda = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow$ $(0,0)$ پایدار است

$(II) \longrightarrow \lambda = -(\frac{1}{2}) \pm \frac{\sqrt{17}}{2} i \Rightarrow$ $(2,0)$, $(-2,0)$ نقطه تعادل زینی هستند.

Scanned with CamScanner

ب ←

$$\begin{cases} 2x_1 - x_1x_2 = 0 \\ 2x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1(2 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ \text{Or} \ x_2 = 2$$

(I) $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

(II) $x_2 = 2 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$

$\Rightarrow$ مجموعه نقاط تعادل $= \{(0,0), (1,2), (-1,2)\}$

ب) ۱.۱) صورت سوال: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2 - x_2 & -x_1 \\ 4x_1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ (*) \\[2ex] \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \ (**) \\[2ex] \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \ (***) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (0,0) $(*)$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ (0,0) نقطه تعادل زینی است

(**) و (***): $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i$ $\Rightarrow$ (1,2) نقطه تعادل پایدار است

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i$ $\Rightarrow$ (-1,2) نقطه تعادل کانون پایدار است

Scanned with CamScanner

ب ←

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_2 - \psi(x_1 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \psi(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

یک نقطه تعادل تنها در $(0,0)$ وجود دارد.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = -\left(\frac{1}{4}\right) \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow$$

$(0,0)$ نقطه تعادل کانون پایدار است.

سوال ۲ ←

الف ←

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_1 x_2 \alpha(x) & -\beta(x) + x_2^2 \alpha(x) \\ \beta(x) - x_1^2 \alpha(x) & -1 - x_1 x_2 \alpha(x) \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\alpha(x) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)\left(\ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2}, \quad \beta(x) = \frac{1}{\ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

مبدأ یک گره پایدار است.

ب ← معادلات حالت را به معادلات در دستگاه مختصات قطبی تبدیل می‌کنیم:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -r \Rightarrow r(t) = r_0 e^{-t} \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{\ln r} = \dfrac{1}{\ln r_0 - t} = \dfrac{1}{\ln r_0 - t} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 - \ln(|\ln r_0| + t) + \ln(|\ln r_0|) \end{cases}$$

که $0 < r_0 < 1$ بود.

توجه کنید r و θ هر دو نزولی اکید هستند. ⇐ مسیر به صورت یک مارپیچ در جهت عقربه‌های ساعت حول مبدأ خواهد بود زیرا

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to \infty} r(t) = 0 \\ \lim\limits_{t \to \infty} \theta(t) = -\infty \end{cases}$$

ب ـ در حالت کلی داشتیم که اگر f_1 و f_2 توابع تحلیلی در همسایگی نقطه تعادل باشند و اگر مبدأ خطی‌شده پایدار باشد، در این صورت در یک همسایگی از نقطه تعادل مسیرها مانند یک گره پایدار رفتار می‌کنند مستقل از اینکه مقادیر ویژه خطی‌شده متمایز باشند یا نباشند. در این سوال f به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است اما تحلیلی در همسایگی $x = 0$ نیست.

سوال ۳

نقاط تعادل از ریشه‌های حقیقی معادلات زیر است:

(۱) $-x_1 + a x_2 - b x_1 x_2 + x_2^2 = 0$

(۲) $-(a+b) x_1 + b x_1^2 - x_1 x_2 = 0$

$$\Rightarrow x_1 \left[-(a+b) + b x_1 - x_2 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -(a+b) + b x_1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_1 = 0} x_2 (x_2 + a) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_2 = -a \end{array}$$

$$\xrightarrow{x_2 = -(a+b) + b x_1} \quad x_1 = \frac{b(a+b)}{1+b^2} \Rightarrow x_2 = \frac{-(a+b)}{1+b^2}$$

$\Rightarrow$ مجموعه نقاط تعادل $= \left\{ (0,0),\ (0,-a),\ \left(\frac{b(a+b)}{1+b^2}, \frac{-(a+b)}{1+b^2} \right) \right.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 - b x_2 & a - b x_1 + 2 x_2 \\ -(a+b) + 2b x_1 - x_2 & -x_1 \end{bmatrix}$$

به مطالعه

(I) $\to x=(0,0)$:
$$A=\begin{bmatrix}-1 & a\\ -(a+b) & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a(a+b)}}{2}$$

⇐ نقطه تعادل $(0,0)$ یک کانون پایدار است اگر $4a(a+b)>1$ و گره پایدار،
اگر $0<4a(a+b)<1$ و زینی است اگر $a(a+b)<0$

(II) $\to x=(0,-a)$

$$A=\begin{bmatrix}-1+ab & -a\\ -b & 0\end{bmatrix} \qquad \lambda=-1\ ,\ ab$$

⇐ اگر $b>0$ ← نقطه تعادل $(0,-a)$ نقطه زینی است
اگر $b<0$ ← نقطه تعادل $(0,-a)$ نقطه تعادل گره پایدار است.

