جلسه پنجم

مساله . اگر fnجمله n ام دنباله فیبوناچی توسیع یافته $n \in Z$ {fn} باشد که طبق شرایط اولیه $f_1 = 1$ و $f_2 = 0$ و رابطه بازگشتی $n \in z$ و$f_{\mathrm{n}} = f_{\mathrm{n-1}} + f_{\mathrm{n-2}} - 2$ تعریف شده است. ثابت کنید به ازای هر $n \in z$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{\mathrm{n+1}} & f_{\mathrm{n}} \\ f_{\mathrm{n}} & f_{\mathrm{n-1}} \end{bmatrix}$$

اکنون با به کار بردن رابطه $(A)^{n+m} = (A)^n (A)^m$ ثابت کنید:

$$f_{\mathrm{n+m}} = f_{\mathrm{n+1}}.f_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{n}}.f_{\mathrm{m-1}}$$

از این رابطه با قرار دادن $m - n = 1$ چه نتیجه ای به دست می آید؟

حل قسمت اول:

$$m - 1 = n \to n + 1 = 1 \,\&\, m = -(n+1)$$

$$f_1 = f_{\mathrm{n+1}}.f_{\mathrm{-n-1}} + f_{\mathrm{n}}.f_{\mathrm{-n}} \to 1 = f_{\mathrm{n+1}}.f_{\mathrm{n}}.f_{\mathrm{-n}} \to$$

$$1 = f_{\mathrm{n+1}}.f_{\mathrm{n-1}}.(-1)^n + (-1)^{n-1} {f_{\mathrm{n}}}^2 \to {f_{\mathrm{n}}}^2 - f_{\mathrm{n}} - f_{\mathrm{n-1}}.f_{\mathrm{n+1}} = (-1)^{n-1}$$

ادامه دنباله فیبوناچیع:

ترکیب خطی دو دنباله فیبوناچی است .$\{U_{\mathrm{n}}\} n \geq 0$ فیبوناچیع و $\{V_{\mathrm{n}}\} n \geq 0$ نیز فیبوناچیع میباشد و

$n \geq 0$ و $W_{\mathrm{n}} = \alpha\, U_{\mathrm{n}} + \beta\, V_{\mathrm{n}}$ و $\{W_{\mathrm{n}}\} n \geq 0$و$\{V_{\mathrm{n}}\} n \geq 0$ فیبوناچیع هستند.

$$\to n \geq 2 \quad W = \alpha\, U_{\mathrm{n}} + \beta\, V_{\mathrm{n}} = \alpha(U_{\mathrm{n-1}} + U_{\mathrm{n-2}}) + \beta(V_{\mathrm{n-1}} + V_{\mathrm{n-2}})$$
$$= (\alpha\, U_{\mathrm{n-1}} + \beta\, V_{\mathrm{n-1}}) + (\alpha\, U_{\mathrm{n-2}} + \beta\, V_{\mathrm{n-2}}) = W_{\mathrm{n-1}} + W_{\mathrm{n-2}}$$

عملگر انتقال E روی یک دنباله $\{Xn\} n \geq 0$ به این صورت تعریف میشود:

جلسه پنجم

دنباله $Yn = EXn$ که از انتقال دنباله ی X به اندازه یک واحد چپ به دست می آید با $Yn = Xn + 1$ مشخص میشود:

n	0	1	2	....
X	X_0	X_1	Y_2	....
Y	Y_0	Y_1	X_2	....

تمرین. دنباله $\{an\}n \geq 0$ یک دنباله فیبوناچیع است و $U_1 = \beta$ و $U_0 = \alpha$, آیا میتوانیدU_{n} را بر حسبα وβ و جمله های دنباله فیبوناچیع به دست آورید.

چند جمله ای تسلسل (به صورت بازگشتی زیر تعریف میشود) :

$$K_0(\,) = 1$$

$$K_1(x_1) = x_1$$

$$Kn(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\mathrm{n}}) =$$

$$K_{\mathrm{n}-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\mathrm{n}-1})x_{\mathrm{n}} + K_{\mathrm{n}-2}(x_1, x_2, \dots, x_{\mathrm{n}}\text{-}2)$$

مثال. $K_2(x_1, x_2) = K_1(x_1)x_2 + K_0(\,) = x_1x_2 + 1.$

$$k_3(x_1x_2x_3) = k_0(xx) + k_1(x_1) = (x_1x_2 + 1) + k_1(x_1) = x_1x_2x_3 + x_1 + x_3$$

