بسم اللّٰه الرحمن الرحیم

# بازی‌های راهبردی

مهدی‌رضا درویش‌زاده

دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر- پردیس علوم

دانشگاه تهران

ریاضی کاربردی-نظریه بازی‌ها

## عناوین درس:

- فصل اول: تعادل نش
- فصل دوم: تعادل استراتژی مخلوط
- فصل سوم: بازی‌های توسعه یافته با اطلاعات کامل
- فصل چهارم: بازی‌های تکرارشونده

کتاب درس:

*An Introduction to Game Theory*

*Martin J. Osborne* (۲۰۰۴)

مراجع:

۱. *Game Theory for applied economists*

*R. Gibbons* (۱۹۹۲)

۲. *Game Theory; multi − leveled approach*

*Hans Peter* (۲۰۰۸)

۳. *Game Theory : analysis of coflict*

*Roger B. Myerson* (۱۹۹۱)

۴. *Game Theory; introduction and applications;*

*Graham Romp* (۱۹۹۷)

۵. *Game Of Strategy;*

*A.Dixit & S.Skeath* (۲۰۰۴)

## انجمن‌های بین‌المللی

۱. *Game Theory society* (۱۹۹۹–)

۲. *International society of dynamic games* (۱۹۹۰–)

# توزیع نمره

- کلاس تمرین (و تمرینات تحویلی) ۲ نمره
- پروژه ۵ نمره
- امتحان ۱۳ نمره

## تاریخچه نظریه بازیها

- زرملو(۱۹۱۳) : استراتژی بهینه در بازیهای شطرنج
- برل (۱۹۳۸) : قضیه مینی ماکس برای بازیهای ماتریسی دو نفره مجموع صفر با ماتریس سود تقارن
- ون نیومن و مورگنسترن (۱۹۴۴) : کتاب نظریه بازیها و رفتار اقتصادی

  *Theory of Games and Economic Behavior*
- جان نش (۱۹۵۰) : تعادل نش

## نظریه بازی چیست؟

- نظریه بازی، مدل ریاضی رقابت (ستیز) و همکاری است.
- نظریه بازی در واقع بهینه‌سازی چند هدفه است.

| چند بازیکن | یک بازیکن | |
|---|---|---|
| نظریه بازی استاتیک | بهینه سازی ریاضی | **استاتیک** |
| نظریه بازیهای دینامیکی یا دیفرانسیلی | نظریه کنترل بهینه | **دینامیک** |

**سؤال:** عناصر اصلی در یک ”تصمیم عقلائی“ کدامند؟

**جواب:**

۱. هر فرد (تصمیم ساز) دارای مجموعه‌ای از عملهای قابل دسترسی است.

۲. هر فرد دارای ارجحیتهائی است.

ارجحیتها از دو ویژگی زیر برخوردارند:

کامل بودن

سازگاری (تعدی)

## نحوه نمایش ارجحیتها

۱. نمایش ارجحیتها با استفاده از تعریف

۲. نمایش ارجحیتها توسط یک "تابع سود" $Payoff\ function$ (یا یک "تابع مطلوبیت" $utility\ function$) مانند $u$ که به هر عمل با ارجحیت بیشتر عدد بزرگتری نظیر می‌کند یعنی برای هر $a, b \in A$

$$a \text{ بر } b \text{ ارجح است } \iff u(a) > u(b)$$

# تذکر

۱. توجه کنید که ارجحیتهای یک تصمیم‌ساز به معنی فوق، فقط ”ترتیب“ ارجحیت عملها بر یکدیگر را نشان می‌دهد $(ordinal \quad information)$ نه ”میزان“ ارجحیت آنها را.

۲. اگر ارجحیتهای یک تصمیم‌ساز توسط $u$ نمایش داده شده باشد در اینصورت هر تابع صعودی از $u$ نیز همان ارجحیتها را نمایش می‌دهد.

## نظریه انتخاب عقلائی

عمل انتخاب شده توسط یک تصمیم‌ساز، عملی است که با توجه به ارجحیتهای او، حداقل به خوبی هر عمل دیگری است که در دسترس او قرار دارد.

## نظریه بازی

اگر خروجی بهینه یک تصمیم، علاوه بر انتخاب عمل تصمیم‌ساز، از عملهای انتخاب شده توسط دیگر تصمیم‌سازان که در عمل مشاهده می‌شود نیز متأثر باشد در اینصورت وارد حوزه نظریه بازی شده‌ایم.

فصل اول

# تعادل نش

## تعریف (بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی)

یک بازی استراتژیک (با ارجحیتهای ترتیبی) از اجزاء زیر تشکیل می‌شود:

۱. یک مجموعه متناهی که مجموعه بازیکنان است،

۲. متناظر با هر بازیکن، یک مجموعه (از عملها) نظیر می‌شود،

۳. متناظر با هر بازیکن، ارجحیتهائی که روی " مجموعه بردارهای از عملها" تعریف می‌شود.

## ویژگی بازیهای استراتژیک

ویژگی بازیهای استراتژیک اینست که "زمان" در تعریف این نوع بازیها حذف شده است به عبارت دیگر

- هر بازیکن عملش را یکبار برای همیشه انتخاب می‌کند.

- بازیکنان عملهایشان را بطور همزمان انتخاب می‌کنند.

## چند مثال بنیادی

### مثال اول: معمای زندانی $Prisoner's\ Dilemma$

- دو نفر به اتهام ارتکاب جرمی در دو سلول جداگانه نگهداری می‌شوند.
- اگر هیچکدام اعتراف نکند هر کدام به یک سال حبس محکوم می‌شود.
- اگر فقط یکی از آنها اعتراف کند، او آزاد می‌شود و دومی به ۴ سال زندان محکوم می‌شود.
- اگر هر دو اعتراف کنند، هر کدام به سه سال زندان محکوم می‌شود.

- **بازیکنان:** دو نفر متهم
- **مجموعه عمل هر بازیکن:** {سکوت، اعتراف}
- **ارجحیتهای بازیکن اول (از خوب به بد):**

| | |
|---|---|
| (سکوت و اعتراف ) | (۰،۴) |
| (سکوت و سکوت) | (۱،۱) |
| (اعتراف و اعتراف ) | (۳،۳) |
| (اعتراف و سکوت ) | (۴،۰) |

ارجحیتهای بازیکن دوم را می‌توان با توجه به مولفه‌های دوم مرتب کرد.

## فرم ماتریسی بازی معمای زندانی

متهم دوم

| | | اعتراف | سکوت |
|---|---|---|---|
| متهم اول | سکوت | ۳و۰ | ۲و۲ |
| | اعتراف | ۱و۱ | ۰و۳ |

$$u_1(\text{سکوت و اعتراف}) > u_1(\text{سکوت و سکوت}) > u_1(\text{اعتراف و اعتراف}) > u_1(\text{اعتراف و سکوت})$$

معمای زندانی وضعیتی را مدل می‌کند که در آن سود بازیکنان در همکاری است ولی هر بازیکن، مستقل از عمل انتخاب شده توسط بازیکن دیگر، دارای انگیزه "سواری رایگان" است. لذا هر دو "اعتراف کردن" را انتخاب می‌کنند.

## کاربردهایی از معمای زندانی

- پروژه مشترک
- انحصار دوجانبه
- مسابقه تسلیحاتی
- جنگ تعرفه‌ها

## مثال دوم: $BOS$ (یا نزاع جنسیتها)

$Bach\ or\ Stravinsky\ (Battle\ of\ Sexes)$

دو نفر می‌خواهند با همدیگر به یکی از دو کنسرت $B$ یا $S$ بروند. یکی از آنها کنسرت $B$ و دیگری $S$ را ترجیح می‌دهد. اگر هر نفر به تنهائی به کنسرت مورد علاقه خود برود هر دو نفر به یک اندازه ناراضی می‌شوند. این وضعیت را می‌توان بصورت یک بازی استراتژیک دو نفره بصورت زیر مدل کرد.

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۱و۲ | ۰و۰ |
| $S$ | ۰و۰ | ۲و۱ |

**پیام بازی** $BOS$: دو بازیکن که دارای علایق متضادند ولی می‌خواهند هماهنگ عمل کنند.

**مدل $BOS$ از ارتشاء**

| | | نهاد عمومی | |
|---|---|---|---|
| | | H | C |
| سرمایه گذار | H | ۱و۳ | ۲- و۰ |
| | C | ۰و۲- | ۳و۱ |

## مثال سوم: مسابقه پنی *Matching Pennies*

دو نفر بطور همزمان، یک سکه را می‌اندازند. اگر هر دو شیر یا هر دو خط باشد دومی به اولی یک واحد پرداخت می‌کند ولی اگر متفاوت باشند اولی به دومی یک واحد پرداخت می‌کند. هر بازیکن به دنبال سود بیشتر است.

| | شیر | خط |
|---|---|---|
| شیر | ۱ و -۱ | -۱ و ۱ |
| خط | -۱ و ۱ | ۱ و -۱ |

## مثال چهارم: شکار گوزن *The Stag Hunt*

گروهی از شکارچیان را در نظر بگیرید. هر شکارچی دارای دو گزینه است. یا به تنهائی یک خرگوش شکار کند یا به کمک بقیه شکارچیان به دنبال شکار گوزن برود. اگر همه شکارچیان به تعقیب گوزن بپردازند آنرا شکار کرده و به تساوی بین خود تقسیم می‌کنند ولی اگر حتی یکی از آنها به دنبال شکار خرگوش برود گرچه آنرا شکار می‌کند ولی گوزن فرار می‌کند. هر شکارچی یک سهم از گوزن را بر یک خرگوش ترجیح می‌دهد.

وضعیت شکار گوزن را می‌توان بصورت یک بازی استراتژیک مدل کرد

- **بازیکنان:** مجموعه شکارچیان

- **مجموعه عمل هر بازیکن:** {خرگوش، گوزن }

- **ارجحیتها:** برای هر بازیکن، بهترین بردار از عمل اینست که همه بازیکنان بدنبال گوزن باشند. سپس هر برداری که در آن او یک خرگوش بدست آورد و سپس هر برداری که در آن او به دنبال گوزن است و یک یا چند شکارچی به دنبال خرگوش‌اند.

بازی گوزن با دو شکارچی را می‌توان بصورت زیر نمایش داد

| | گوزن | خرگوش |
|---|---|---|
| گوزن | ۲ و ۲ | ۱ و ۰ |
| خرگوش | ۰ و ۱ | ۱ و ۱ |

## نمایشی از بازی شکار گوزن که "مسأله امنیت" دو کشور را مدل می‌کند

| | خودداری کردن | مسلح کردن |
|---|---|---|
| خودداری کردن | ۳ و ۳ | ۲و۰ |
| مسلح کردن | ۰و۲ | ۱ و ۱ |

تفاوت بازی فوق با بازی معمای زندانی اینست که هر کشور ترجیح می‌دهد که هر دو کشور از تجهیز خود، خودداری کنند تا اینکه خودش به تنهائی مسلح شود. در واقع هزینه تجهیز سنگین‌تر است از اینکه کشور مقابل خود را مجهز نکند.

## تعریف (تعادل نش)

فرض کنید $\langle N, (A_i)_{i=1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n} \rangle$ یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی باشد. می گوئیم

$$a^* = (a_1^*, ..., a_n^*) \in A = A_1 \times ... \times A_n$$

یک تعادل نش برای بازی فوق است هرگاه برای هر $i \in N$:

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \qquad \forall a_i \in A_i$$

که در آن

$$a_{-i} = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$$

و $u_i$ تابع سودی است که ارجحیتهای بازیکن $i$–ام را نمایش می‌دهد.

## نتایج تعریف تعادل نش

۱) هر بازیکن به هنگام انتخاب عمل خود، یک "اعتقادی" نسبت به عمل دیگر بازیکنان در ذهن خود دارد.

۲) این اعتقاد برای هر بازیکن، مبتنی بر تجربیات حاصل از اجرای زیاد چنین بازیهائی است. لذا هر بازیکن می‌داند که رقبای او چگونه رفتار می‌کنند.

۳) گرچه هر بازیکن دارای تجربه انجام چنین بازیهائی است ولی فرض بر اینست که هر بازیکن، خود را در مقابل رفتار رقبای خاصی نمی‌بیند بلکه هر بازی را به عنوان یک بازی ایزوله تلقی می‌کند.

۴) تعادل نش دارای دو مولفه است:

الف) هر بازیکن عملش را بر اساس مدل انتخاب عقلائی انتخاب می‌کند، با این فرض که اعتقادش نسبت به عمل دیگر بازیکنان داده شده باشد.

ب) اعتقاد هر بازیکن راجع به عمل دیگر بازیکنان صحیح است.

۵) یک تعادل نش متناظر با یک ”حالت ایستا “ است چون هیچ بازیکنی نمی‌تواند انحراف سودمندانه‌ای داشته باشد. به عبارت دیگر، هر تعادل نش یک ”نرم اجتماعی“ را ترسیم می‌کند.

۶) از مولفه دوم تعادل نش نتیجه می‌شود که اعتقادات دو بازیکن راجع به عمل یک بازیکن سوم، یکسان است.

۷) تعریف تعادل نش، تضمین نمی‌کند که هر بازی استراتژیک دارای یک تعادل نش یا دارای حداکثر یک تعادل نش است.

۸) تعریف تعادل نش به منظور مدل کردن یک حالت ایستا *Steady state* بین بازیکنان مجرب طراحی شده است.

۹) با توجه به مطالعات انجام شده در مورد ”تعادل نش تجربی“، نظریه تعادل نش نسبت به واقعیت، فقط یک تقریب است و مثل همه تئوریهای مفید، به طور دقیق درست نیست.

## چند مثال

### (۱) معمای زندانی

| | | متهم دوم | |
|---|---|---|---|
| | | اعتراف | سکوت |
| متهم اول | سکوت | ۳و۰ | ۲و۲ |
| | اعتراف | ۱و۱ | ۰و۳ |

تنها تعادل نش

(اعتراف و اعتراف)

## (۲) بازی $BOS$

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۱و۲ | ۰و۰ |
| $S$ | ۰و۰ | ۲و۱ |

$BOS$ دارای دو تعادل نش است.

$$(B, B), (S, S)$$

## (۳) مسابقه پنی

| | شیر | خط |
|---|---|---|
| شیر | ۱ و -۱ | -۱ و ۱ |
| خط | -۱ و ۱ | ۱ و -۱ |

این بازی فاقد تعادل نش است.

## (۴) شکار گوزن

| | گوزن | خرگوش |
|---|---|---|
| گوزن | ۲ و ۲ | ۱ و ۰ |
| خرگوش | ۰ و ۱ | ۱ و ۱ |

بازی دو نفره شکار گوزن دارای دو تعادل نش است.

(گوزن و گوزن) و (خرگوش و خرگوش)

## (۵) یک بازی هماهنگ

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۲ و ۲ | ۰و۰ |
| $S$ | ۰و۰ | ۱ و ۱ |

این بازی دارای دو تعادل نش است.

$$(B, B), (S, S)$$

## تعریف ( تابع بهترین پاسخ بازیکن $i$–ام)

فرض کنید $\langle N, (A_i)_{i=1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n}\rangle$ یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی باشد. در اینصورت "تابع بهترین پاسخ بازیکن $i$–ام" را با $B_i$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_i : A_{-i} \longrightarrow A_i$$

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i | u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}) \quad \forall a'_i \in A_i\}$$

توجه کنید که $B_i$ یک تابع مجموعه مقدار است.

**گزاره**

برای بازی استراتژیک $\langle N, (A_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n \rangle$، بردار عمل $a^* \in A$ یک تعادل نش است اگر و فقط اگر برای هر $i$ داشته باشیم

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$$

## مثال

تعادل (های) نش بازی استراتژیک زیر را با استفاده از توابع بهترین پاسخ، بدست آورید

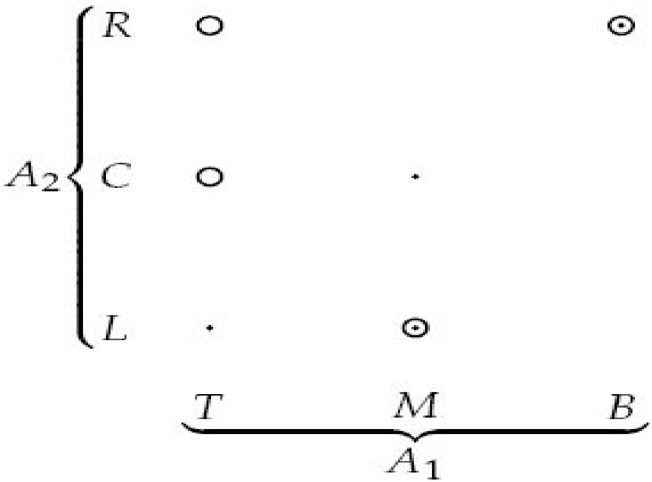
| | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | ۲و۱ | ۱و۲ | ۰و۱ |
| $M$ | ۱و۲ | ۱و۰ | ۰و۰ |
| $B$ | ۱و۰ | ۰و۰ | ۲و۱ |

## مثال

تعادل (های) نش بازی استراتژیک زیر را با استفاده از توابع بهترین پاسخ، بدست آورید

| | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | *۲و۱ | ۱و*۲ | ۰و*۱ |
| $M$ | *۱و*۱ | *۱و۰ | ۰و۰ |
| $B$ | ۱و۰ | ۰و۰ | *۲و*۱ |

نمایش دیگری از توابع بهترین پاسخ در مثال فوق:



## مثال (یک رابطه هم‌افزائی)

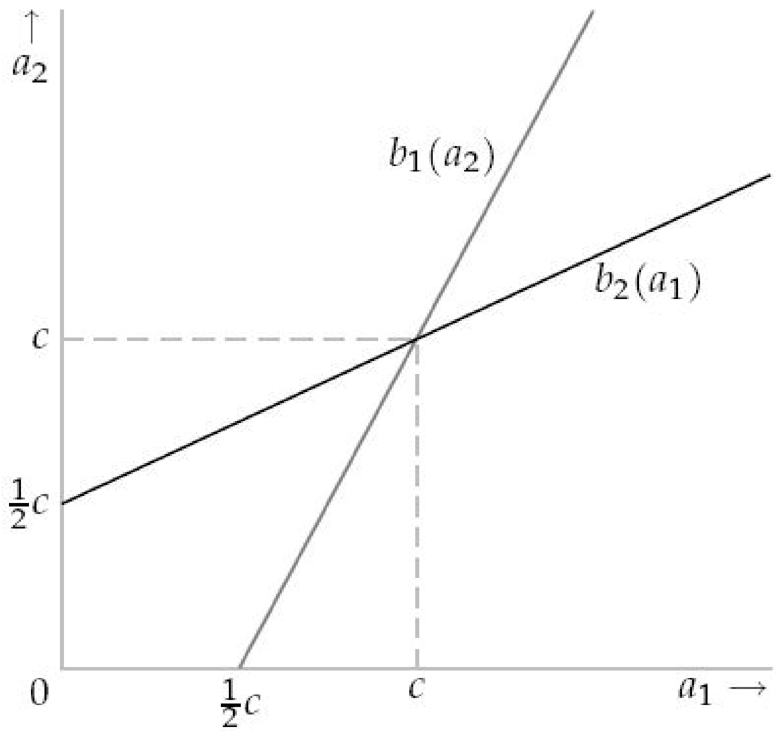
تعادلهای نش بازی زیر را بدست آورید

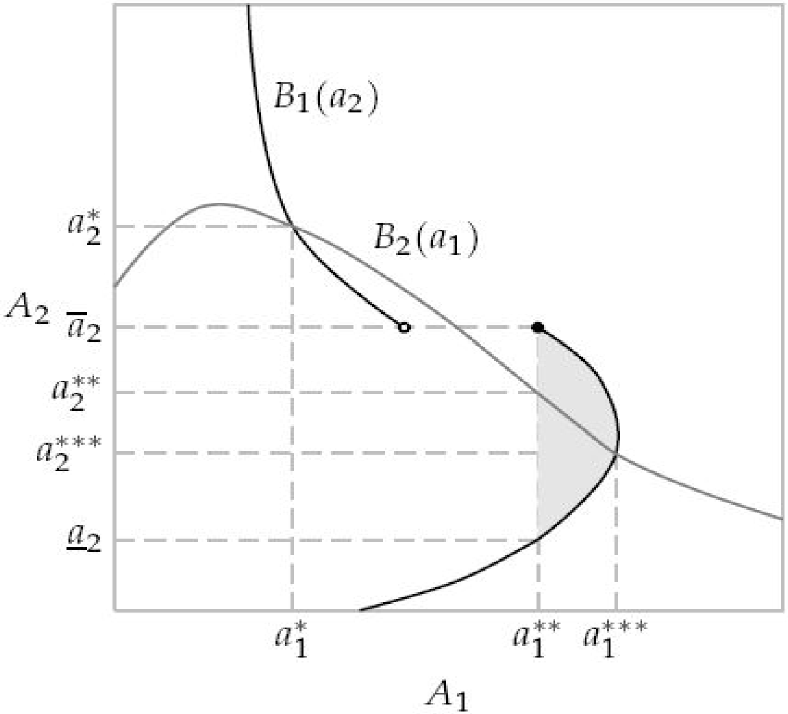
- **بازیکنان:** دو نفر
- **مجموعه عمل هر بازیکن:** $\mathbf{R}^+$ (سطح تلاش بازیکن که یک عدد غیرمنفی است)
- **ارجحیتهای بازیکن $i$:** ارجحیتهای بازیکن $i$–ام توسط تابع سود زیر نمایش داده می‌شود

$$a_i(c + a_j - a_i)$$

که در آن $a_i$، میزان تلاش بازیکن $i$–ام و

$a_i$،میزان تلاش بازیکن $j$–ام است و $c > ۰$ عددی ثابت است.


$a_2$
$b_1(a_2)$
$b_2(a_1)$
$c$
$\frac{1}{2}c$
0
$\frac{1}{2}c$
$c$
$a_1$



$B_1(a_2)$
$B_2(a_1)$
$a_2^*$
$A_2$
$\overline{a}_2$
$a_2^{**}$
$a_2^{***}$
$\underline{a}_2$
$a_1^*$
$a_1^{**}$
$a_1^{***}$
$A_1$

# مشارک در یک کالای عمومی

- **بازیکنان:** دو نفر
- **مجموعه عمل هر بازیکن:** مجموعه مشارکتهای شدنی ( اعداد غیر منفی کوچکتر یا مساوی $w_i$، برای $i = ۱, ۲$).
- **ارجحیتهای بازیکن $i$ :** ارجحیتهای بازیکن $i$–ام توسط تابع سود زیر داده شده است

$$u_i(c_۱, c_۲) = v_i(c_۱ + c_۲) - c_i \; ; \qquad i = ۱, ۲$$

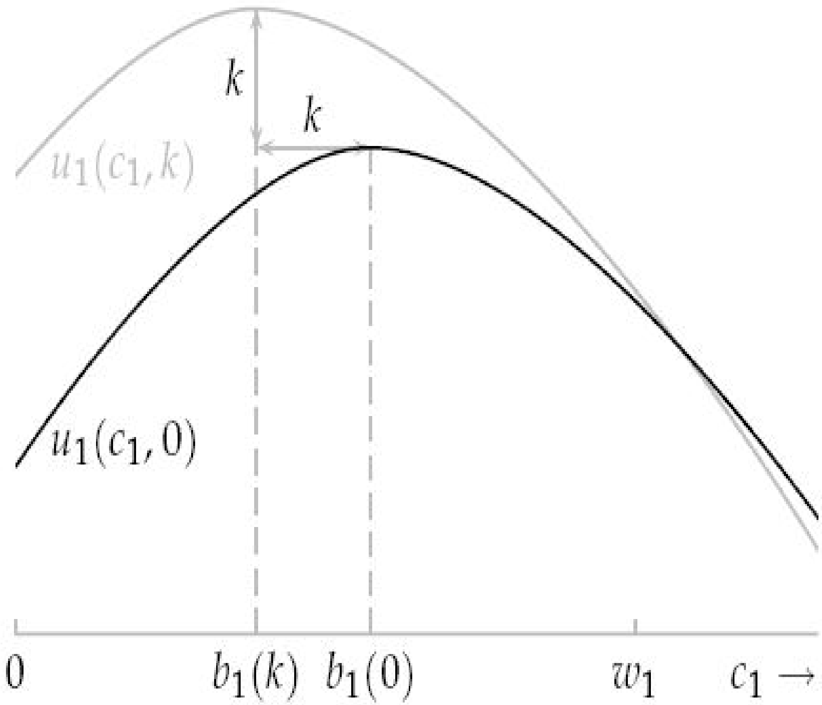
که در آن:

$w_i =$ ثروت بازیکن $i$–ام

$c_i =$ مبلغی که بازیکن $i$–ام در کالای عمومی مشارکت می‌کند $(۰ \leq c_i \leq w_i)$

$v_i =$ یک تابع صعودی

محاسبه تعادلهای نش بازی فوق:



**تعریف (تسلط اکید)**

در بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی $\langle N, (A_i)_{i=1}^{n}, (u_i)_{i=1}^{n} \rangle$، می‌گوئیم عمل بازیکن $i$–ام، $a_i''$ بر عمل $a_i'$ "اکیداً مسلط" است هرگاه

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \qquad \forall a_{-i} \in A_{-i}$$

$a_i'$ را "اکیداً مسلط شده" گوئیم.

- از یک عمل اکیداً مسلط شده در هیچ تعادل نشی استفاده نمی‌شود بنابراین برای محاسبه تعادلهای نش، می‌توان ابتدا همه عملهای اکیداً مسلط شده را حذف کرد.
- اگر یک عمل بر عمل دیگر اکیداً مسلط باشد لزوماً یک تعادل نش نیست چون عمل اول ممکن است توسط عمل دیگری مسلط شده باشد.

| | L | R |
|---|---|---|
| T | ۱ | ۰ |
| M | ۲ | ۱ |
| B | ۱ | ۳ |

| | L | R |
|---|---|---|
| T | ۱ | ۰ |
| M | ۲ | ۱ |
| B | ۳ | ۲ |

متهم دوم

| | | سکوت | اعتراف |
|---|---|---|---|
| متهم اول | سکوت | ۲و۲ | ۰و۳ |
| | اعتراف | ۳و۰ | ۱و۱ |

## تعریف (تسلط ضعیف)

در بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی $\langle N, (A_i)_{i=۱}^n, (u_i)_{i=۱}^n \rangle$، می‌گوئیم عمل بازیکن $i$–ام، $a_i''$، "بطور ضعیف مسلط " بر عمل $a_i'$ است هرگاه

$$u_i(a_i'', a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i}) \qquad \forall a_{-i} \in A_{-i}$$

و

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i}) \qquad a_{-i} \in A_{-i} \text{ برای یک}$$

$a_i'$ را "بطور ضعیف مسلط شده" گوئیم.

## مثال

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | ۱ | ۰ |
| $M$ | ۲ | ۰ |
| $B$ | ۲ | ۱ |

(می‌گوئیم $a^*$ یک "تعادل نش اکید" است هرگاه برای هر بازیکن $i$ داشته باشیم

$$u_i(a^*) > u_i(a_i, a^*_{-i}) \qquad \forall a_i \neq a^*_i$$

توجه کنید که در تعریف تعادل نش، نامساوی فوق بصورت $\geq$ بود.)

- در یک تعادل نش "اکید"، عمل تعادلی هیچ بازیکنی، بطور ضعیف مسلط شده نیست.
- در یک تعادل نش غیر اکید، عمل اتخاذ شده توسط یک بازیکن، ممکن است بطور ضعیف مسلط شده باشد.

| | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۱ و ۱ | ۰ و ۰ |
| $C$ | ۰ و ۰ | ۰ و ۰ |

| | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۱ و ۱ | ۰ و ۲ |
| $C$ | ۲ و ۰ | ۲ و ۲ |

## تعادل در ”یک“ جمعیت: بازیهای متقارن و تعادلهای متقارن

**تعریف (بازی استراتژیک دو نفره متقارن با ارجحیتهای ترتیبی)**

بازی استراتژیک دو نفره با ارجحیتهای ترتیبی $\langle \{۱, ۲\}, (A_i)_{i=۱}^{۲}, (u_i)_{i=۱}^{۲} \rangle$ را ”متقارن“ گوئیم هرگاه

اولاً مجموعه عملهای بازیکنان یکسان باشد یعنی $A_۱ = A_۲$

ثانیاً

$$u_۱(a_۱, a_۲) = u_۲(a_۲, a_۱) \qquad \forall (a_۱, a_۲)$$

- یک بازی دو نفره که که در آن هر بازیکن دارای دو عمل باشد، متقارن است هرگاه ماتریس سود بازیکنان بصورت زیر باشد

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $A$ | $W,W$ | $X,Y$ |
| $B$ | $Y,X$ | $Z,Z$ |

- بازیهای معمای زندانی و شکار گوزن، بازیهای متقارنند

متهم دوم

| | | اعتراف | سکوت |
|---|---|---|---|
| متهم اول | سکوت | ۳و۰ | ۲و۲ |
| | اعتراف | ۱و۱ | ۰و۳ |

| | خرگوش | گوزن |
|---|---|---|
| گوزن | ۱و۰ | ۲ و۲ |
| خرگوش | ۱ و۱ | ۰و۱ |

- بازی $BOS$ و مسابقه پنی، متقارن نیستند.

**تعریف (تعادل نش متقارن)**

فرض کنید $\langle N, (A_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n \rangle$ یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی باشد که در آن $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$. در اینصورت بردار عمل $a^*$ را یک "تعادل نش متقارن" گوئیم هرگاه اولاً یک تعادل نش باشد ثانیاً $a_1^* = a_2^* = \ldots = a_n^*$ باشد.

- توجه کنید که تعریف فوق، برای بازیهای فقط با دو بازیکن نیست.
- یک بازی متقارن لزوماً دارای یک تعادل نش متقارن نیست.

## چند مدل مهم

### مدل انحصار چندجانبه کورنات $Cournot's\ model\ of\ oligopoly$

یک کالای همگن توسط $n$ بنگاه تولید می‌شود.

$q_i$: تولید بنگاه $i$–ام

$C_i(q_i)$: هزینه تولید $q_i$ واحد توسط بنگاه $i$–ام. $C_i$ یک تابع صعودی است.

$P(Q)$: قیمت کالا در بازار. که در آن $Q$ مجموع تولید همه بنگاهها‌ست. $P$ را "تابع تقاضای معکوس" $inverse\ demand\ function$ گویند. $P$ یک تابع نزولی است.

سود بنگاه $i$–ام

$$\pi_i(q_1, ..., q_n) = q_i P(q_1 + ... + q_n) - C_i(q_i) \qquad (*)$$

## بازی انحصار چندجانبه کورنات

- **بازیکنان:** مجموعه بنگاهها

- **مجموعه عمل هر بازیکن:** مجموعه تولیدات شدنی توسط آن بنگاه $= \mathbb{R}^+$

- **ارجحیتهای هر بازیکن:** ارجحیتهای بازیکن $i$–ام توسط تابع سود $(\circledast)$ نمایش داده می‌شود.

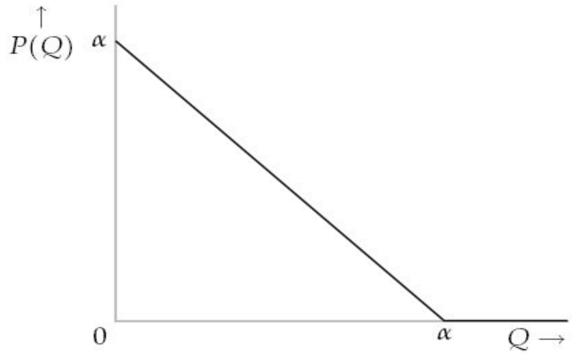
## مثال

**انحصار دو جانبه با هزینه تولید ثابت و تابع تقاضای معکوس خطی**

دو بنگاه در صنعت تولید یک کالا وجود دارند. هزینه تولید هر واحد از کالا برای هر دو یکسان و برابر $c$ است. تابع هزینه بنگاه $i$–ام عبارتست از $C_i(q_i) = cq_i$ و تابع تقاضای معکوس، تابعی خطی است که بصورت زیر داده شده است

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & Q \leq \alpha \text{ اگر}, \\ \circ & Q > \alpha \text{ اگر} \end{cases}$$

که در آن $\alpha > \circ$ و $c > \circ$ ثابت‌اند.



## محاسبه تعادل (های) نش بازی فوق

بمنظور استفاده از روش توابع بهترین پاسخ، باید ابتدا سود بنگاهها را محاسبه کنیم. اگر $q_1$ و $q_2$، تولید بنگاهها باشند در اینصورت سود بنگاه اول عبارتست از

$$\begin{aligned}\pi_1(q_1, q_2) &= q_1(P(q_1+q_2)-c)\\ &= \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1 - q_2) & \text{اگر } q_1+q_2 \leq \alpha, \\ -cq_1 & \text{اگر } q_1+q_2 > \alpha \end{cases}\end{aligned}$$

برای بدست آوردن تابع بهترین پاسخ بازیکن اول، باید تابع سود بازیکن اول را برای هر $q_2$ داده شده به عنوان تابعی از $q_1$ مورد بررسی قرار دهیم.

اگر $q_2 = 0$ باشد در اینصورت

$$\pi_1(q_1, 0) = q_1(\alpha - c - q_1) \qquad q_1 \le \alpha$$ برای

که تابعی درجه دوم است و برای مقادیر $q_1 = 0$ و $q_1 = \alpha - c$ برابر صفر است.

