جلسه دوم:

روابط بازگشتی

$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = PS$

$S_n = x_1^n + x_2^n$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 - Sx + P = 0$

$$\begin{cases} x_1^2 - Sx_1 + P = 0 \\ x_2^2 - Sx_2 + P = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1^n - Sx_1^{n-1} + Px_1^{n-2} = 0 \\ x_2^n - Sx_2^{n-1} + Px_2^{n-2} = 0 \end{cases} \to S_n - SS_{n-1} + PS_{n-2} = 0$$

$S_n = x_1^n + x_2^n$

$S_n = SS_{n-1} - PS_{n-2} \quad . \ n \geq 2$

$S_0 = 2. S_1 = S$

$S_2 = SS_1 - PS_0 = S^2 - PS_0 = S^2 - 2P$

$S_3 = SS_2 - PS_1 = S(S^2 - 2P) - PS = S^3 - 3PS$

$S_4 = S^4 - 4PS^2 + 2P^3$

مثال: اضلاع مثلثی با ریشه های معادله ی زیر هستند.بدون حل معادله مساحت مثلث را پیدا کنید.

$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$

اصل استقرای ریاضی:(Induction)

فرض کنیدP خاصیتی مربوط به اعداد باشد بطوریکه:

$P(1)$(مقدمه)

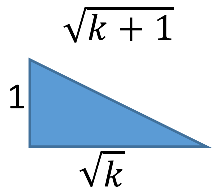
$P(k) \to P(k+1)$(مرحله استقرایی)

در این صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت nداریم$P(n)$

مثال:ثابت کنید با در اختیار داشتن طول واحد با استفاده از خط کش غیر مندرج و پرگار به ازای هر عدد صحیح n ,$\sqrt{n}$را میتوان رسم کرد

$P(1): \sqrt{1} = 1$

$P(k) \to P(k+1)$



مثال:ثابت کنید نامساوی زیر به ازای هر عدد صحیح $n \geq 4$ برقرار است:

$2^n < n!$

$P(4):\ 16 = 2^4 < 4! = 24$

$$P(k): 2^k < k! \ \to 2 * 2^k < 2\,k! \ \to 2^{k+1} < 2\,k! < (k+1)k! = (k+1)! \to P(k+1)$$

مثال:فرض کنید c عددی صحیح و بزرگتر از 1 باشد.ثابت کنید نامساوی زیر به ازای $n = 1.2.\dots.c$ برقرار است

$c^n > n!$

$P(1): c > 1! = 1$

$$\big(k < c\,.P(k)\big): c^k > k! \ \underset{k<c}{\longrightarrow} c^{k+1} = c * c^k > c * k! \geq (k+1)k! = (k+1)! \to P(n+1)$$

(استقرای کراندار)

مثال:مطلوب است محاسبه مجموع n عدد فرد مثبت ابتدا از 1

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$P(n): 1 + 3 + \cdots + (2\,n - 1) = n^2$

اثبات:

$P(1): 1 = 1$

$$P(k): 1 + 3 + \cdots + (2\,k - 1) = k^2 \ \to 1 + 3 + \cdots + (2\,k - 1) + (2\,k + 1) = k^2 + 2\,k + 1 = (k+1)^2 \to P(k+1)$$

تمرین:حاصل مجموع زیر را محاسبه کنید:

$1 * 1! + 2 * 2! + 3 * 3! + \cdots + 99 * 99!$

مثال:ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح نامنفی n و هر عدد حقیقی $\alpha = k\pi$ داریم:

$$\cos\alpha \cos 2\,\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+2}\,\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

تمرین:عبارت زیر را ساده کنید.

$$1)\ f_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} \ldots + (-1)^n\ \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$
$$2)\ h_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$

مثال:به ازای عدد صحیح نامنفی n قرار دهید:

$$a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$$

و به ازای $n \geq 2$ مقدار جمله a_n را بر حسب $a_{n-1}.\,a_{n-2}$ به دست اورید.سپس ثابت کنید a_n عددی است صحیح و قابل قسمت بر 2^n.

