۱) فرض کنید a و b اعداد صحیحی باشند که $0 \le a \le b$ برقرار است. تعداد جواب‌های صحیح نامعادله $a \le |x_1| + \cdots + |x_r| < b$ در هر یک از حالت زیر محاسبه کنید.

الف) x_i ها مخالف صفر باشند.

ب) x_i ها اعداد صحیح دلخواه باشند.

پاسخ:

کافیست تعداد جواب‌های نامعادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r < b$ را پیدا کرده، سپس تعداد جواب‌های نامعادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r < a$ را از آن کم کنیم. بنابراین سعی می‌کنیم با اضافه کردن متغیر جدید به نامعادله‌های فوق، آن‌ها را به معادله تبدیل کنیم. پس خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r + y = b \quad , \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_r + z = a \qquad y, z > 0$$

حال چون مقادیر x_i ها داخل قدرمطلق هستند، در حالتی که مخالف صفر باشند، کافیست تعداد جواب‌های معادله فوق را در 2^r ضرب کنیم تا مقادیر منفی نیز لحاظ شوند. ولی اگر x_i ها مقدار صحیح دلخواه داشتند، می‌بایست عمل گفته شده را انجام دهیم و در آخر $(b-a) \times 2^r$ واحد را از جواب بدست آمده کم کنیم زیرا 0 منفی نمی شود.

الف) تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r + y = b$ که در آن شرایط $x_i\,, y > 0$ برقرار است، برابر است با:

$$\binom{b - \big((r+1)(0)\big) - 1}{r + 1 - 1} = \binom{b-1}{r}$$

همچنین تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_r + z = a$ که در آن شرایط $x_i\,, z > 0$ برقرار است، برابر است با:

$$\binom{a - \big((r+1)(0)\big) - 1}{r + 1 - 1} = \binom{a-1}{r}$$

در نهایت داریم: $\left(\binom{b-1}{r} - \binom{a-1}{r}\right) \times 2^r$.

ب) مانند قسمت الف، قدرمطلق‌ها را حذف می‌کنیم و حالت های اعداد منفی را در آخر لحاظ می‌کنیم. معادله $a \le x_1 + \cdots + x_n < b$ برابر است با مجموع تعداد جواب معادله‌های $\sum_{i=1}^{r} x_i = a, \ldots, \sum_{i=1}^{r} x_i = b - 1$. از آنجایی که x_i ها می‌توانند 0 باشند و 0 مقدار منفی و مثبت ندارد، پس تعداد جواب هرکدام از معادله‌های بالا را به x_i هایی افراز می‌کنیم که 0 نیستند. به عنوان مثال، جواب معادله $\sum_{i=1}^{r} x_i = a$ برابر است با:

$$\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\times 2^k\times\binom{a-1}{k-1}$$

که k برابر تعداد x_i های مخالف صفر است. در واقع از بین r جمع‌وند موجود، k تا را به $\binom{r}{k}$ روش انتخاب می‌کنیم و حالت‌هایی که به‌خاطر قدرمطلق می‌توانند منفی باشند را لحاظ می‌کنیم(در 2^k ضرب می‌کنیم). و در آخر جواب‌های طبیعی را برای k جمع‌وند بدست می‌آوریم. پس جواب مسئله برابر است با: $\sum_{S=a}^{b-1}\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}2^k\binom{s-1}{k-1}$. این نکته را بدانید که اگر $0\in a$، به جواب نهایی 1 را اضافه می‌کنیم زیرا حالتی که همه x_i ها 0 باشند، محاسبه نشده‌است.

۲) ثابت کنید تعداد راه‌های نوشتن n به صورت مجموعه‌ای از جمع‌وندهای $1,2,3$ بدون مهم بودن ترتیب جمع‌وندها، به طوری که هر یک از این جمع‌وندها حداقل یک بار مورد استفاده قرار گیرند، برابر عبارت زیر است:

$$1+\left\lfloor\frac{n(n-6)}{12}\right\rfloor$$

پاسخ:

تعداد راه‌های نوشتن n به صورت مجموعه جمع‌وندهای $1,2,3$ به طوری که حداقل یک‌بار مورد استفاده قرارگیرند برابر است با جواب های معادله زیر:

$$x_1+2x_2+3x_3=n$$
$$x_i\geq 1$$

با تغییر متغیر داریم:

$$A=x_3\quad,\quad B=x_2+x_3\quad,\quad C=x_1+x_2+x_3$$

بنابراین معادله بالا به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$A+B+C=n\quad;\quad A\geq 1\quad,\quad B\geq 2\quad,\quad C\geq 3$$

اگر شرط‌ها را کنار بگذاریم و فرض کنیم که $A,B,C\geq 1$ باشد. آن‌گاه تعداد کل جواب‌های معادله برابر با $\binom{n-1}{2}$ می‌شود. حال اگر سه حالت $A=B$ و $A=C$ و $B=C$ را از تعداد کل حالات کم کنیم و جواب بدست آمده را بر تعداد جایگشت‌ها یعنی $3!=6$، تقسیم کنیم، تنها حالت $C>B>A$ حساب می‌شود که نشان‌دهنده $C\geq 3$, $B\geq 2$ و $A\geq 1$ است.