و به ازاء $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$ ماکزیمم می‌شود. بنابراین

$$b_1(0) = \frac{1}{2}(\alpha - c).$$

با افزایش $q_2$، سود بازیکن اول کاهش می‌یابد. این تابع نیز یک تابع درجه دوم بصورت زیر است

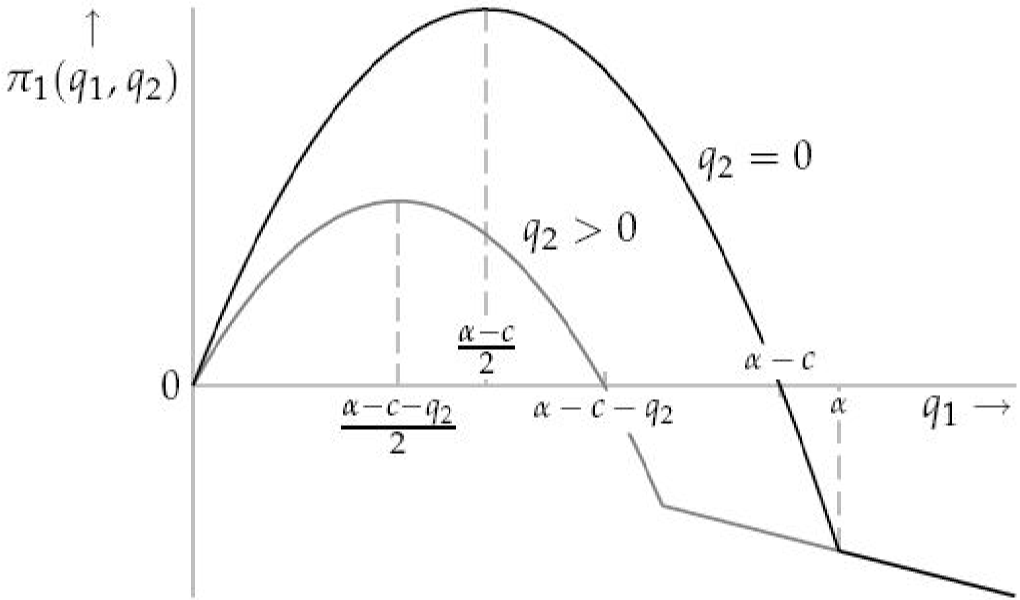
$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(\alpha - c - q_2 - q_1)$$

که برای مقادیر $q_1 = 0$ و $q_1 = \alpha - c - q_2$ صفر است. این تابع برای

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$$

ماکزیمم می‌شود. بنابراین

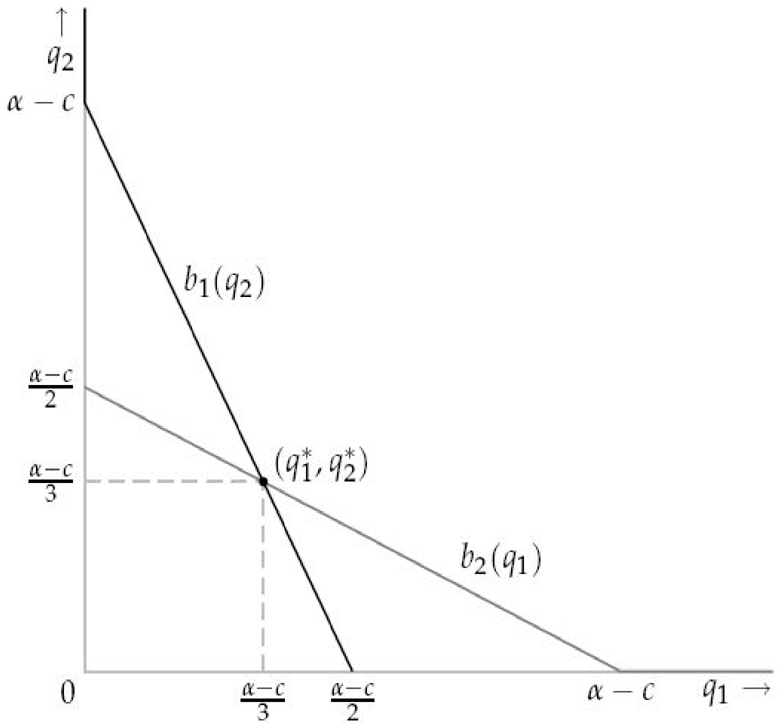
$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2) & \text{اگر } q_2 \leq \alpha - c, \\ 0 & \text{اگر } q_2 > \alpha - c \end{cases}$$



$\pi_1(q_1, q_2)$
$q_2 = 0$
$q_2 > 0$
0
$\frac{\alpha-c}{2}$
$\alpha - c$
$\frac{\alpha-c-q_2}{2}$
$\alpha - c - q_2$
$\alpha$
$q_1 \rightarrow$

چون تابع هزینه بنگاه دوم، همان تابع هزینه بنگاه اول است در نتیجه تابع بهترین پاسخ بنگاه دوم نیز مشابه بنگاه اول است. حال $(q_۱^*, q_۲^*)$ یک تعادل نش است هرگاه

$$q_۱^* = b_۱(q_۲^*), \qquad q_۲^* = b_۲(q_۱^*)$$



با حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2) \\ q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1) \end{cases}$$

بدست می‌آوریم

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c)$$

بنابراین تنها تعادل نش بازی فوق عبارتست از

$$(\frac{1}{3}(\alpha - c)\ ,\ \frac{1}{3}(\alpha - c))$$

و تولید کل در نقطه تعادل عبارتست از $\frac{2}{3}(\alpha - c)$

و در نتیجه قیمت کالا در نقطه تعادل عبارتست از

$$P(\frac{2}{3}(\alpha - c)) = \frac{1}{3}(\alpha + 2c)$$

## مدل انحصار چند جانبه برتراند

$Bertrand's\ model\ of\ oligopoly$

یک کالای همگن توسط $n$ بنگاه تولید می‌شود.

- $q_i$: تعداد کالائی که هر بنگاه می‌تواند با هزینه $C_i(q_i)$ تولید کند.

- $D(p)$: تابع تقاضا

## بازی انحصار چند جانبه برتراند

- **بازیکنان:** مجموعه بنگاهها
- **مجموعه عمل هر بازیکن:** مجموعه قیمتهای شدنی (اعداد غیر منفی)
- **ارجحیتهای هر بازیکن:** ارجحیتهای بنگاه $i$–ام توسط تابع سود زیر نمایش داده می‌شود.

اگر بنگاه $i$–ام یکی از $m$ بنگاهی باشد که دارای پایین‌ترین قیمت است در اینصورت سود بنگاه برابر است با

$$\frac{p_i D(p_i)}{m} - C_i(\frac{D(p_i)}{m})$$

و اگر قیمت یک بنگاه کمتر از $p_i$ باشد در اینصورت سود بنگاه صفر است.

## مثال

**انحصار دو جانبه با هزینه تولید ثابت هر واحد و تقاضای خطی**

دو بنگاه در صنعت تولید یک کالا وجود دارند. هزینه تولید هر واحد کالا برای هر دو یکسان و برابر $c$ است.

بنابراین $C_i(q_i) = cq_i$ برای $i = ۱, ۲$.

فرض کنید تابع تقاضا بصورت زیر است

$$D(p) = \begin{cases} \alpha - p & \text{اگر } p \leq \alpha, \\ ۰ & \text{اگر } p > \alpha \end{cases}$$

و $c < \alpha$.

## محاسبه تعادل (های) نش بازی فوق

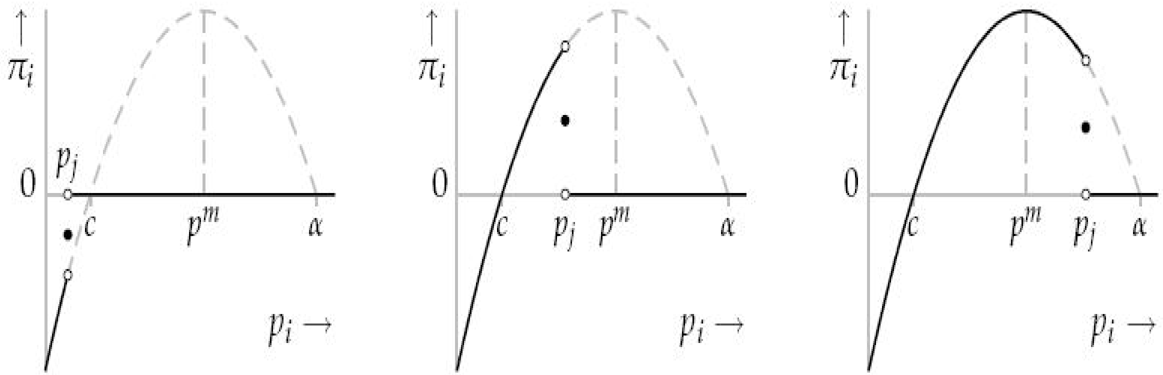
سود بازیکن $i$–ام عبارتست از

$$\pi_i(p_۱, p_۲) = \begin{cases} (p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{اگر } p_i < p_j, \\ \frac{۱}{۲}(p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{اگر } p_i = p_j, \\ ۰ & \text{اگر } p_i > p_j \end{cases}$$

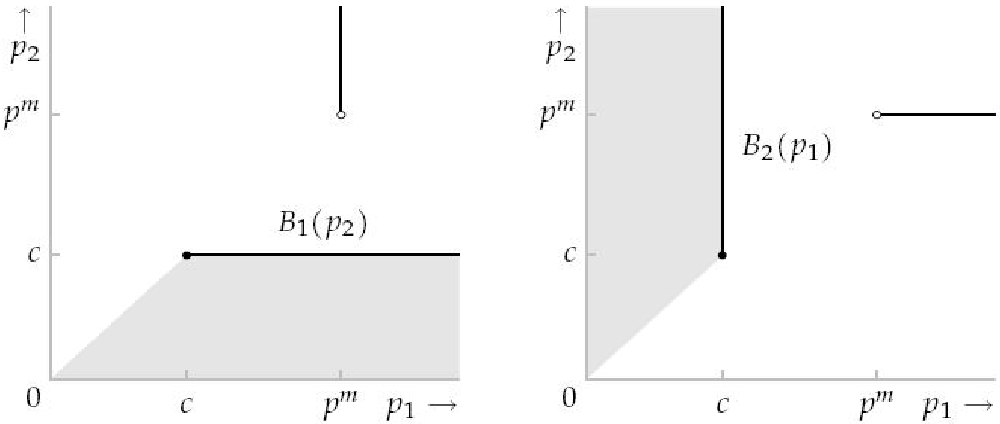
توابع بهترین پاسخ

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i | p_i > p_j\} & \text{اگر } p_j < c, \\ \{p_i | p_i \geq p_j\} & \text{اگر } p_j = c, \\ \emptyset & \text{اگر } c < p_j \leq p^m \\ \{p^m\} & \text{اگر } p^m < p_j, \end{cases}$$

که در آن $p^m$ مقداری از $p$ است که عبارت $(p-c)(\alpha-p)$ را ماکزیمم می‌کند.




$p_j < c$ $\quad$ $c < p_j \leq p^m$ $\quad$ $p_j > p^m$




تنهاتعادل نش:

$$(p_۱^*, p_۲^*) = (c, c)$$

## رقابت انتخاباتی

**سوال**

۱. چه عواملی، مواضع احزاب سیاسی و سیاستهای اعلامی از طرف آنها را در یک رقابت انتخاباتی تعیین می‌کند؟

۲. خروجی انتخابات که متأثر از دو عامل زیر است چیست؟

- سیستم انتخابات
- ارجحیتهای رأی دهندگان بین سیاستهای اعلامی

هر مدل در خصوص رقابتهای انتخاباتی باید به این دو سؤال پاسخ دهد.

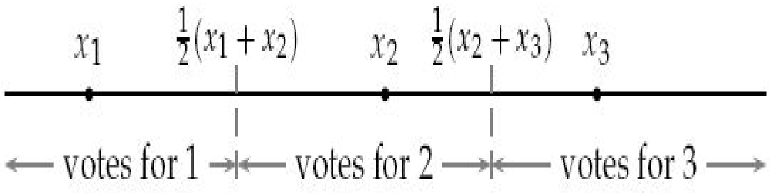
# رقابت انتخاباتی به عنوان یک بازی استراتژیک

فرض‌ها:

- بازیکنان: مجموعه کاندیداها
- هر سیاست اعلامی توسط احزاب را با یک عدد نمایش می‌دهیم.
- هر رأی دهنده به کاندیدائی رأی می‌دهد که مواضع نزدیکتری به او دارد.
- کاندیداها هیچ وابستگی عقیدتی نسبت به هیچکدام از مواضع انتخاباتی ندارند.
- پیوستاری از رأی دهندگان وجود دارد که هر کدام مجهز به یک موضع مطلوب است.

  توزیع این مواضع مطلوب روی مجموعه همه مواضع شدنی، توزیع دلخواهی است.
- عدم مطلوبیت یک رأی دهنده نسبت به یک موضع انتخاباتی را با فاصله بین آن موضع و موضع مطلوب او نشان می‌دهیم. بویژه، اگر $x^*$ موضع مطلوب یک رأی دهنده باشد در اینصورت بین $x^* - k$ و $x^* + k$ برای هر $k$، بی تفاوت است.

- هر کاندیدا، آرا شهروندانی را جذب می‌کند که مواضع آنها به موضع او نسبت به بقیه کاندیداها نزدیکتر است.



## مدل $Hotelling$ رقابت انتخاباتی

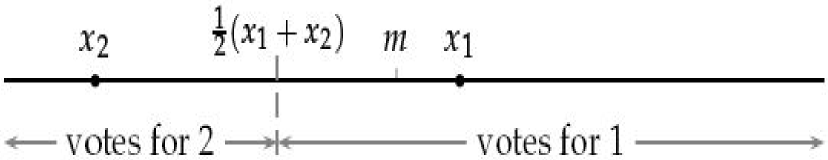
- **بازیکنان:** مجموعه کاندیداها
- **مجموعه عمل هر بازیکن:** مجموعه مواضع (اعداد)
- **ارجحیتهای هر بازیکن:**
  - به هر بردار عمل که کاندیدا پیروز انتخابات باشد عدد $n$ را نظیر می‌کند.
  - به هر بردار عمل که کاندیدا به همراه $n-k$ کاندیدای دیگر در رتبه اول باشند، عدد $k$ را نظیر می‌کند (برای $1 \leq k \leq n-1$).
  - به هر بردار عمل که بازنده انتخابات باشد عدد $0$ را نظیر می‌کند.

## تعادل نش مدل $Hotelling$ با دو کاندیدا

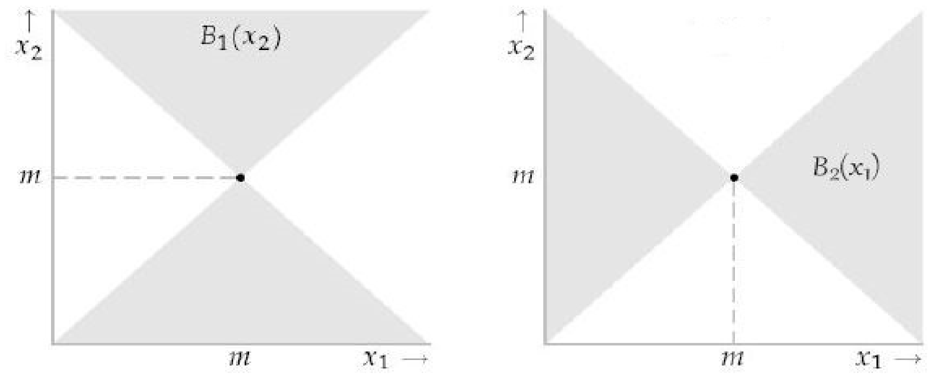
تابع بهترین پاسخ کاندیدای اول

$$B_1(x_2)=\begin{cases}\{x_1 | x_2 < x_1 < 2m - x_2\} & x_2 < m \text{ اگر,} \\ \{m\} & x_2 = m \text{ اگر,} \\ \{x_1 | 2m - x_2 < x_1 < x_2\} & x_2 > m \text{ اگر} \end{cases}$$

تابع بهترین پاسخ کاندیدای دوم بطور مشابه بدست می‌آید.



## نمودار توابع بهترین پاسخ مدل $Hotelling$ با دو کاندیدا




با توجه به نمودارهای فوق، بدیهی است که این بازی دارای یک تعادل نش یگانه است که در آن هر دو کاندیدا موضع $m$ را اختیار می‌کنند (میانگین موضع مطلوب رأی دهندگان).

## جنگ فرسایشی

*The War of Attrition*

دو حیوان روی یک طعمه با هم مبارزه می‌کنند. هر کدام زمانی را برای واگذاری طعمه انتخاب می‌کند. هرگاه یکی از آنها طعمه را رها کند دیگری همه آنرا بدست می‌آورد. اگر هر دو در یک زمان طعمه را رها کنند، در اینصورت هر کدام دارای شانس مساوی برای بدست آوردن طعمه‌اند. مبارزه هزینه‌بر است لذا هر کدام ترجیح می‌دهد حتی‌المقدور کمتر بجنگد.

## مدل بازی جنگ فرسایشی

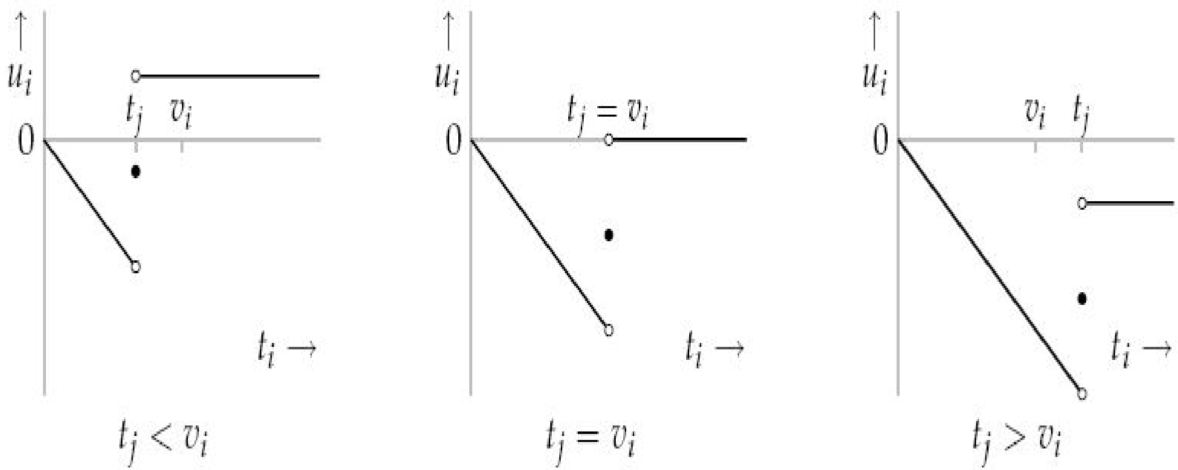
- زمان یک متغیر پیوسته است که از ۰ شروع شده و بطور نامحدود ادامه دارد.
- $v_i > 0$: مقداری که طرف $i$، هدف را ارزش گذاری کرده است.
- $\frac{v_i}{2}$: ارزشی که با احتمال ۵۰ درصد هدف را بدست می‌آورد.
- هر واحد زمان قبل از اینکه ستیز به پایان برسد (یعنی زمانیکه یک طرف طعمه را واگذار کند) یک واحد برای هر طرف هزینه دارد.

- **بازیکنان:** دو طرف مبارزه
- **مجموعه عمل هر بازیکن:** مجموعه زمانهای واگذاری شدنی (اعداد غیر منفی)
- **ارجحیتهای بازیکن $i$–ام:**

$$u_i(t_1, t_2) = \begin{cases} -t_i & \text{اگر } t_i < t_j, \\ \frac{1}{2}v_i - t_i & \text{اگر } t_i = t_j, \\ v_i - t_j & \text{اگر } t_i > t_j \end{cases}$$

## تعادلهای نش بازی جنگ فرسایشی

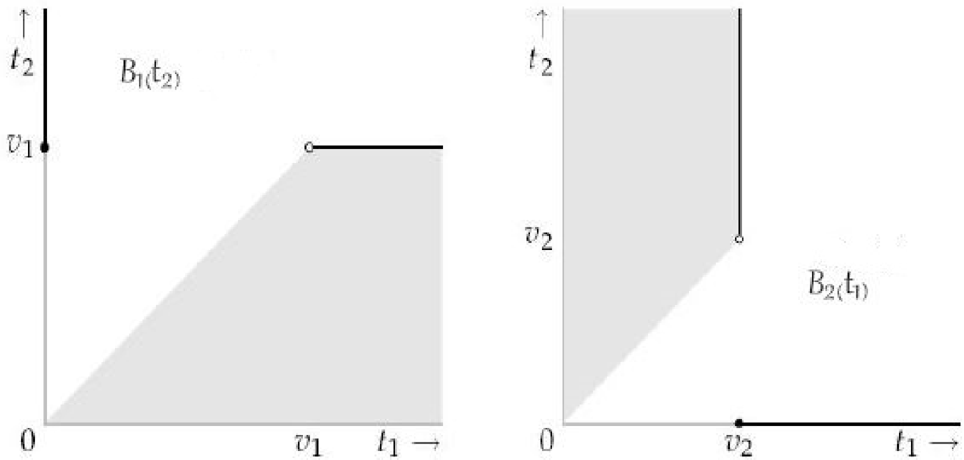
ابتدا تابع سود بازیکن $i$–ام را در نظر بگیرید:



تابع بهترین پاسخ بازیکن $i$–ام عبارتست از

$$B_i(t_j) = \begin{cases} \{t_i | t_i > t_j\} & \text{اگر } t_j < v_i, \\ \{t_i | t_i = 0 \text{ یا } t_i > t_j\} & \text{اگر } t_j = v_i, \\ \{0\} & \text{اگر } t_j > v_i \end{cases}$$

نمودار توابع بهترین پاسخ برای حالت $v_۲ > v_۱$:



فصل مشترک نمودارهای فوق نشان می‌دهد که $(t_1, t_2)$ یک تعادل نش است اگر و فقط اگر یا

$$t_1 = 0 \ , \ t_2 \geq v_1$$

یا

$$t_2 = 0 \ , \ t_1 \geq v_2$$

## مزایده قیمت دوم *Second price auction*

**فرضهای مزایده:**

۱. $v_i$: ارزیابی بازیکن $i$–ام از شیء مورد مزایده

۲. $b_i$: پیشنهاد مهر و موم شده بازیکن $i$–ام

۳. فرض می‌کنیم ارزیابی بازیکنان اعدادی مثبت و متمایزند.

۴. بازیکنان را بگونه‌ای اندیس گذاری می‌کنیم که

$$v_۱ > v_۲ > ... > v_n > ۰$$

۵. اگر بازیکن $i$–ام بالاترین پیشنهاد را بدهد $(b_i)$ در اینصورت برنده مزایده است و قیمت پرداختی، دومین قیمت ماکزیمم (مثلاً $b_j$) خواهد بود و در نتیجه سود او $v_i - b_j$ است. در غیر اینصورت بازنده مزایده است و سود او صفر خواهد بود. اگر بیش از یکنفر بالاترین قیمت را پیشنهاد بدهند در اینصورت اندیس کمتر (مثلاً $i$) برنده اعلام خواهد شد و سود او $v_i - b_i$ است.

## بازی مزایده مهر و موم شده قیمت دوم (با اطلاعات کامل)

- **بازیکنان:** $n$ پشنهاد دهنده $(n \geq ۲)$
- **مجموعه عمل یک بازیکن:** مجموعه پیشنهادهای شدنی (اعداد غیر منفی)
- **ارجحیتهای یک بازیکن :** فرض کنید $b_i$ پیشنهاد بازیکن $i$–ام و $\bar{b}$ بالاترین پیشنهاد ارائه شده توسط یک بازیکن دیگری بجز $i$ باشد. اگر $b_i > \bar{b}$ باشد یا $b_i = \bar{b}$ و بعلاوه عدد هر بازیکن دیگری که پیشنهاد $\bar{b}$ را داده باشد از $i$ بزرگتر باشد در اینصورت سود بازیکن $i$–ام عبارتست از $v_i - \bar{b}$. در غیر اینصورت سود بازیکن $i$–ام صفر است.

## تعادلهای نش بازی فوق

۱. $(b_1, b_2, ..., b_n) = (v_1, v_2, ..., v_n)$

در این تعادل، پیشنهاد هر بازیکن برابر با ارزیابی او است. چون $v_1 > v_2 > ... > v_n$، لذا بازیکن ۱ برنده مزایده با قیمت $b_2$ و سود او $v_1 - b_2$ است و سود بقیه بازیکنان صفر است.

۲. $(b_1, b_2, ..., b_n) = (v_1, 0, ..., 0)$

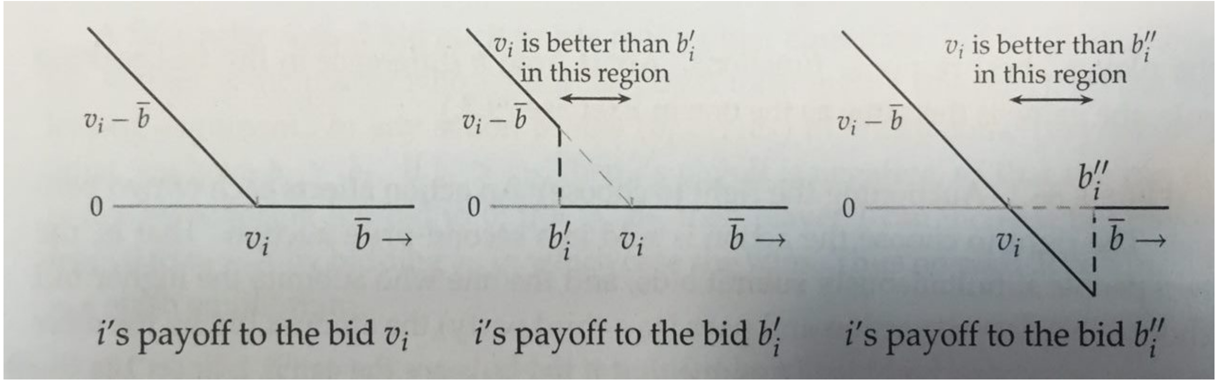
در این تعادل، بازیکن اول برنده مزایده با قیمت صفر است.

در دو تعادل فوق بازیکن اول برنده مزایده است.

۳. $(b_1, b_2, ..., b_n) = (v_2, v_1, 0, ..., 0)$

در این تعادل، بازیکن دوم برنده مزایده با قیمت $v_2$ است و سود هر بازیکن (از جمله بازیکن دوم) صفر است.

" در یک مزایده مهر و موم شده قیمت دوم (با اطلاعات کامل)، پیشنهاد یک بازیکن که برابر با ارزیابی او باشد بطور ضعیف بر هر پیشنهاد دیگری مسلط است."




**نتیجه**

یک مزایده قیمت دوم دارای تعادلهای نش بسیاری است ولی در تعادل

$$(b_۱, b_۲, ..., b_n) = (v_۱, v_۲, ..., v_n)$$

عمل هر بازیکن بطور ضعیف بر هر عمل دیگر او مسلط است.

## بازی مزایده مهر و موم شده قیمت اول (با اطلاعات کامل)

- **بازیکنان:** $n$ پیشنهاد دهنده $(n \geq ۲)$
- **مجموعه عمل یک بازیکن:** مجموعه پیشنهادهای شدنی (اعداد غیر منفی)
- **ارجحیتهای یک بازیکن :** فرض کنید $b_i$ پیشنهاد بازیکن $i$–ام و $\bar{b}$ بالاترین پیشنهاد ارائه شده توسط یک بازیکن دیگری بجز $i$ باشد. اگر $b_i > \bar{b}$ باشد یا $b_i = \bar{b}$ و بعلاوه عدد هر بازیکن دیگری که پیشنهاد $\bar{b}$ را داده باشد از $i$ بزرگتر باشد در اینصورت سود بازیکن $i$–ام عبارتست از $v_i - b_i$. در غیر اینصورت سود بازیکن $i$–ام صفر است.

## تعادلهای نش بازی فوق

۱. $(b_۱, b_۲, ..., b_n) = (v_۲, v_۲, v_۳, ..., v_n)$

در این تعادل، بازیکن ۱ برنده مزایده با قیمت $v_۲$ است.

۲. بازی مزایده قیمت اول دارای تعادلهای نش بسیاری است ولی در همه تعادلها، برنده مزایده، بازیکنی است که بالاترین ارزش گذاری را انجام می‌دهد (بازیکن اول).

۳. در یک مزایده مهر و موم شده قیمت اول (با اطلاعات کامل)، پیشنهاد یک بازیکن که حداقل به اندازه ارزیابیش باشد بطور ضعیف مسلط شده است، و هر پیشنهادی که کمتر از ارزیابیش باشد بطور ضعیف مسلط شده نیست.

۴. تنها تعادل نش در مزایده قیمت دوم که در آن پیشنهاد هیچ بازیکنی بطور ضعیف مسلط شده نیست، خروجی یکسانی با تعادلهای متمایز یک مزایده قیمت اول دارد. (منظور از تعادل متمایز یک مزایده قیمت دوم، برداری از عمل است که در آن، پیشنهاد هر بازیکن، همان ارزیابی اوست و منظور از تعادلهای متمایز یک مزایده قیمت اول، برداری بصورت $(v_۲, v_۲, b_۳, ..., b_n)$ است که در آن $b_j \leq v_j$ برای $j = ۳, ...n$.)

## قانون تصادف *Accident law*

- کیفیت قوانین بر چگونگی رفتار مردم مؤثر است.
- در یک تصادف (رخداد)، فعل و انفعال بین آسیب‌رسان (بازیکن اول) و آسیب دیده (بازیکن دوم) را در نظر بگیرید.
- فرض کنید $a_i$، میزان مراقبت بازیکن $i$ باشد که بر حسب پول سنجیده می‌شود و $L(a_1, a_2)$ میزان صدمه وارده به آسیب دیده باشد که اینهم بر حسب پول سنجیده می‌شود.
- فرض کنید برای هر $(a_1, a_2)$، $L(a_1, a_2) > 0$ و تابعی نزولی نسبت به هر مولفه باشد.
- یک قاعده حقوقی، کسری از زیان وارده توسط بازیکن اول را به عنوان تابعی از میزان مراقبت هر دو بازیکن تعیین می‌کند که آنرا با $\rho(a_1, a_2)$ نشان می‌دهیم.

## رویداد فوق به عنوان یک بازی استراتژیک

- **بازیکنان:** آسیب‌رسان و آسیب دیده
- **عمل هر بازیکن:** مجموعه سطوح مراقبت شدنی (اعداد غیر منفی)
- **ارجحیتها** : ارجحیتهای آسیب‌رسان و آسیب دیده به ترتیب توسط توابع سود زیر نمایش داده می‌شوند.

$$-a_۱ - \rho(a_۱, a_۲)L(a_۱, a_۲)$$

و

$$-a_۲ - (۱ - \rho(a_۱, a_۲))L(a_۱, a_۲)$$

که در آن $a_۱$ و $a_۲$ به ترتیب سطح مراقبت آسیب‌رسان و آسیب دیده‌اند.

**سؤال:** آیا هر قانون حقوقی به تعادلهائی منجر می‌شود که به لحاظ اجتماعی مطلوبند؟

برای پاسخ به این سؤال، ما خود را به کلاسی از قوانین که به نام *negligence with contributory negligence* شناخته می‌شوند محدود می‌کنیم که در آن

$$\rho(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a_1 < X_1, a_2 \geq X_2 \\ 0 & \text{اگر } a_1 \geq X_1 \text{ یا } a_2 < X_2 \end{cases}$$

$X_1$ و $X_2$ استانداردهای مراقبتی برای به ترتیب بازیکن اول و دوم‌اند.

## تعادل نش بازی فوق

فرض کنید تصمیم گرفته‌ایم که زوج عمل $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ به لحاظ اجتماعی یک زوج عمل مطلوب باشد.

**سؤال:** آیا مقادیر $X_1$ و $X_2$ وجود دارند بگونه‌ای که $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ تنها تعادل نش بازی تولید شده برای قانون کلاس فوق با $X_1$ و $X_2$ فوق باشند؟

اگر پاسخ مثبت باشد در اینصورت، با این فرض که مفهوم جواب تعادل نش برای وضعیت مورد بررسی یک مفهوم مناسب است، یک قاعده حقوقی بدست آورده‌ایم که خروجی آن، همان وضعیت مطلوب اجتماعی است.

## حالت خاص

فرض کنید زوج عمل $(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲)$ را به عنوان مطلوب اجتماعی، بگونه‌ای انتخاب کنیم که مجموع سود بازیکنان را ماکزیمم کند:

"$(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲)$ عبارت $-a_۱ - a_۲ - L(a_۱, a_۲)$ را ماکزیمم می کند."

ادعا: تنها تعادل نش بازی تولید شده توسط قاعده حقوقی کلاس فوق، برای

$$(X_۱, X_۲) = (\hat{a}_۱, \hat{a}_۲)$$

عبارتست از $(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲)$.

$\hat{a}_1$ بهترین پاسخ به $\hat{a}_2$ است و بالعکس

**عمل آسیب رسان:** عمل آسیب دیده $\hat{a}_2$ داده شده است. آسیب رسان باید غرامت پرداخت کند اگر و فقط اگر $a_1 < \hat{a}_1$ باشد. بنابراین سود آسیب رسان عبارتست از

$$u_1(a_1, \hat{a}_2) = \begin{cases} -a_1 - L(a_1, \hat{a}_2) & \text{اگر } a_1 < \hat{a}_1, \\ -a_1 & \text{اگر } a_1 \geq \hat{a}_1 \end{cases} \qquad (*)$$

برای $a_1 = \hat{a}_1$، این سود عبارتست از $-\hat{a}_1$.

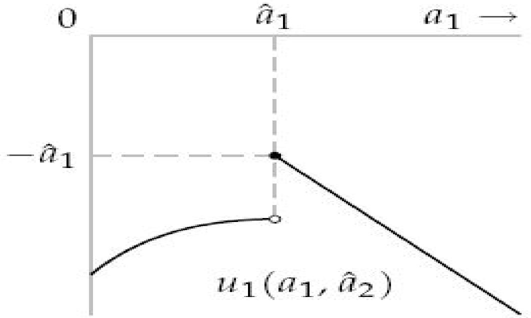
اگر بیش از $\hat{a}_1$ مراقبت کند وضعش بدتر می‌شود چون مراقبت، هزینه‌بر است و فراتر از $\hat{a}_1$، بدهی او برای غرامت را کاهش نمی‌دهد.

اگر کمتر از $\hat{a}_1$ مراقبت کند در اینصورت با توجه به سطح مراقبت داده شده آسیب دیده، او باید غرامت پرداخت کند، لذا لازمست پول صرفه جوئی شده با اتخاذ مراقبت کمتر را با اندازه غرامت مقایسه کنیم.

طبق تعریف "$(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ عبارت $-a_1 - a_2 - L(a_1, a_2)$ را ماکزیمم می کند."

بنابراین $\hat{a}_1$ عبارت $-a_1 - \hat{a}_2 - L(a_1, \hat{a}_2)$ را ماکزیمم می‌کند ($\hat{a}_2$ داده شده است).

چون $\hat{a}_2$ ثابت است پس $\hat{a}_1$ عبارت $-a_1 - L(a_1, \hat{a}_2)$ را ماکزیمم می‌کند. ولی از $(*)$ بدست می‌آوریم که سود $-a_1 - L(a_1, \hat{a}_2)$ آسیب رسان است هرگاه عملش $a_1 < \hat{a}_1$ و عمل آسیب دیده $\hat{a}_2$ باشد در نتیجه سود آسیب رسان بصورت زیر است.




