دانشگاه تهران

مروری بر مطالب درس:

- **تابع مولد:**

دنباله $(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots)$ یک سری توانی به صورت زیر است:

$$A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_ix^i + \cdots = \sum_{i\geq 0} a_ix^i$$

- **برخی دنباله ها و توابع مولد متناظر:**

a) $(1,0,\cdots,0,\cdots) \Leftrightarrow 1$

b) $(0,\cdots,0,1,0,\cdots) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}[i=m]x^i = x^m$

c) $(c,c,\cdots,c,\cdots) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}cx^i = \frac{c}{1-x}$

d) $(1,0,1,0,1,0,\cdots) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}[2|i]x^i = \frac{1}{1-x^2}$

e) $(1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\ldots) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}[m|i]x^i = \frac{1}{1-x^m}$

f) $(1,c,c^2,\cdots,c^i,\ldots) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}c^ix^i = \frac{1}{1-cx}$

g) $(1,2,3,\ldots) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}(i+1)x^i = \frac{1}{(1-x)^2}$

h) $(1,\binom{m}{1},\cdots,\binom{m}{m},0,\ldots) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i = (1+x)^m$

i) $\left(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}x^i = log(1+x)$

j) $\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 1}\frac{1}{i}x^i = log\frac{1}{1-x}$

k) $\left(1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}\frac{x^i}{i!} = exp\,(x)$

l) $\left(1,0,\frac{1}{2!},0,\frac{1}{4!},\ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}\frac{x^{2i}}{(2i)!} = cosh\ x$

m) $\left(0,1,0,\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},\ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} = sinh\ x$

n) $\left(1,0,-\frac{1}{2!},0,\frac{1}{4!},\ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^ix^{2i}}{(2i)!} = cos\ x$

- **نکاتی درباره سری های توانی:**

- $\sum_{i\geq 0}a_ix^i + \sum_{i\geq 0}b_ix^i = \sum_{i\geq 0}(a_i+b_i)x^i$

- $\sum_{i\geq 0} a_i x^i . \sum_{i\geq 0} b_i x^i = \sum_{i\geq 0} c_i x^i$
- که در آن' دنباله c_i حاصلضرب کوشی دو دنباله a_i و b_i است:
- $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i$
- $\frac{d}{dx}(\sum_{i\geq 0} a_i x^i) = D(\sum_{i\geq 0} a_i x^i) = \sum_{i\geq 1} i a_i x^{i-1} = \sum_{i\geq 0}(i+1) a_{i+1} x^i$

- **حاصلضرب کوشی یا کانولوشن (پیچش):**
- $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \Longrightarrow c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_i$

- **حاصلضرب سه سری توانی:**
- $E(x) = \sum_{i\geq 0} f_i x^i \sum_{i\geq 0} g_i x^i \sum_{i\geq 0} h_i x^i,$
- $e_k = [x^k]E(x)$
- $\Longrightarrow e_k = \sum_{i_1+i_2+i_3=k} f_{i_1} g_{i_2} h_{i_3}$
- **حاصلضرب چند سری توانی:**

$F^{(1)}(x) = \sum_{i\geq 0} f^{(1)}{}_i x^i, \dots, F^{(m)}(x) = \sum_{i\geq 0} f^{(m)}{}_i x^i$

$E(x) := F^{(1)}(x) \dots F^{(m)}(x)$

$e_k = [x^k]E(x)$

$\Longrightarrow e_k = \sum_{i_1, \dots, i_m \geq 0, i_1 + \dots + i_m = k} f^{(1)}{}_{i_1} f^{(2)}{}_{i_2} \dots f^{(m)}{}_{i_m}$

- فرض کنید داشته باشیم:
- $F(x) = \sum_{i\geq 0} f_i x^i$
- $G(x) = \sum_{i\geq 0} g_i x^i$
- در این صورت اگر m یک عدد صحیح نامنفی باشد داریم:

a. $\alpha F(x) + \beta G(x) = \sum_{i\geq 0}(\alpha f_i + \beta g_i) x^i$
b. $x^m G(x) = \sum_{i\geq m} g_{i-m} x^i$
c. $\frac{G(x) - g_0 - g_1 x - \dots - g_{m-1} x^{m-1}}{x^m} = \sum_{i\geq 0} g_{i+m} x^i$
d. $\frac{1}{1-x} G(x) = \sum_{k\geq 0}(\sum_{i=0}^{k} g_i) x^k$
e. $\int_0^x G(t) dt = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} g_{i-1} x^i$

