جلسه شانزدهم

تعریف: فرض کنید g و f توابع حقیقی و یک متغییره باشند.(معمولا مقادیر این متغییر را اعداد نامنفی فرض میکنیم.) نماد $f(n) = O(g(n))$ به این معنی است که ثابت های n و C موجودند که به ازای $n \geq n_0$ نامساوی $|f(n)| \leq C\, g(n)$ برقرار است.

مثال:

$$(7n^2 + 6n + 2)(n^3 - 3n + 2^8) = O(n^5)$$

گزاره: فرض کنید $C, a, \alpha, \beta > 0$ اعداد حقیقی مشخصی مستقل از n باشند. داریم:

۱- اگر $\alpha \leq \beta$ آنگاه $n^\alpha = O(n^\beta)$

۲- به ازای هر $a > 1$ داریم $n^C = O(a^n)$

۳- به ازای هر $\alpha > 0$ داریم $(\ln(n))^C = O(n^\alpha)$

اثبات : تمرین

مثال:

قرار دهید $f(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ در جستوجوی یک ترکیب مجانبی خوب برای $f(n)$ هستیم.

روش اول:

$$f(n) = 1^3 + \dots + n^3 \leq n^3 + \dots + n^3 = n^4$$

از سوی دیگر لااقل $\frac{n}{2}$ جمع وندها در حاصل جمع $\sum_{i=1}^{n} i^3$ بزرگتر یا مساوی $\left(\frac{n}{2}\right)^3$ هستند؛

جلسه شانزدهم

لذا $f(n) \geq \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^4$

$$\frac{n^4}{16} \leq f(n) \leq n^4$$

روش دوم : برای به دست آوردن تقریب بهتر میتوانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}$$

قرار دهید $g(k) = \binom{k}{3}$ در نتیجه :

$$g(k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{k^3}{6} + O(k^2)$$

در نتیجه:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{8} k^3 = \sum_{k=1}^{n} 6g(k) + \sum_{k=1}^{n}\left(k^3 - 6g(k)\right)$$

$$= 6\binom{n+1}{4} + O\left(\sum_{i=1}^{n} k^2\right) = \frac{n^4}{4} + O(n^3)$$

تبصره:

علامت O برای توابع با بیش از یک متغییر هم به کار می رود. به عنوان نمونه $f(m, n) = O(g(m, n))$

به این معنی است که به ازای ثوابتی مانند C, m_0, n_0 نامساوی $|f(m, n)| \leq C\, g(m, n)$

به ازای $n \geq n_0$ و $m \geq m_0$ برقرار است.

جلسه شانزدهم

معنا	تعریف	نماد
f بسیار آهسته تر از g رشد میکند.	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	$f(n) = o(g(n))$
fلااقل با همان سرعت g رشد میکند.	$g(n) = O(f(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$
fو g تقریبا دارای مرتبه ی بزرگی یکسانی هستند.		$f(n) = \Theta(g(n))$
f(n)و g(n) تقریبا یکی هستند.	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	$f(n) \sim g(n)$

تقریبی برای $n!$ از گاوس:

قضیه : به ازای هر $n \geq 1$ داریم :

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} n! = \prod_{i=1}^{n} i \\ \\ n! = \prod_{i=1}^{n} (n+1-i) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i) \qquad (*)$$

$$n \leq i(n+1-i) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

جلسه شانزدهم

$$(*)\ \ n^n \le (n!)^2 \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \quad \Longrightarrow \quad \text{حکم}$$

قضیه: به ازای هر $n \ge 1$ ، داریم:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(در صفحه ۸۹ کتاب ، دو اثبات برای این قضیه مطرح شده است.)

لم: به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$1 + x \le e^x$$

تبصره: فرمول استرلینگ

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

تبصره: در تمرین ۱۳ صفحه ۹۳ثابت میشود :

$$\ln(n) \le H_n \le \ln(n+1)$$

تبصره : میتوان ثابت کرد :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O(n^{-1})$$

$\gamma = 0/5772156649$ (ثابت اویلر)

مقدمه :چیزی که راجع به ضرایب دو جمله ای میدانیم:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$$

قضیه: به ازای هر $n \ge 1$ و هر k ، $1 \le k \le n$ داریم:

جلسه شانزدهم

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{k}}$$

برای اثبات ، نامساوی قوی تر زیر را ثابت میکنیم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{k}}$$

برای اثبات نامساوی فوق x را عدد حقیقی مثبت دلخواهی فرض میکنیم. داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\mathrm{x} + \ldots + \binom{n}{k}\mathrm{x}^{\mathrm{k}} \leq (1+\mathrm{x})^{\mathrm{k}}$$

پس

$$\frac{1}{x^k}\binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k+1}}\binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^k}{x^k}$$

حال فرض میکنیم $0 < \mathrm{x} < 1$ در این حالت داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} \leq \frac{1}{x^k}\binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k+1}}\binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^k}{x^k}$$

پس

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

و با قرار دادن $\mathrm{x} = \frac{k}{n}$ به دست می آید:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} \leq \left(1+\frac{k}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}\left(\frac{n}{k}\right)^{k}$$

اما می دانیم (بنابر گزاره ۴. ۵. ۳)

$$\left(1+\frac{k}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} \leq (e^{\frac{k}{n}})^n \leq e^k$$

جلسه شانزدهم

پس نهایتا داریم

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \le \left(\frac{en}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{k}}$$

مقدمه: میتوان ثابت کرد :

$$\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \le 2^n$$

گزاره: به ازای هر $\mathrm{n} \ge 1$ داریم:

(صفحه ۹۶ کتاب ماتوشک)

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$