بویژه $\hat{a}_1$ مقدار $u_1(a_1, \hat{a}_2)$ را ماکزیمم می‌کند یعنی $\hat{a}_1$ بهترین پاسخ به $\hat{a}_2$ است.

عمل آسیب دیده : عمل آسیب رسان $\hat{a}_1$ داده شده است. آسیب دیده هرگز غرامت دریافت نمی‌کند. بنابراین سود او عبارتست از

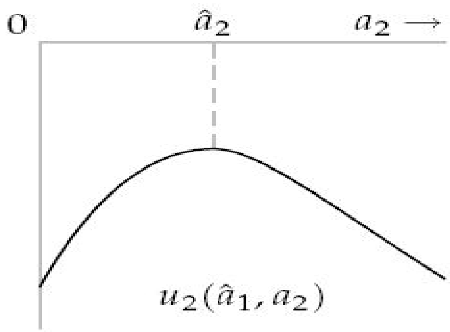
$$u_2(\hat{a}_1, a_2) = -a_2 - L(\hat{a}_1, a_2) \qquad (**)$$

طبق تعریف، $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ عبارت $-a_1 - a_2 - L(a_1, a_2)$ را ماکزیمم می کند. بنابراین

$\hat{a}_2$ عبارت $-\hat{a}_1 - a_2 - L(\hat{a}_1, a_2)$ را ماکزیمم می کند ($\hat{a}_1$ داده شده است).

از طرفی $\hat{a}_1$ ثابت است در نتیجه

$\hat{a}_2$ عبارت $-a_2 - L(\hat{a}_1, a_2)$ را ماکزیمم می کند که همان سود آسیب دیده است (به (**) و نمودار زیر توجه کنید.)




یعنی $\hat{a}_2$ مقدار $u_2(\hat{a}_1, a_2)$ را ماکزیمم می‌کند بنابراین $\hat{a}_2$ یک بهترین پاسخ به $\hat{a}_1$ است.

بنابراین $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ یک تعادل نش بازی تولید شده توسط قاعده حقوقی از کلاس فوق است هرگاه استانداردهای مراقبت برای آسیب رسان و آسیب دیده به ترتیب $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ باشند.

**یگانگی تعادل نش:**

ابتدا تابع بهترین پاسخ آسیب رسان را در نظر می‌گیریم. تابع سود او عبارتست از

$$u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} -a_1 - L(a_1, a_2) & \text{اگر } a_1 < \hat{a}_1 \text{ و } a_2 \geq \hat{a}_2, \\ -a_1 & \text{اگر } a_1 \geq \hat{a}_1, a_2 < \hat{a}_2 \end{cases}$$

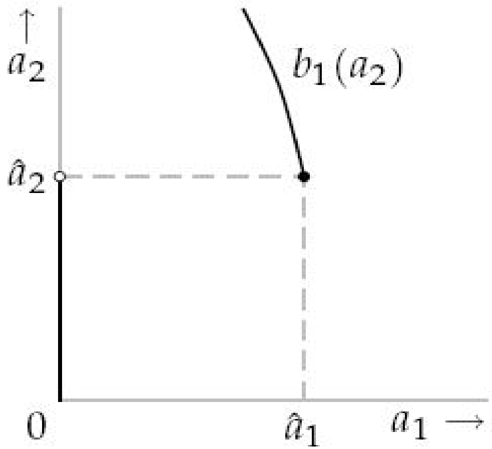
سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

$a_2 < \hat{a}_2$: در اینحالت آسیب رسان صرفنظر از سطح مراقبتش، نباید هیچ غرامتی پرداخت کند، سود او برابر $-a_1$ است. بنابراین بهترین پاسخ او $a_1 = 0$ است.

$a_2 = \hat{a}_2$: در اینحالت بهترین پاسخ آسیب رسان عبارتست از $\hat{a}_1$.

$a_2 > \hat{a}_2$: در اینحالت بهترین پاسخ آسیب رسان حداکثر، $\hat{a}_1$ است، چون سودش برای مقادیر بزرگتر $a_1$ برابر است با $-a_1$، یک تابع نزولی از $a_1$.

در نتیجه تابع بهترین پاسخ آسیب رسان بصورت زیر است




حال با توجه به اینکه تابع بهترین پاسخ آسیب رسان به هر مقدار $a_۲$، هرگز از $\hat{a}_۱$ بزرگتر نیست لذا در هر نقطه تعادل داریم $a_۱ \leq \hat{a}_۱$.

اگر $a_1 < \hat{a}_1$ در اینصورت تابع سود آسیب دیده عبارتست از

$$u_2(a_1, a_2) = \begin{cases} -a_2 - L(a_1, a_2) & a_2 < \hat{a}_2 \text{ اگر}, \\ -a_2 & a_2 \geq \hat{a}_2 \text{ اگر} \end{cases}$$

حال با توجه به اینکه " $\hat{a}_2$ عبارت $-a_2 - L(\hat{a}_1, a_2)$ را ماکزیمم می کند" لذا سطح مراقبت $\hat{a}_2$ عبارت $-a_2 -$ $L(\hat{a}_1, a_2)$ را ماکزیمم می کند.

بنابراین برای هر $a_۲$:

$$-a_۲ - L(\hat{a}_۱, a_۲) \leq -\hat{a}_۲ - L(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲)$$

بعلاوه، زیان، نامنفی است، بنابراین

$$-\hat{a}_۲ - L(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲) \leq -\hat{a}_۲.$$

در نتیجه

$$-a_۲ - L(\hat{a}_۱, a_۲) \leq -\hat{a}_۲ \qquad \forall a_۲$$

مراقبت کمتر آسیب رسان باعث افزایش زیان شده بنابراین برای $a_1 < \hat{a}_1$ داریم

$$L(a_1, a_2) > L(\hat{a}_1, a_2) \qquad \forall a_2.$$

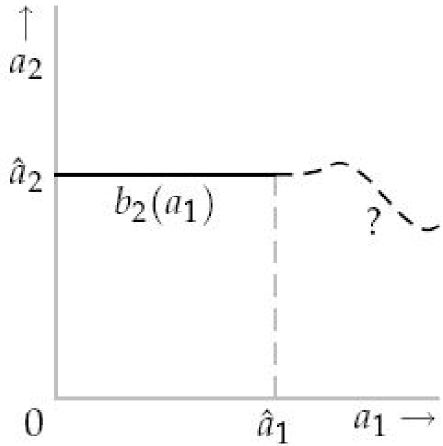
در نتیجه برای هر $a_2$ داریم

$$-a_2 - L(a_1, a_2) < -a_2 - L(\hat{a}_1, a_2)$$

و بالاخره با استفاده از رابطه اسلاید قبل بدست می‌آوریم

$$-a_2 - L(a_1, a_2) < -\hat{a}_2 \qquad \forall a_2.$$

از تابع سود $u_۲(a_۱, a_۲)$ نتیجه می‌شود که همانگونه که نمودار زیر نشان می‌دهد بهترین پاسخ آسیب دیده برای هر $a_۱ < \hat{a}_۱$ عبارتست از $\hat{a}_۲$.




با ترکیب دو تابع بهترین پاسخ، نتیجه می‌گیریم که $(\hat{a}_۱, \hat{a}_۲)$، یعنی سطوح مراقبتی که مجموع سود بازیکنان را ماکزیمم می‌کند، تنها تعادل نش بازی است.

**نتیجه**

قاعده حقوقی فوق یعنی $negligence\ with\ contributory\ negligence$ (بطور خلاصه $NWCN$) برای استانداردهای مراقبتی برابر با $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ ، بازیکنان را وادار می‌کند تا این سطح از مراقبت را انتخاب کنند.

لذا اگر قانون‌گذاران بتوانند مقادیر $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ را تعیین کنند، در اینصورت با درج این سطوح در قانون، یک بازی بوجود می‌آورند که دارای یک تعادل نش یگانه است که همان عملهای بهینه اجتماعی است.

فصل دوم

# تعادل استراتژی مخلوط

## تعمیم مفهوم "حالت ایستا" به حالت ایستای تصادفی

- مسابقه پنی که دارای هیچ تعادل نش محض نیست دارای یک حالت ایستای تصادفی است که در آن هر بازیکن، هر کدام از عملهایش را با احتمال $\frac{۱}{۲}$ انتخاب می‌کند.

  این حالت ایستای تصادفی، تحت یک فرض بدیهی، یگانه است.

| | خط | شیر |
|---|---|---|
| شیر | -۱ و ۱ | ۱ و -۱ |
| خط | ۱ و -۱ | -۱ و ۱ |

سؤال اصلی در خصوص حالت ایستای تصادفی اینست که:

”چگونه می‌توان ارجحیتهای یک بازیکن روی توزیعهای احتمال (لاتاریها) روی خروجیها را با توجه به ارجحیتهای او روی خروجیهای قطعی بدست آورد“؟

آیا می‌توان روش مسابقه پنی را برای یک بازی با بیش از دو خروجی تعمیم داد؟

## پاسخ سؤال اصلی:

فرضهائی را به مدل اضافه می‌کنیم بگونه‌ای که ارجحیت لاتاریها نسبت به یکدیگر، با توجه به ارزش انتظاری آنها روی یک تابع سود روی خروجیهای قطعی، تعیین می‌شود.

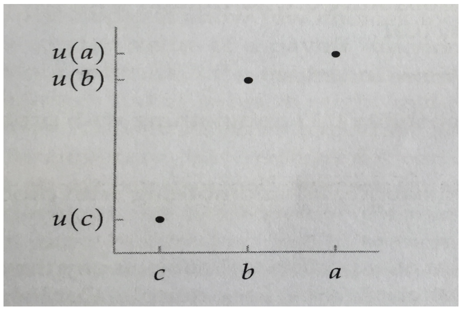
## سؤال

این فرض که ارجحیتهای یک بازیکن توسط ارزش انتظاری یک تابع سود نمایش داده می‌شود، آیا رویکرد او نسبت به ریسک را محدود نمی‌کند؟

پاسخ منفی است.

## مثال (ریسک گریز)

فرض کنید $a$، $b$ و $c$ خروجیهای یک بازی باشد و یک بازیکن $a$ را بر $b$ و $b$ را بر $c$ ترجیح دهد. این بازیکن خروجی مطمئن $b$ را بر یک لاتاری که در آن $a$ با احتمال $p$ و $c$ با احتمال $1-p$ حاصل می‌شود ترجیح می‌دهد حتی اگر $p$ نسبتاً بزرگ باشد. چنین ارجحیتهائی را می‌توان توسط ارزش انتظاری یک تابع سود $u$ نمایش داد بطوریکه $u(a)$ به $u(b)$نزدیک است و از $u(c)$ بسیار برزگتر است.

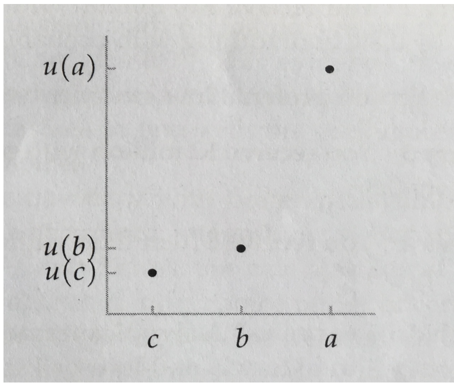


## مثال (ریسک پذیر)

در شرایط مثال قبل، لاتاری را به خروجی مطمئن $b$ ترجیح می‌دهد حتی اگر $p$ نسبتاً کوچک باشد. چنین ارجحیتهائی را می‌توان توسط ارزش انتظاری یک تابع سود $u$ نمایش داد بطوریکه $u(a)$ از $u(b)$ بسیار بزرگتر است و $u(b)$ به $u(c)$ نزدیکتر است.

به عنوان مثال اگر $u(a) = ۱۰$، $u(b) = ۹$ و $u(c) = ۰$ باشد در اینصورت $b$ را به هر لاتاری بین $a$ و $c$ که $a$ را با احتمال کمتر از $\frac{۹}{۱۰}$ نتیجه دهد ترجیح می‌دهد.

ولی اگر $u(a) = ۱۰$، $u(b) = ۱$ و $u(c) = ۰$ باشد در اینصورت هر لاتاری بین $a$ و $c$ را که $a$ را با احتمال بزرگتر از $\frac{۱}{۱۰}$ نتیجه دهد به خروجی مطمئن $b$ ترجیح می‌دهد.



## تذکر

همانطور که می‌دانیم، ارجحیتهای داده شده روی خروجیهای قطعی را می‌توان توسط توابع سود بسیاری نمایش داد. این مطلب برای ارجحیتهای روی لاتاریها هم برقرار است به عنوان مثال:

فرض کنید یک بازیکن، خروجی $a$ را بر $b$ و $b$ را بر $c$ ترجیح می‌دهد. و بین خروجی قطعی $b$ و یک لاتاری که $a$ را با احتمال $\frac{۱}{۲}$ و $c$ را نیز با احتمال $\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌دهد بی‌تفاوت باشد در اینصورت می‌توان قرار داد

$$u(a) = ۳ \quad , u(c) = ۱$$

که در اینحالت $u(b) = ۲$ است، یا

$$u(a) = ۱۰ \quad , u(c) = ۰$$

که در اینحالت $u(b) = ۵$ است، یا

$$u(a) = ۱ \quad , u(c) = -۱$$

که در اینحالت $u(b) = ۰$ است.

## توابع سود انتظاری از دیدگاه تجربی

**سؤال:** آیا نمایش ارجحیت لاتاریها، توسط ارزش انتظاری آنها نسبت به یک تابع سود، همواره امکان‌پذیر است؟

پاسخ منفی است. در واقع در موارد اندکی نقض می‌شود (مثال زیر) ولی چون جایگزینی برای این تئوری وجود ندارد. همچنان در سطح وسیعی، برای انتخاب در شرایط عدم اطمینان، از آن استفاده می‌شود.

از دو لاتاری زیر، کدامیک را ترجیح می‌دهید؟

**لاتاری ۱:** کسب دو میلیون واحد پول با اطمینان

**لاتاری ۲:** کسب ۱۰ میلیون واحد پول با احتمال ۰.۱، ۲ میلیون با احتمال ۰.۸۹ و ۰ واحد با احتمال ۰.۰۱

از دو لاتاری بعدی، کدامیک را ترجیح می‌دهید؟

**لاتاری ۳:** کسب دو میلیون با احتمال ۰.۱۱ و ۰ با احتمال ۰.۸۹

**لاتاری ۴:** کسب ۱۰ میلیون با احتمال ۰.۱ و ۰ با احتمال ۰.۹

- آزمایشات تجربی نشان می‌دهد که اکثراً ۱ را بر ۲ و ۴ را بر ۳ ترجیح می‌دهند.
- این ارجحیتها را نمی‌توان توسط یک تابع سود انتظاری نمایش داد.

## نمایش ارجحیتها توسط سودهای انتظاری

- ارجحیتهای یک بازیکن روی لاتاریها را نمی‌توان، صرفاً از ارجحیتهای او روی خروجی‌های قطعی او بدست آورد. بنابراین فرض کنید که ارجحیتهای بازیکن روی لاتاریها، داده شده باشد یعنی اگر $K$ خروجی قطعی وجود داشته باشد، فرض می‌کنیم یک تابع مانند $U$ روی لاتاریها وجود دارد بطوریکه

$$U(p_1, ..., p_K) > U(p'_1, ..., p'_K)$$

اگر و فقط اگر، بازیکن، لاتاری $(p_1, ..., p_K)$ را بر لاتاری $(p'_1, ..., p'_K)$ ترجیح دهد. ( فرض وجود $U$، از یک ساختار اضافی بنام "اصل پیوستگی" نتیجه می‌شود).

- رویکرد استاندارد در تعیین ساختار ارجحیتهای فوق اینست که یک فرض اضافی به نام "اصل استقلال" را در نظر بگیریم.
- از اصل استقلال نتیجه می‌شود که یک تابع سود مانند $u$ روی خروجیهای "قطعی" $determinstic$ وجود دارد بطوریکه رابطه ارجحیت روی لاتاریها توسط تابع زیر داده می‌شود

$$U(p_1, ..., p_K) = \sum_{k=1}^{K} p_k u(a_k)$$

$a_k$: خروجی $k$–ام لاتاری.

$u$ را تابع سود برنولی گوئیم.

- بنابراین لاتاری $(p_1, ..., p_K)$ بر $(p'_1, ..., p'_K)$ ارجحیت دارد اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{K} p_k u(a_k) > \sum_{k=1}^{K} p'_k u(a_k)$$

## مثال

فرض کنید سه خروجی قطعی وجود دارد: ۰ و ۱ و ۵ واحد

بازیکن خروجی ۵ را به ۱ و ۱ را به ۰ ترجیح می‌دهد.

- فرض کنید بازیکن لاتاری $(\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲})$ را به لاتاری $(\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}, ۰)$ ترجیح می‌دهد (اولین عدد در هر بردار، احتمال وقوع صفر و دومی احتمال ۱ و سومی احتمال ۵ است.)

  ارجحیت فوق، با ارجحیت نمایش داده شده توسط سود انتظاری تابع سود $u$ زیر سازگار است

$$u(۰) = ۰\ ,\ u(۱) = ۱\ ,\ u(۵) = ۴$$

- اصولاً هر تابع سود با ویژگی زیر کار می‌کند.

$$u(۰) = ۰\ ,\ u(۱) < \frac{۴}{۳}\ ,\ u(۵) = ۴$$

- اگر لاتاری $(\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}, ۰)$ را بر $(\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲})$ ترجیح دهد در اینصورت تابع سود زیر کار می‌کند.

$$u(۰) = ۰\ ,\ u(۱) = ۳\ ,\ u(۵) = ۴$$

**تذکر**

- تابع سود برنولی را نباید با ارجحیتهای تصمیم‌ساز روی خروجیهای قطعی اشتباه گرفت.
- اگر ارجحیتهای یک تصمیم‌ساز روی لاتاریها توسط ارزش انتظاری تابع سود برنولی $u$ نمایش داده شده باشند در اینصورت $u$، ارجحیتهای تصمیم‌ساز روی خروجیهای قطعی را نیز نمایش می‌دهد (چون لاتاریهائی با خروجی منفرد هستند.) ولی عکس این مطلب درست نیست یعنی اگر ارجحیتهای تصمیم‌ساز روی خروجیهای قطعی توسط تابع $u$ نمایش داده شده باشند در اینصورت $u$ لزوماً یک تابع سود برنولی که ارزش انتظاری آن، ارجحیتهای تصمیم‌ساز روی لاتاریها را نمایش دهد "نیست".

**مثال:**

خروجی‌های ۵و ۱ و ۰ را درنظر بگیرید و فرض کنید بازیکن، ۵ را به ۱ و ۱ را به ۰ ترجیح می‌دهد.
همچنین فرض کنید لاتاری $(\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲})$ را بر لاتاری $(۰, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴})$ ترجیح دهد. در اینصورت ارجحیتهایش روی خروجی‌های قطعی با تابع سود $u$ که در آن

$$u(۰) = ۰\ ,\ u(۱) = ۳\ ,\ u(۵) = ۴$$

است سازگارند ولی روی لاتاریها با ارزش انتظاری این تابع سازگار "نیستند". به عبارت دیگر، $u$ گرچه ارجحیتهای بازیکن روی خروجیهای قطعی را نمایش می‌دهد ولی یک تابع سود برنولی نیست که ارزش انتظاری آن، ارجحیتهای بازیکن روی لاتاریها را نمایش دهد.

**اگر $u$ یک تابع سود برنولی باشد هر تابع صعودی از آن، لزوماً یک تابع سود برنولی نیست.**

اگر ارجحیتهای یک تصمیم‌ساز روی خروجیهای قطعی توسط تابع سود $u$ نمایش داده شود، در اینصورت می‌دانیم که توسط هر تابع صعودی از $u$ نیز نمایش داده می‌شود. توجه کنید که این ویژگی برای توابع سود برنولی برقرار نیست.

**مثال:** وضعیت مثال قبل را درنظر بگیرید. تابع سود برنولی $u$ که

$$u(0) = 0 \ , \ u(1) = 1 \ , \ u(5) = 4$$

است با ارجحیت لاتاری $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ بر $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ سازگار است. اما تابع $\sqrt{u}$ که برای آن

$$u(0) = 0 \ , \ u(1) = 1 \ , \ u(5) = 2$$

است با چنین ارجحیتی سازگار نیست( $\sqrt{u}$) تابعی صعودی از $u$ است).

### سؤال

تحت چه شرایطی، دو تابع سود برنولی، ارجحیتهای یکسانی روی لاتاریها نمایش می‌دهند؟

### لم (هم‌ارزی توابع سود برنولی)

فرض کنید حداقل سه خروجی شدنی وجود دارد. ارزشهای انتظاری توابع سود برنولی $u$ و $v$، ارجحیتهای یکسانی روی لاتاریها نمایش می‌دهند اگر و فقط اگر اعداد $\eta$ و $\theta$ وجود داشته باشند بطوریکه $\theta > 0$ و

$$u(x) = \eta + \theta v(x) \qquad \forall x$$

## بازیهای استراتژیک معادل با ارجحیتهای $VNM$

سه بازی زیر را در نظر بگیرید.

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۲و۱ | ۰و۰ |
| $S$ | ۰و۰ | ۱و۲ |

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۴و۰ | ۰و-۳ |
| $S$ | ۰و-۳ | ۲و۳ |

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۳و۲ | ۰و۱ |
| $S$ | ۰و۱ | ۱و۴ |

این بازیها، بازیهای استراتژیک یکسان با ارجحیتهای قطعی هستند.

ولی فقط بازیهای چپ و وسط، بازیهای استراتژیک یکسان با ارجحیتهای $VNM$ هستند. توجه کنید که:

- تابع سود در جدول وسط، تابعی خطی از تابع سود در جدول چپ‌اند در حالیکه تابع سود در جدول راست چنین نیست.
- اگر توابع سود برنولی بازیکن $i$ در سه بازی را با $u_i$، $v_i$ و $w_i$ نشان دهیم داریم

$$v_۱(a) = ۲u_۱(a)\ ,\ v_۲(a) = -۳ + ۳u_۲(a)$$

## تعریف (بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$)

یک بازی استراتژیک (با ارجحیتهای $VNM$) از اجزاء زیر تشکیل می شود

- مجموعه ای از بازیکنان
- متناظر با هر بازیکن، مجموعه‌ای از عملها
- متناظر با هر بازیکن، ارجحیتهائی روی لاتاریهای(توزیعهای احتمال) روی بردارهای عمل بازیکنان که توسط ارزش انتظاری یک تابع سود (برنولی) روی بردارهای عمل بازیکنان نمایش داده می‌شود.

دو ماتریس ممکن است نشان دهنده "یک" بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی باشند ولی این دو ماتریس لزوماً نشان دهنده همان بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ نیستند.

مثال:دو ماتریس زیر نشان دهنده بازی استراتژیک معمای زندانی با ارجحیتهای ترتیبی اند ولی نشان دهنده دو بازی استراتژیک "متفاوت" با ارجحیتهای $VNM$ اند.

| | $Q$ | $F$ |
|---|---|---|
| $Q$ | ۲و۲ | ۳و۰ |
| $F$ | ۰و۳ | ۱و۱ |

| | $Q$ | $F$ |
|---|---|---|
| $Q$ | ۳و۳ | ۴و۰ |
| $F$ | ۰و۴ | ۱و۱ |

سوال:چگونه می‌توان نشان داد که دو ماتریس داده شده،بازیهای استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ "یکسانی" را نمایش نمی‌دهند؟

پاسخ: کافی است دو لاتاری بدست آوریم که ارزش‌های انتظاری آنها نسبت به دو ماتریس دارای ترتیبهای متفاوت باشند.

سوال:در سوال قبل، چگونه میتوان نشان داد آن دو ماتریس، بازیهای استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ یکسانی را نمایش می‌دهند؟

## تعریف (استراتژی مخلوط)

منظور از یک استراتژی مخلوط یک بازیکن در یک بازی استراتژیک ، یک توزیع احتمال روی عملهای آن بازیکن است.

ـ اگر یک بازیکن در یک استراتژی مخلوط، احتمال یک را به یک عمل و صفر را به بقیه عملها نظیر کند در اینصورت این استراتژی را یک "استراتژی محض" گوئیم.

## تعریف(تعادل نش مخلوط یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ )

می‌گوئیم برداری از استراتژیهای مخلوط مانند $\alpha^*$ یک تعادل نش مخلوط است هرگاه ، برای هر $i$ و هر استراتژی مخلوط بازیکن $i$–ام مانند $\alpha_i$ داشته باشیم

$$U_i(\alpha^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$$

که در آن $U_i(\alpha)$ سود انتظاری بازیکنان $i$–ام نسبت به $\alpha$ است.

## تذکر

برداری از استراتژیهای مخلوط مانند $\alpha^*$، یک تعادل نش مخلوط است اگر وفقط اگر برای هر بازیکن $i$ داشته باشیم

$$\alpha^*_i \in B_i(\alpha^*_{-i})$$

که در آن $B_i$، تابع بهترین پاسخ بازیکن $i$–ام است.

## بازیهای دو نفره با دو عمل

**ادعا:** مجموعه بهترین پاسخهای هر بازیکن در چنین بازیهائی ، یا یک مجموعه تک عضوی متشکل از یک استراتژی محض است یا مجموعه همه استراتژیهای مخلوط اوست.

| | $L(q)$ | $R(1-q)$ |
|---|---|---|
| $T(p)$ | $pq$ | $p(1-q)$ |
| $B(1-p)$ | $(1-p)q$ | $(1-p)(1-q)$ |

$u_i$، تابع سود برنولی بازیکن $i$–ام $(i=۱,۲)$ و انتخاب بازیکنان بطور مستقل انجام می‌شود.

اگر $(\alpha_۱, \alpha_۲)$ یک زوج استراتژی مخلوط باشد در اینصورت سود انتظاری بازیکن اول عبارتست از

$$pq.u_۱(T,L) + p(۱-q).u_۱(T,R) + (۱-p)q.u_۱(B,L) + (۱-p)(۱-q).u_۱(B,R)$$

یا

$$p[q.u_۱(T,L) + (۱-q).u_۱(T,R)] + (۱-p)[q.u_۱(B,L) + (۱-q).u_۱(B,R)]$$

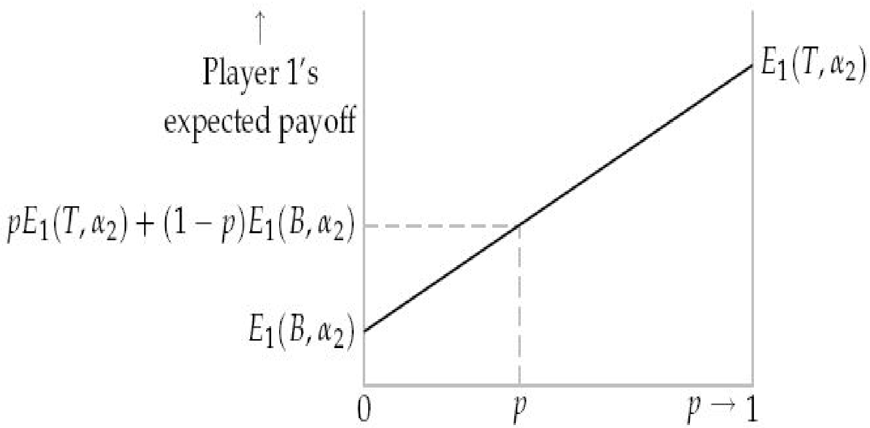
بنابراین سود انتظاری بازیکن اول نسبت به زوج استراتژی مخلوط $(\alpha_1, \alpha_2)$ عبارتست از

$$pE_1(T, \alpha_2) + (1 - p)E_1(B, \alpha_2)$$

که در آن $E_1(T, \alpha_2)$، سود انتظاری بازیکن اول است هرگاه او استراتژی محض $T$ و بازیکن دوم، استراتژی مخلوط $\alpha_2$ را انتخاب کند. نماد $E_1(B, \alpha_2)$ بطور مشابه تعریف می‌شود.

عبارت فوق نشان می‌دهد که سود انتظاری بازیکن اول، هرگاه استراتژی مخلوط بازیکن دوم داده شده باشد، یک تابع "خطی" نسبت به $p$ است.

حالت $E_{۱}(T, \alpha_{۲}) > E_{۱}(B, \alpha_{۲})$ در زیر نمایش داده شده است.



**مثال: تعادل (های) نش مخلوط مسابقه پنی**

| | شیر | خط |
|---|---|---|
| شیر | ۱ و -۱ | -۱ و ۱ |
| خط | -۱ و ۱ | ۱ و -۱ |

$p$: احتمالی که بازیکن اول به شیر نظیر می‌کند.

$q$: احتمالی که بازیکن دوم به شیر نظیر می‌کند.

اگر استراتژی مخلوط بازیکن دوم داده شده باشد در اینصورت سود انتظاری بازیکن اول با انتخاب شیر عبارتست از

$$q \cdot ۱ + (۱ - q) \cdot (-۱) = ۲q - ۱$$

و با انتخاب خط عبارتست از

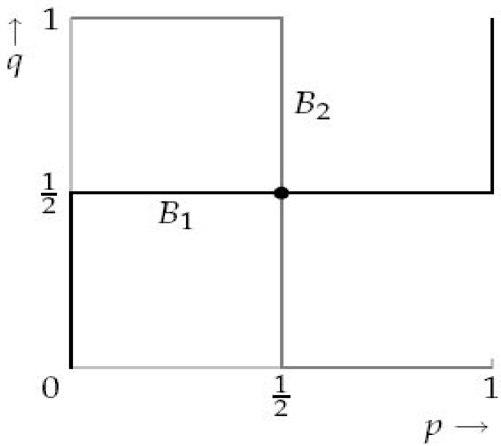
$$q \cdot (-۱) + (۱ - q) \cdot ۱ = ۱ - ۲q$$

تابع بهترین پاسخ بازیکن اول عبارتست از

$$B_۱(q) = \begin{cases} \{۰\} & \text{اگر } q < \frac{۱}{۲}, \\ \{p \mid ۰ \leq p \leq ۱\} & \text{اگر } q = \frac{۱}{۲}, \\ \{۱\} & \text{اگر } q > \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بطور مشابه تابع بهترین پاسخ بازیکن دوم عبارتست از

$$B_۲(p) = \begin{cases} \{۱\} & \text{اگر } p < \frac{۱}{۲}, \\ \{q \mid ۰ \leq q \leq ۱\} & \text{اگر } p = \frac{۱}{۲}, \\ \{۰\} & \text{اگر } p > \frac{۱}{۲} \end{cases}$$




همانگونه که نمودار فوق نشان می‌دهد، بازی پنی دارای یک تعادل نش مخلوط بصورت زیر و فاقد تعادل نش محض است.

$$.((\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}))$$

مثال: تعادل (های) نش مخلوط بازی $BOS$

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $B$ | ۱و۲ | ۰و۰ |
| $S$ | ۰و۰ | ۲و۱ |

ابتدا توابع بهترین پاسخ را بدست می‌آوریم

اگر $q$ احتمال نسبت داده شده به $B$ توسط بازیکن دوم باشد در اینصورت سود انتظاری بازیکن اول از انتخاب $B$ و $S$ به ترتیب عبارتست از

$$۲.q + ۰.(۱ - q) = ۲q$$

$$۰.q + ۱.(۱ - q) = ۱ - q$$

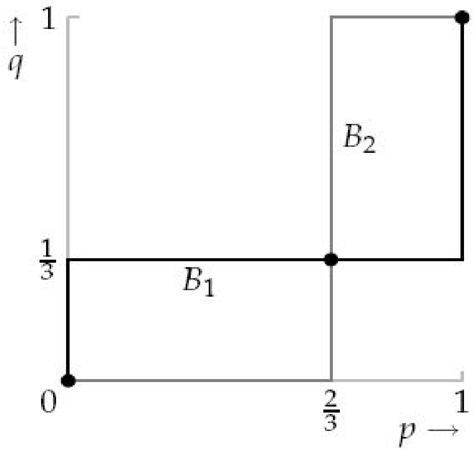
بنابراین اگر $q - ۱ > ۲q$ یا $q > \frac{۱}{۳}$ باشد در اینصورت تنها بهترین پاسخ عبارتست از $B$.

و اگر $q < \frac{۱}{۳}$ باشد در اینصورت تنها بهترین پاسخ عبارتست از $S$.

و اگر $q = \frac{۱}{۳}$ باشد در اینصورت $B$ و $S$ و در نتیجه همه استراتژیهای مخلوط بازیکن اول دارای سود انتظاری یکسانند و بنابراین هر استراتژی مخلوط، بهترین پاسخ است.

$$B_۱(q) = \begin{cases} \{۰\} & \text{اگر } q < \frac{۱}{۳}, \\ \{p | ۰ \leq p \leq ۱\} & \text{اگر } q = \frac{۱}{۳}, \\ \{۱\} & \text{اگر } q > \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

بطور مشابه، تابع بهترین پاسخ بازیکن دوم را بدست می‌آوریم.




این بازی دارای سه تعادل نش است که در آنها

$$(p,q) = (۰,۰)\ ,\ (\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳})\ ,\ (۱,۱)$$

تعادلهای نش اولی و سومی تعادلهای نش محض و دومی تعادل نش مخلوط است.

## رده‌بندی تعادل نش مخلوط

سود انتظاری یک بازیکن نسبت به برداری از استراتژیهای مخلوط مانند $\alpha$، عبارتست از میانگین وزنی سود انتظاریش نسبت به همه بردارهای مخلوط از نوع $(a_i, \alpha_{-i})$، که در آن وزن نسبت داده شده به $(a_i, \alpha_{-i})$، همان احتمال نسبت داده شده به $a_i$ توسط استراتژی مخلوط $\alpha_i$ از بازیکن $i$−ام یعنی $\alpha_i(a_i)$ است.

به عبارت دیگر

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) E_i(a_i, \alpha_{-i})$$

که در آن

$A_i$: مجموعه عملهای بازیکن $i$−ام ( استراتژیهای محض )

$E_i(a_i, \alpha_{-i})$: سود انتظاری بازیکن $i$−ام زمانیکه او احتمال یک را به $a_i$ نظیر می‌کند و هر بازیکن مانند $j$−ام، استراتژی $\alpha_j$ را اتخاذ می‌کند.

## گزاره (رده‌بندی تعادل نش مخلوط بازیهای متناهی)

یک بردار از استراتژیهای مخلوط مانند $\alpha^*$ در یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ که در آن مجموعه عملهای هر بازیکن، یک مجموعه متناهی است، یک تعادل نش مخلوط است اگر و فقط اگر برای هر بازیکن $i$:

- سود انتظاری برای $\alpha^*_{-i}$ داده شده، نسبت به هر عملی که $\alpha^*_i$ احتمال مثبتی نظیر می‌کند یکسان باشد.
- سود انتظاری برای $\alpha^*_{-i}$ داده شده، نسبت به هر عملی که $\alpha^*_i$ احتمال صفر نظیر می‌کند، حداکثر برابر با سود انتظاری هر عملی است که $\alpha^*_i$ احتمال مثبتی نظیر می‌کند.