(III) $\to x=\left(\frac{b(a+b)}{1+b^2}, \frac{-(a+b)}{1+b^2}\right)$

$$A=\frac{1}{1+b^2}\begin{bmatrix}-1+ab & -b^3-a-2b\\ (a+b)b^2 & -b(a+b)\end{bmatrix}$$

$$\to \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4b(a+b)}}{2}$$ ⇒ اگر $1<4b(a+b)$ ← ~~گره~~ کانون پایدار است
اگر $0<4b(a+b)<1$ ← گره پایدار است
$4b(a+b)<0$ ← نقطه زینی است.

سوال ۴ —

الف —

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1+a \neq 0$$

پس طبق محک بندیکسن هیچ مدار تناوبی وجود ندارد

ب — نقاط تعادل ریشه های معادله

$$\begin{cases} x_1(-1+x_1^2+x_2^2) = 0 \\ x_2(-1+x_1^2+x_2^2) = 0 \end{cases}$$

هستند. این سیستم دارای یک نقطه تعادل تنها در مبداء و نقاط تعادل که روی دایره ی $x_1^2+x_2^2=1$ است. سیستم را به مختصات قطبی تبدیل می کنیم. خواهیم داشت

$$\dot{r} = -r(1-r^2)$$

اگر $r<1$ باشد، هر مسیری که درون دایره واحد آغاز شود با $t\to\infty$ به مبداء میل می کند و اگر $r>1$ باشد و $t\to\infty$، هر مسیر آغاز شده بیرون دایره به بی نهایت میل می کند.

پس هیچ چرخه حدی وجود ندارد.

ب ← محور x زیرمجموعه‌ای از نقاط قابل است در نتیجه هیچ مثلث متساوی نباید محور x را قطع کند. پس هر مثلث متساوی در نیم صفحه بالایی یا پایینی قرار دارد. و از طرفی تنها نقاط قابل روی محور x قرار دارند و از آنجایی که هر مثلث متساوی باید شامل حداقل یک نقطه قابل باشد، هیچ مثلث متساوی وجود ندارد.

سوال ۵ -

قرار دهید : $V(x) := x_2 - \frac{x_1+b}{x_1+a}$ $\Rightarrow$ V درون ناحیه D منفی است

به علاوه $V(x)=0$ ، مرز ناحیه D است.

$$f(x)\cdot\nabla V(x) = -cx_1(x_1+a) + \frac{b-a}{(x_1+a)^2}\left[-x_1 + x_2(x_1+a) - b\right]$$

است . $\Rightarrow$ روی خم $\overbrace{V(x)=0}^{S}$ داریم :

$$f(x)\cdot\nabla V(x)\Big|_S = -cx_1(x_1+a) < 0$$

$\Rightarrow$ هر مسیر با ابتدا روی S باید به درون ناحیه D میل کند $\Rightarrow$ هر مسیر با آغاز در D از D خارج نمی‌شود (در بدترین حالت مرز را قطع می‌کند).

سوال ۶ ←

قرار دهید: $V(x) := x_1^2 + x_2^2$

$$f(x)\cdot\nabla V(x) = 4x_2^2(1-x_1^2-x_2^2) - 2x_1^2x_2^2 \leq 4x_2^2(1-x_1^2-x_2^2)$$

⟸ $f(x)\cdot\nabla V(x) \leq 0$ اگر داشته باشیم: $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.

در نتیجه مسیرهایی که در $M = \{V(x) \leq 1\}$ آغاز می‌شوند همگی درون M باقی می‌مانند.

از طرفی M تنها شامل نقطه تعادل مبدا است. با خطی‌سازی

حول مبدا به ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ می‌رسیم که دارای مقادیر ویژه "$\lambda = 1$"

است. از آنجا که $f(x)$ یک تابع تحلیلی برحسب x است،

مبدا یک گره ناپایدار است پس طبق قضیه پوانکاره - بندیکسون یک

مدار تناوب در M وجود دارد.