ثابت کنید:

$$K_{\mathrm{n}}(x_1, \dots., x_{\mathrm{n}}) = K_{\mathrm{n}}(x_{\mathrm{n}}, \dots., x_1$$

مساله.(با استقرا ثابت شود)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{n}-2}(x_2, \dots, x_{\mathrm{n}-1}) & K_{\mathrm{n}-2}(x_2, \dots, x_{\mathrm{n}}) \\ K_{\mathrm{n}-1}(x_1, \dots, x_{\mathrm{n}-1}) & Kn \;\; (x_2, \dots, x_{\mathrm{n}}) \end{pmatrix}$$

جلسه پنجم

نتیجه بگیرید:

$$K_{\mathrm{n+m}}(X_1,\ldots.,X_{\ \mathrm{m+n}})$$
$$= K_{\mathrm{m}}(X_1,\ldots.,X_{\mathrm{m}})K_{\mathrm{n}}(X_{\mathrm{m}}+2,\ldots x_{\mathrm{m+n}}) + K_{\mathrm{n-1}}(X_{\mathrm{m}},X_2,\ldots.,X_{\mathrm{n+m}})K_{\mathrm{n-1}}(x_1x_2.x_{\mathrm{m-1}})$$

سپس نتیجه بگیرید:

$$K_{\mathrm{n}}(X_1,\ldots,X_{\mathrm{n}}) = X_1\,K_{\mathrm{n-1}}(X_2,\ldots,X_{\mathrm{n}}) + K_{\mathrm{n-2}}(X_2,\ldots.,X_{\mathrm{n}})$$

حل مساله:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & X_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & X_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & X_{\mathrm{n+1}}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & X_{\mathrm{m+n}}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}* & *\\ * & K_{\mathrm{m+n}}(X_1,\ldots,X_{\mathrm{m+n}})\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}K_{\mathrm{n-2}}(X_2,\ldots.,X_{\mathrm{m-1}}) & K_{\mathrm{m-1}}(X_2,\ldots,X_{\mathrm{m}})\\ K_{\mathrm{n-1}}(X_1,\ldots.,X_{\mathrm{m-1}}) & K_{\mathrm{m}}(X_1,\ldots.,X_{\mathrm{m}})\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}K_{\mathrm{n-2}}(X_{\mathrm{m+2}},\ldots,X_{\mathrm{m+n-1}}) & K_{\mathrm{n-1}}(X_{\mathrm{m+1}},\ldots,X_{\mathrm{m+n}}\\ K_{\mathrm{n-1}}(X_{\mathrm{m+1}},\ldots,X_{\mathrm{m+n-1}}) & K_{\mathrm{n}}(X_{\mathrm{m+1}},\ldots,X_{\mathrm{m+n}})\end{pmatrix}$$

نماد گذاری برای کسر مسلسل متناهی:

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{\mathrm{n}}] \coloneqq a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots\ldots\ldots.. + \cfrac{1}{a_{\mathrm{n}}}}}}}$$

در بحث ها معمول a_{t} ها اعداد حقیقی فرض میشوند . اگر a_{t} ها اعداد صحیح باشند و به ازای

$a_{\mathrm{t}} \geq 1$و$1 \leq t \leq n$

کسر مسلسل فوق را یک کسر مسلسل ساده می نامند.

جلسه پنجم

*دنباله های $\{P_{\mathrm{t}}\}\ -2 \le t \le n$ و $\{Q_{\mathrm{t}}\} -2 \le t \le n$ به صورت بازگشتی زیر تعریف می شوند :

$$P_{-2} = a\,, Q_{-2} = 1, P_{-2} = 1\,, Q_{-1} = 0$$

$$0 \le K \le n \to P_{\mathrm{k}} = a_{\mathrm{n}} P_{\mathrm{k-1}} + P_{\mathrm{k-2}}, Q_{\mathrm{k}} = a_{\mathrm{k}}\, Q_{\mathrm{k-1}} + Q_{\mathrm{k-2}}$$

میتوان به استقرا ثابت کرد (لطفا ثابت کنید):

$$\begin{bmatrix} Q_{\mathrm{n-1}} & Q_{\mathrm{n}} \\ P_{\mathrm{n-1}} & P_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

بنابر یکی از مساله های قبل خواهیم داشت:

$$P_{\mathrm{n}} = K_{\mathrm{n+1}}(a_0, a_1, \dots\dots, a_{\mathrm{n}}), Q_{\mathrm{n}} = K_{\mathrm{n}}(a_1, \dots\dots, a_{\mathrm{n}})$$