سود انتظاری هر بازیکن در یک نقطه تعادل، همان سود انتظاریش نسبت به هر کدام از عملهای اوست که با احتمال مثبتی مورد استفاده قرار می‌دهد.

**مثال**:

در بازی $BOS$، زوج استراتژی $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ یک تعادل نش مخلوط است.

**مثال**

| | $L\ (0)$ | $C\ (\frac{1}{3})$ | $R\ (\frac{2}{3})$ |
|---|---|---|---|
| $T\ (\frac{3}{4})$ | ۰,2 | 3,3 | 1,1 |
| $M\ (0)$ | ۰,۰ | 0,۰ | 2,۰ |
| $B\ (\frac{1}{4})$ | ۰,4 | 5,1 | 0,7 |

**ادعا**: زوج استراتژیهای مخلوط زیر، یک تعادل نش مخلوط است

$$((\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}), (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$$

**نتیجه:**

هیچ تعادل مخلوط ناتبهگونی، یک تعادل نش "اکید" نیست.

منظور از یک استراتژی مخلوط ناتبهگون، یک استراتژی مخلوط است که محض نیست.

**گزاره (وجود تعادل نش مخلوط در بازیهای متناهی)**

هر بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ که در آن مجموعه عملهای هر بازیکن متناهی باشد دارای یک تعادل نش مخلوط است.

**تذکر**

- گزاره فوق یک گزاره وجودی نه ساختنی است.
- متناهی بودن بازی یک شرط "کافی" است نه لازم.

## عملهای مسلط شده *Dominated actions*

**تعریف (تسلط اکید)**

در یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$، می‌گوئیم استراتژی مخلوط بازیکن $i$ـام، $\alpha_i$، "بطور اکید مسلط" بر عمل $a'_i$ اوست هرگاه

$$U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$$

برای هر بردار از عملهای دیگر بازیکنان مانند $a_{-i}$.

که در آن $u_i$، تابع سودی است که ارزش انتظاری آن، نشان‌دهنده ارجحیتهای بازیکن $i$ـام روی لاتاریهاست و $U_i(\alpha_i, a_{-i})$، سود انتظاری بازیکن $i$ـام تحت $u_i$ است هرگاه او از استراتژی مخلوط $\alpha_i$ و دیگر بازیکنان عملهای $a_{-i}$ را اتخاذ کرده باشند. در اینحالت می‌گوئیم $a'_i$، " اکیداً مسلط شده" است.

**مثال:**

در ماتریس زیر فقط سود بازیکن اول داده شده است. این بازی نشان می‌دهد که یک عمل ممکنست توسط هیچکدام از دیگر عملهای محض، اکیداً مسلط شده نباشد ولی توسط یک استراتژی مخلوط اکیداً مسلط شده باشد.

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | ۱ | ۱ |
| $M$ | ۴ | ۰ |
| $B$ | ۰ | ۳ |

عمل $T$ توسط هیچکدام از $M$ و $B$ مسلط شده اکید (یا ضعیف) نیست ولی توسط استراتژی مخلوطی که احتمال $\frac{۱}{۲}$ به $M$ و احتمال $\frac{۱}{۲}$ به $B$ نظیر می‌کند اکیداً مسلط شده است.

## تذکر

به هیچکدام از عملهای اکیداً مسلط شده، یک احتمال مثبت در یک استراتژی مخلوط تعادلی نظیر نمی‌شود.
بنابراین برای یافتن تعادلهای نش مخلوط، می‌توان در ابتدا، همه عملهای اکیداً مسلط شده را حذف کرد.

## تعریف (تسلط ضعیف)

در یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$، می‌گوئیم استراتژی مخلوط بازیکن $i$–ام یعنی $\alpha_i$،
"بطور ضعیف مسلط" بر عمل $a'_i$ است هرگاه

برای هر بردار از عملهای دیگر بازیکنان مانند $a_{-i}$ $\qquad U_i(\alpha_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i})$

و

برای یک بردار $a_{-i}$ متشکل از عملهای دیگر بازیکنان $\quad U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a'_i, a_{-i})$

که $U_i$ و $u_i$ مانند اسلاید قبل تعریف می‌شوند.

## تذکر

از قبل می‌دانیم که یک عمل بطور ضعیف مسلط شده، ممکنست در یک تعادل نش مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین یک عمل بطور ضعیف مسلط شده ممکنست با احتمال مثبتی در یک استراتژی مخلوط تعادلی مورد استفاده قرار گیرد در نتیجه در جستجو برای تعادلهای نش مخلوط، "نمی‌توان" عملهای بصورت ضعیف مسلط شده را حذف کرد.

گزاره

**(وجود تعادل نش مخلوط بدون استراتژیهای بطور ضعیف مسلط شده در بازیهای متناهی)**

هر بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ که در آن هر بازیکن دارای تعدادی متناهی عمل باشد دارای یک تعادل نش مخلوط است که در آن استراتژی هیچکدام از بازیکنان، بطور ضعیف مسلط شده نیست.

گزاره زیر نشان می‌دهد تعادلهای نش در یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی، در همان بازی با ارجحیتهای $VNM$ نیز تعادل نش‌اند:

**گزاره**

فرض کنید $G =< N, (A_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n >$ یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای ترتیبی و $G'$ همان بازی با ارجحیتهای $VNM$ باشد (که ارجحیتهای بازیکن $i$-ام توسط سود انتظاری $u_i$، نمایش داده می‌شوند). همچنین فرض کنید $a^*$ یک تعادل نش $G$ و برای هر بازیکن $i$، $\alpha_i^*$ یک استراتژی مخلوط بازیکن $i$-ام باشد که احتمال یک را به عمل $a_i^*$ نظیر می‌کند. در اینصورت $\alpha^*$ یک تعادل نش مخلوط بازی $G'$ است.

گزاره زیر نشان می‌دهد هر تعادل نش مخلوط $G'$ که در آن استراتژی هر بازیکن، یک استراتژی محض است، متناظر با یک تعادل نش $G$ است:

**گزاره**

فرض کنید $\alpha^*$ یک تعادل نش مخلوط $G'$ باشد که در آن استراتژی مخلوط هر بازیکن $i$، احتمال یک را به عمل منفرد $a_i^*$ نظیر می‌کند. در اینصورت $a^*$ یک تعادل نش $G$ است.

## تشخیص متخصص

- فرض کنید دو نوع مشکل وجود دارد: بزرگ و کوچک
- $r=$ نسبت مسائل بزرگ، $0 < r < 1$
- فرض کنید متخصص، با دیدن یک مشکل، تشخیص می‌دهد که مشکل از نوع بزرگ است یا کوچک.
- هر مصرف کننده فقط احتمال $r$ را می‌داند.
- تشخیص، نه برای متخصص و نه برای مصرف کننده هیچ هزینه‌ای ندارد.
- یک متخصص می‌تواند توصیه به یک تعمیر بزرگ یا یک تعمیر کوچک بکند (صرفنظر از طبیعت واقعی مسأله )
- یک مصرف کننده یا توصیه متخصص را می‌پذیرد یا بدنبال متخصص دیگری می‌رود.

- یک تعمیر بزرگ، همواره مشکل را حل می‌کند خواه این مشکل بزرگ باشد یا کوچک.
- یک مصرف کننده همواره توصیه متخصص مبنی بر تعمیر کوچک را می‌پذیرد ولی در مورد یک تعمیر بزرگ، ممکن است بپذیرد یا نپذیرد.
- فرض کنید یک متخصص، همواره یک تعمیر بزرگ را برای یک مشکل بزرگ پیشنهاد می‌کند ( یک تعمیر کوچک، مشکل بزرگ را رفع نمی‌کند، در نتیجه هیچ دلیلی برای توصیه به تعمیر کوچک توسط متخصص، برای یک مشکل بزرگ وجود ندارد.)

ولی ممکن است برای یک تعمیر کوچک، هر کدام از دو نوع تعمیر را پیشنهاد کند.

- فرض کنید یک متخصص سودی مانند $\pi > 0$ (هر واحد زمان ) را که از فروش خدمات یک تعمیر کوچک به یک مصرف کننده با مشکل کوچک بدست می‌آورد همان سود را نیز از فروش خدمات یک تعمیر بزرگ به یک مصرف کننده با مشکل بزرگ بدست می‌آورد. ولی سود $\pi' > \pi$ را از فروش یک تعمیر بزرگ به یک مصرف کننده با مشکل کوچک بدست می‌آورد.
- $E=$ میزان پرداختی برای یک تعمیر بزرگ
- $I=$ میزان پرداختی برای یک تعمیر کوچک $(I < E)$
- $E', I'=$ هزینه‌ای که مصرف کننده با انتخاب روش دیگری برای تعمیر متحمل می‌شود (مانند مشورت با متخصصین دیگر قبل از اقدام به تعمیر، یا اینکه خودش روی مشکل کار کند که در هر حالت مستلزم صرف وقت است که ارزش دارد.) این هزینه برای مشکل از نوع بزرگ $E'$ $(E' > E)$ و برای مشکل از نوع کوچک $I'$ $(I' > I)$ است. فرض می‌کنیم $E > I'$ باشد.

## تشخیص متخصص به عنوان یک بازی استراتژیک

بازیکنان: متخصص، مصرف کننده

عملهای متخصص:

- صداقت: توصیه به یک تعمیر کوچک ( به ترتیب بزرگ) برای یک مشکل کوچک ( به ترتیب بزرگ)
- عدم صداقت: توصیه به یک تعمیر بزرگ برای مشکل کوچک یا بزرگ

عملهای مصرف کننده:

- پذیرش: پذیرش هر توصیه‌ای که متخصص می‌کند
- عدم پذیرش: پذیرش توصیه به تعمیر کوچک و جستجوی راه حل دیگری در مقابل توصیه به تعمیر بزرگ.

ارجحیتها: فرض کنید ارجحیتهای هر بازیکن توسط سود انتظاری، نمایش داده شده باشند. در اینصورت سود بازیکنان نسبت به چهار زوج عمل در جدول زیر نمایش داده شده‌اند.

Consumer

| | | Accept $(q)$ | Reject $(1-q)$ |
|---|---|---|---|
| Expert | Honest $(p)$ | $\pi, -rE-(1-r)I$ | $(1-r)\pi, -rE'-(1-r)I$ |
| | Dishonest $(1-p)$ | $r\pi+(1-r)\pi', -E$ | $0, -rE'-(1-r)I'$ |

## تعادل نش بازی "تشخیص متخصص"

برای بدست آوردن تعادلهای نش بازی، توابع بهترین پاسخ را بدست می‌آوریم.

$p$: احتمالی که متخصص، $H$ را انتخاب می‌کند.

$q$: احتمالی که مصرف کننده $A$ را انتخاب می‌کند.

<u>تابع بهترین پاسخ</u>

- اگر $q = ۰$ در اینصورت بهترین پاسخ متخصص عبارتست از $p = ۱$ (چون $(۱ - r)\pi > ۰$)
- اگر $q = ۱$ در اینصورت بهترین پاسخ متخصص عبارتست از $p = ۰$

  (چون $\pi' > \pi$، بنابراین $r\pi + (۱ - r)\pi' > \pi$)

- برای کدام مقدار $q$، متخصص بین $H$ و $D$ بی‌تفاوت است؟

برای $q$ داده شده، سود انتظاری متخصص نسبت به $H$ عبارتست از

$$q\pi + (۱ - q)(۱ - r)\pi$$

و سود انتظاریش نسبت به $D$ عبارتست از

$$q[r\pi + (۱ - r)\pi']$$

بنابراین بین این دو عمل بی‌تفاوت است هرگاه

$$q\pi + (۱ - q)(۱ - r)\pi = q[r\pi + (۱ - r)\pi']$$

و در نتیجه $q = \frac{\pi}{\pi'}$.

## تابع بهترین پاسخ مصرف‌کننده

- اگر $p = ۰$ در اینصورت بهترین پاسخ مصرف‌کننده بستگی به مقدار $E$ و $rE' + (۱ - r)I'$ نسبت بهم دارد. اگر

$$E < rE' + (۱ - r)I'$$

در اینصورت بهترین پاسخ مصرف‌کننده $q = ۱$ است. اگر

$$E > rE' + (۱ - r)I'$$

در اینصورت بهترین پاسخ مصرف‌کننده $q = ۰$ است. اگر

$$E = rE' + (۱ - r)I'$$

در اینصورت بین $R$ و $A$ بی‌تفاوت است.

- اگر $p = ۱$ در اینصورت بهترین پاسخ مصرف‌کننده $q = ۱$ است $(E < E')$.

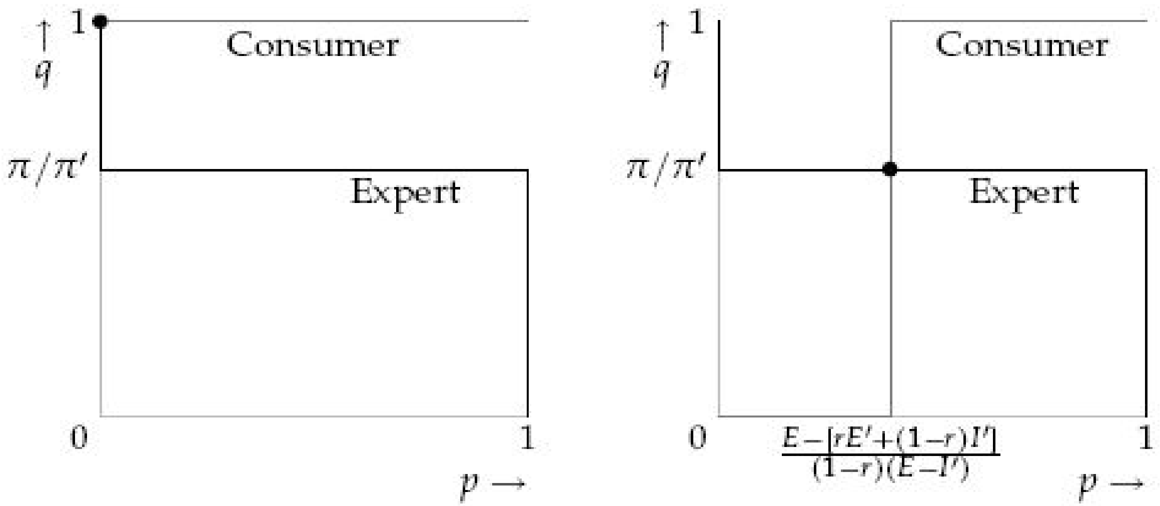
در نتیجه اگر $E < rE' + (1-r)I'$، در اینصورت بهترین پاسخ مصرف کننده به هر مقدار $p$ عبارتست از $q = 1$.

اگر $E > rE' + (1-r)I'$، در اینصورت مصرف کننده بین $R$ و $A$ بی‌تفاوت است. اگر

$$p[rE + (1-r)I] + (1-p)E = p[rE' + (1-r)I] + (1-p)[rE' + (1-r)I']$$

که نتیجه می‌شود

$$p = \frac{E - [rE' + (1-r)I']}{(1-r)(E-I')}$$




$E < rE' + (1-r)I'$ $\qquad$ $E > rE' + (1-r)I'$

## تعادلهای بازی

• اگر $E < rE' + (1-r)I'$ باشد در اینصورت زوج استراتژیهای محض $(D, A)$، تنها تعادل نش است.

• اگر $E > rE' + (1-r)I'$ باشد در اینصورت تنها تعادل بازی در مجموعه استراتژیهای مخلوط با مقادیر زیر است

$$p^* = \frac{E - [rE' + (1-r)I']}{(1-r)(E - I')} \qquad , \; q^* = \frac{\pi}{\pi'}$$

## ویژگیهای تعادل نش مخلوط

- فرض کنید مشکلات بزرگ، کمتر شوند. اگر $p^*$ را بصورت زیر بنویسیم

$$p^* = ۱ - \frac{r(E' - E)}{(۱ - r)(E - I')}$$

در اینصورت با کاهش $r$، $p^*$ افزایش می‌یابد. در نتیجه در یک تعادل مخلوط، متخصصین صادق‌تر می‌شوند هنگامیکه مشکلات بزرگ کمتر می‌شوند.

مقدار $q^*$ با تغییرات $r$، تغییر نمی‌کند.

- فرض کنید تعمیرات بزرگ، نسبت به تعمیرات کوچک کم هزینه‌تر شوند. در اینصورت با کاهش $E$، $p^*$ کاهش می‌یابد ( با ثابت بودن $E'$ و $I'$).

- فرض کنید که سود $\pi'$ ناشی از تعمیر یک مسأله جزئی با ادعای انجام تعمیر بزرگ، کاهش یابد. در اینصورت $q^*$ افزایش می‌یابد (مصرف‌کنندگان کمتر احتیاط می‌کنند) و متخصصین از عمل ناصادقانه کمتر بدست می‌آورند و بنابراین مصرف‌کنندگان می‌توانند نسبت به توصیه‌های متخصصین بیشتر اعتماد کنند.

## تعادل در یک جمعیت منفرد

**تعریف (بازی استراتژیک دو نفره متقارن با ارجحیتهای $VNM$)**

یک بازی دو نفره استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ را "متقارن" گوئیم هرگاه مجموعه عملهای بازیکنان یکسان باشند و ارجحیتهای بازیکنان توسط ارزش انتظاری توابع سود $u_1$ و $u_2$ نمایش داده شوند بطوریکه برای هر زوج عمل $(a_1, a_2)$:

$$u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1)$$

**تعریف (تعادل نش مخلوط متقارن)**

یک بردار $\alpha^*$ متشکل از استراتژیهای مخلوط در یک بازی استراتژیک با ارجحیتهای $VNM$ که در آن هر بازیکن دارای مجموعه عملهای یکسان باشد را یک " تعادل نش مخلوط متقارن" گوئیم هرگاه یک تعادل نش مخلوط باشد و $\alpha_i^*$ برای هر بازیکن $i$، یکسان باشند.

## ۱) مثال (عابرین پیاده)

| | چپ | راست |
|---|---|---|
| چپ | ۱و۱ | ۰و۰ |
| راست | ۰و۰ | ۱و۱ |

اعداد سود، نشان دهنده سود برنولی هستند.

تعادلهای نش بازی: (چپ، چپ) و (راست، راست)

و نیز تعادل نش مخلوط متقارن : $((\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),((\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}))$

۲) **مثال:** بازی زیر را در نظر بگیرید.

| | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| $X$ | ۰و۰ | ۱و۱ |
| $Y$ | ۱و۱ | ۰و۰ |

این بازی یک بازی متقارن است که فاقد تعادل محض متقارن است ولی دارای یک تعادل نش مخلوط متقارن بصورت $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ است.

**گزاره (وجود تعادل نش مخلوط متقارن در بازیهای متناهی متقارن)**

هر بازی استراتژیک متقارن با ارجحیتهای $VNM$، که در آن مجموعه عملهای هر بازیکن، متناهی باشد دارای یک تعادل نش مخلوط متقارن است.

# گزارش یک جرم

وقوع یک جرم توسط $n$ نفر مشاهده شده است. هر فرد علاقمند است که پلیس از وقوع این جرم مطلع شود ولی ترجیح می‌دهد دیگری به پلیس تلفن بکند.

$v$: ارزش مطلع شدن پلیس برای هر فرد

$c$: هزینه‌ای که فرد تلفن‌کننده به پلیس متحمل می‌شود ($v > c > ۰$).

**بازیکنان:** $n$ نفر

**مجموعه عمل هر بازیکن:** {تلفن زدن، تلفن نزدن}

**ارجحیتهای هر بازیکن:** ارجحیتهای هر بازیکن، توسط سود انتظاری یک تابع سود نمایش داده می‌شوند که این تابع سود، به برداری که هیچ فردی تلفن نزند مقدار ۰ و به برداری که این بازیکن تلفن بزند ارزش $v - c$، و بالاخره به برداری که در آن حداقل یک فرد تلفن بزند ولی این بازیکن تلفن نزند، ارزش $v$ را نظیر می‌کند.

# تعادلهای نش بازی ”گزارش یک جرم“

- $n$ تعادل نش محض وجود دارد که در هر کدام از آنها دقیقاً یکنفر به پلیس تلفن می‌کند.
- این بازی فاقد تعادل نش محض متقارن است.
- این بازی دارای یک تعادل نش مخلوط متقارن یگانه است که در آن هر فردی با احتمال $1-(\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}$ به پلیس تلفن می‌کند.

**نتیجه**

با افزایش $n$ (یعنی با افزایش شاهدین)، احتمال مطلع نمودن پلیس توسط هر فردی کاهش می‌یابد.

## نحوه بدست‌آوردن همه تعادلهای نش مخلوط بازیهای متناهی

۱) برای هر بازیکن $i$، زیرمجموعه‌ای مانند $S_i$ از مجموعه عملهای $A_i$ را انتخاب کنید.

۲) تحقیق کنید که آیا یک بردار مانند $\alpha$ متشکل از استراتژیهای مخلوط بازیکنان، با ویژگیهای زیر وجود دارد؟

الف) محمل هر مؤلفه $\alpha$ مانند $\alpha_i$، مجموعه $S_i$ باشد.

ب) $\alpha$ در شرایط گزاره "رده‌بندی تعادل نش مخلوط بازیهای متناهی" صدق کند.

۳) فرآیند فوق را برای همه $S_i$های ممکن بازیکنان، تکرار کنید.

**مثال:** همه تعادلهای مخلوط یک بازی دو نفره با دو عمل را بدست آورید.

| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $u_{11},v_{11}$ | $u_{12},v_{12}$ |
| $B$ | $u_{21},v_{21}$ | $u_{22},v_{22}$ |

- مجموعه عملهای هر بازیکن دارای سه زیرمجموعه غیر تهی است. بنابراین $۹ = ۳ \times ۳$ زوج زیر مجموعه از مجموعه عملهای بازیکنان وجود دارد.
- برای هر زوج $(S_۱, S_۲)$، باید بررسی کنیم که آیا زوج استراتژیهای مخلوطی مانند $(\alpha_۱, \alpha_۲)$ وجود دارد که در دو شرط زیر صدق کنند:

  الف) محمل $\alpha_i$، $S_i$ باشد، $i = ۱, ۲$.

  ب) شرایط گزاره "رده‌بندی تعادل‌های نش مخلوط بازیهای متناهی" برقرار باشند.
- بررسی چهار زوج از زیرمجموعه‌ها، که در آنها $S_i$ها تک عضوی‌اند منجر به این می‌شود که آیا هیچکدام از آنها تعادل محض هستند؟

- بررسی $(S_1, S_2) = (\{T, B\}, \{L\})$: شرط دوم گزاره برای بازیکن اول و شرط اول برای بازیکن دوم بدیهی است. بنابراین اگر بازیکن اول، $T$ را با احتمال $p$ انتخاب کند، برای اینکه یک تعادل نش مخلوط باشد باید داشته باشیم

$$u_{11} = u_{21}$$

و

$$pv_{11} + (1 - p)v_{21} \geq pv_{12} + (1 - p)v_{22}$$

اگر $u_{11} \neq u_{21}$ باشد یا اگر هیچ $p$ وجود نداشته باشد بطوریکه نامساوی فوق برقرار باشد در اینصورت هیچ تعادلی از این نوع وجود ندارد

بطور مشابه، سه زوج دیگر را بررسی می‌کنیم که در هر کدام، زیرمجموعه یک بازیکن متشکل از دو عمل و دیگری یک عمل است.

- بررسی $(S_1, S_2) = (\{T, B\}, \{L, R\})$:

باید زوج استراتژی مخلوط، در شرط اول گزاره صدق کند (شرط دوم بطور بدیهی برقرار است). یعنی باید $p$ و $q$ وجود داشته باشند بطوریکه

$$qu_{11} + (1-q)u_{12} = qu_{21} + (1-q)u_{22}$$

$$pv_{11} + (1-p)v_{21} = pv_{12} + (1-p)v_{22}$$

**مثال:** همه تعادلهای مخلوط بازی زیر را بدست آورید

| | $B$ | $S$ | $X$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | ۲و۴ | ۰و۰ | ۱و۰ |
| $S$ | ۰و۰ | ۴و۲ | ۳و۱ |

ـ بسادگی می‌توان نشان داد که $(B, B)$ و $(S, S)$ تعادلهای نش محض‌اند.

ـ حال تعادلهای احتمالی‌ای را در نظر بگیرید که بازیکن اول، یک استراتژی محض و بازیکن دوم، احتمال مثبت به دو یا سه عمل نظیر کند.

اگر بازیکن اول، $B$ را انتخاب کند در اینصورت سود بازیکن دوم نسبت به سه عملش $(۲, ۰, ۱)$ است که یکسان نیستند بنابراین شرط اول گزاره برقرار نیست و در نتیجه هیچ تعادل نشی از این نوع وجود ندارد.

بطور مشابه، هیچ تعادل نشی وجود ندارد که در آن بازیکن اول $S$ را انتخاب کند و بازیکن دوم، احتمال مثبت به بیش از یک عمل نظیر کند.

همچنین هیچ تعادل نشی وجود ندارد که در آن بازیکن دوم یک استراتژی محض انتخاب کند و بازیکن اول به دو عملش احتمال مثبت نظیر کند.

– تعادل احتمالی‌ای را درنظر بگیرید که در آن، استراتژی بازیکن اول، احتمال مثبت به دو عملش نظیر کند و بازیکن دوم به دو عمل از سه عملش، احتمال مثبت نظیر کند.

$p$: احتمال انتخاب $B$ توسط بازیکن اول

- اگر بازیکن دوم $B$ و $S$ را با احتمال مثبت انتخاب کند در اینصورت طبق گزاره، باید سود انتظاری $X$ حداکثر به اندازه سود انتظاری $B$ و $S$ باشد که سود انتظاری این دو باید با هم برابر باشند. یعنی

$$۲p = ۴(۱ - p) \geq p + ۳(۱ - p).$$

از تساوی نتیجه می‌شود $p = \frac{۲}{۳}$ که در نامساوی صدق نمی‌کند. بنابراین تعادلی از این نوع وجود ندارد.

اگر بازیکن دوم $B$ و $X$ را با احتمال مثبت انتخاب کند در اینصورت مشابه بند قبل باید داشته باشیم

$$۲p = p + ۳(۱ - p) \geq ۴(۱ - p)$$

از تساوی نتیجه می‌شود $p = \frac{۳}{۴}$ که در نامساوی صدق می‌کند.

بمنظور برقراری شرط اول گزاره برای بازیکن اول، باید سودهای انتظاری $B$ و $S$ برابر باشند یعنی $۴q = ۱ - q$، که در آن $q$، احتمالی است که بازیکن دوم به $B$ نظیر می‌کند یا $q = \frac{۱}{۵}$. بنابراین زوج استراتژی مخلوط زیر یک تعادل مخلوط است

$$((\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴}), (\frac{۱}{۵}, ۰, \frac{۴}{۵})).$$

اگر بازیکن دوم $S$ و $X$ را انتخاب کند در اینصورت، برای هر استراتژی بازیکن دوم که احتمال مثبت فقط به $S$ و $X$ نظیر کند، سود انتظاری بازیکن اول نسبت به $S$، از سود انتظاریش نسبت به $B$ بیشتر خواهد شد بنابراین هیچ تعادل نشی از این نوع وجود ندارد.

آخرین حالت اینست که استراتژی بازیکن اول، احتمال مثبت به هر دو عملش و استراتژی بازیکن دوم، احتمال مثبت به هر سه عملش نظیر کند.

$p$: احتمال انتخاب $B$ توسط بازیکن اول

حال سودهای انتظاری بازیکن دوم نسبت به سه عملش باید برابر باشند یعنی

$$2p = 4(1-p) = p + 3(1-p).$$

از تساوی اول: $p = \frac{2}{3}$ که در تساوی دوم صدق نمی‌کند لذا هیچ تعادل نشی از این نوع وجود ندارد.

پس بازی فوق دارای سه تعادل نش مخلوط است.

$$((1,0),(1,0,0))\text{و}((0,1),(0,1,0))\text{و}((\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),(\tfrac{1}{5},0,\tfrac{4}{5}))$$

فصل سوم

# بازیهای توسعه یافته با اطلاعات کامل

$Extensive\ Games\ with\ Perfect$

$Information$

**تعریف**

منظور از "زیرتاریخچه" های یک دنباله متناهی از عملها مانند $(a^1, a^2, ..., a^k)$، دنباله‌های زیرند

(۱) دنباله تهی ("تاریخچه تهی"، که شروع بازی را نشان می‌دهد)

(۲) همه دنباله‌های بصورت $(a^1, a^2, ..., a^m)$ که $1 \leq m \leq k$.

بطور مشابه، زیرتاریخچه‌های یک دنباله نامتناهی از عملها مانند $(a^1, a^2, ...)$، عبارتند از دنباله تهی، و هر دنباله‌ای بصورت $(a^1, a^2, ..., a^m)$، که در آن $m$ یک عدد صحیح و مثبت و دنباله کامل $(a^1, a^2, ...)$.

**تعریف**

- یک زیرتاریخچه که مساوی دنباله کامل نباشد را یک "زیرتاریخچه سره" گوئیم.
- یک دنباله از عملها، که یک زیرتاریخچه از یک تاریخچه نهائی باشد را بطور خلاصه یک "تاریخچه" گوئیم.

## تعریف (بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل)

یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل از اجزاء زیر تشکیل می‌شود

- یک مجموعه از بازیکنان
- یک مجموعه از دنباله‌ها (تاریخچه‌های نهائی) با این ویژگی که هیچ دنباله‌ای یک زیر تاریخچه سره از دنباله دیگری نیست.
- یک تابع (تابع بازیکن) که به هر دنباله‌ای که یک زیر تاریخچه سره از یک تاریخچه نهائی باشد یک بازیکن نظیر می‌کند.
- برای هر بازیکن، ارجحیتهائی روی مجموعه تاریخچه‌های نهائی

## مثال (بازی رقیب)

یک مقام مسؤل (یک بنگاه یا یک سیاستمدار) با احتمال ورود یک رقیب مواجه می‌شود. رقیب ممکنست وارد بشود یا نشود. اگر وارد شود، مقام مسؤل ممکنست او را بپذیرد یا با او مبارزه کند. فرض کنید بهترین خروجی برای رقیب این است که وارد شود و مقام مسؤل او را بپذیرد (تسلیم شود)، و بدترین خروجی این است که وارد شود و مقام مسؤل با او مبارزه کند، در حالیکه بهترین خروجی برای مقام مسؤل این است که رقیب وارد نشود، و بدترین خروجی این است که رقیب وارد شود و مبارزه شود.

این وضعیت را می‌توان توسط یک بازی توسعه یافته با اطلاعات کامل مدل کرد.

**بازیکنان:** مسؤل و رقیب

**تاریخچه‌های نهائی:** (پذیرش، ورود) ، (مبارزه، ورود) ، خروج

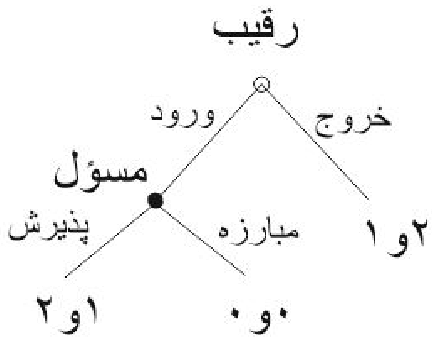
**تابع بازیکنان:** مسؤل $=$ $P$(ورود) و رقیب $= P(\emptyset)$

**ارجحیتها:** ارجحیتهای رقیب توسط تابع سود $u_1$ نمایش داده می‌شوند که برای آن

$u_1$(مبارزه ، ورود) $=$ ۰    $u_1$(خروج) $=$ ۱    $u_1$(پذیرش ، ورود) $=$ ۲

و ارجحیتهای مسؤل توسط تابع سود $u_2$ نمایش داده می‌شوند که برای آن

$u_2$(مبارزه ، ورود) $=$ ۰    $u_2$(پذیرش ، ورود) $=$ ۱    $u_2$(خروج) $=$ ۲



تذکر

در تعریف بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل، عملهای شدنی بازیکنان در مسیرهای مختلف، بطور صریح مشخص نشد. این مجموعه‌ها را می‌توان از تاریخچه‌های نهائی و تابع بازیکن بدست آورد. اگر برای یک تاریخچه غیر نهائی $h$، دنباله $(h,a)$ یک تاریخچه باشد در اینصورت $a$، یک عمل قابل دسترسی به بازیکنی است که بعد از $h$ اقدام می‌کند.

بنابراین مجموعه همه عملهای شدنی به بازیکنی که بعد از $h$ اقدام می‌کند عبارتست از

$$A(h) = \{a | \text{یک تاریخچه است}(h,a)\}$$

**مثال:**

در مثال قبل، تاریخچه‌ها عبارتند از

(مبارزه ، ورود) و (پذیرش ، ورود) و ورود و خروج و $\emptyset$.

بنابراین مجموعه عملهای قابل دسترسی به بازیکنی که در شروع بازی اقدام می‌کند یعنی رقیب، عبارتست از

$$A(\emptyset) = \{\text{ورود} \quad , \quad \text{خروج}\}$$

و مجموعه عملهای قابل دسترسی به بازیکنی که بعد از تاریخچه "ورود" اقدام می‌کند یعنی مسؤل عبارتست از

$$A(\text{ورود}) = \{\text{پذیرش} \quad , \quad \text{مبارزه}\}.$$

**تعریف**

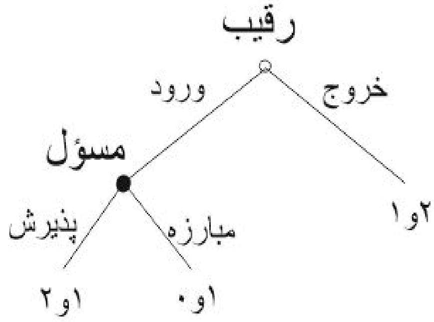
یک بازی را با "افق متناهی" $finite\ horizon$ گوئیم هرگاه طول بزرگترین تاریخچه نهائی آن، متناهی باشد.

یک بازی را "متناهی" گوئیم هرگاه اولاً دارای افق متناهی باشد ثانیاً تعداد تاریخچه‌های نهائی آن، متناهی باشد.

## استقراء معکوس *Backward induction*

محدودیتهای استقراء معکوس

(۱) استقراء معکوس را برای برخی بازیهای توسعه یافته با اطلاعات کامل نمی‌توان بکار گرفت. به عنوان مثال در بازی زیر، نمی‌توان از استقراء معکوس استفاده کرد.