خواص مربوط به مشتق و برخی عملگرهای مرتبط:

f. $D^m G(x) = \sum_{i\geq m} i^{\underline{m}} a_i x^{i-m}$
g. $xD\, G(x) = \sum_{i\geq 0} i a_i x^i$
h. $(xD)^m G(x) = \sum_{i\geq 0} i^m a_i x^i$

i. $x^2D\ G(x) = \sum_{i\geq 0} i a_i x^{i+1}$

j. $(x^2D)^m\ G(x) = \sum_{i\geq 0} i^{\overline{m}} a_i x^{i+m}$

- **درباره کاربرد توابع مولد در ارتباط با روابط بازگشتی**

قضیه: فرض کنید $c_1, c_2, \cdots, c_k \neq 0$ اعداد داده شده ای باشند و دنباله $\{a_n\}$ به ازای $n \geq v$ در رابطه $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$ صدق کند. در این صورت با قراردادن $-\Delta^R(r) = c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \cdots + c_1 r - 1$ و $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ خواهیم داشت:

$$-\Delta^R(x)A(x)\epsilon P(x)$$

که $P(x)$ مجموعه چندجمله ای های برحسب x است.

- **تابع مولد نمایی:**

تابع مولد نمایی دنباله $\{a_n\}_{n\geq 0}$ عبارت است از سری توانی صوری $A(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

سوالات کلاس حل تمرین:

۱) رابطه $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$ را به ازای اعداد صحیح مثبت x را به صورت ترکیبیاتی ثابت کنید. چگونه می توان از این موضوع درستی کلی این رابطه را نتیجه گرفت؟

۲) از تساوی $\sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$ فرمول تابع مولد نمایی اعداد بل که به صورت $e^{e^x - 1}$ می باشد را نتیجه بگیرید.

۳) اگر $T_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T(n,k)}{n!} x^n$ به ازای اعداد صحیح $k \geq 0$. آنگاه ثابت کنید $T'_k(x) = k(T_k(x) + T_{k-1}(x))$.

۴) فرض کنید a_n تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = n$ باشد. فرمول تابع مولد دنباله a_n محاسبه کنید.

۵) فرض کنید $n \geq 4$ عدد طبیعی باشد. ثابت کنید تعداد دنباله ها به طول n با ارقام 0 و 1 که در آن ها زیررشته "01" دقیقا دوبار ظاهر می شود برابر با $\binom{n+1}{5}$ می باشد.

پاسخ سوالات کلاس حل تمرین:

۱)

x^n تعداد حالاتی است که می توان n شی متمایز را در x جعبه متمایز تقسیم کرد. حالا فرض کنید تعداد جعبه های ناتهی برابر با k باشد. حال ابتدا n شی را به k مجموعه ناتهی افراز می کنیم که به $\left\{ n \atop k \right\}$ حالت انجام می شود. سپس بر هرکدام از k مجموعه یکی از جعبه ها را متناظر می کنیم. این کار به $x^{\underline{k}}$ حالت انجام می شود. پس داریم: $\sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$

بنابراین تعداد حالات تقسیم n شی متمایز در x جعبه متمایز را به شکل دیگری شمرده ایم. پس طرف سمت چپ و راست برابرند. بنابراین:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$$

۲)

رابطه $B(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$ را در نظر بگیرید. تعداد حالات افراز n شی برابر با مجموع تعداد حالات افراز n شی به k مجموعه ناتهی است. حال تابع مولد نمایی $B(n) = a_n$ را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} B(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{n!}$$

در عبارت بالا جای سیگماها را عوض می کنیم. پس داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{k!} = \sum_{k=0}^{n=+\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

حال می دانیم که بسط مک لورن تابع e^x برابر می باشد با:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

همچنین رابطه زیر را نیز داریم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \Longrightarrow f\big(g(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} g^n(x)$$

پس داریم:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a = e^{e^x - 1}$$

۳)

شی $n+1$ را در نظر بگیرید. این شی یا در داخل جعبه به طور تنها قرار دارد یا با اشیا دیگر.

در حالت اول جعبه ای که در داخل آن قرار می گیرد k حالت دارد و n شی دیگر در $k-1$ جعبه دیگر قرار می گیرند. یعنی: $kT(n,k-1)$ حالت.

در حالت دوم ابتدا n شی را در k جعبه قرار می دهیم سپس شی $n+1$ را در یکی از k جعبه قرار می دهیم. پس تعداد حالات $kT(n,k)$ است. بنابراین:

$$=\sum_{n=k-1}^{+\infty}\frac{T(n+1,k)}{n!}x^n=\sum_{n=k-1}^{+\infty}\frac{k(T(n,k)+T(n,k-1))}{n!}x^nT'_k(x)=\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{T(n,k)}{n!}x^n\right)'=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{T(n,k)x^{n-1}}{(n-1)!}$$

و داریم:

$$\sum_{n=k-1}^{+\infty}\frac{k(T(n,k)+T(n,k-1))}{n!}x^n=\mathrm{k}\sum_{n=k-1}^{+\infty}\frac{T(n,k)}{n!}x^n+\mathrm{k}\sum_{n=k-1}^{+\infty}\frac{T(n,k-1)}{n!}x^n$$
$$=\mathrm{k}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{T(n,k)}{n!}x^n+\mathrm{k}\sum_{n=k-1}^{+\infty}\frac{T(n,k-1)}{n!}x^n=\mathrm{k}\,T_k(x)+\mathrm{k}\,T_{k-1}(x)=\mathrm{k}\,(T_k(x)+T_{k-1}(x))$$

۴)

$$(a_n)_{n=1}{}^{+\infty}=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$

تابع مولد دنباله a_n برابر عبارت بالا خواهد بود.