طبق تساوی ماتریس فوق داریم :

$$P_{\mathrm{n}}\, Q_{\mathrm{n-1}} - P_{\mathrm{n-1}}\, Qn = (-1)^{n+1}$$

بعلاوه اگر $\alpha \ge 0$ عددی حقیقی باشد داریم :

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\mathrm{n}}, \alpha] = \frac{\alpha\, P_{\mathrm{n}} + P_{\mathrm{n-1}}}{\alpha\, Q_{\mathrm{n}} + Q_{\mathrm{n-1}}}$$

مثالی از اجرای الگوریتم اقلیدس: $r0 = a\,, r1 = b$

$$r_0 = r_1 Q_1 + r_2\,, 0 \le r_2 \le r_1.$$

$$r_1 = r_2 Q_2 + r_3\,, 0 \le r_3 < r2$$

.

$$r_{\mathrm{n-1}} = r_{\mathrm{n}}\, Q_{\mathrm{n}}\,, r_{\mathrm{n+1}} = 0 \ \to r_{\mathrm{n}} = d = g(d(a, b)$$

جلسه پنجم

قضیه. با نماد های فوق در اجرای الگوریتم اقلیدس داریم :

$$a = d\,K_{\mathrm{n}}(Q_1, \dots, Q_{\mathrm{n}}), b = d\,K_{\mathrm{n-1}}(Q1, \dots., Qn)$$

و به علاوه داریم $ax + by = d$ که در آن

$$x = (-1)^n\,K_{\mathrm{n-2}}(Q_2, \dots, Q_{\mathrm{n-1}}), y = (-1)^{n-1} K_{\mathrm{n-1}}(Q_1, \dots., Q_{\mathrm{n-1}})$$

مثال. زیر مجموعه S از اعداد به صورت زیر تعریف شده است :

مرحله مقدماتی: $3 \in S$

مرحله بازگشتی : $x, y \in S \rightarrow x + y \in S$

قانون طرد : باید کوچکترین مجموعه / شی مشخص شده در تعریف را در نظر گرفت .

$$\lambda \in \Sigma^*$$

$$w \in \Sigma^*, x \in \Sigma^* \rightarrow wx \in \Sigma^*$$

تعریف بازگشتی عمل الحاق:

$$w \in \Sigma^* \rightarrow w.\lambda = w$$

$$w \in \Sigma^*, w_2 \in \Sigma^*, x \in \Sigma \rightarrow w_1(w_2\,x) \coloneqq (w_1\,w_2)x$$

تعریف بازگشتی طول یک رشته :

$l: \Sigma^* \rightarrow$ اعداد صحیح نامنفی

$$l(\lambda) = 0$$

$$w \in \Sigma^*, x \in \Sigma \rightarrow l(wx) = l(w) + 1$$

تعریف بازگشتی درخت ریشه دار:

مرحله مقدماتی: یک راس تنهای r یک درخت ریشه دار است .

جلسه پنجم

مرحله بازگشتی : فرض کنید $T_1,...,T_n$ درخت های ریشه دار مجزا با ریشه های $r_1,....,.r_n$ باشد .
در این صورت گرافی که با شروع از یک راس r که متمایز از r_1 است و وصل کردن یک یال از r و وصل کردن یک یال از r به هریک از ریشه های درخت های مذکور به دست آید یک درخت ریشه است.

مرحله دوم:سه نقطه را در یک راستا قرار داده و به هم وصل می کنیم سپس نقطه سوم را از راستای یکسان دونقطه دیگر برداشته ونقطه دیگری هم خارج از راستای آن دو اضافه میکنیم و این دو نقطه را به نقطه دوم وصل میکنیم و....

تعریف درخت باینری کامل /پر (full binary tree):

مرحله مقدمه:

یک راس تنهای r یک FBT با ریشه r است .

مرحله ابتدایی:

اگر T_1,T_2 در FBT مجزا با ریشه های r_1,r_2 باشد یک FBT به T_1,T_2 وجود دارد که شامل ریشه r (به عنوان راس جدید و ریشه درخت است)
که با یک یال به هریک از ریشه های T_1, T_2 وصل شده است .به T_1 زیر درخت راست و به T_2 زیر درخت چپ گفته میشود.

تعریف بازگشتی $n(T)$، تعداد راس های درخت T به صورت زیر است:

$$n(0) = 1 , n(T_1, T_2) = n(T_1) + n(T_2) + 1$$

تعریف بازگشتی ارتفاع درخت T ،$h(t)$:

$$h(0) = 0$$

$$h(T_1.T_2) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2))$$

قضیه. اگر T یک درخت باینری کامل باشد آنگاه :

$$\mathrm{n(T)} \leq 2^{h(t)+1}$$