$$n = 1:\ a_1 = (3+\sqrt{5})^1 + (3-\sqrt{5})^1 = 6$$

$$n = 2:\ a_2 = \left(3+\sqrt{5}\right)^2 + (3-\sqrt{5})^2 = 3^2 * 2 + \sqrt{5}^2 * 2 = 10 + 18 = 28$$

$$\alpha = 3+\sqrt{5}\ .\ \beta = 3-\sqrt{5}\ .\ a_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$a_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \rightarrow (\alpha+\beta)a_{n-1} = (\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$
$$= \alpha^n + \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \beta\alpha^{n-1} = a_n + \alpha\beta\, a_{n-2} \xrightarrow[\alpha+\beta=6]{\alpha\beta=4}$$

$$\rightarrow 6a_{n-1} = a_n + 4a_{n-2} \rightarrow a_n = 6a_{n-1} - 4a_{n-2}\,.\, n \geq 2$$

$$a_0 = 2\,.\ a_1 = 6$$

میخواهیم ثابت کنیم a_n عدد صحیح است

$$\begin{cases} 1)\ P(1) \wedge P(2) \\ 2)\forall k(P(k) \wedge P(k+1)) \rightarrow P(k+2) \end{cases}$$

از (1) و (2) نتیجه میشود به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم $P(n)$

$$P(0):\ a_0 = 2\,.\,1 = 2^0|2$$

$$P(1):\ a_1 = 6\,.\,2^1|6$$

$$P(k):\ 2^k|a_k\ \left(\text{صحیح}\right)$$

$$P(k+1):\ 2^{k+1}|a_{k+1}\left(\text{صحیح}\right)$$

$$\rightarrow a_{k+2} = 6a_{k+1} - 4a_k = 6 * 2^{k+1}b_{k+1} - 4 * 2^k b_k$$

$$\rightarrow a_{k+2} = 2^{k+2}(3b_{k+1} - b_k) \rightarrow P(k+2)$$

مثال: (دنباله فیبوناتچی)

$$f_0 = 0 \,.\, f_1 = 1 \,.\, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n > 1)$$

ثابت کنید:

$$f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2\,n-1}$$

$$n = 1 \rightarrow f_1^2 + f_0^2 = f_1 = 1 + 0 = 1$$

$$n = k \rightarrow f_k^2 + f_{k-1}^2 = f_{2\,k-1}$$

$$\begin{aligned} n = k+1 \rightarrow f_{k+1}^2 + f_k^2 &= f_{2\,k+1} = f_{k+1}^2 + f_{2\,k-1} - f_{k-1}^2 = f_{2\,k-1} + f_{2\,k} \\ &= f_{k+1}^2 - f_{k-1}^2 = f_{2\,k} \end{aligned}$$

راه حل دوم: (استقرا توام/متقارن)

$$\begin{cases} P(k+1): \\ \quad P(k): \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_{k+1}^2 + f_k^2 = f_{2\,k+1} \\ f_k^2 + f_{k-1}^2 = f_{2\,k-1} \end{cases}$$

(کم میکنیم) $f_{k+1}^2 - f_{k-1}^2 = f_{2\,k+1} - f_{2\,k-1}$

$$(f_{k+1} - f_{k-1})(f_{k+1} + f_{k-1}) = f_{2\,k} \xrightarrow[(f_{k+1} - f_{k-1}) = f_k]{}$$

$$Q(k):\ f_k f_{k+1} + f_k f_{k-1} = f_{2\,k}$$

$$P(1) \land Q(1)$$

$$\big(P(k) \land Q(k)\big) \rightarrow P(k+1)$$

$$\big(P(k+1) \land Q(k)\big) \xrightarrow[\text{لطفا بررسی شود}]{} Q(k+1)$$

تمرین:بدون به کار بردن قضیه دو جمله ای ثابت کنید به ازای اعداد صحیح مثبت m و n عدد صحیح مثبتی مانند P وجود دارد که :

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$