برهان:

باید ثابت کنیم که ضریب x^n در عبارت بالا برابر با a_n خواهد بود. هر x^n که در عبارت بالا ساخته می شود را در نظر بگیرید.

$$x^n=x^{a_1}.x^{a_2}.x^{a_3}.x^{a_4}$$

x^{a_1} جمله ای از عبارت اول می باشد که در ساخت x^n شرکت داشته. x^{a_2} جمله ای از عبارت دوم می باشد که در ساخت x^n شرکت داشته است و به همین ترتیب برای x^{a_3} و x^{a_4}. بنابراین داریم:

$$n=a_1+a_2+a_3+a_4$$

همچنین می دانیم که: $2|a_2$ و $3|a_3$ و $4|a_4$. پس در واقع هر 4 تایی (a_1,a_2,a_3,a_4) متناظر با یک جواب معادله خواهد بود. بطوریکه $(a_1,\frac{a_2}{2},\frac{a_3}{3},\frac{a_4}{4})$ جواب معادله می باشند. پس ضریب x^n برابر با a_n می باشد.

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^3}.\frac{1}{1-x^4}$$

۵)

روش اول:

فرض کنید دنباله a_n تعداد حالات مسئله باشد. تابع مولد دنباله a_n را می سازیم:

حالت اول: عبارت با صفر شروع شود:

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) = x^4 . \frac{1}{(1-x)^5}$$

ضریب x^n برابر با تعداد دنباله هایی که با صفر شروع می شوند و دارای دقیقا دو زیررشته 01 می باشند.

هر دنباله با ویژگی ذکر شده به فرم $0^{a_1}1^{a_2}0^{a_3}1^{a_4}0^{a_5}$ می باشد به طوریکه $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = n$ و $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 1$ و $a_5 \geq 0$.

حالت دوم: عبارت با یک شروع شود:

$$g(x) = (x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$$
$$= x^5 . \frac{1}{(1-x)^6}$$

ضریب x^n برابر با تعداد دنباله هایی که با یک شروع می شوند و دارای دقیقا دو زیررشته 01 می باشند.

هر دنباله با ویژگی ذکر شده به فرم $1^{a_1}0^{a_2}1^{a_3}0^{a_4}1^{a_5}0^{a_6}$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = n$ و $a_1, \ldots, a_5 \geq 1$ و $a_6 \geq 0$.

بنابراین:

$$(a_n)_{n=1}^{+\infty} = f(x) + g(x) = x^4 . \frac{1}{(1-x)^5} + x^5 . \frac{1}{(1-x)^6}$$

رابطه زیر را داریم:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) \ldots (n+k-1)x^n$$

$$\Rightarrow x^4.\frac{1}{(1-x)^5}+x^5.\frac{1}{(1-x)^6}$$
$$=\frac{x^4}{4!}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^n+\frac{x^5}{5!}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^{n+4}}{4!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)x^{n+5}}{5!}$$

حال می دانیم $n \geq 4$. پس:

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+4}{4}x^{n+4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+5}{5}x^{n+5}=x^4+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n+4}{4}x^{n+4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+5}{5}x^{n+5}$$

$$=x^4+\sum_{n=5}^{+\infty}\binom{n}{4}x^n+\sum_{n=5}^{+\infty}\binom{n}{5}x^n=x^4+\sum_{n=5}^{+\infty}(\binom{n}{4}+\binom{n}{5})x^n=x^4+\sum_{n=5}^{+\infty}\binom{n+1}{5}x^n=\sum_{n=4}^{+\infty}\binom{n+1}{5}x^n$$

روش دوم (بدون حالت بندی):

هر دنباله به فرم $1^{a_0}0^{a_1}1^{a_2}0^{a_3}1^{a_4}0^{a_5}$ می باشد. به طوریکه $a_0+a_1+\cdots+a_5=n$ و $a_1,a_2,a_3,a_4 \geq 1$ و $a_0,a_5 \geq 0$. پس داریم: $x^4\frac{1}{(1-x)^6}$

بنابراین:

$$x^4.\frac{1}{(1-x)^6}=x^4\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+5}{n}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+5}{5}x^{n+4}=\sum_{n=4}^{+\infty}\binom{n+1}{5}x^n$$