فرض کنید B و C برابر هستند. داریم:

$$A=n-2\qquad B,C=1$$
$$A=n-4\qquad B,C=2$$
$$\vdots$$
$$A=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\qquad B,C=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\ (stop\ if\ n\ is\ even)$$
$$A=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\qquad B,C=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\ \ (stop\ if\ n\ is\ odd)$$

به طور مشابه برای دو حالت دیگر نیز، چنین چیزی برقرار است. فقط باید این نکته را بدانیم که اگر n بر 3 بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه حالات تساوی A, B, C را سه‌بار شمردیم و باید حالات مشترک را کم کنیم. این کار را با نماد ایورسون انجام میدهیم. $p(n): n \ mod \ 3 = 0$

پس دو حالت داریم:

n زوج باشد، آن‌گاه تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$\frac{\binom{n-1}{2} - 3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right) + 2[P(n)]}{6}$$

n فرد باشد، آن‌گاه تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$\frac{\binom{n-1}{2} - 3\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + 2[P(n)]}{6}$$

حال برای n، شش حالت داریم:

$n = 6k$، آن‌گاه حالات مطلوب برابراست با:

$$\frac{\frac{(6k-1)(6k-2)}{2} - 3(3k-1) + 2}{6} = \frac{6k(6k-6)+12}{12} = \frac{n(n-6)+12}{12} = \left\lfloor\frac{n(n-6)}{12}\right\rfloor + 1$$

برای $n = 6k+1$ تا $n = 6k+5$ نیز، جواب به طور مشابه برابر با $\left\lfloor\frac{n(n-6)}{12}\right\rfloor + 1$ می‌شود.

۳) ثابت کنید تعداد افرازهای n به حداکثر k جزء، برابر با تعداد افرازهای $n+k$ به دقیقا k جزء است.

پاسخ:

برای این مسئله باید از اصل تناظر یک‌به‌یک استفاده کنیم تا نشان دهیم تعداد این ۲ مجموعه برابر است.

در واقع خواسته سوال، اثبات عبارت مقابل است. $p_{\leq k}(n) = p_k(n+k)$

قسمت چپ معادله می‌گوید افراز $m-$تایی که $m \leq k$ است را، در نظر بگیریم به طوری که $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$

بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود، می‌توانیم فرض کنیم $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 0$، حال می‌توانیم تمامی این افرازها را به صورت k جزء تبدیل کنیم. بدین صورت که مقدار ۱ را به هر مؤلفه اضافه می کنیم و در باقی‌کار به مقدار $k-m$تا، ۱ اضافه می کنیم. پس داریم:

$$(x_1+1) + (x_2+1) + \cdots + (x_m+1) \underbrace{+1+1+\cdots+1}_{k-m} = n+k$$

$$x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \geq \cdots \geq x_m + 1 \geq 1 \geq \cdots \geq 1$$

واضح است که قاعده زیر تناظر یک‌به‌یک بین افراز این ۲ دسته برقرار می کند.

$$(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m) \to (x_1+1,\ x_2+1, \ldots,\ x_m+1, 1, \ldots, 1)$$

از طرفی می‌دانیم که تناظر یک‌به‌یک، یک رابطه دوسویی می‌باشد. پس باید به تناظری از سمت راست به چپ نیز داشته باشیم:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n + k \qquad , \quad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_k \geq 1$$

از y_i ها مقدار ۱ را کم می‌کنیم: $(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \cdots + (y_k - 1) = n$

حال یک افراز از n به حداکثر k جزء داریم و یک تناظر یک‌به‌یک بین این ۲ افراز شکل گرفته است. پس ثابت می‌شود تعداد این دو افراز با هم برابر است.

۴) فرض کنید هرکدام از گزاره‌ها، زمان اجرای یک الگوریتم از اندازه ورودی n باشد. در هر مورد مشخص کنید که کوچک‌ترین کران بالا (O) برای اجرای الگوریتم چیست و با آوردن استدلال آن را اثبات کنید.

a) $5 + 0.001n^3 + 0.025n$

b) $0.3n + 5n^{1.5} + 2.5n^{1.75}$

c) $n\,log_3 n + n\,log_2 n$

d) $3\log_8 n + \log_2 \log_2 \log_2 n$

e) $2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25}$

f) $100n\log_3 n + n^3 + 100n$

پاسخ:

برای اثبات درستی $f(n) = O(g(n))$، کافیست c, n_0 مثبت را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$

لم: اگر $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$، آنگاه $f(x) = O(x^n)$.

اثبات: $|f(x)| = |a_n|x^n + \cdots + |a_1|x + |a_0| = x^n(|a_n| + \cdots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n}) \leq x^n(|a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0|)$.

