

جلسه سیزدهم

مسئله 49: تعداد جایگشت هایی را که می توان با به کار بردن همه مولفه های $1,1,2,2,\dots,n,n$ نوشت به طوری که مولفه های مجاور متمایز باشند a_n می نامیم. یک رابطه بازگشتی برای a_n بدست آورید.

تعریف: عدد استرلینگ نوع اول بدون علامت که آن را با $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ نمایش می دهند، مساوی تعداد راه های قرار گرفتن n شخص متمایز دور k میز یکسان است به طوری که هیچ میزی خالی نباشد.

مسئله 50: یک رابطه بازگشتی برای $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ به دست آورید.

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]$$

	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	2	3	1	0
4	0	6	11	6	1

مسئله 51: ثابت کنید :

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k$$

نتیجه 53: ثابت کنید $\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = n! H_n$ که در آن $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

مسئله 54:

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

$$0 \leq m < n \Rightarrow \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} (H_n - \frac{1}{m+1})$$

$$0 \leq m \leq n \Rightarrow \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} (H_n - H_m)$$

نتیجه 55: ثابت کنید:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

مسئله 56: تعداد راه های فرش کردن یک مستطیل $1 \times (n-1)$ با موزاییک های 1×1 با r زنگ و موزاییک های 1×2 با s رنگ را u_n می نامیم. یک رابطه بازگشتی برای u_n بیابید سپس ثابت کنید در حالت $r = s = 1$ داریم $u_n = f_n$.

نتیجه 57: با استفاده از مسئله قبل رابطه ی زیر را به صورت ترکیبیاتی ثابت کنید.

$$f_{n+m+1} = f_{n+1} f_{m+1} + f_n f_m$$

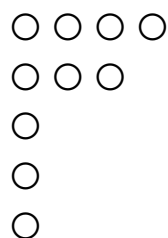
تعریف: $P_k(n)$ تعداد افراز های عددی n به k جزء و $\overline{P}_k(n)$ تعداد افراز های عددی حداکثر به k جزء. مسئله 58: ثابت کنید:

$$P_k(n) = \overline{P}_k(n - k)$$

$$\overline{P}_k(n) = P_k(n + k)$$

یادداشت: نمودار فررز برای افراز های عددی:

$$10 = 4 + 3 + 1 + 1 + 1$$



مسئله 59: ثابت کنید $P_k(n) = P_{k-1}(n-1) + P_k(n-k)$

مسئله 60: رابطه ی بازگشتی برای T_n تعداد درخت های مرتب دودویی کامل با n برگ بنویسید.

مسئله 61: اعداد wedderburn-etherington

اگر W_n تعداد درخت های نامرتب دودویی کامل n برگی باشد ثابت کنید:

$$W_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} W_i W_{n-i} & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{n-1} W_i W_{n-i} + W_{\frac{n}{2}}) & n \text{ زوج} \end{cases}$$