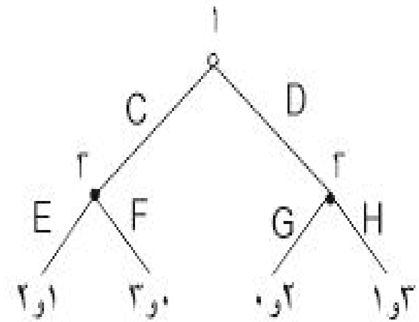

(۲) در بازیهای با تاریخچه‌های با طول نامتناهی نمی‌توان از روش استقراء معکوس استفاده کرد.

(۳) در بازیهای توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

**تعریف (استراتژی)**

منظور از یک "استراتژی" بازیکن $i$ در یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل، تابعی است که به هر تاریخچه $h$، که بعد از آن نوبت اقدام بازیکن $i$ است (یعنی، $P(h) = i$، که $P$، تابع بازیکن است) یک عمل در $A(h)$ (مجموعه عملهای قابل دسترسی بعد از $h$) نظیر می‌کند.

**مثال:** بازی زیر را در نظر بگیرید.




- بازیکن ۱ فقط در شروع بازی اقدام می‌کند (یعنی بعد از تاریخچه تهی)، که عملهای قابل دسترسی به او، $C$ و $D$ اند. بنابراین دارای دو استراتژی است: یکی که $C$ را به تاریخچه تهی نظیر می‌کند و دیگری که $D$ را به تاریخچه تهی نظیر می‌کند.
- بازیکن ۲ بعد از تاریخچه $C$ و نیز بعد از تاریخچه $D$ حرکت می‌کند. بعد از تاریخچه $C$، عملهای قابل دسترسی به او عبارتند از $E$ و $F$، و بعد از تاریخچه $D$، عملهای قابل دسترسی به او عبارتند از $G$ و $H$. بنابراین یک استراتژی بازیکن ۲، تابعی است که $E$ یا $F$ را به تاریخچه $C$ و $G$ یا $H$ را به تاریخچه $D$ نظیر می‌کند. یعنی بازیکن ۲ دارای "۴" استراتژی است که در جدول زیر نمایش داده شده‌اند.

| | عمل نسبت داده شده به تاریخچه C | عمل نسبت داده شده به تاریخچه D |
|---|---|---|
| استراتژی ۱ | $E$ | $G$ |
| استراتژی ۲ | $E$ | $H$ |
| استراتژی ۳ | $F$ | $G$ |
| استراتژی ۴ | $F$ | $H$ |

که برای سادگی استراتژیهای بازیکن اول را با $C$ و $D$، و استراتژیهای بازیکن دوم را با $EG$، $EH$، $FG$ و $FH$ نشان می‌دهیم.

**تذکر**

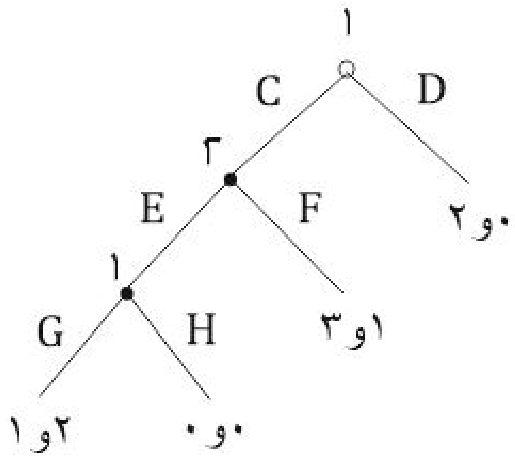
استراتژی یک بازیکن را بصورت فهرستی از عملها می‌نویسیم که هر عمل متناظر با تاریخچه‌ای است که بعد از آن نوبت این بازیکن برای اقدام است.

**تذکر**

۱) در هر بازی، استراتژی یک بازیکن، شامل اطلاعات کافی برای تعیین "برنامه عمل" *plan of action* آن بازیکن است. به این معنی که استراتژی یک بازیکن تعیین می‌کند که با هر انتخاب دیگر بازیکنان، او کدام عمل را باید انتخاب کند.

۲) در برخی بازیها، استراتژیهای برخی بازیکنان، بیش از برنامه عمل آنهاست.

به عنوان مثال، بازی زیر را درنظر بگیرید:



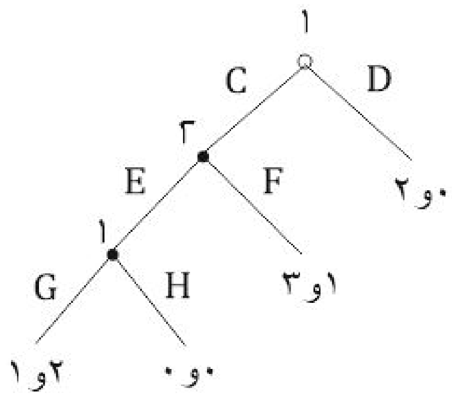

بازیکن ۱ دوبار حرکت می‌کند، یکی در شروع بازی و دیگری بعد از تاریخچه $(C, E)$ و در هر حالت، دو عمل دارد، بنابراین دارای "چهار" استراتژی است: $CG$ ( یعنی انتخاب $C$ در شروع بازی و $G$ بعد از تاریخچه $(C, E)$)، $CH$، $DG$، $DH$.

بویژه هر استراتژی، یک عمل بعد از تاریخچه $(C, E)$ تعیین می‌کند "حتی اگر عمل $D$ را در شروع بازی اتخاذ کرده باشد" که در این حالت تاریخچه $(C, E)$ رخ نمی‌دهد!

## خروجیها

یک بردار از استراتژیها، مشخص می‌کند که کدام تاریخچه نهائی رخ خواهد داد. اگر این بردار از استراتژیها را با $S$ و تابع بازیکن را با $P$ نشان دهیم در اینصورت در شروع بازی، بازیکن $P(\emptyset)$ حرکت را آغاز می‌کند. استراتژی او $S_{P(\emptyset)}$ و عمل $S_{P(\emptyset)}(\emptyset)$ را انتخاب می‌کند. این عمل را با $a^۱$ نشان دهید. اگر تاریخچه $a^۱$، یک تاریخچه نهائی نباشد حرکت بعدی توسط $P(a^۱)$ انجام می‌شود. استراتژی او $S_{P(a^۱)}$ است و عمل $S_{P(a^۱)}(a^۱)$ را انتخاب می‌کند. این عمل را با $a^۲$ نشان دهید. اگر تاریخچه $(a^۱, a^۲)$ یک تاریخچه نهائی نباشد، در اینصورت تابع بازیکن مشخص می‌کند که کدام بازیکن باید حرکت کند و استراتژی آن بازیکن مشخص می‌کند که کدام عمل را انتخاب کند. این فرآیند ادامه می‌یابد تا به یک تاریخچه نهائی می‌رسیم. این تاریخچه نهائی را "خروجی $s$" $outcome\ of\ s$ گوئیم و با $O(s)$ نشان می‌دهیم.

**مثال:** بازی زیر را در نظر بگیرید.




خروجی زوج استراتژی $(DG, E)$، تاریخچه نهائی $D$ است و خروجی $(CH, E)$، تاریخچه نهائی $(C, E, H)$ است.

ـ توجه کنید که خروجی بردار استراتژی $s$ یعنی $O(s)$ فقط بستگی به برنامه‌های عمل بازیکنان دارد نه استراتژیهای کامل آنها. یعنی برای تعیین $O(s)$ لازم "نیست" به همه مولفه‌های استراتژی هر بازیکن که عمل او را تعیین می‌کند، بعد از آنکه تاریخچه‌ها توسط آن استراتژی متوقف شد مراجعه کنیم.

## تعریف (تعادل نش بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل)

می‌گوئیم بردار استراتژی $s^*$ در یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل، یک "تعادل نش" است هرگاه برای هر بازیکن $i$ داشته باشیم

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s^*_{-i}))$$

برای هر استراتژی $r_i$ ی بازیکن $i$–ام.

که در آن $u_i$، تابع سودی است که ارجحیتهای بازیکن $i$–ام را نمایش می‌دهد و $O$ تابع خروجی بازی است.

به عبارت دیگر $s^*$ یک تعادل نش است هرگاه برای هر بازیکن $i$ و هر استراتژی او مانند $r_i$، تاریخچه نهائی $O(s^*)$ تولید شده توسط $s^*$، با توجه به ارجحیتهای بازیکن $i$–ام، حداقل بخوبی تاریخچه نهائی $O(r_i, s^*_{-i})$ باشد که در آن بازیکن $i$، $r_i$ و هر بازیکن دیگر مانند $j$، $s^*_j$ را انتخاب کرده است.

## نحوه محاسبه تعادلهای نش یک بازی توسعه‌یافته متناهی

۱) استراتژیهای هر بازیکن را مشخص کنید.

۲)خروجی هر بردار از استراتژیها را تعیین کنید.

۳) اطلاعات بدست‌آمده را مشابه یک بازی استراتژیک بررسی کنید.

به عبارت دیگر، بازی استراتژیک زیر را تعریف کنید که آنرا "بازی استراتژیک وابسته به بازی توسعه‌یافته" گوئیم:

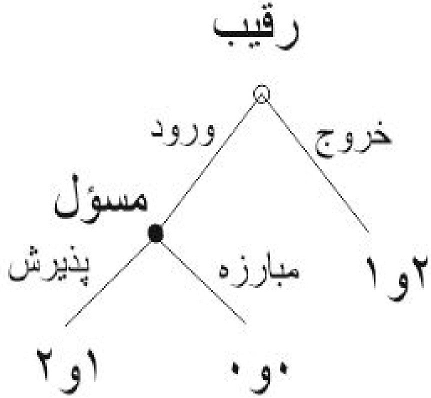
**بازیکنان:** مجموعه بازیکنان در بازی توسعه یافته

**عملها:** مجموعه عمل هر بازیکن، همان مجموعه استراتژیهای او در بازی توسعه‌یافته‌اند.

**ارجحیتها:** سود هر بازیکن نسبت به هر بردار از استراتژیها، همان سودش در تاریخچه نهائی تولید شده توسط همان بردار از استراتژیها در بازی توسعه‌یافته است.

طبق تعریف اسلاید قبل، مجموعه تعادلهای نش هر بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل، همان مجموعه تعادلهای نش بازی استراتژیک متناظر با آنست.

**مثال (تعادلهای نش بازی رقیب)**




در این بازی، رقیب دارای دو استراتژی است: ورود و خروج.

و مسؤل نیز دارای دو استراتژی است: پذیرش (تسلیم) و مبارزه.

فرم استراتژیک بازی بصورت زیر است

| | | مسؤل: مبارزه | مسؤل: پذیرش |
|---|---|---|---|
| رقیب | ورود | ۰و۰ | ۱و۲ |
| | خروج | ۲و۱ | ۲و۱ |

این بازی دارای دو تعادل نش است

(مبارزه ، خروج) و (پذیرش ، ورود).

تعادل سمت چپ، همان الگوی رفتاری است که توسط استقرا معکوس در ابتدا مورد بررسی قرار گرفت. در تعادل دوم، رقیب همواره خروج را انتخاب می‌کند. این استراتژی، اگر استراتژی مسؤل مبنی بر "مبارزه در صورت ورود" داده شده باشد بهینه است. بعلاوه استراتژی "مبارزه" مسؤل، اگر استراتژی رقیب داده شده باشد بهینه است.

## تعریف (زیربازی یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل)

فرض کنید $\Gamma$ یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و $P$ تابع بازیکن باشد. برای هر تاریخچه غیرنهائی از $\Gamma$ مانند $h$، منظور از "زیر بازی $\Gamma(h)$ که بعد از $h$ ظاهر می‌شود"، بازی توسعه یافته زیر است.

**بازیکنان:** بازیکنان در $\Gamma$

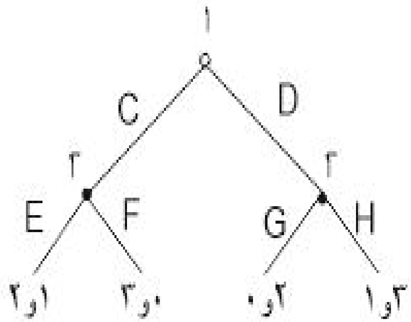
**تاریخچه‌های نهائی:** مجموعه همه دنباله‌های از عمل مانند $h'$ بطوریکه $(h,h')$ یک تاریخچه نهائی از $\Gamma$ باشد.

**تابع بازیکن:** به هر زیر تاریخچه سره $h'$ از یک تاریخچه نهائی، بازیکن $P(h,h')$ نظیر می‌شود.

**ارجحیتها:** هر بازیکن، $h'$ را به $h''$ ترجیح می‌دهد اگر و فقط اگر $(h,h')$ را به$(h,h'')$ در $\Gamma$ ترجیح دهد.

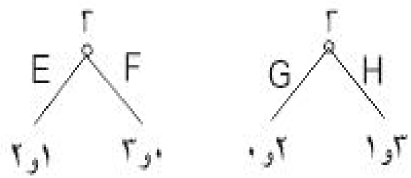
- هر زیر بازی که در آن $h \neq \emptyset$ باشد را یک "زیر بازی سره" گوئیم.
- تعداد زیر بازیها، برابر با تعداد تاریخچه‌های غیرنهائی است.

**مثال:** بازی توسعه‌یافته زیر را در نظر بگیرید

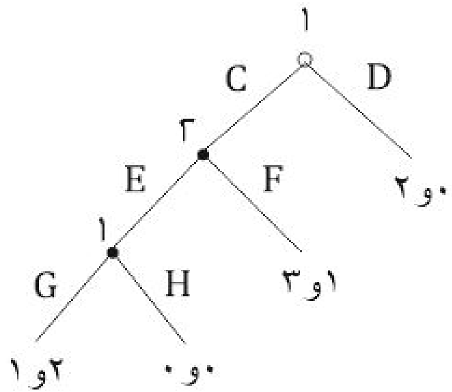



این بازی دارای سه تاریخچه غیرنهائی و در نتیجه سه زیر بازی است:

همه بازی و بازیهای بعد از تاریخچه $C$ و $D$.

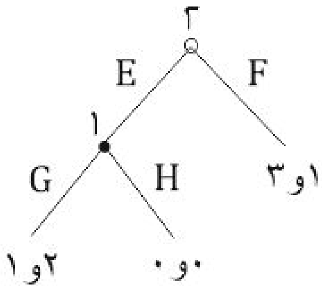


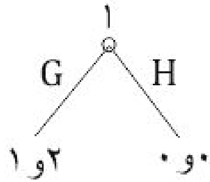
**مثال:** بازی زیر را در نظر بگیرید




این بازی دارای سه تاریخچه غیرنهائی و در نتیجه سه زیر بازی است:

همه بازی و دو زیربازی که بعد از تاریخچه‌های $C$ و $(C, E)$ ظاهر می‌شوند.



## خروجی در یک زیربازی

فرض کنید $h$ یک تاریخچه و $s$ یک بردار از استراتژیها باشد. فرض کنید $h$ رخ دهد (حتی اگر لزوماً با $s$ سازگار نباشد)، و "بعد از آن"، بازیکنان از بردار استراتژی $s$ تبعیت کنند. تاریخچه نهائی حاصل (شامل $h$ و خروجی تولید شده توسط $s$ در زیر بازی‌ای که بعد از $h$ ظاهر می‌شود) را با $O_h(s)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که برای هر بردار از استراتژی داریم $O_\emptyset(s) = O(s)$.

### تعریف (تعادل کامل زیربازی بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل)

بردار استراتژی $s^*$ در یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل را یک "تعادل کامل زیر بازی" *subgame perfect equilibrium* گوئیم هرگاه، برای هر بازیکن $i$ و هر تاریخچه $h$ که بعد از آن، بازیکن $i$ باید حرکت کند داشته باشیم

$$u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s^*_{-i}))$$

برای هر استراتژی $r_i$ بازیکن $i$–ام.

که در آن $u_i$، تابع سودی است که ارجحیتهای بازیکن $i$–ام را نمایش می‌دهد و $O_h(s)$ تاریخچه نهائی است که شامل $h$ و دنباله‌ای از عملهاست که توسط $s$ بعد از $h$ تولید می‌شود.

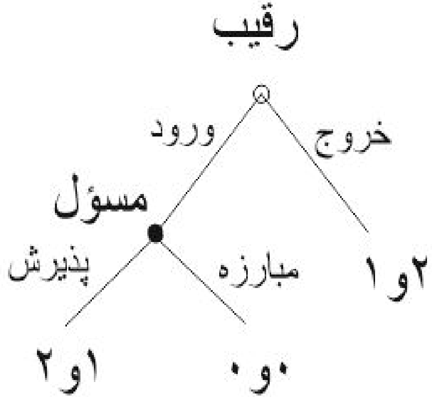
- هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است.

- یک تعادل کامل زیربازی، برداری از استراتژیهاست که در هر زیربازی یک تعادل نش است.

- در یک تعادل نش، استراتژی هر بازیکن، با این فرض که استراتژیهای بقیه بازیکنان در کل بازی داده شده باشند، بهینه است. چنین تعادلی گرچه در برخی زیربازیها بهینه نیست ولی در هر زیربازی که با اجرای استراتژیهای بازیکنان بدست می‌آید بهینه است.

**مثال**

بازی رقیب را در نظر بگیرید

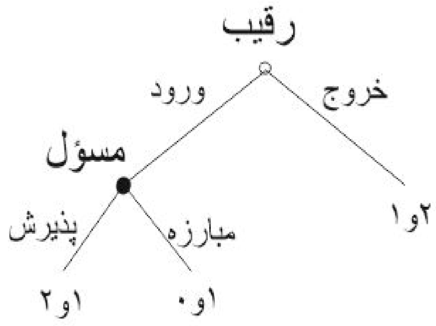



این بازی دارای دو تعادل نش است: (تسلیم ، ورود ) و (مبارزه ، خروج).

ولی زوج ( مبارزه ، خروج ) یک تعادل کامل زیربازی نیست در حالیکه (تسلیم ، ورود) یک تعادل کامل زیربازی است.

## مثال

بازی زیر را در نظر بگیرید




در این بازی، اگر رقیب وارد شود، مسؤل بین مبارزه و تسلیم بی‌تفاوت است.

این بازی دارای دو تعادل نش است یعنی

(مبارزه ، خروج)   و   (تسلیم ، ورود)

که "هردو" تعادل کامل زیربازی نیز می‌باشند.

## استقراء معکوس

### روش بدست آوردن تعادلهای کامل زیربازی بازیهای با افق متناهی

**تعریف**

منظور از "طول یک زیربازی" طول بزرگترین تاریخچه در آن زیربازی است.

**استقراء معکوس**

۱. برای هر زیربازی با طول ۱ ، مجموعه عملهای بهینه بازیکنی که اول حرکت می‌کند را بدست آورید. این زیربازیها را با $j$، اندیس‌گذاری کنید و مجموعه عملهای بهینه در زیربازی $j$ را با $s_j^*(۱)$ نشان دهید.

۲. برای هر ترکیب از عملها، متشکل از یک عمل از هر مجموعه $s_j^*(۱)$ و برای هر زیربازی با طول ۲، مجموعه عملهای بهینه بازیکنی که اول حرکت می‌کند را بدست آورید. به این ترتیب، مجموعه‌ای از بردارهای استراتژی برای هر زیربازی با طول ۲ بدست می‌آید. مجموعه بردارهای استراتژی در زیربازی $l$ را با $s_l^*(۲)$ نشان دهید.

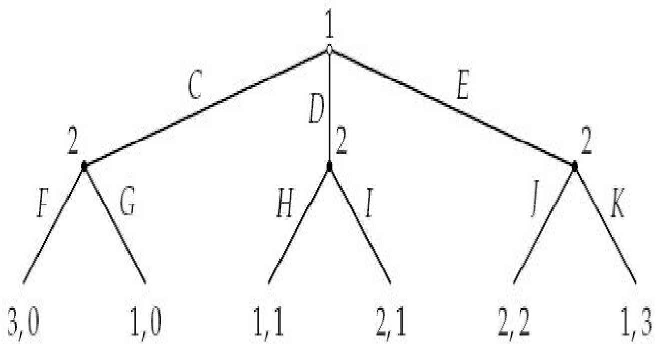
۳. زیربازیهای طولانی‌تر را بطور متوالی بررسی کنید تا به شروع بازی برسید. در هر مرحله مانند $k$ و برای هر ترکیب از بردارهای استراتژی متشکل از یک عمل از هر مجموعه $s_j^*(k-۱)$ که در مرحله قبل ساخته شد، برای هر زیربازی با طول $k$، مجموعه عملهای بهینه بازیکنی که اول حرکت می‌کند را بدست آورید، و بنابراین یک مجموعه از بردارهای استراتژی برای هر زیر بازی با طول $k$ بدست آورید.

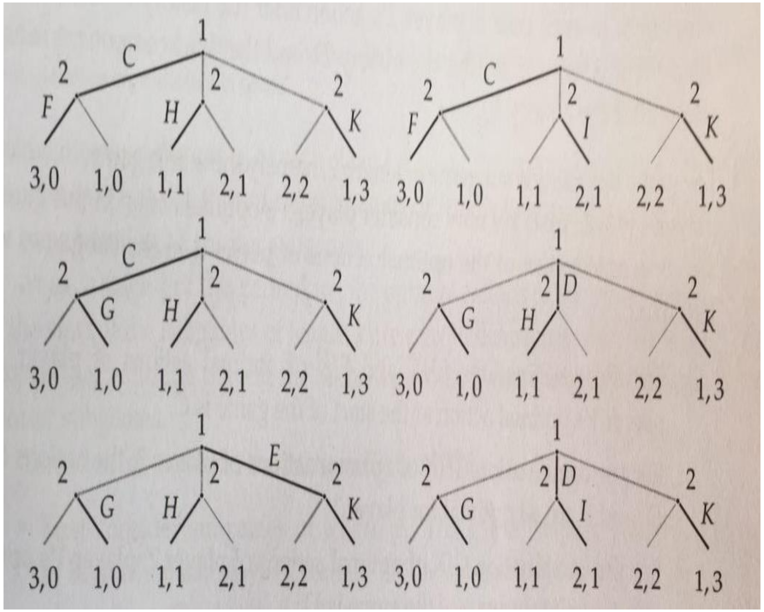
مجموعه بردارهای استراتژی که با این فرآیند برای همه بازی بدست می‌آیند، مجموعه تعادلهای کامل زیربازی این بازی‌اند.

## گزاره (تعادل کامل زیربازی بازیهای با افق متناهی و استقراء معکوس)

مجموعه تعادلهای کامل زیربازی یک بازی توسعه یافته با افق متناهی و با اطلاعات کامل، برابر است با مجموعه بردارهای استراتژی بدست آمده با روش استقراء معکوس.

**مثال:** بازی زیر را در نظر بگیرید.




1
C
2
2
2
F
H
K
3,0
1,0
1,1
2,1
2,2
1,3
1
C
2
2
2
F
I
K
3,0
1,0
1,1
2,1
2,2
1,3
1
C
2
2
2
G
H
K
3,0
1,0
1,1
2,1
2,2
1,3
1
2
2 D
2
G
H
K
3,0
1,0
1,1
2,1
2,2
1,3
1
E
2
2
2
G
H
K
3,0
1,0
1,1
2,1
2,2
1,3
1
2
2 D
2
G
I
K
3,0
1,0
1,1
2,1
2,2
1,3

## گزاره (وجود تعادل کامل زیربازی)

هر بازی توسعه یافته متناهی با اطلاعات کامل دارای یک تعادل کامل زیربازی است.

- توجه کنید که گزاره فوق، ادعا نمی‌کند که این تعادل کامل زیربازی، یگانه است.
- یک بازی با افق متناهی که در آن یک بازیکن دارای تعدادی متناهی عمل بعد از یک تاریخچه نیست، ممکنست دارای یک تعادل کامل زیربازی باشد یا نباشد.

به عنوان مثال، بازی‌ای را درنظر بگیرید که در آن یک بازیکن تنها، یک عدد کمتر از یک انتخاب می‌کند و سودی معادل عدد انتخاب شده دریافت می‌کند. چون بزرگترین عدد "کمتر از یک" وجود ندارد، بنابراین، تنها بازیکن دارای یک عمل بهینه نیست و در نتیجه این بازی دارای هیچ تعادل کامل زیربازی نیست.

## بازی اولتیماتوم *The ultimatum game*

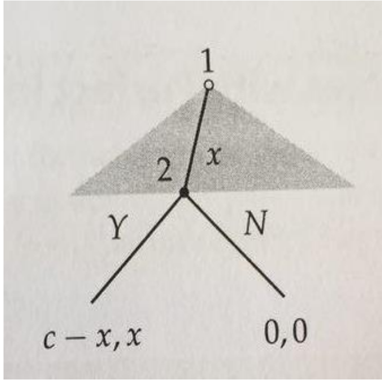
دو نفر از روش زیر برای تقسیم $c$ واحد پول استفاده می‌کنند. نفر اول مبلغی را به نفر دوم پیشنهاد می‌کند که حداکثر برابر $c$ است اگر نفر دوم این پیشنهاد را بپذیرد در اینصورت نفر اول باقیمانده $c$ را بدست می‌آورد. اگر ۲ رد کند دراینصورت "هیچکدام" هیچ پولی بدست نمی‌آورد. فرض کنید مبلغ پیشنهادی یک کمیت پیوسته باشد. فرآیند فوق را میتوان بصورت زیر به عنوان یک بازی توسعه‌یافته مدل کرد که به عنوان بازی اولتیماتوم شناخته می‌شود.

**بازیکنان:** دو نفر

**تاریخچه‌های نهائی:** مجموعه دنباله‌های $(x, Z)$، که در آن $x$ عددی با ویژگی $۰ \leq x \leq c$ است (مبلغی که فرد ۱ به ۲ پیشنهاد می‌کند) و $Z$، یا $Y$ (پذیرش) است یا $N$ (امتناع).

**تابع بازیکن:** برای هر $x$ $\quad P(x) = ۲$ و $\quad P(\emptyset) = ۱$

**ارجحیتها:** ارجحیتهای هر فرد توسط سودی که مساوی مبلغی است که دریافت می‌کند نمایش داده می‌شود. برای تاریخچه نهائی $(x, Y)$، فرد اول $c - x$ و فرد ۲، $x$ را دریافت می‌کند. برای تاریخچه نهائی $(x, N)$ هر فرد ۰ دریافت می‌کند.



## تعادل(های) کامل زیربازی بازی اولتیماتوم

این بازی دارای افق متناهی است بنابراین می‌توان از استقراء معکوس برای یافتن تعادلهای کامل زیربازی استفاده کرد.

زیربازیهای با طول ۱ را در نظر بگیرید که در آنها بازیکن ۲، یک پیشنهاد ۱ را یا می‌پذیرد یا رد می‌کند. برای هر پیشنهاد ممکن بازیکن ۱، یک چنین زیربازی وجود دارد. در یک زیربازی که بعد از پیشنهاد $x$ برای $x > 0$ توسط فرد ۱ ظاهر می‌شود عمل بهینه بازیکن ۲ اینست که بپذیرد. در آن زیربازی که بعد از $x = 0$ ظاهر می‌شود فرد ۲ بین پذیرش و امتناع بی‌تفاوت است. بنابراین در یک تعادل کامل زیربازی، استراتژی فرد ۲ اینست که یا همه پیشنهادها را بپذیرد (شامل ۰)، یا همه پیشنهادهای $x > 0$ را بپذیرد و پیشنهاد $x = 0$ را رد کند.

حال کل بازی را در نظر بگیرید. برای هر استراتژی تعادل کامل زیربازی ممکن بازیکن ۲، لازم است استراتژی بهینه بازیکن ۱ را بدست آوریم.

- اگر بازیکن ۲ همه پیشنهادها (شامل ۰) را بپذیرد، در اینصورت پیشنهاد بهینه فرد ۱ عبارتست از ۰ (که سود $c$ را نصیب او می‌کند).

- اگر فرد ۲ همه پیشنهادها بجز صفر را بپذیرد، در اینصورت "هیچ" پیشنهادی توسط فرد ۱ بهینه نیست!

در نتیجه تنها تعادل کامل زیربازی این بازی یک زوج استراتژی است که در آن فرد ۱ پیشنهاد ۰ را می‌کند و بازیکن ۲ همه پیشنهادها را می‌پذیرد. در این تعادل، سود بازیکن ۱ برابر $c$ و سود دومی صفر است.

## بازی اثرگذاری *The holdup game*

فرد ۲، قبل از ورود به بازی اولتیماتوم، که در آن ممکنست پیشنهاد فرد ۱ را بپذیرد یا رد کند، عملی را اتخاذ می‌کند که بر اندازه کیکی که باید تقسیم شود اثر می‌گذارد. او ممکنست تلاش کمی بکند و در نتیجه یک کیک کوچک با اندازه $C_L$ بدست آید یا تلاش زیادی بکند و منجر به یک کیک بزرگ با اندازه $C_H$ بشود. او تمایلی به این تلاش ندارد. بطور مشخص فرض کنید اگر سهمش از کیک $x$ باشد سودش $x - E$ است، که در آن $E = L$ هرگاه تلاش کمی بکند و $E = H > L$ اگر تلاش زیادی بکند. بازی توسعه‌یافته‌ای که این وضعیت را مدل می‌کند "بازی اثرگذاری" *holdup game* نام دارد که بصورت زیر است

**بازیکنان:** فرد ۱ و ۲

**تاریخچه‌های نهائی:** مجموعه همه دنباله‌های $(Z, x,$ کم$)$ که در آن $x$ عددی است که $0 \leq x \leq C_L$ (مبلغی که فرد ۱ به ۲ پیشنهاد می‌کند وقتیکه کیک کوچک است). و مجموعه دنباله‌های $(Z, x,$ زیاد$)$ که در آن $x$ عددی است که $0 \leq x \leq C_H$ (مبلغی که فرد ۱ به ۲ پیشنهاد می‌کند وقتیکه کیک بزرگ است.) و $Z$، یا $Y$ (پذیرش) است یا $N$ (رد کردن).

**تابع بازیکن:**

$$P(\emptyset) = ۲ \quad , \quad P(\text{کم}) = P(\text{زیاد}) = ۱,$$

$$P(\text{کم}, x) = P(\text{زیاد}, x) = ۲ \qquad \forall x$$

**ارجحیتها:**

ارجحیتهای بازیکن ۱ توسط پولی که دریافت می‌کند نمایش داده می‌شوند که برای هر تاریخچه نهائی (کم، $x$، $Y$) با $۰ \leq x \leq C_L$، برابر با $C_L - x$ است و برای هر تاریخچه نهائی (زیاد، $x$، $Y$) با $۰ \leq x \leq C_H$، برابر با $C_H - x$، و برای هر تاریخچه نهائی (کم، $x$، $N$) با $۰ \leq x \leq C_L$ و هر تاریخچه نهائی (زیاد، $x$، $N$) با $۰ \leq x \leq C_H$، برابر ۰ است.

ارجحیتهای بازیکن ۲ توسط سودهائی معادل $L - x$ برای تاریخچه نهائی (کم، $x$، $Y$)، $H - x$ برای تاریخچه نهائی (زیاد، $x$، $Y$)، $-L$ برای تاریخچه نهائی (کم، $x$، $N$) و $-H$ برای تاریخچه نهائی (زیاد، $x$، $N$) نمایش داده می‌شود.

## تعادل (های) کامل زیربازی بازی اثرگذار

هر زیربازی که بعد از انتخاب میزان تلاش بازیکن ۲ ظاهر می‌شود یک بازی اولتیماتوم است و بنابراین دارای یک تعادل کامل زیربازی یگانه است که در آن، فرد ۱ پیشنهاد ۰ را می‌کند و فرد ۲ همه پیشنهادها را می‌پذیرد. حال فرض کنید انتخاب میزان تلاش بازیکن ۲ در شروع بازی $L$ باشد در اینصورت سود او، با توجه به خروجی زیربازی ظاهر شده بعد از آن، برابر $-L$ است، در حالیکه اگر $H$ را انتخاب کند سودش $-H$ می‌شود. در نتیجه $L$ را انتخاب می‌کند. بنابراین این بازی دارای یک تعادل کامل زیربازی یگانه است، که در آن بازیکن ۲، تلاش کمی را اعمال می‌کند و بازیکن ۱ همه کیک کوچک حاصل را بدست می‌آورد.

## بازی کنترل دستور جلسه *Agenda Control game*

در برخی مجالس قانونگذاری، طرحهائی که برای اصلاح قوانین پیشنهاد می‌شوند توسط کمیته‌هائی تنظیم می‌شوند. تحت یک "قانون بسته" *closed rule*، مجلس ممکنست اصلاح پیشنهادی را بپذیرد یا رد کند اما نمی‌تواند یک جایگزین پیشنهاد کند و درصورتیکه نپذیرد، قانون موجود تغییر نمی‌کند. یعنی کمیته "دستور جلسه" *agenda* را کنترل می‌کند.

یک خروجی را به عنوان یک عدد $y$ مدل کنید. فرض کنید مجلس و کمیته دارای خروجیهای مطلوب‌اند که ممکنست با هم متفاوت باشند و ارجحیتهای هر کدام توسط یک تابع سود $single-peaked$ نمایش داده می‌شود که نسبت به خروجی مطلوب، متقارن است (مشابه ارجحیتهای رأی‌دهندگان در مدل هتلینگ رقابتهای انتخاباتی). عددهائی به خروجیها نظیر کنید بطوریکه خروجی مطلوب مجلس صفر باشد، خروجی مطلوب کمیته را با $y_c > ۰$ نشان دهید. در اینصورت، گونه زیر از بازی اولتیماتوم، فرآیند فوق را مدل می‌کند.

بازیکنان عبارتند از: کمیته و مجلس

کمیته یک خروجی $y$ پیشنهاد می‌کند که مجلس یا می‌پذیرد یا رد می‌کند. درصورتیکه رد کند خروجی $y_0$ است، "وضع موجود" $status\ quo$. توجه کنید آن جنبه اصلی که این بازی را با بازی اولتیماتوم متفاوت می‌کند اینست که ارجحیتهای بازیکنان، بطور قطری فقط با توجه به خروجیهای بین ۰ و $y_c$؛ با هم مغایرند. اگر $0 < y'' < y'$ یا $y' < y'' < y_c$ ، در اینصورت هر دو بازیکن $y''$ را به $y'$ ترجیح می‌دهند.

## مدل انحصار دو جانبه استکلبرگ

دو بنگاه، کالای یکسانی را تولید می‌کنند و تصمیمات خود در مورد مقدار تولید را بطور متوالی (نه همزمان) اتخاذ می‌کنند یعنی هر بنگاه پس از مشاهده تصمیم رقیب، تصمیم‌گیری می‌کند.