بنابراین $f(x) \leq c.x^n$.

a) $O(n^3)$, برای اثبات درستی باید n_0 , c را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0}\ 5 + 0.001n^3 + 0.025n \leq c.n^3$

در این حالت ما c را 6 و n_0 را 1 در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

b) $O(n^{1.75})$, برای اثبات درستی باید n_0 , c را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0}\ 0.3 + 5n^{1.5} + 2.5n^{1.75} \leq c.n^{1.75}$

در این حالت ما c را 8 و n_0 را 1 در نظر می گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

c) $O(n\,log_2 n)$, برای اثبات درستی باید n_0 , c را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0}\ 3\log_3 n + n\log_2 n \leq c.n$

در این حالت ما c را 2 و n_0 را 1 در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

d) $O(log_2 n)$, برای اثبات درستی باید n_0 , c را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0}\ 3\log_8 n + \log_2 \log_2 \log_2 n \leq c$

در این حالت ما c را 4 و n_0 را 1 در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

e) $O(n^{1.25})$, برای اثبات درستی باید n_0 , c را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0}\ 2n + n^{0.5} + 0.5n^{1.25} \leq c.n^{1.25}$

در این حالت ما c را 4 و n_0 را 1 در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

f) $O(n^3)$, برای اثبات درستی باید c , n_0 را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n>n_0}\ 100n\log_3 n + n^3 + 100n \le c.n^3$

در این حالت ما c را 202 و n_0 را 1 در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

۵) درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید و برای پاسخ‌تان دلیل بیاورید. در صورت غلط بودن، عبارت صحیحی پیشنهاد دهید.

a) $O(f+g) = O(f) + O(g)$
b) $O(f\cdot g) = O(f)\cdot O(g)$
c) $g = O(f)\ and\ h = O(f) \Rightarrow\ g = O(h)$
d) $5n + 8n^2 + 100n^3 = O(n^4)$
e) $5n + 8n^2 + 100n^3 = O(n^2\log n)$

پاسخ:

a) درست. اثبات:

روش اول) فرض کنید $h_1 = O(f), h_2 = O(g)$. داریم:

$$h_1 = O(f)\ \rightarrow\ \exists_{c_1,n_{1>0}}\ \forall_{n\ge n_1}\ h_1 < c_1.f$$

$$h_2 = O(g)\ \rightarrow\ \exists_{c_2,n_{2>0}}\ \forall_{n\ge n_2}\ h_2 < c_2.g$$

حال اگر فرض کنید $c_t = \max(c_1,c_2)\,, n_t = \max\,(n_1,n_2)$، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\forall_{n\ge n_t}\ h_1 + h_2 < c_t.(f+g)\ \rightarrow\ h_1 + h_2 = O(f+g) \rightarrow O(f) + O(g) = O(f+g)$$

روش دوم)

بنابر خاصیت بازتابی داریم $O(f+g) = f+g\ , O(f) = f, O(g) = g$. پس می‌توان گفت رابطه $O(f+g) = O(f) + O(g)$ درست است زیرا سمت چپ و راست برابر عبارت $f+g$ می‌شوند.

b) درست. اثبات:

$$h_1 = O(f)\ \rightarrow\ \exists_{c_1,n_{1>0}}\ \forall_{n\ge n_1}\ h_1 < c_1.f$$

$$h_2 = O(g)\ \rightarrow\ \exists_{c_2,n_{2>0}}\ \forall_{n\ge n_2}\ h_2 < c_2.g$$

حال اگر فرض کنید $c_t = max(c_1,c_2)\,, n_t = max\,(n_1,n_2)$، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\forall_{n\ge n_t}\ h_1.h_2 < {c_t}^2.(f.g) \rightarrow\ h_1.h_2 = O(f.g) \rightarrow O(f+g) = O(f).O(g)$$

c) نادرست. مثال نقض: $g = n^2\,, f = n^3\,, h = n$، همانطور که مشاهده می‌شود، مقدم شرط برقرار است اما در نتیجه شرط داریم $n^2 = O(n)$ که اشتباه است.

عبارت پیشنهادی: $g = O(f)\ and\ f = O(h) \rightarrow g = O(h)$

d) درست. اثبات:

برای اثبات درستی باید c , n_0 را طوری انتخاب کنیم که $\forall_{n \geq n_0}\ 5n + 8n^2 + 100n^3 \leq c.n^4$

در این حالت ما c را ۱۳۳ و n_0 را ۱ در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌شود که در عبارت صدق می‌کند.

e) نادرست. اثبات:

$$\exists_{c,n_0 \geq 0}\ \forall_{n \geq n_0}\ 5n + 8n^2 + 100n^3 \leq c.(n^2 logn) \rightarrow \frac{5}{nlogn} + \frac{8}{logn} + \frac{100n}{logn} \leq c$$

همانطور که مشاهده می‌شود در سمت راست نامعادله، با در نظر گرفتن هر مقدار ثابت برای c، همیشه سمت چپ از یک نقطه به بعد بزرگ‌تر است زیرا رشد آن از عدد ثابت c بیشتر است.

عبارت پیشنهادی: $5n + 8n^2 + 100n^3 = O(n^3)$.