$C_i(q_i)$: هزینه تولید $q_i$ واحد کالا توسط بنگاه $i$–ام

$P_d(Q)$: قیمت محصول هنگامیکه کل محصول برابر $Q$ باشد.

<u>بازی انحصار دوجانبه استکلبرگ</u>

**بازیکنان:** دو بنگاه

**تاریخچه‌های نهائی:** مجموعه همه دنباله‌های $(q_۱, q_۲)$ از محصول بنگاهها ($q_i$ یک عدد غیر منفی است)

**تابع بازیکن:** $\forall q_۱ \qquad P(q_۱) = ۲ \quad , \quad P(\emptyset) = ۱$

**ارجحیتها:** سود بنگاه $i$–ام متناظر با تاریخچه نهائی $(q_۱, q_۲)$ عبارتست از سود او یعنی

$$q_i P_d(q_۱ + q_۲) - C_i(q_i) \qquad i = ۱, ۲$$

بازی با انتخاب میزانی از تولید توسط بنگاه اول شروع شده و سپس بنگاه دوم، میزان محصول تولیدی خود را تعیین می‌کند.

## تعادلهای کامل زیربازی بازی فوق

چون بازی دارای افق متناهی است، می‌توان با استفاده از روش استقراء معکوس همه تعادلهای کامل زیربازی را بدست آورد.

- برای هر میزان محصول تولیدی بنگاه اول، بنگاه دوم، میزان محصول خود را بگونه‌ای تعیین می‌کند که سود خود را ماکزیمم کند. فرض کنید که برای هر میزان محصول $q_1$، یک جواب یگانه برای بنگاه دوم وجود داشته باشد که آنرا با $b_2(q_1)$ نشان می‌دهیم.
- سپس با این فرض که " استراتژی بازیکن دوم داده شده است" میزان تولید بنگاه اول را بگونه‌ای تعیین می‌کنیم که سود او را ماکزیمم کند. لذا هنگامیکه بنگاه اول میزان تولید $q_1$ را انتخاب می‌کند، بنگاه دوم باندازه $b_2(q_1)$ تولید می‌کند و در نتیجه کل تولید برابر با $q_1+b_2(q_1)$ و قیمت هر واحد آن $P_d(q_1+b_2(q_1))$ است. بنابراین بنگاه اول، $q_1$ را بگونه‌ای انتخاب می‌کند که عبارت زیر ماکزیمم شود.

$$q_1 P_d(q_1+b_2(q_1)) - C_1(q_1).$$

فرض کنید یک جواب یگانه برای $q_1$ وجود داشته باشد که آنرا با $q_1^*$ نشان می‌دهیم. در نتیجه اگر بنگاه دوم دارای یک بهترین پاسخ یگانه مانند $b_2(q_1)$ نسبت به هر $q_1$ باشد و بنگاه اول دارای یک بهترین عمل یگانه مانند $q_1^*$ باشد با این فرض که بهترین پاسخ بنگاه دوم داده شده باشد در اینصورت تعادل کامل زیربازی این بازی عبارتست از $(q_1^*, b_2)$.

**مثال:** هزینه تولید ثابت و تقاضای معکوس خطی

فرض کنید $C_i(q_i) = cq_i$ برای $i = 1, 2$

$$P_d(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{اگر } Q \leq \alpha, \\ 0 & \text{اگر } Q > \alpha \end{cases}$$

که در آن $c > 0$ و $c < \alpha$ (مشابه بازی انحصار دوجانبه کورنات).

بنگاه دوم، متناظر با هر $q_1$، دارای یک بهترین پاسخ یگانه بصورت زیر است

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1) & \text{اگر } q_1 \leq \alpha - c, \\ 0 & \text{اگر } q_1 > \alpha - c \end{cases}$$

و استراتژی $q_1$ بنگاه اول باید عبارت زیر را ماکزیمم کند

$$q_1(\alpha - c - (q_1 + \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1))) = \frac{1}{2}q_1(\alpha - c - q_1)$$

که عبارتست از $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$.

در نتیجه این بازی دارای یک تعادل کامل زیربازی یگانه است که در آن استراتژی بنگاه اول عبارتست از $\frac{1}{2}(\alpha - c)$ و استراتژی بنگاه دوم برابر است با $b_2$.

پس خروجی تعادلی بنگاه اول و دوم به ترتیب عبارتست از $q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c)$ و

$q_2^* = b_2(q_1^*) = b_2(\frac{1}{2}(\alpha - c)) = \frac{1}{2}(\alpha - c - \frac{1}{2}(\alpha - c)) = \frac{1}{4}(\alpha - c)$.

و سود بنگاه اول $\qquad q_1^*(P_d(q_1^* + q_2^*) - c) = \frac{1}{8}(\alpha - c)^2$

وسود بنگاه دوم $\qquad q_2^*(P_d(q_1^* + q_2^*) - c) = \frac{1}{16}(\alpha - c)^2$

توجه کنید که

در تعادل نش یگانه کورنات (حرکات همزمان) تحت همین شرایط، هر بنگاه به تعداد $\frac{1}{3}(\alpha - c)$ کالا تولید می‌کرد و سود $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2$ را بدست می‌آورد.

## خرید رأی

- یک مجلس قانونگذاری دارای $k$ عضو است که $k$ عددی فرد است.
- دو لایحه $X$ و $Y$ در دستور جلسه قرار گرفته‌اند. هر لایحه که آراء بیشتری جلب کند تصویب خواهد شد.
- گروه علاقمند به لایحه $X$از $X$ و گروه علاقمند به لایحه $Y$ از $Y$ طرفداری می‌کنند و هر گروه تلاش می‌کند تا رأی اکثریت نمایندگان را جلب کند.
- ابتدا گروه علاقمند به $X$، مبلغی (شاید صفر) را به هر نماینده می‌دهد، سپس گروه علاقمند به $Y$ همین کار را انجام می‌دهد.
- هر گروه مایل است حتی‌المقدور کمتر هزینه کند.

- گروه $X$، تصویب لایحه $X$ را $V_X > 0$ و تصویب لایحه $Y$ را صفر ارزش‌گذاری می‌کند. همچنین گروه $Y$، تصویب لایحه $Y$ را $V_Y > 0$ و تصویب لایحه $X$ را صفر ارزش‌گذاری می‌کند. ( به عنوان مثال، گروه $X$ بین خروجی تصویب $X$ با هزینه $V_X$ و خروجی تصویب $Y$ بدون صرف هزینه بی‌تفاوت است.)
- هر نماینده به لایحه‌ای رأی می‌دهد که طرفداران آن لایحه پول بیشتری به او داده باشند. نماینده‌ای که دو گروه رقیب پول یکسانی به او پیشنهاد بدهند به $Y$ رأی می‌دهد. (این فرض برای سادگی است و بطور کیفی نتایج را تغییر نمی‌دهد)

به عنوان مثال، اگر $k = 3$ و مبلغ پیشنهادی طرفداران $X$ و $Y$ به ترتیب $x = (100, 50, 0)$ و $y = (100, 0, 50)$ باشد دراینصورت نمایندگان ۱ و ۳ به $Y$ و نماینده ۲ به $X$ رأی می‌دهند و درنتیجه $Y$ تصویب می‌شود.

(در برخی مجالس، پیشنهاد به نمایندگان بطور نامحسوس‌تری انجام می‌شود تا انتقال پول نقد.)

## بازی خرید رأی

وضعیت خرید رأی را می‌توان بصورت یک بازی توسعه‌یافته مدل کرد

بازیکنان: دو گروه طرفدار $X$ و $Y$

تاریخچه نهائی: مجموعه همه دنباله‌های $(x, y)$، که در آن $x$ ( به ترتیب $y$)، لیستی از پرداختهای به نمایندگان توسط گروه طرفدار $X$ ( به ترتیب $Y$) اند.

(هر کدام از $x$ و $y$، لیستی از $k$ عدد غیر منفی است)

تابع بازیکنان: $\forall x \qquad P(x) = Y \quad , P(\emptyset) = X$

ارجحیتها: ارجحیتهای گروه طرفدار $X$ توسط تابع سود زیر نمایش داده می‌شوند

$$\begin{cases} V_X - (x_۱ + \ldots + x_k) & \text{اگر } X \text{ تصویب شود,} \\ -(x_۱ + \ldots + x_k) & \text{اگر } Y \text{ تصویب شود} \end{cases}$$

که در آن $Y$ بعد از تاریخچه نهائی $(x, y)$ تصویب می‌شود اگر و فقط اگر تعداد مؤلفه‌های $y$ که حداقل مساوی مؤلفه‌های نظیر $x$اند حداقل $\frac{۱}{۲}(k + ۱)$ باشند (یک اکثریت مطلق از $k$ نماینده).

ارجحیتهای گروه طرفدار $Y$ با تابع مشابهی نمایش داده می‌شوند ( که در آن $V_Y$ با $V_X$، $y$ با $x$ و $Y$ با $X$ جایگزین می‌شوند).

## مثال ۱

$$k = ۳ \quad , \quad V_X = V_Y = ۳۰۰$$

با فرضهای فوق حداکثر پرداختی که گروه $X$ مایل است برای تصویب لایحه $X$ پرداخت کند ۳۰۰ است. برای هر پرداختی طرفداران $X$ به سه نماینده که مجموع آنها حداکثر ۳۰۰ و پرداختی به دو نماینده حداکثر ۲۰۰ شود، اگر گروه $Y$، همان پرداختی به دو نفر را داشته باشد هم کمتر از $V_Y = ۳۰۰$ هزینه کرده است و هم $Y$ تصویب شده است.

بنابراین در هر تعادل کامل زیربازی نه $X$ و نه $Y$ هیچ پرداختی نخواهند داشت و لایحه $Y$ تصویب می‌شود.

## مثال ۲

$$k = ۳ \quad , \quad V_X = ۳۰۰ \quad , \quad V_Y = ۱۰۰$$

در این حالت گروه $X$، با پرداخت بیش از ۵۰ به هر نماینده، می‌تواند تطبیق پرداخت با گروه $Y$ را انجام دهد ولی بی‌ثمر است: گروه $Y$ فقط با صرف بیش از $V_Y = ۱۰۰$ می‌تواند $Y$ را به تصویب برساند. گرچه هیچ تعادل کامل زیربازی وجود ندارد که در آن گروه $X$ به هر نماینده بیش از ۵۰ پرداخت کند زیرا همواره می‌تواند کمی کمتر پرداخت کند (تا زمانیکه همچنان بیش از ۵۰ باقی بماند) و همچنان از دستیابی سودمندانه گروه $Y$ جلوگیری کند.

در تنها تعادل کامل زیربازی، گروه $X$ به هر نماینده دقیقاً ۵۰ پرداخت می‌کند و گروه $Y$ هیچ پرداختی ندارد.

با عمل داده شده گروه $X$، گروه $Y$ بین تطبیق پرداختهای $X$ (بطوریکه $Y$ تصویب شود) و عدم پرداخت بی‌تفاوت است. گرچه هیچ تعادل کامل زیربازی وجود ندارد که در آن گروه $Y$ پرداختهای گروه $X$ را برآورده کند چون اگر این پاسخ گروه $Y$ باشد، در اینصورت گروه $X$ می‌تواند پرداختهایش را کمی افزایش دهد، و تطبیق پرداخت با گروه $Y$ را بطور بی‌ثمری انجام دهد.

تذکر

برای مقادیر دلخواه پارامترها، خروجی تعادل کامل زیربازی، بصورت یکی از مثالهای فوق است:

- یا هیچ پرداختی صورت نمی‌گیرد و لایحه $Y$ تصویب می‌شود.
- یا گروه $X$ پرداختهائی دارد که گروه $Y$ نمی‌تواند برآورده کند، گروه $Y$ هیچ پرداختی ندارد و لایحه $X$ تصویب می‌شود.

## تعادلهای کامل زیربازی بازی خرید رأی

با استفاده از استقراء معکوس می‌توان این تعادلها را بدست آورد. ابتدا بهترین پاسخ گروه $Y$ به یک استراتژی دلخواه $x$ از گروه $X$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $\mu = \frac{۱}{۲}(k+۱)$، یک اکثریت مطلق $k$ نماینده، و $m_x$، مجموع کوچکترین مؤلفه‌های $\mu$ از $x$ ( کل پرداخت مورد نیاز برای خرید یک اکثریت مطلق از نمایندگان) باشد.

- اگر $m_x < V_Y$، دراینصورت گروه $Y$ می‌تواند یک اکثریت مطلق از نمایندگان را با کمتر از $V_Y$ خریداری کند، بنابراین بهترین پاسخ به $x$ اینست که پرداختهای گروه $X$ به نمایندگان $\mu$، که پرداختهای گروه $X$ به آنها کوچکترین هستند را برآورده کند خروجی عبارتست از تصویب $Y$.
- اگر $m_x > V_Y$، دراینصورت هزینه گروه $Y$ بمنظور خرید هر اکثریتی از نمایندگان از $V_Y$ بیشتر می‌شود، بنابراین بهترین پاسخ گروه $Y$ به $x$ اینست که هیچ پرداختی انجام ندهد. خروجی عبارتست از تصویب $X$.
- اگر $m_x = V_Y$، در اینصورت هر دو عمل در دو بند قبلی بهترین پاسخهای گروه $Y$به $x$ اند.

در نتیجه، استراتژی گروه $Y$ در یک تعادل کامل زیربازی دارای ویژگیهای زیرند:

- بعد از یک تاریخچه $x$ که برای آن $m_x < V_Y$ باشد، گروه $Y$، پرداختهای گروه $X$ به $\mu$ نماینده را که پرداختهای $X$ به آنها کوچکترین هستند را برآورده می‌کند.
- بعد از یک تاریخچه $x$ که برای آن $m_x > V_Y$ باشد، گروه $Y$ هیچ پرداختی ندارد.
- بعد از یک تاریخچه $x$ که برای آن $m_x = V_Y$ باشد، گروه $Y$ یا هیچ پرداختی ندارد یا پرداختهای گروه $X$ به $\mu$ نماینده را که پرداختهای $X$ به آنها کوچکترین هستند را برآورده می‌کند.

## گروه $X$ چگونه باید عمل کنند؟

با توجه به اینکه استراتژی تعادل کامل زیربازی گروه $Y$ دارای ویژگیهای فوق‌اند، گروه $X$ چگونه باید عمل کند؟

ـ اگر لیستی از پرداختها مانند $x$ انتخاب کند بطوریکه $m_x < V_Y$، در اینصورت گروه $Y$ پرداختهایش را به یک اکثریت مطلقی از نمایندگان تطبیق داده و $Y$ تصویب می‌شود. اگر همه پرداختهایش را او کاهش دهد، همان لایحه تصویب می‌شود بنابراین تنها لیست از پرداختهای $x$ با $m_x < V_Y$ که می‌تواند بهینه باشد $(0, ..., 0)$ است.

ـ اگر لیستی از پرداختها مانند $x$ انتخاب کند بطوریکه $m_x > V_Y$، در اینصورت گروه $Y$ هیچ پرداختی انجام نمی‌دهد و $X$ تصویب می‌شود. اگر او همه پرداختهایش را کمی کاهش دهد ( پرداختهای به هر اکثریت مطلق بزرگتر از $V_Y$ را حفظ کند)، خروجی تغییر نمی‌کند. بنابراین هیچ لیستی از پرداختهای $x$ که برای آن $m_x > V_Y$ باشد بهینه نیست.

در نتیجه در هر تعادل کامل زیربازی داریم یا $x = (0, ..., 0)$ (گروه $X$ هیچ پرداختی نمی‌کند) یا $m_x = V_Y$ (مجموع کوچکترین پرداختهای گروه $X$ به اکثریت مطلقی از نمایندگان عبارتست از $V_Y$).

## تحت چه شرایطی هر کدام از این حالتها رخ می‌دهند؟

اگر گروه $X$ برای جلوگیری از اینکه گروه $Y$ به اکثریت مطلقی از نمایندگان، پرداختهایش را تطبیق دهد لازمست بیش از $V_X$ هزینه کند، دراینصورت بهترین استراتژی اینست که هیچ پرداختی نداشته باشد $(x = (0, 0, ..., 0))$

چه مقدار باید برای جلوگیری از گروه $Y$ هزینه کرد؟

لازمست به هر اکثریت مطلقی از نمایندگان بیش از $V_Y$ پرداخت نماید، بنابراین لازمست به هر نماینده بیش از $\frac{V_Y}{\mu}$ پرداخت نماید، که در این حالت کل پرداختهایش بیش از $k\frac{V_Y}{\mu}$ است.

بنابراین اگر $V_X < k\frac{V_Y}{\mu}$ باشد دراینصورت گروه $X$ با عدم پرداخت وضعش بهتر می‌شود تا اینکه به تصویب $X$ برسد به این قیمت که پرداختهای بزرگ کافی داشته باشد تا جلوگیری کند از اینکه گروه $Y$ پرداختی به اکثریت مطلقی از نمایندگان را برآورده سازد.

اگر، $V_X > k\frac{V_Y}{\mu}$ باشد، در اینصورت گروه $X$ این توانائی را دارد که پرداختهای بقدر کافی بزرگ داشته باشد تا از اقدام گروه $Y$ جلوگیری کند. در این حالت، بهترین استراتژیش اینست که به هر نماینده $\frac{V_Y}{\mu}$ پرداخت نماید، بطوریکه کل پرداختش به هر اکثریت مطلقی از نمایندگان عبارتست از $V_Y$. با این استراتژی داده شده، گروه $Y$ بین برآورده کردن پرداختهای گروه $X$ به اکثریت مطلقی از نمایندگان، و عدم پرداخت بی‌تفاوت است.

**ادعا:** این بازی دارای هیچ تعادل کامل زیربازی نیست که در آن گروه $Y$ پرداخت به نمایندگان را برآورده سازد.

فرض کنید گروه $Y$ پرداختهائی را برآورده سازد. دراینصورت گروه $X$ می‌تواند سودش را با کمی افزایش پرداختهایش ( با حفظ کل پرداخت کمتر از $V_X$) افزایش دهد و در نتیجه از برآورده ساختن گروه $Y$ جلوگیری کند و مطمئن باشد که $X$ تصویب می‌شود.

بنابراین در هر تعادل کامل زیربازی، گروه $Y$ هیچ پرداختی در پاسخ به استراتژی گروه $X$ انجام نمی‌دهد.

در نتیجه، اگر $V_X \neq k\dfrac{V_Y}{\mu}$، در اینصورت بازی دارای یک تعادل کامل زیربازی است که در آن استراتژی گروه $Y$ عبارتست از

- برآورده ساختن پرداختهای گروه $X$ به $\mu$ نماینده که پرداختهای $X$ به آنها، بعد از یک تاریخچه $x$ که برای آن $m_x < V_Y$ است، کوچکترین‌اند، و
- هیچ پرداختی بعد از یک تاریخچه $x$ که برای آن $m_x \geq V_Y$ است انجام نمی‌دهد.

و استراتژی گروه $X$، به اندازه نسبی $V_X$ و $V_Y$ بستگی دارد:

- اگر $V_X < k\dfrac{V_Y}{\mu}$، دراینصورت گروه $X$ هیچ پرداختی انجام نمی‌دهد؛
- اگر $V_X > k\dfrac{V_Y}{\mu}$، در اینصورت گروه $X$ به هر نماینده $\dfrac{V_Y}{\mu}$ پرداخت می‌کند.

اگر $V_X < k\dfrac{V_Y}{\mu}$، دراینصورت خروجی اینست که هیچ گروهی پرداختی نمی‌کند و $Y$ تصویب می‌شود؛ اگر $V_X > k\dfrac{V_Y}{\mu}$، دراینصورت خروجی اینست که گروه $X$ به هر نماینده $\dfrac{V_Y}{\mu}$ پرداخت می‌کند و گروه $Y$ هیچ پرداختی انجام نمی‌دهد، و لایحه $X$ تصویب می‌شود. (اگر $V_X = k\dfrac{V_Y}{\mu}$، در اینصورت تحلیل پیچیده‌تر است.)

**سه ویژگی تعادل کامل زیربازی با اهمیت‌اند:**

(۱) خروجی به نفع اقدام کننده دوم در بازی (گروه $Y$) است: فقط اگر $V_X > k\dfrac{V_Y}{\mu}$ باشد که اگر $k$ بزرگ باشد به $۲V_Y$ نزدیک است، آیا گروه $X$ برای تصویب $X$ مدیریت می‌کند.

(۲) گروه $Y$ هیچ پرداختی انجام نمی‌دهد! طبق استراتژی تعادلیش او آمادگی دارد تا در پاسخ به برخی استراتژیهای گروه $X$ پرداختهائی انجام دهد، ولی با استراتژی "تعادلی" داده شده گروه $X$، او هیچ هزینه‌ای نمی‌کند.

(۳) اگر گروه $X$ هر گونه پرداختی داشته باشد (همانگونه که در تعادل برای $V_X > k\dfrac{V_Y}{\mu}$ انجام می‌دهد)، دراینصورت یک پرداخت به "هر" نماینده خواهد داشت. اگر هیچ گروه جانبدار رقیبی وجود نمی‌داشت اما با این حال هیچ نماینده‌ای به لایحه $X$ رأی نمی‌داد مگر اینکه حداقل یک مبلغی دریافت می‌کرد، دراینصورت گروه $X$ فقط به اکثریت مطلقی از نماینده‌ها پرداخت انجام می‌دهد؛ اگر $X$ به همین روش با وجود گروه $Y$ عمل کند، دراینصورت گروه $X$ یک اکثریتی از نمایندگان را به گروه $Y$ اعطا می‌کند که می‌تواند منجر به تصویب لایحه $Y$ بدون هزینه شود.

## یک مسابقه

بازیکن $i$، در ابتدا $k_i > ۰$ گام تا خط پایان فاصله دارد، $i = ۱, ۲$. در هر نوبت یک بازیکن می‌تواند هیچ گامی برندارد ( با هزینه صفر)، یا یک گام با هزینه $C(۱)$ یا دو گام با هزینه $C(۲)$ بردارد. اولین بازیکنی که به خط پایان برسد برنده یک جایزه می‌شود که ارزش آن برای بازیکن $i$–ام، $v_i > ۰$ است؛ و سود بازیکن بازنده صفر است. برای اینکه بازی متناهی باشد فرض می‌کنیم که اگر در نوبتهای متوالی، هیچ بازیکنی گامی برندارد بازی پایان می‌یابد و هیچکدام جایزه‌ای دریافت نمی‌کند. بازی‌ای که در آن بازیکن $i$ اول حرکت می‌کند را با $G_i(k_۱, k_۲)$ نشان می‌دهیم.

## بازی $G_1(k_1, k_2)$

**بازیکنان:** دو طرف

**تاریخچه‌های نهائی:** مجموعه دنباله‌های بصورت $(x^1, y^1, x^2, y^2, ..., x^T)$ یا $(x^1, y^1, x^2, y^2, ..., y^T)$ برای یک عدد صحیح $T$، که در آن $x^t$ ( تعداد گامهای برداشته شده توسط بازیکن ۱ در نوبت $t$ او ) و $y^t$ ( تعداد گامهای برداشته شده توسط بازیکن ۲ در نوبت $t$ او ) یا ۰ یا ۱ یا ۲اند، هیچ دو ۰ متوالی بجز احتمالاً در پایان دنباله وجود ندارد، و یا

$$x^1 + ... + x^T = k_1 \qquad \text{و} \qquad y^1 + ... + y^{T-1} < k_2$$

( بازیکن ۱ اول به خط پایان می‌رسد ) یا

$$x^1 + ... + x^T < k_1 \qquad \text{و} \qquad y^1 + ... + y^T = k_2$$

( بازیکن ۲ اول به خط پایان می‌رسد )

**تابع بازیکن:**

$$P(\emptyset) = 1 \quad , \quad P(x^1) = 2 \quad \forall x^1,$$

$$P(x^1, y^1) = 1 \quad \forall (x^1, y^1) \quad , \quad P(x^1, y^1, x^2) = 2 \quad \forall (x^1, y^1, x^2), \ldots$$

**ارجحیتها:**

برای یک تاریخچه نهائی که بازیکن $i$ بازنده باشد سود او برابر است با منهای مجموع هزینه همه حرکتهایش؛ و برای یک تاریخچه نهائی که در آن بازیکن $i$ برنده باشد سود او برابر است با $v_i$ منهای مجموع این هزینه‌ها.

تعادلهای کامل زیربازیهای $G_۱(۱,۲)$ و $G_۱(۲,۱)$:

فرض کنید

$v_۱$ و $v_۲$ اعدادی بین ۶ و۷ اند

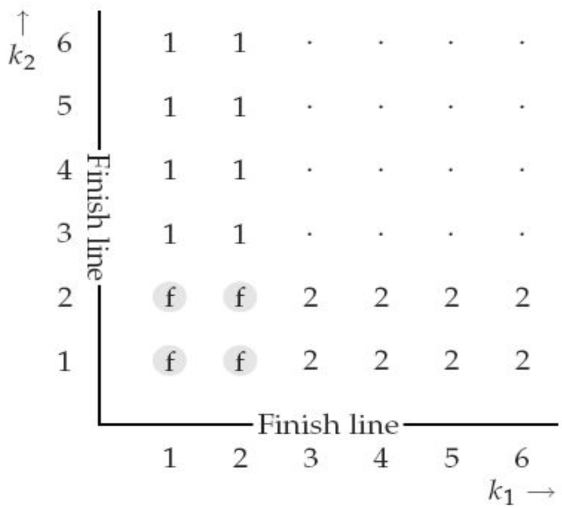
هزینه $C(۱)$ برای یک گام برابر ۱ و هزینه $C(۲)$ برای دو گام ۴ است.

$G_۱(۱,۲)$ دارای یک تعادل کامل زیربازی یگانه است که در آن بازیکن ۱ در ابتدا یک گام برمی‌دارد و برنده می‌شود.

$G_۱(۲,۱)$ دارای یک تعادل کامل زیربازی یگانه است که در آن بازیکن ۱ در ابتدا دو گام اتخاذ می‌کند و برنده می‌شود.

بطور کلی، تعادلهای بازیهای $G_i(k_۱,k_۲)$ برای همه مقادیر $k_۱$ و $k_۲$ تا سقف $\bar{k}$، نتیجه اتخاذ یک یا دو گام توسط بازیکن ۱ در بازی $G_۱(\bar{k}+۱,\bar{k})$ است.

- خروجی تعادل کامل زیربازی $G_۱(۲,۳)$ اینست که بازیکن ۱ یک گام در نوبت اولش بردارد، سپس بازیکن ۲ حرکت نکند و سپس بازیکن ۱ گام دیگری بردارد و پیروز شود.
- خروجی تعادل کامل زیربازی هر بازی که در آن بازیکن ۱ در فاصله حداکثر دو تا خط پایان و بازیکن ۲ در فاصله ۳ یا بیشتر باشد اینست که بازیکن ۱ در هر نوبت یک گام برمی‌دارد و بازیکن ۲ حرکت نمی‌کند و بازیکن ۱ برنده می‌شود. (بطور مشابه برای حالتی که بازیکن ۱ در فاصله ۳ یا بیشتر از خط پایان و بازیکن ۲ حداکثر در فاصله ۲ باشد).



## معرفی نمادها

"1": در یک تعادل کامل زیر بازی، صرفنظر از اینکه کدامیک اول حرکت می‌کند، بازیکن ۱ یک گام در هر نوبت برمی‌دارد و بازیکن ۲ حرکت نمی‌کند. بازیکن ۱ پیروز می‌شود.

"2": صرفنظر از اینکه کدامیک اول حرکت می‌کند، بازیکن ۲ در هر نوبت یک گام برمی‌دارد، و بازیکن ۱ حرکت نمی‌کند. بازیکن ۲ برنده می‌شود.

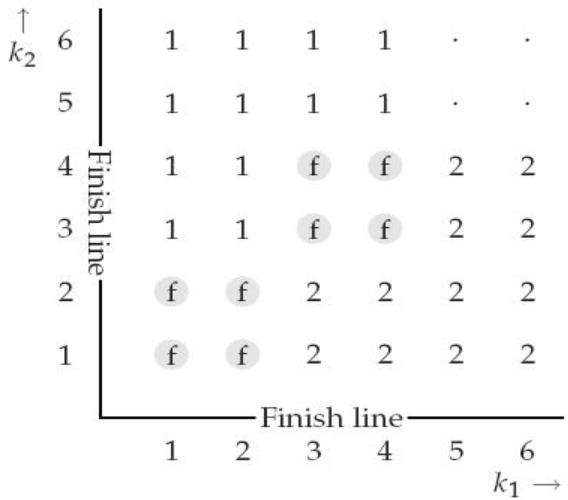
"f": اولین بازیکن برای حرکت، گامهای کافی برای رسیدن به خط پایان و برنده شدن برمی‌دارد.

- خروجی تعادل کامل زیربازی $G_۱(۳, ۳)$، اینست که بازیکن اول در هر نوبت یک گام برمی‌دارد و برنده می‌شود و بازیکن ۲ حرکت نمی‌کند (بطور مشابه در مورد $G_۲(۳, ۳)$).

- بطور مشابه میتوان بازیهای $G_i(۳, ۴)$، $G_i(۴, ۳)$، $G_i(۴, ۴)$ برای $i = ۱, ۲$ را بررسی کرد. تنها تفاوت در اینست که اگر اولین حرکت‌کننده چهار گام از خط پایان فاصله داشته باشد، در این صورت ابتدا دو گام برمی‌دارد تا به بازی‌ای برسد که در آن پیروز شود ( اگر در ابتدا یک گام بردارد، بازیکن دیگر پیروز می‌شود).

- در تعادل کامل زیربازی $G_۱(۳, ۵)$ و $G_۲(۳, ۵)$، بازیکن ۱ در هر نوبت یک گام برمی‌دارد و بازیکن ۲ حرکت نمی‌کند. بازیکن ۱ پیروز می‌شود.

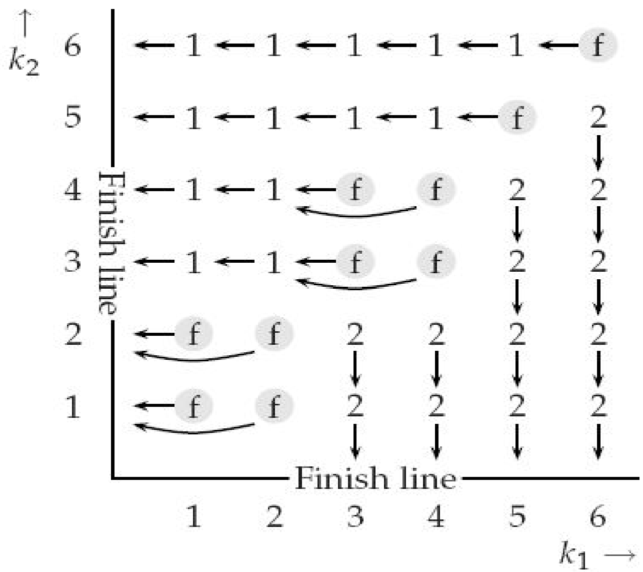
- بطور مشابه می‌توان بازیهائی را بررسی کرد که در آن یک بازیکن در ابتدا ۳ یا ۴ گام از خط پایان و بازیکن دیگر ۵ یا بیشتر از خط پایان فاصله دارند.




نمادگذاریها بجز "f" همانند نمودار قبلی‌اند و "f" به این معنی است که بازیکن اول گامهای کافی برمی‌دارد که یا به خط پایان برسد یا به نزدیکترین نقطه‌ای برسد که به نام او مشخص شده است، هر کدام که نزدیکتر باشد.

- **یک ویژگی تعادل کامل زیربازی** $G_1(4,4)$

فرض کنید طبق برنامه، بازیکن ۱ دو گام بردارد، ولی بازیکن ۲ بجای تبعیت از استراتژی تعادلیش (که حرکت نکند) دو گام بردارد در اینصورت بازیکن ۱ باید دو گام بردارد تا به خط پایان برسد گرچه سودش منفی است ( کمتر از $-1 = 7 + 4 - 4 - 4$ ). اگر بازیکن ۱ این حرکت را انجام ندهد سود حتی کمتر می‌شود (۴−) چون بازیکن ۲ برنده می‌شود.



## تعریف (بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان)

یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان از اجزاء زیر تشکیل می‌شود

- یک مجموعه از بازیکنان
- تاریخچه‌های نهائی: یک مجموعه از دنباله‌ها با این ویژگی که هیچ دنباله‌ای یک زیرتاریخچه سره هیچ دنباله دیگری نیست.
- تابع بازیکنان: یک تابع که یک مجموعه بازیکن به هر دنباله که یک زیرتاریخچه سره از یک تاریخچه نهائی است نظیر می‌کند.
- یک مجموعه $A_i(h)$ (عملهای قابل دسترسی به بازیکن $i$–ام بعد از تاریخچه $h$)، برای هر زیرتاریخچه سره $h$ از یک تاریخچه نهائی و هر بازیکن $i$ که عضوی از مجموعه بازیکنان نظیر شده به $h$ توسط تابع بازیکن باشد.

- ارجحیتها: برای هر بازیکن، ارجحیتهای روی مجموعه تاریخچه‌های نهائی بگونه‌ای که مجموعه تاریخچه‌های نهائی، تابع بازیکن، و مجموعه عملها سازگار باشند به این معنی که $h$ یک تاریخچه نهائی است اگر وفقط اگر یا

۱. $h$ برای یک عدد صحیح $k$ بصورت $(a^{1}, ..., a^{k})$ باشد،

– تابع بازیکن در $h$ تعریف شده نباشد، و

– برای هر $l = 0, ..., k-1$، عضو $a^{l+1}$، لیستی از عملهای بازیکنان نظیر شده توسط تابع بازیکن به $(a^{1}, ..., a^{l})$ باشد (تاریخچه تهی اگر $l = 0$ باشد)

یا

۲. $h$ بصورت $(a^{1}, a^{2}, ...)$ باشد،

– و برای هر $l = 0, 1, ...$، عضو $a^{k+1}$، لیستی از عملهای بازیکنان نظیر شده توسط تابع بازیکن به $(a^{1}, ..., a^{l})$ باشد (تاریخچه تهی اگر $l = 0$ باشد).

## مثال (گونه‌ای از بازی $BOS$)

ابتدا، فرد اول تصمیم می‌گیرد که در منزل بماند و مطالعه کند یا به یک کنسرت برود. اگر او کتاب بخواند بازی پایان می‌پذیرد. اگر تصمیم بگیرد به یک کنسرت برود، دراینصورت، همانند $BOS$، او و فرد ۲ بطور مستقل تصمیم می‌گیرند که آیا به $B$ بروند یا $S$ در حالیکه انتخاب فرد دیگر را نمی‌دانند. هر دو نفر ترجیح می‌دهند به کنسرت موردعلاقه‌شان با همراهی فرد دیگر بروند تا اینکه فرد ۱ در منزل بماند و کتاب بخواند، و این خروجی را به شرکت در کنسرتی که علاقه کمتری دارد بهمراه فرد دیگر، ترجیح می‌دهد، بدترین خروجی برای هر دو نفر اینست که دو نفر بطور جدا در دو کنسرت شرکت کنند.

بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان زیر این وضعیت را مدل می‌کند

**بازیکنان:** دو نفر (۱ و ۲)

**تاریخچه‌های نهائی:** کتاب، ( $(B,B)$ و کنسرت ) ، ( $(B,S)$ و کنسرت ) ، ( $(S,B)$ و کنسرت ) و ( $(S,S)$ و کنسرت ).

**تابع بازیکن:** $P(\emptyset) = ۱ \quad , \quad P(\text{کنسرت}) = \{۱, ۲\}$

**عملها:** مجموعه عملهای بازیکن ۱ در تاریخچه تهی $\emptyset$ عبارتست از

$$A_۱(\emptyset) = \{\text{کتاب و کنسرت}\}$$

و مجموعه عملهایش بعد از تاریخچه کنسرت عبارتست از

$$A_۱(\text{کنسرت}) = \{B, S\}$$

مجموعه عملهای بازیکن ۲ بعد از تاریخچه کنسرت عبارتست از

$$A_۲(\text{کنسرت}) = \{B, S\}$$

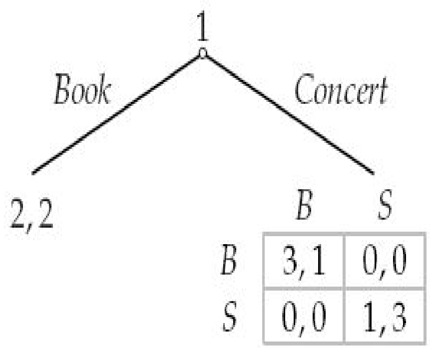
**ارجحیتها:**

بازیکن ۱

($(B,B)$ و کنسرت) را به کتاب به ($(S,S)$ و کنسرت) به ($(B,S)$ و کنسرت) ترجیح می‌دهد که بین آخری و ($(S,B)$ و کنسرت) بی‌تفاوت است.

بازیکن ۲

($(S,S)$ و کنسرت) را به کتاب به ($(B,B)$ و کنسرت) به ($(B,S)$ و کنسرت) ترجیح می‌دهد که بین آخری و ($(S,B)$ و کنسرت) بی‌تفاوت است.



**تعریف (استراتژی در بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان)**

منظور از یک استراتژی بازیکن $i$ در یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان، تابعی است که به هر تاریخچه $h$ که بعد از آن $i$ یکی از بازیکنانی است که نوبت او برای حرکت است ( یعنی $i$ عضوی از $P(h)$ است که در آن $P$ تابع بازیکن است) یک عمل در $A_i(h)$ (مجموعه عملهای قابل دسترسی به بازیکن $i$ بعد از $h$) نظیر کند.

تعریف " تعادل نش" یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان، دقیقاً همان تعریف در یک بازی بدون حرکات همزمان است:

یک تعادل نش، یک بردار استراتژی با این ویژگی است که هیچ بازیکنی با تغییر استراتژیش، با این فرض که استراتژیهای دیگر بازیکنان داده شده باشند نمی‌تواند خروجی بهتری بدست آورد.

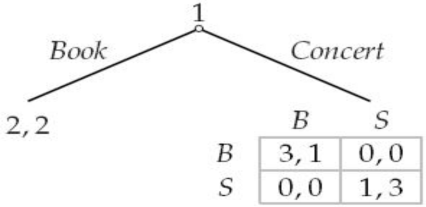
همچنین مثل قبل

- " فرم استراتژیک" یک بازی، یک بازی استراتژیک است که در آن عملهای بازیکنان، استراتژیهای بازیکنان در بازی توسعه‌یافته است.

- یک بردار استراتژی، یک تعادل نش بازی توسعه‌یافته است اگر وفقط اگر، یک تعادل نش فرم استراتژیک این بازی باشد.

## مثال (تعادلهای نش گونه‌ای از بازی $BOS$)

بازی زیر را در نظر بگیرید




استراتژیهای بازیکن ۱: ($S$ و کتاب) ، ($B$و کتاب) ، ($S$ و کنسرت ) ، ($B$ و کنسرت )

استراتژیهای بازیکن ۲: $B$ و $S$

فرم استراتژیک بازی بصورت زیر است

| | $B$ | $S$ |
|---|---|---|
| $(Concert, B)$ | 3,1 | 0,0 |
| $(Concert, S)$ | 0,0 | 1,3 |
| $(Book, B)$ | 2,2 | 2,2 |
| $(Book, S)$ | 2,2 | 2,2 |

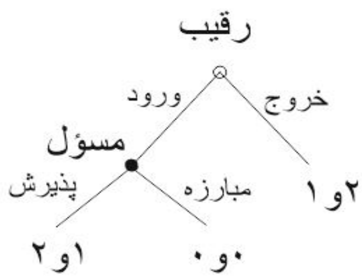
تعادلهای نش محض بازی: $((\text{کتاب}, S), S)$ و $((\text{کتاب}, B), S)$ و $((\text{کنسرت}, B), B)$

هر بازی توسعه‌یافته دارای یک فرم استراتژیک یگانه است. گرچه برخی بازیهای استراتژیک، فرمهای استراتژیک بیش از یک بازی توسعه‌یافته‌اند.

**مثال:** بازی استراتژیک زیر را در نظر بگیرید

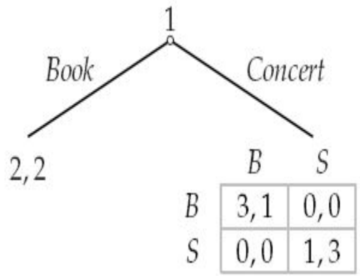
| | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $1,2$ | $1,2$ |
| $B$ | $0,0$ | $2,0$ |

این بازی، فرم استراتژیک یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمانی است که در آن دو بازیکن، عملهایشان را بطور همزمان انتخاب می‌کنند، همچنین فرم استراتژیک بازی زیر است



منظور از " زیر بازی بعد از تاریخچه $h$" در یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان، بازی توسعه‌یافته‌ای است که " از $h$ شروع " می‌شود

**مثال:** بازی استراتژیک زیر را در نظر بگیرید




این بازی دارای دو زیربازی است:

همه بازی و بازی‌ای که در آن بازیکنان بعد از آنکه بازیکن ۱ " کنسرت" را انتخاب کرد شروع می‌شود

در زیربازی دوم:

- تاریخچه‌های نهائی عبارتند از

$$(S, S) \text{ و } (S, B) \text{ و } (B, S) \text{ و } (B, B)$$

- تابع بازیکن، مجموعه $\{۱, ۲\}$ متشکل از دو بازیکن را به تاریخچه تهی (تنها تاریخچه غیرنهائی) نظیر می‌کند.

- مجموعه عمل هر بازیکن در تاریخچه تهی عبارتست $\{B, S\}$

- ارجحیتهای بازیکنان توسط سودهای در جدول نمایش داده شده‌اند.

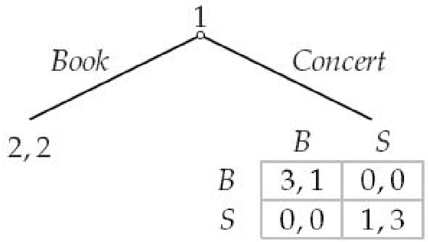
ـ منظور از یک " تعادل کامل زیربازی" یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکتهای همزمان، یک بردار از استراتژی با این ویژگی است که هیچ بازیکنی در هیچ زیربازی نمی‌تواند سودش را با انتخاب یک استراتژی متفاوت، در حالیکه استراتژیهای دیگر بازیکنان داده‌شده باشند، افزایش دهد.

ـ تعریف فرمال تعادل کامل زیربازی بازیهای فوق همان تعادل کامل زیربازی یک بازی بدون حرکات همزمان است با این تفاوت که عبارت " نوبت بازیکن $i$–ام برای حرکت است" در دومی با عبارت " $i$ یک عضو $P(h)$ است " در اولی جایگزین می‌شود.

ـ برای بدست آوردن مجموعه تعادلهای کامل زیربازی یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان که دارای یک افق متناهی است، می‌توان، مانند قبل از استقراء معکوس استفاده کرد.

## مثال (تعادلهای کامل زیربازی گونه‌ای از $BOS$)

بازی زیر را در نظر بگیرید




فرآیند استقراء معکوس بصورت زیر است

- در زیربازی‌ای که بعد از تاریخچه "کنسرت" قرار دارد، دو تعادل نش محض وجود دارد یعنی $(S,S)$و$(B,B)$.
- اگر خروجی در زیربازی‌ای که بعد از "کنسرت" قرار دارد، $(S,S)$ باشد، در اینصورت انتخاب بهینه بازیکن ۱ در شروع بازی "کتاب" است.
- اگر خروجی در زیربازی‌ای که بعد از "کنسرت" قرار دارد، $(B,B)$ باشد، در اینصورت انتخاب بهینه بازیکن ۱ در شروع بازی "کنسرت" است.

در نتیجه، این بازی دارای دو تعادل کامل زیربازی است:

$$((\text{کتاب}, S), S)\text{و}((\text{کنسرت}, B), B).$$

**تذکر**

می‌دانیم که هر بازی توسعه‌یافته متناهی با اطلاعات کامل دارای یک تعادل کامل زیربازی محض است. ولی توجه کنید که این مطلب برای یک بازی توسعه‌یافته متناهی با اطلاعات کامل و حرکتهای همزمان برقرار نیست، چون همانطور که می‌دانیم یک بازی استراتژیک متناهی ( که متناظر با یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان با طول یک است) ممکنست دارای یک تعادل نش محض نباشد (به عنوان مثال، بازی مسابقه پنی را درنظر بگیرید). گرچه همانگونه که چنین بازیهائی که دارای تعادل نش محض نیستند دارای تعادل مخلوط هستند. این مطلب برای بازیهای توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان برقرار است.

## مثال ( ورود به یک صنعت انحصاری)

یک صنعت با یک بنگاه بطور انحصاری اداره می‌شود که آنرا ''مسؤل'' می‌نامیم. یک بنگاه دیگر ( ''رقیب'' ) در نظر دارد که وارد این صنعت بشود. ورود به این صنعت علاوه بر هزینه‌های تولید، مستلزم یک هزینه مثبت $f$ است. اگر رقیب وارد نشود، سودش صفر است ولی اگر وارد شود، بنگاهها بطور همزمان میزان محصول خود را مشخص می‌کنند(مشابه مدل انحصار دوجانبه کورنو)

$C_i(q_i)$: هزینه تولید $q_i$ واحد تولید بنگاه $i$–ام

$P_d(Q)$: قیمت بازار مشروط بر اینکه کل تولید توسط بنگاهها، $Q$ باشد.

## بازی (ورود به یک صنعت انحصاری)

وضعیت فوق را می‌توان بصورت یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان بصورت زیر مدل کرد

**بازیکنان:** دو بنگاه که عبارتند از مسؤل (بنگاه ۱) و رقیب (بنگاه ۲).

**تاریخچه‌های نهائی:**

برای هر زوج از اعداد غیرمنفی $(q_1, q_2)$     $(\text{ورود}, (q_1, q_2))$

برای هر میزان محصول $q_1$     $(\text{عدم ورود}, q_1)$

**تابع بازیکن:**

$$P(\emptyset) = \{2\}\ ,\ P(\text{ورود}) = \{1, 2\}\ ,\ P(\text{عدم ورود}) = \{1\}$$

**عملها:**

$A_2(\emptyset) = \{\text{ورود ، عدم ورود}\};$

$A_1(\text{ورود})$، $A_1(\text{عدم ورود})$ و $A_2(\text{ورود})$ همگی برابر با مجموعه خروجیهای ممکن‌اند ( اعداد غیر منفی).

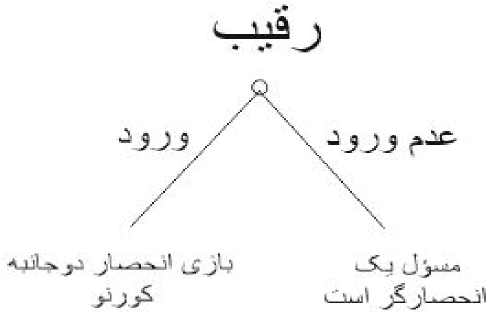
**ارجحیتها:**

ارجحیتهای هر بنگاه توسط سودش نمایش داده می‌شود که برای مسؤل در تاریخچه نهائی $(\text{ورود}, (q_1, q_2))$ عبارتست از $q_1 P_d(q_1 + q_2) - C_1(q_1)$

و برای رقیب عبارتست از $q_2 P_d(q_1 + q_2) - C_2(q_2) - f$

و برای مسؤل در تاریخچه نهائی $(\text{عدم ورود}, q_1)$ عبارتست از $q_1 P_d(q_1) - C_1(q_1)$

و برای رقیب صفر است.



## حالت خاص (بازی ورود به یک صنعت انحصاری)

فرض کنید : $C_i(q_i) = cq_i \quad \forall q_i$

و

$$P_d(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & Q \leq \alpha \text{ اگر}, \\ 0 & Q > \alpha \text{ اگر} \end{cases}$$

تعادلهای کامل زیربازی:

ابتدا زیربازی‌ای را درنظر بگیرید که بعد از تاریخچه "ورود" ظاهر می‌شود. فرم استراتژیک این زیربازی، همان بازی استراتژیک انحصار دوجانبه کورنو است که قبلاً بررسی نمودیم با این تفاوت که سود رقیب، صرفنظر از میزان خروجی او، باندازه $f$ کاهش می‌یابد. بنابراین این زیربازی دارای یک تعادل نش یگانه است که در آن خروجی هر بنگاه عبارتست از $\frac{1}{3}(\alpha - c)$.

سود مسؤل عبارتست از $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2$ و

سود رقیب عبارتست از $\frac{1}{9}(\alpha - c)^2 - f$.

حال زیربازی‌ای را درنظر بگیرید که بعد از تاریخچه "عدم ورود" ظاهر می‌شود. در این زیربازی، مسؤل، یک میزان خروجی مانند $q_۱$ انتخاب می‌کند که درنتیجه سود او عبارتست از

$$q_۱(\alpha - q_۱) - cq_۱ = q_۱(\alpha - c - q_۱).$$

که ماکزیمم آن در $q_۱ = \frac{۱}{۲}(\alpha - c)$ رخ می‌دهد.

در نتیجه، در هر تعادل کامل زیربازی، مسؤل، در زیربازی ظاهر شده بعد از تاریخچه "عدم ورود"، $q_۱ = \frac{۱}{۲}(\alpha - c)$ را انتخاب می‌کند.

بالاخره، به عمل رقیب در شروع بازی می‌پردازیم. اگر رقیب وارد نشود سودش ۰ است درحالیکه اگر وارد شود، دراینصورت با فرض عملهای انتخاب شده در زیربازی حاصل، سودش عبارتست از

$$\frac{۱}{۹}(\alpha - c)^۲ - f$$

بنابراین در هر تعادل کامل زیربازی، رقیب وارد می‌شود اگر $\frac{۱}{۹}(\alpha - c)^۲ > f$ باشد و وارد نمی‌شود اگر $\frac{۱}{۹}(\alpha - c)^۲ < f$. اگر $\frac{۱}{۹}(\alpha - c)^۲ = f$ باشد دراینصورت این بازی دارای دو تعادل کامل زیربازی است که در یکی رقیب وارد می‌شود و در دیگری وارد نمی‌شود.

بطور خلاصه، مجموعه تعادلهای کامل زیربازی وابسته به مقدار $f$ است. در همه تعادلها، استراتژی مسؤل اینست که:

اگر رقیب وارد شود $\frac{۱}{۳}(\alpha - c)$ تولید کند و
اگر رقیب وارد نشود $\frac{۱}{۲}(\alpha - c)$ تولید کند.

- اگر $f < \frac{۱}{۹}(\alpha - c)^{۲}$، باشد دراینصورت یک تعادل کامل زیربازی یگانه وجود دارد که در آن رقیب وارد می‌شود. لذا خروجی اینست که رقیب وارد می‌شود و هر بنگاه باندازه $\frac{۱}{۳}(\alpha - c)$ تولید می‌کند.
- اگر $f > \frac{۱}{۹}(\alpha - c)^{۲}$، دراینصورت یک تعادل کامل زیربازی یگانه وجود دارد که در آن رقیب وارد نمی‌شود. لذا خروجی اینست که رقیب وارد نمی‌شود و مسؤل باندازه $\frac{۱}{۲}(\alpha - c)$ تولید می‌کند.
- اگر $f = \frac{۱}{۹}(\alpha - c)^{۲}$، در اینصورت بازی دارای دو تعادل کامل زیربازی است: یکی برای حالت $f < \frac{۱}{۹}(\alpha - c)^{۲}$ و دیگری برای حالت $f > \frac{۱}{۹}(\alpha - c)^{۲}$.

## تعریف (بازیهای توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات تصادفی)

تعریف بازیهای توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات تصادفی همان تعریف بازیهای توسعه‌یافته با اطلاعات کامل، با تغییرات زیر است:

- تابع بازیکن به برخی تاریخچه‌ها، یک احتمال نظیر می‌کند تا مجموعه‌ای از بازیکنان را.
- احتمالاتی که این تابع احتمال بعد از هر چنین تاریخچه‌ای مورد استفاده قرار می‌دهد مشخص شده هستند.
- ارجحیتهای بازیکنان، روی مجموعه لاتاریهای روی تاریخچه‌های نهائی تعریف می‌شوند (نه روی مجموعه تاریخچه‌های نهائی).

تذکر

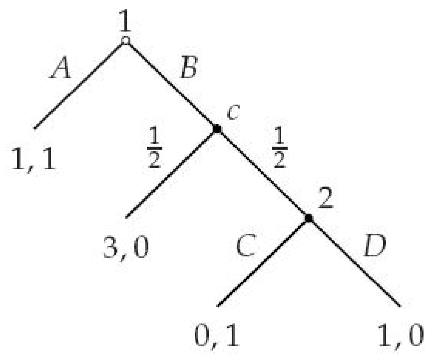
بازیهای توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان را می‌توان بطور مشابه با اضافه کردن حرکات تصادفی تعمیم داد.

- برای سادگی، فرض کنید که رویداد تصادفی بعد از هر تاریخچه داده شده، مستقل از رویداد تصادفی بعد از هر تاریخچه دیگری است. (یعنی، تحقق هر رویداد تصادفی، متأثر از تحقق هیچ رویداد تصادفی دیگری نیست.)
- استراتژی یک بازیکن مثل قبل تعریف می‌شود.
- خروجی یک بردار استراتژی، یک توزیع احتمال روی تاریخچه‌های نهائی است.
- تعریف تعادل کامل زیربازی مثل قبل است.

## مثال

یک بازی با دو بازیکن را درنظر بگیرید که در آن بازیکن ۱ ابتدا $A$ یا $B$ را انتخاب می‌کند. اگر $A$ را انتخاب کند بازی با سود (برنولی) $(۱, ۱)$ تمام می‌شود. اگر $B$ را انتخاب کند، آنگاه با احتمال $\frac{۱}{۲}$ بازی با سود $(۳, ۰)$ تمام می‌شود، و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ بازیکن ۲ بین $C$ با سود $(۰, ۱)$ و $D$ با سود $(۱, ۰)$ انتخاب می‌کند.

یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات تصادفی که این وضعیت را مدل می‌کند بصورت زیر است




منظور از $c$، رویداد تصادفی است و عددی که در کنار هر عمل تصادفی نوشته‌شده، احتمال انتخاب آن عمل را نشان می‌دهد.

با استفاده از استقراء معکوس می‌توان تعادلهای کامل زیربازی این بازی را بدست آورد.

در هر تعادل، بازیکن ۲، $C$ را انتخاب می‌کند.

حال به انتخاب بازیکن ۱ می‌پردازیم. اگر $A$ را انتخاب کند سودش ۱ می‌شود و اگر $B$ را انتخاب کند سودش با احتمال $\frac{۱}{۲}$ برابر ۳ و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ برابر ۰ است پس سود انتظاری او با انتخاب $B$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

بنابراین این بازی دارای یک تعادل کامل زیربازی یگانه است که در آن بازیکن ۱ عمل $B$ و بازیکن ۲ عمل $C$ را انتخاب می‌کند.

## استفاده از حرکات تصادفی برای مدل کردن اشتباهات

از یک بازی با حرکات تصادفی می‌توان برای مدل کردن امکان اشتباه بازیکنان استفاده کرد. فرض کنید دو بازیکن بطور همزمان عملهائی را انتخاب کنند. هر بازیکن می‌تواند $A$ یا $B$ را انتخاب کند. در صورت عدم امکان اشتباه، این وضعیت توسط بازی استراتژیک زیر مدل می‌شود.

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $A$ | 1,1 | 0,0 |
| $B$ | 0,0 | 0,0 |

که در آن، اعداد در جدول نشان‌دهنده سودهای برنولی هستند. این بازی دارای دو تعادل نش $(A, A)$ و $(B, B)$ است.

حال فرض کنید هر بازیکن ممکن است اشتباه بکند و بازیکن $i$، عمل مورد نظرش را با احتمال $1 - p_i > \frac{1}{2}$ و با احتمال $p_i < \frac{1}{2}$ عمل دیگری را انتخاب کند.

این وضعیت را می‌توان به عنوان یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمان و حرکات تصادفی بصورت زیر مدل کرد

**بازیکنان:** دو نفر

**تاریخچه‌های نهائی:** همه دنباله‌های بصورت $((W,X),Y,Z)$، که در آن همه $W$ ، $X$ ، $Y$ و $Z$ یا $A$ یا $B$اند.

در تاریخچه $((W,X),Y,Z)$ بازیکن ۱، $W$ و بازیکن ۲، $X$ را انتخاب می‌کند، و سپس عامل تصادف، $Y$ را برای بازیکن ۱ و $Z$ را برای بازیکن ۲ انتخاب می‌کند.

**تابع بازیکن:** (هر دو بازیکن در شروع بازی بطور همزمان حرکت می‌کنند) $P(\emptyset)=\{۱,۲\}$

و $P(W,X)=P((W,X),Y)=\{c\}$

(عامل تصادف بعد از آنکه هر دو بازیکن عمل کردند، دو بار حرکت می‌کند، ابتدا عمل بازیکن ۱ را انتخاب می‌کند و سپس عمل بازیکن ۲ را ).

**عملها:** مجموعه عملهای قابل دسترسی به هر بازیکن در شروع بازی، و به عامل تصادف در هر حرکتش عبارتست از $\{A,B\}$.

**احتمالات تصادفی:**

بعد از هر تاریخچه $(W, X)$، عامل تصادف، $W$ را با احتمال $1 - p_1$ و عمل دیگر بازیکن ۱ را با احتمال $p_1$ انتخاب می‌کند. بعد از هر تاریخچه $((W, X), Y)$، عامل تصادف $X$ را با احتمال $1 - p_2$ و عمل دیگر بازیکن ۲ را با احتمال $p_2$ انتخاب می‌کند.

**ارجحیتها:**

ارجحیتهای هر بازیکن، توسط ارزش انتظاری یک تابع سود برنولی نمایش داده می‌شود که به هر تاریخچه $((W, X), A, A)$ عدد ۱ ( که در آن، عامل تصادف، عمل $A$ را برای هر بازیکن انتخاب می‌کند)، و به هر تاریخچه دیگری عدد صفر را نظیر می‌کند.

بازیکنان در این بازی بطور همزمان حرکت می‌کنند، بنابراین تعادلهای کامل زیربازی این بازی، تعادلهای نش آن هستند.

بمنظور بدست‌آوردن تعادلهای نش، فرم استرتژیک این بازی را بدست می‌آوریم. فرض کنید هر بازیکن عمل $A$ را انتخاب کند. دراینصورت خروجی عبارتست از $(A, A)$ با احتمال $(۱-p_{۱})(۱-p_{۲})$ (احتمالی که هیچکدام از بازیکنان اشتباه نمی‌کند). بنابراین سود انتظاری هر بازیکن عبارتست از $(۱-p_{۱})(۱-p_{۲})$.

بطور مشابه، اگر بازیکن ۱، $A$ و بازیکن ۲، $B$ را انتخاب کند دراینصورت خروجی عبارتست از $(A, A)$ با احتمال $(۱-p_{۱})p_{۲}$ (احتمالی که بازیکن ۱ اشتباه نمی‌کند ولی بازیکن ۲ اشتباه می‌کند). با محاسبه بقیه حالتها، به بازی استراتژیک زیر می‌رسیم

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $A$ | $(1-p_1)(1-p_2), (1-p_1)(1-p_2)$ | $(1-p_1)p_2, (1-p_1)p_2$ |
| $B$ | $p_1(1-p_2), p_1(1-p_2)$ | $p_1p_2, p_1p_2$ |

برای $p_1 = p_2 = 0$، این بازی همان بازی قبل یعنی بازی زیر است

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $A$ | 1,1 | 0,0 |
| $B$ | 0,0 | 0,0 |

که دارای دو تعادل نش زیر است

$$(A, A) \quad , \quad (B, B)$$

اگر حداقل یکی از احتمالات مثبت باشد آنگاه فقط $(A, A)$ یک تعادل نش است:

اگر $p_i > 0$ آنگاه $\qquad (1 - p_j)p_i > p_j p_i$

(با این فرض داده شده که هر احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ است). یعنی فقط تعادل $(A, A)$ی بازی اولیه نسبت به این احتمال که بازیکنان اشتباهات کمی مرتکب شوند مستحکم $robust$ است.

فصل چهارم

# بازیهای تکرار شونده (مکرر)

*Repeated Games*

## ایده اصلی بازیهای تکرار شونده

”تهدید“ یک بازیکن به عدم بهره‌برداری از سود کوتاه مدت با این ”مجازات“ که سود بلند مدت او کاهش خواهد یافت.

**مثال:** فرض کنید دو نفر بطور مکرر ”معمای زندانی“ زیر را بازی می‌کنند

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | ۲و۲ | ۳و۰ |
| $D$ | ۰و۳ | ۱و۱ |

می‌دانیم این بازی دارای تنها تعادل نش $(D, D)$ است.

حال استراتژی زیر در بازی مکرر را درنظر بگیرید

**استراتژی چکاندن بی‌امان ماشه ( یا بطور ساده: استراتژی ماشه)** $\quad$ *grim trigger strategy*

- $C$ را انتخاب کن تا زمانی که رقیب $C$ را انتخاب می‌کند.
- اگر در یک دوره، رقیب $D$ را انتخاب کرد دراینصورت برای همیشه (همه دوره‌های بعدی)، $D$ را انتخاب کن.

## سؤال

بهترین پاسخ به استراتژی ماشه چیست؟

پاسخ سؤال به نحوه ارزیابی سودهای آینده بستگی دارد

**حالت اول:** بازیکن، ارزش حال را خیلی بیشتر از آینده ارزیابی می‌کند. (این حالت به "عدم بردباری" بازیکن تعبیر می‌شود)

**حالت دوم:** ارزشی که به سودهای آینده نظیر می‌کند در مقایسه با حال، خیلی کم نیست. (این حالت به " بردباری" بازیکن تعبیر می‌شود)

## پاسخ

اگر بازیکن بقدر کافی بردبار باشد، دراینصورت استراتژی‌ای که بعد از هر تاریخچه، $C$ را انتخاب کند یک بهترین پاسخ به استراتژی ماشه است.

## ادعا

استراتژی ماشه، یک بهترین پاسخ دیگر به استراتژی ماشه است.

## نتیجه

اگر در مثال فوق، بازیکنان به قدر کافی بردبار باشند دراینصورت زوج استراتژی‌ای که در آن هر دو بازیکن از استراتژی ماشه استفاده می‌کنند یک تعادل نش "معمای زندانی" مکرر است.

## تذکر

تعادل نش فوق تنها تعادل نش این بازی مکرر نیست. زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن، بعد از هر تاریخچه، $D$ را انتخاب کند نیز یک تعادل نش "معمای زندانی" مکرر است.

## چند سؤال در مورد بازی فوق

۱. بازیکنان دقیقاً چه مقدار باید بردبار باشند تا تعادل نش بدست آمده دارای خروجی $(C,C)$ در هر دوره باشد؟

۲. چه خروجیهای دیگری توسط تعادلهای نش تولید می‌شوند؟

۳. آیا زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن از استراتژی ماشه استفاده می‌کند یک تعادل کامل زیربازی است؟

یعنی آیا هر بازیکن بطور بهینه بازیکن دیگر را بخاطر انحرافش جریمه می‌کند؟

اگر پاسخ منفی است آیا یک تعادل کامل زیر بازی وجود دارد که دارای خروجیهای مطلوب باشد؟

۴. استراتژی ماشه، رقیب را به سختی مجازات می‌کند. آیا تعادلهای نش یا تعادل‌های کامل زیربازی وجود دارند بطوریکه استراتژی بازیکنان، انحرافات را با شدت کمتری مجازات کنند؟

۵. چگونه می‌توان سؤالات فوق را به بازیهای استراتژیک کلی ( نه فقط معمای زندانی) تعمیم داد؟

## مجموع تنزیل‌یافته ($Discounted\ sum$) خروجی یک بازیکن در یک بازی تکرارشونده

خروجی یک بازی تکرار شونده، دنباله‌ای از خروجیهای یک بازی استراتژیک مانند $(a^۱, a^۲, ..., a^T)$ است که در آن $a^t$ یک بردار از عمل در دوره $t$–ام است. اگر $u_i$، تابع سود بازیکن $i$–ام در بازی استراتژیک و $۰ < \delta_i < ۱$، عامل تنزیل بازیکن $i$–ام باشد دراینصورت منظور از "مجموع تنزیل‌یافته سود بازیکن $i$–ام در خروجی فوق"، مجموع زیر است

$$u_i(a^۱) + \delta_i u_i(a^۲) + \delta_i^۲ u_i(a^۳) + ... + \delta_i^{T-۱} u_i(a^T) = \sum_{i=۱}^{T} \delta_i^{t-۱} u_i(a^t)$$

اگر $\delta_i$ نزدیک به صفر باشد دراینصورت بازیکن، ارزیابی کمی نسبت به آینده دارد (بازیکن بردبار نیست)

اگر $\delta_i$ نزدیک به یک باشد دراینصورت بازیکن، ارزیابی کمی نسبت به آینده ندارد (بازیکن بردبار است)

**قرارداد** : من بعد، عامل تنزیل همه بازیکنان را یکسان فرض می‌کنیم. یعنی

$$\delta_i = \delta \quad \forall i$$

**سؤال**

چرا یک بازیکن، سودهای آینده را کمتر از زمان حال ارزیابی می‌کند؟

## میانگین تنزیل‌یافته $\textit{Discounted average}$

میانگین تنزیل‌یافته دنباله سود $(\omega^1, \omega^2, \ldots)$ با عامل تنزیل $\delta$ عبارتست از

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\omega^t$$

- چون $1-\delta$ ثابت است، بنابراین برای یک $\delta$ داده شده، مجموع تنزیل‌یافته و میانگین تنزیل‌یافته، ارجحیتهای یکسانی را نمایش می‌دهند.
- توجه کنید که برای هر عامل تنزیل $\delta$ بین $0$ و $1$، و هر عدد $c$، میانگین تنزیل یافته جریان ثابت سود $(c, c, \ldots)$ برابر با $c$ است.

## هم ارزی توابع سود

اگر ارجحیتهای یک فرد توسط میانگین تنزیل یافته تابع سود $u$ و عامل تنزیل $\delta$ نمایش داده شده باشند، دراینصورت همان ارجحیتها، توسط میانگین تنزیل یافته تابع سود $\alpha+\beta u$ و عامل تنزیل $\delta$ نیز نمایش داده می‌شوند که در آن $\alpha$ و $\beta$ اعدادی حقیقی و $\beta > ۰$ است.

بعلاوه، تبدیلات خطی $u$، تنها تبدیلاتی هستند که ارجحیتها را حفظ می‌کنند:

یعنی اگر میانگینهای تنزیل یافته حاصل از توابع سود $u$ و $v$ با عامل تنزیل یکسان $\delta$، ارجحیتهای یکسانی را نمایش دهند دراینصورت اعداد $\alpha$ و $\beta > ۰$ وجود دارند بطوریکه $v = \alpha + \beta u$.

- توجه کنید که سودهای متفاوت برای یک بازی استراتژیک یکسان، ممکنست ارجحیتهای متفاوتی در بازی تکرار شونده تولید کنند حتی اگر توجه خود را به خروجیهای قطعی محدود کنیم.

**مثال:** ارجحیتهای بازیکنان در بازی تکرار شونده مبتنی بر "معمای زندانی" زیر

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | ۲و۲ | ۳و۰ |
| $D$ | ۰و۳ | ۱و۱ |

متفاوت با ارجحیتهای بازیکنان در بازی تکرار شونده یک بازی "معمای زندانی" است که در آن زوج سودهای (۰, ۳) و (۳, ۰) در بازی فوق، با (۰, ۵) و (۵, ۰) جایگزین شده باشند. یعنی

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | ۲و۲ | ۵و۰ |
| $D$ | ۰و۵ | ۱و۱ |

**مثال:** اگر $\delta$ بقدر کافی به یک نزدیک باشد دراینصورت هر بازیکن، دنباله خروجی

$$((C,C),(C,C))$$

را در بازی اول، به دنباله خروجی

$$((D,C),(C,D))$$

ترجیح می‌دهد ولی در بازی دوم چنین نیست.

## تعریف (بازی تکرار شونده متناهی)

فرض کنید $G$ یک بازی استراتژیک باشد. مجموعه بازیکنان را با $N$ نشان دهید. همچنین مجموعه عملها و تابع سود هر بازیکن $i$ را به ترتیب با $A_i$ و $u_i$ نشان دهید. منظور از "بازی تکرار شونده $T$–دوره‌ای $G$" $T - Period\ repeated\ game\ of\ G$ با عامل تنزیل $\delta$، بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات همزمانی است که در آن

- مجموعه بازیکنان $N$ است.
- تاریخچه‌های نهائی: مجموعه دنباله‌های $(a^۱, a^۲, ..., a^T)$ متشکل از بردارهای عمل در $G$.
- تابع بازیکن: تابع بازیکن به هر تاریخچه $(a^۱, a^۲, ..., a^t)$ (برای هر مقدار $t$) مجموعه همه بازیکنان را نظیر می‌کند.
- عملها: مجموعه عملهای قابل دسترسی به هر بازیکن $i$ بعد از هر تاریخچه، $A_i$ است.
- ارجحیتها: هر بازیکن $i$، هر تاریخچه نهائی $(a^۱, a^۲, ..., a^T)$ را بر حسب میانگین تنزیل یافته‌اش یعنی $(۱ - \delta) \sum_{t=۱}^{T} \delta^{t-۱} u_i(a^t)$ ارزیابی می‌کند.

- تعریف یک "بازی بطور نامتناهی تکرار شونده $G$" با عامل تنزیل $\delta$، همان تعریف فوق است با این تفاوت که در این بازی، تاریخچه‌های نهائی، مجموعه دنباله‌های نامتناهی $(a^1, a^2, ...)$اند و سود هر بازیکن $i$ نسبت به تاریخچه نهائی $(a^1, a^2, ...)$، میانگین تنزیل‌شده زیر است

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_i(a^t)$$

- در هر دو تعریف فوق، یک تاریخچه نهائی را یک "مسیر خروجی" *Outcome Path* نیز می‌گویند.

## تعادل نش معمای زندانی مکرر متناهی

بازی تکرار شونده $T$−دوره‌ای ”معمای زندانی“ را درنظر بگیرید

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | ۲و۲ | ۳و۰ |
| $D$ | ۰و۳ | ۱و۱ |

- زوج استراتژی که در آن استراتژی هر بازیکن در هر دوره، برای هر تاریخچه ممکن، $D$ را انتخاب کند یک تعادل بازی $T$−دوره‌ای است. مسیر خروجی این زوج استراتژی، در هر دوره، خروجی $(D, D)$ است.
- ”هر“ تعادل نش، همان مسیر خروجی را طی می‌کند. بنابراین در بازی معمای زندانی مکرر متناهی فوق، خروجیهای حاصل از استراتژیهای ماشه ( یعنی دنباله متشکل از زوجهای $(c, c)$ ) رخ نمی‌دهد.

• می‌دانیم که هر تعادل کامل زیربازی یک بازی توسعه‌یافته، یک تعادل نش است، بنابراین هر تعادل کامل زیربازی یک بازی "معمای زندانی" مکرر متناهی، مثل هر تعادل نشی، خروجی $(D, D)$ در هر دوره را تولید می‌کند.

| Period: | 1 | … | $t-1$ | $t$ | $t+1$ | … | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(s_1, s_2)$: | $a^1$ | … | $a^{t-1}$ | $(C, X)$ | $(D, D)$ | … | $(D, D)$ |
| Relation between player 1's payoffs: | $\parallel$ | … | $\parallel$ | $\wedge$ | $\wedge\mid$ | … | $\wedge\mid$ |
| $(s_1', s_2)$: | $a^1$ | … | $a^{t-1}$ | $(D, X)$ | $(D, ?)$ | … | $(D, ?)$ |

# نمایش دیاگرامی استراتژیها در معمای زندانی مکرر نامتناهی

۱)

### تعریف فرمال استراتژی ماشه

$$S_i(\emptyset) = C$$

$$S_i(a^1, ..., a^t) = \begin{cases} C & (a_j^1, ..., a_j^t) = (C, ..., C) \text{اگر}, \\ D & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

برای هر تاریخچه $(a^1, ..., a^t)$.

$j$ : بازیکن رقیب.

### نمایش دیاگرامی استراتژی ماشه

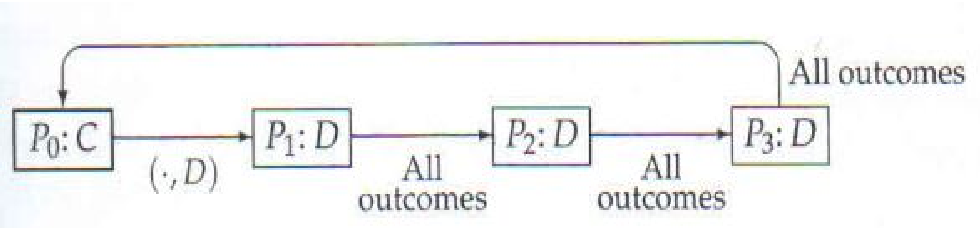
دو حالت $C$ و $D$ را در نظر بگیرید که در آنها به ترتیب $C$ و $D$ انتخاب می‌شود. استراتژی ماشه را می‌توان بصورت زیر نمایش داد

$$\boxed{C:C} \xrightarrow[(\cdot,D)]{} \boxed{D:D}$$

در واقع، بازی در ابتدا با حالت $C$ شروع شده و ادامه می‌یابد و بمحض اینکه بازیکن رقیب، $D$ را انتخاب کرد ( که با فلش مشخص شده است) حالت به $D$ تغییر یافته و بازیکن، $D$ را انتخاب می‌کند و هرگز این حالت را ترک نمی‌کند ( هیچ فلشی از جعبه حالت $D$ خارج نشده است.)

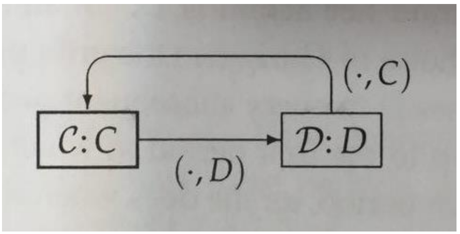
۲) **استراتژی مجازات محدود**

استراتژی‌ای که هر انحراف با فقط سه دوره مجازات می‌شود




۳) **استراتژی مقابله به مثل** $tit\ for\ tat$

انجام بده هر آنچه که بازیکن دیگر در دوره قبل انجام داده است



## برخی تعادلهای نش یک بازی معمای زندانی مکرر نامتناهی

بازی معمای زندانی زیر را درنظر بگیرید

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $C$ | ۲و۲ | ۳و۰ |
| $D$ | ۰و۳ | ۱و۱ |

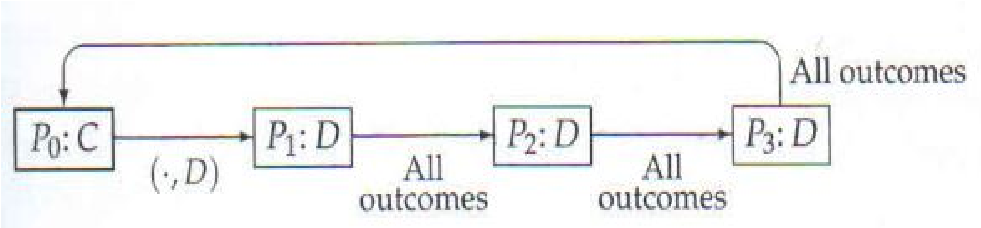
فرض کنید عامل تنزیل هر بازیکن، $\delta$ است.

**(۱) استراتژی‌های ماشه:**

اگر $\frac{۱}{۲} \leq \delta$ باشد دراینصورت زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن از استراتژی ماشه استفاده می‌کند یک تعادل نش مکرر نامتناهی است.

**(۲) استراتژیهای مجازات محدود:**

تعمیمی از استراتژی مجازات محدود در شکل زیر را درنظر بگیرید که در آن، بازیکنی که $D$ را انتخاب می‌کند برای $k$ دوره مجازات می‌شود.




در نمودار فوق $k = ۳$ و در استراتژی ماشه، $k$ نامتناهی است.

زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن، دیگری را درصورت انحراف، برای $k$ دوره مجازات می‌کند یک تعادل نش مکرر نامتناهی است مشروط بر اینکه $k \geq ۲$ و $\delta$ بقدر کافی بزرگ باشد

هر مقدار $k$ بزرگتر باشد، حد پائین $\delta$، کوچکتر می‌شود.

**(۳) استراتژیهای مقابله به مثل:**

اگر $\delta \geq \frac{۱}{۲}$ باشد، دراینصورت، زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن از استراتژی "مقابله به مثل" استفاده می‌کند یک تعادل نش معمای زندانی مکرر نامتناهی است.

## سودهای حاصل از تعادلهای نش بازی مکرر نامتناهی معمای زندانی با تابع سود زیر

| | C | D |
|---|---|---|
| C | ۲و۲ | ۳و۰ |
| D | ۰و۳ | ۱و۱ |

- شناسائی مجموعه سودهای میانگین تنزیل یافته بازیکنان در یک مسیر خروجی دلخواه

۱. زوجهای $(۲,۲)$ و $(۳,۰)$ و $(۰,۳)$ و $(۱,۱)$ برخی از اعضاء مجموعه فوق‌اند.

۲. مسیری را درنظر بگیرید که در آن خروجیها در دوره‌های متوالی بین $(C,C)$ و $(C,D)$ متناوب‌اند.

- سود میانگین بازیکنان در امتداد مسیر عبارتند از به ترتیب ۱ و $\frac{۵}{۲}$.
- سودمیانگین تنزیل یافته بازیکن ۱ (برای هر عامل تنزیل) بیش از ۱ است.
- سود میانگین تنزیل‌یافته بازیکن ۲ (برای هر عامل تنزیل) کمتر از $\frac{۵}{۲}$ است.

بنابراین $(۱,\frac{۵}{۲})$، تقریبی از یک زوج سود میانگین تنزیل‌یافته است مشروط براینکه عامل تنزیل بقدر کافی به ۱ نزدیک باشد.

**نتیجه**

فرض کنید عامل تنزیل به قدر کافی نزدیک به ۱ باشد دراینصورت:

۱. یک دنباله متناهی از خروجیهای بازی استراتژیک را درنظر بگیرید، و مسیر خروجی‌ای را درنظر بگیرید (ناشی از بازی مکرر نامتناهی)، که متشکل از تکرار دنباله‌های متناهی فوق باشد. در اینصورت میانگین سود بازیکنان در دنباله متناهی، تقریبی از میانگین سود تنزیل‌یافته بازیکنان در مسیر خروجی است.

۲. برعکس، برای هر مسیر خروجی بازی مکرر نامتناهی، یک دنباله متناهی از خروجیهای بازی استراتژیک وجود دارد بطوریکه سود میانگین تنزیل‌یافته بازیکنان به سود میانگین آنها در دنباله متناهی نزدیک است.

## تعریف (بردارهای سود شدنی در بازی استراتژیک)

مجموعه بردارهای سود "شدنی" *feasible* از یک بازی استراتژیک، عبارتست از مجموعه همه میانگین‌های وزندار بردارهای سود در بازی استراتژیک.

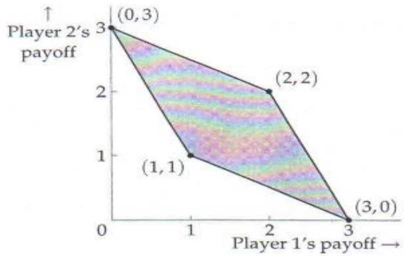
گزاره زیر برای هر بازی استراتژک (نه فقط معمای زندانی) برقرار است.

## گزاره

اگر عامل تنزیل نزدیک به ۱ باشد دراینصورت مجموعه بردارهای سود میانگین تنزیل‌یافته تولید شده توسط مسیرهای خروجی یک بازی مکرر نامتناهی تقریباً برابر است با مجموعه بردارهای سود شدنی در بازی استراتژیک جزء.

## نمایش هندسی مجموعه زوجهای سود شدنی معمای زندانی

| | C | D |
|---|---|---|
| C | ۲و۲ | ۳و۰ |
| D | ۰و۳ | ۱و۱ |




### بازگشت به سؤال اصلی

**سؤال:** مجموعه زوج سودهای میانگین تنزیل‌یافته تعادلهای نش کدامند؟

**پاسخ:** برای پاسخ به سؤال فوق، توجه کنید که

۱. زوج سودهای میانگین تنزیل‌یافته $(۲,۲)$ و $(۱,۱)$، دو عضو از مجموعه فوق‌اند.

۲. سود تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، در هر تعادل نش از یک معمای زندانی مکرر نامتناهی، حداقل برابر $u_i(D,D)$ است.

۳. اگر عامل تنزیل بقدر کافی به ۱ نزدیک باشد دراینصورت هر زوج "شدنی" از سودها که در آن سود هر بازیکن بزرگتر از $u_i(D,D)$ باشد تقریبی از سود میانگین تنزیل‌یافته یک تعادل نش است.

**اثبات:**

- فرض کنید $(x_1, x_2)$ یک زوج سود شدنی یک "معمای زندانی" باشد بطوریکه برای $i = 1, 2$:

$$x_i > u_i(D, D)$$

- فرض کنید $(a^1, ..., a^k)$ یک دنباله متناهی از خروجیها باشد بطوریکه سود میانگین بازیکن $i$–ام، $x_i$، $i = 1, 2$، را به مقدار دلخواهی تقریب می‌زند.

- یک مسیر خروجی از بازی مکرر را درنظر بگیرید که از تکرار دنباله $(a^1, ..., a^k)$ بدست می‌آید و آنرا با $(b^1, b^2, ...)$ نشان دهید. (یعنی $b^{qk+t} = a^t$ برای $q = 0, 1, ...$ و $t = 1, ..., k$ )

- حال شبیه استراتژی ماشه، یک زوج استراتژی برای بازیکنان می‌سازیم بطوریکه مسیر خروجی $(b^1, b^2, ...)$ را تولید کند و بعلاوه برای یک عامل تنزیل بقدر کافی نزدیک به ۱، یک تعادل نش بازی مکرر نامتناهی باشد.

ـ بطور فرمال، استراتژی $s_i$ بازیکن $i$، عمل $b_i^{۱}$ را دور اول انتخاب می‌کند و بعد از هر تاریخچه دیگر مانند $(h^{۱}, \dots, h^{t-۱})$، عمل زیر را انتخاب می‌کند که در آن، $j$، بازیکن رقیب است.

$$S_i(h^{۱}, \dots, h^{t-۱}) = \begin{cases} b_i^t & r = ۱, \dots, t-۱ \text{ برای } h_j^r = b_j^r \text{ اگر}, \\ D & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اگر هر بازیکن از این استراتژی تبعیت کند، دراینصورت خروجی در هر دوره $t$، $b^t$ است.

ـ ادعا: $(s_۱, s_۲)$ یک تعادل نش است هرگاه عامل تنزیل نزدیک به ۱ باشد

| | $1 \dots \ell-1$ | $\ell$ | $\ell+1$ | $\dots$ | $k$ | $1$ | $\dots$ | $k$ | $1$ | $\dots$ | $k$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | Same outcome | $u_1(a^\ell)$ | $u_1(a^{\ell+1})$ | $\dots$ | $u_1(a^k)$ | Average $> w_1$ | | | Average $> w_1$ | | | $\dots$ |
| Dev. | | $v^\ell$ | $\leq w_1$ | $\dots$ | $\leq w_1$ | $\leq w_1$ | $\dots$ | $\leq w_1$ | $\leq w_1$ | $\dots$ | $\leq w_1$ | $\dots$ |

در واقع گزاره قوی‌تر زیر را داریم

## گزاره (قضیه مردمی نش برای معمای زندانی مکرر نامتناهی)

فرض کنید $G$ یک معمای زندانی باشد

- برای هر عامل تنزیل $۱ > \delta > ۰$، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$ در هر تعادل نش بازی مکرر نامتناهی بازی $G$، حداقل $u_i(D, D)$ است.
- فرض کنید $(x_۱, x_۲)$ یک زوج شدنی از سودها در $G$ باشد بطوریکه برای هر بازیکن $i$، $x_i > u_i(D, D)$ است. $۱ > \bar{\delta}$ وجود دارد بطوریکه اگر عامل تنزیل از $\bar{\delta}$ بیشتر باشد، دراینصورت بازی مکرر نامتناهی $G$ دارای یک تعادل نش است که در آن، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، $x_i$ است.
- برای هر مقدار عامل تنزیل، بازی مکرر نامتناهی $G$ دارای یک تعادل نش است که در آن سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$ عبارتست از $u_i(D, D)$.

## تذکر

۱. در قسمت دوم قضیه مردمی نش، توجه کنید که هر مسیر خروجی، که در آن، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن نسبت به $(D,D)$ افزایش یابد لزوماً حاصل از یک تعادل نش نیست.

به عنوان مثال، مسیر خروجی زیر

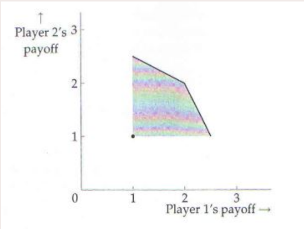
$$((C,C),(D,D),(D,D),...)$$

برای هر عامل تنزیل کمتر از یک، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن را نسبت به $u_i(D,D)$ افزایش می‌دهد ولی هیچ تعادل نشی، این مسیر خروجی را تولید نمی‌کند.

۲. برای بازی استراتژیک معمای زندانی زیر

| | C | D |
|---|---|---|
| C | ۲و۲ | ۰و۳ |
| D | ۳و۰ | ۱و۲ |

مجموعه سودهای میانگین تنزیل‌یافته تعادل نش بازی مکرر نامتناهی فوق، هنگامیکه عامل تنزیل نزدیک به ۱ باشد بصورت زیر است




۳. توجه کنید که قضیه مردمی نش، هیچ چیزی در مورد "استراتژیهای تعادلی" بیان نمی‌کند. اثبات فقط نشان می‌دهد که زوج استراتژیهائی که در آن هر بازیکن، انحرافات را با انتخاب دائمی $D$ "مجازات" می‌کند یک تعادل نش است ولی بیش از این، هیچ مطلبی بیان نمی‌کند.

در واقع قضیه مردمی نش، راجع به مجموعه "سود" حاصل از تعادلهای نش بازیهای مکرر نامتناهی است نه "استراتژیهای" تعادلی.

## تعادلهای کامل زیر بازی و ویژگی تک ـ انحراف

۱. تاکنون چهار تعادل نش بازی مکرر نامتناهی معمای زندانی را معرفی کردیم که استراتژیهای تعادلی در هر کدام عبارتست از

- هر دو بازیکن در هر دوره $D$ را انتخاب می‌کند.
- هر دو بازیکن از استراتژی ماشه تبعیت می‌کند.
- هر دو بازیکن از استراتژی مجازات محدود تبعیت می‌کند.
- هر دو بازیکن از استراتژی مقابله به مثل تبعیت می‌کند.

که سه تعادل نش مستلزم "تهدید به مجازات" است.

۲. بازیهای مکرر، کلاس خاصی از بازیهای توسعه‌یافته‌اند و برخی تعادلهای نش در بازیهای توسعه‌یافته، مستلزم "تهدید" اند که این تهدیدات معتبر نیستند.

به عنوان مثال، به بازی رقیب مراجعه کنید.

۳. آیا تهدیدات بند (۱) معتبرند؟

به عبارت دیگر آیا تعادلهای نش بند (۱)، تعادل کامل زیربازی‌اند؟

## ویژگی تک ـ انحراف

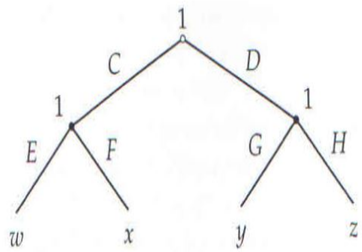
هیچ بازیکنی نمی‌تواند سودش را با تغییر عملش در شروع هیچ زیربازی‌ای که در آن او، اولین حرکت کننده است افزایش دهد، درحالیکه استراتژیهای دیگر بازیکنان و نیز بقیه استراتژی خودش داده شده باشد.

## گزاره (ویژگی تک ـ انحراف تعادلهای کامل زیربازی، بازی با افق متناهی)

یک بردار استراتژی در یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و با افق متناهی، یک تعادل کامل زیربازی است اگر وفقط اگر در ویژگی تک ـ انحراف صدق کند.

## ایده اثبات

بازی با یک بازیکن و دو دوره زیر را درنظر بگیرید.




می‌توان نشان داد که اگر استراتژی $CEG$ در ویژگی تک ـ انحراف صدق کند دراینصورت یک تعادل کامل زیربازی است.

برای بازیهای مکرر نامتناهی با عامل تنزیل کمتر از یک، قضیه زیر را داریم

**گزاره ( ویژگی تک انحراف تعادلهای کامل زیربازی بازیهای مکرر نامتناهی)**

یک بردار استراتژی در یک بازی مکرر نامتناهی با یک عامل تنزیل کمتر از یک، یک تعادل کامل زیربازی است اگروفقط اگر در ویژگی تک انحراف صدق کند.

## بازگشت به سؤال قبل

کدامیک از تعادلهای نش معمای زندانی مکرر نامتناهی در سؤال قبل، تعادل کامل زیربازی است؟

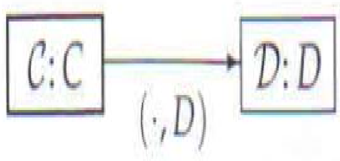
## پاسخ

۱. تعادل نشی که در آن هر بازیکن بعد از هر تاریخچه، $D$ را انتخاب می‌کند، یک تعادل کامل زیربازی است.

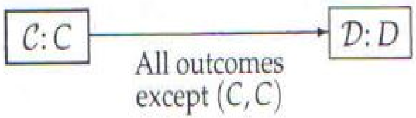
۲. **استراتژی‌های ماشه**

زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن از استراتژی ماشه استفاده می‌کند یک تعادل کامل زیربازی، بازی مکرر نامتناهی معمای زندانی زیر، برای هیچ مقداری از عامل تنزیل "نیست"

| | C | D |
|---|---|---|
| C | ۲و۲ | ۳و۰ |
| D | ۰و۳ | ۱و۱ |

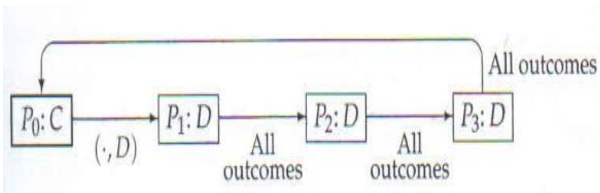


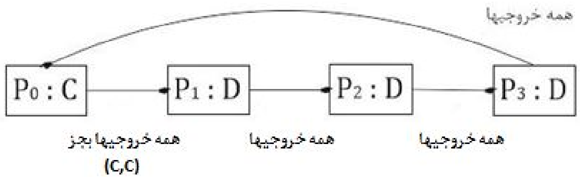
اگر $\delta \geq \frac{۱}{۲}$ باشد دراینصورت یک زوج استراتژی ماشه "اصلاح شده" یک تعادل کامل زیربازی است.




### ۳. استراتژیهای مجازات محدود

زوج استراتژی‌ای که در آن هر بازیکن از استراتژی مجازات محدود استفاده کند یک تعادل کامل زیربازی معمای زندانی مکرر نامتناهی "نیست" ولی اصلاح شده آن یک تعادل کامل زیربازی برای مقادیر بقدر کافی بزرگ $\delta$ است.

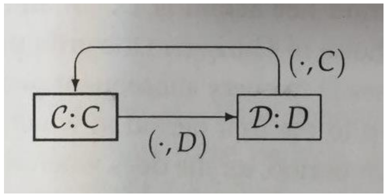


## ۴. استراتژیهای مقابله به مثل

زوج استراتژی (مقابله به مثل، مقابله به مثل) یک تعادل کامل زیربازی معمای زندانی مکرر نامتناهی با سودهای زیر است اگروفقط اگر $\delta = \frac{۱}{۲}$ باشد.

| | C | D |
|---|---|---|
| C | ۲و۲ | ۰و۳ |
| D | ۳و۰ | ۱و۱ |



## شناسائی مجموعه سودهای تعادلهای کامل زیربازی، بازی معمای زندانی مکرر نامتناهی

۱. می‌دانیم که مجموعه سودهای تعادل نش یک معمای زندانی مکرر نامتناهی عبارتست از مجموعه زوجهای سود شدنی $(x_۱, x_۲)$ بطوریکه $x_i > u_i(D, D)$ برای $i = ۱, ۲$ و نیز $(u_۱(D, D), u_۲(D, D))$.

۲. از

$$\text{تعادلهای کامل زیربازی} \subset \text{تعادلهای نش}$$

نتیجه می‌شود

$$\text{زوج سودهای تعادلهای کامل زیربازی} \subset \text{زوج سودهای تعادلهای نش}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که در نامساوی آخر، در واقع تساوی برقرار است.

## گزاره (قضیه مردمی کامل زیربازی معمای زندانی مکرر نامتناهی)

فرض کنید $G$ یک معمای زندانی باشد

- برای هر عامل تنزیل $\delta$، $0 < \delta < 1$، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$ در هر تعادل کامل زیربازی، بازی مکرر نامتناهی $G$، حداقل $u_i(D, D)$ است.
- فرض کنید $(x_1, x_2)$ یک زوج سود شدنی در $G$ باشد بطوریکه برای هر $i$، $x_i > u_i(D, D)$ است. $\bar{\delta} < 1$ وجود دارد بطوریکه اگر عامل تنزیل از $\bar{\delta}$ بیشتر شود، دراینصورت بازی مکرر نامتناهی $G$ دارای یک تعادل کامل زیربازی است که در آن سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، $x_i$ است.
- برای هر مقدار از عامل تنزیل، بازی مکرر نامتناهی $G$ دارای یک تعادل کامل زیربازی است که در آن، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، $u_i(D, D)$ است.

## تعادلهای نش بازیهای مکرر نامتناهی در حالت کلی

در بازی معمای زندانی مکرر نامتناهی، $u_i(D, D)$ دارای دو ویژگی زیر است:

۱. بازیکن $i$ می‌داند که سودش در هر دوره، حداقل $u_i(D, D)$ است.

۲. بازیکن رقیب می‌داند که ( با انتخاب $D$ )، سود بازیکن $i$ در هر دوره، از $u_i(D, D)$ تجاوز نمی‌کند.

یعنی $u_i(D, D)$، کمترین سطحی است که بازیکن رقیب می‌تواند سود بازیکن $i$ را در آن سطح نگه دارد.

بمنظور تعمیم قضیه مردمی نش به بازیهای استراتژیک دلخواه، باید مفهوم فوق را در حالت کلی تعریف کنیم.

لذا تعریف زیر را داریم

## تعریف (سود مینی ماکس در یک بازی استراتژیک)

سود "مینی ماکس" بازیکن $i$ در یک بازی استراتژیک عبارتست از

$$min_{a_{-i}\in A_{-i}}(max_{a_i\in A_i}u_i(a_i,a_{-i}))$$

که در آن برای هر $j$:

$A_j$ : مجموعه عملهای بازیکن $j$–ام

$u_j$ : تابع سود بازیکن $j$–ام

است.

## گزاره (قضیه مردمی نش برای بازیهای مکرر نامتناهی)

فرض کنید $G$ یک بازی استراتژیک باشد که در آن هر بازیکن دارای تعدادی متناهی عمل باشد.

- برای هر عامل تنزیل $\delta$، $0 < \delta < 1$، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن در هر تعادل نش بازی مکرر نامتناهی $G$، حداقل برابر با سود مینی ماکس آن بازیکن است.
- فرض کنید $\omega$ یک بردار سود شدنی از $G$ باشد که برای آن، سود هر بازیکن از سود مینی ماکس او تجاوز کند. $\bar{\delta} < 1$ وجود دارد بطوریکه اگر عامل تنزیل از $\bar{\delta}$ بیشتر باشد، دراینصورت بازی مکرر نامتناهی $G$ دارای یک تعادل نش است که در آن سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، $\omega_i$ است.
- اگر $G$دارای یک تعادل نش باشد که در آن سود هر بازیکن، همان سود مینی ماکس او باشد، دراینصورت برای هر مقدار از عامل تنزیل، بازی مکرر نامتناهی از $G$ دارای یک تعادل نش است که در آن، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، برابر با سود مینی ماکس آن بازیکن است.

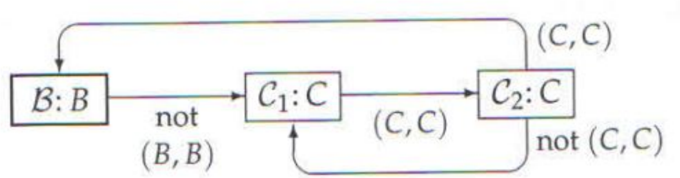
## تعادلهای کامل زیربازی، بازیهای مکرر نامتناهی در حالت کلی

بازی زیر را در نظر بگیرید

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | ۴و۴ | ۰و۳ | ۰و۱ |
| $B$ | ۳و۰ | ۲و۲ | ۰و۱ |
| $C$ | ۱و۰ | ۱و۰ | ۰و۰ |

این بازی دارای یک تعادل نش یگانه $(A,A)$ با سود $(۴,۴)$ است.

حال استراتژی $s$ را بصورت زیر برای یک بازیکن در بازی مکرر نامتناهی در نظر بگیرید




**ادعا:**

اگر عامل تنزیل بقدر کافی به ۱ نزدیک باشد دراینصورت زوج استراتژی $(s,s)$ یک تعادل کامل زیربازی بازی مکرر نامتناهی از بازی استراتژیک فوق است.

## بازیهای دو نفره در حالت کلی

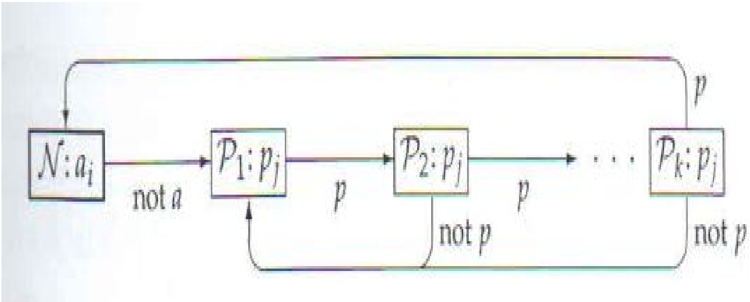
ایده مثال فوق را می‌توان به هر بازی دونفره تعمیم داد.

یک بازی استراتژیک $G$ و یک خروجی آن مانند $a$ را درنظر بگیرید که در آن سود هر بازیکن از سود مینی ماکس او بیشتر است. حال یک تعادل کامل زیر بازی، بازی مکرر نامتناهی از $G$ می‌سازیم بطوریکه خروجی در هر دوره، $a$ باشد.

فرض کنید $p_j$ یک عمل از بازیکن $i$ باشد بطوریکه سود بازیکن $j$ را در حد سود مینی ماکس او نگهدارد. یعنی $p_j$ جوابی از مسأله مینیمم سازی زیر است:

$$min_{a_{-i}\in A_{-i}}(max_{a_i\in A_i}u_i(a_i,a_{-i}))$$

فرض کنید $p = (p_۲, p_۱)$ و فرض کنید $s_i$ یک استراتژی بازیکن $i$ از نوع زیر برای یک مقدار $k$ باشد




**ادعا:**

یک عدد $۱ > \underline{\delta}$ و تابعی مانند $\underline{k}$ وجود دارد بطوریکه اگر $\delta > \underline{\delta}$، آنگاه زوج استراتژی $(s_۱, s_۲)$ که در آن $k = \underline{k}(\delta)$، یک تعادل کامل زیربازی بازی مکرر نامتناهی از $G$ است.

## گزاره (قضیه مردمی کامل زیربازی برای بازیهای مکرر نامتناهی دو نفره )

فرض کنید $G$ یک بازی استراتژیک دو نفره باشد که در آن هر بازیکن دارای تعدادی متناهی عمل باشد.

- برای هر عامل تنزیل $\delta$، $۰ < \delta < ۱$، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن در هر تعادل کامل زیربازی، بازی مکرر نامتناهی $G$، حداقل برابر با سود مینی ماکس اوست.
- فرض کنید $\omega$، یک بردار سود شدنی از $G$ باشد که برای آن، سود هر بازیکن، از سود مینی ماکس او تجاوز کند. $\bar{\delta} < ۱$ وجود دارد بطوریکه اگر عامل تنزیل از $\bar{\delta}$ تجاوز کند، دراینصورت بازی مکرر نامتناهی از $G$، دارای یک تعادل کامل زیربازی است که در آن سود تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، برابر است با $\omega_i$.
- اگر $G$دارای یک تعادل نش باشد که در آن سود هر بازیکن، همان سود مینی ماکس او باشد، دراینصورت برای هر مقدار از عامل تنزیل، بازی مکرر نامتناهی از $G$ دارای یک تعادل کامل زیربازی است که در آن، سود میانگین تنزیل‌یافته هر بازیکن $i$، عبارتست از سود مینی ماکس او.

**تذکر**

گزاره فوق، برای هر بازی با چند بازیکن، که در آن هر بازیکن دارای تعدادی متناهی عمل باشد و بعلاوه تابع هیچ دو بازیکن با هم هم‌ارز نباشند برقرار است.

## بازیهای مکرر متناهی (تعادلهای نش)

برخلاف بازیهای مکرر نامتناهی، ویژگیهای کلیدی تعادلهای یک معمای زندانی مکرر "متناهی" به بازیهای مکرر متناهی در حالت کلی منتقل نمی‌شوند.

### گزاره (قضیه مردمی نش برای بازیهای مکرر متناهی)

فرض کنید $G$ یک بازی استراتژیک باشد بطوریکه، برای هر بازیکن، یک تعادل نش وجود دارد که سود آن بازیکن از سود مینی ماکس او بیشتر است. همچنین فرض کنید $\omega$ یک بردار سود شدنی از $G$ باشد که در آن، سود هر بازیکن از سود مینی ماکس او بیشتر است. دراینصورت برای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد صحیح $T^*$ وجود دارد بطوریکه اگر $T > T^*$، آنگاه بازی مکرر $T-$دوره‌ای از $G$ با عامل تنزیل ۱ ، دارای یک تعادل نش است که در آن، سود میانگین هر بازیکن $i$، در $\varepsilon$ همسایگی $\omega_i$ قرار دارد.

## بازیهای مکرر متناهی (تعادلهای کامل زیربازی)

### گزاره (قضیه مردمی کامل زیربازی برای‌بازیهای مکرر متناهی‌با دو بازیکن)

فرض کنید $G$ یک بازی استراتژیک با دو بازیکن باشد بطوریکه برای هر بازیکن $i$، دارای دو تعادل نش است که در آنها، سود بازیکن $i$ متفاوت است. همچنین فرض کنید $\omega$ یک بردار سود شدنی از $G$ باشد که در آن، سود هر بازیکن از سود مینی ماکس او بیشتر است. دراینصورت برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح $T^*$ وجود دارد بطوریکه برای $T > T^*$، بازی مکرر $T-$دوره‌ای از $G$ با عامل تنزیل یک، دارای یک تعادل کامل زیربازی است که در آن سود میانگین هر بازیکن $i$، در $\varepsilon$ همسایگی $\omega_i$ قرار دارد.