



## دانشگاه تهران

تاریخ تحویل: جمعه ۱۰ اردیبهشت

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

تمرین سری هفتم مبانی ترکیبیات

(۱) اعداد صحیح مثبت  $x_1, \dots, x_n$  و  $y_1, \dots, y_m$  داده شده اند. داریم  $\star y_1 + \dots + y_m = mn > x_1 + \dots + x_n$ . ثابت کنید با حذف کردن تعدادی از عوامل جمع در دوطرف تساوی  $\star$  می توان تساوی نابديهی جدیدی بدست آورد.

(۲) پارلمان کشور فرضی قلمستان از مجلس تشکیل شده است که در آن هر نماینده، حداقل سه مخالف دارد. با استفاده از خوش ترتیبی، ثابت کنید می توان مجلس مذکور را چنان به دو مجلس افراز کرد که هر عضو حداکثر یک مخالف در مجلس خود داشته باشد.

(۳) یادآوری: آرایه  $a_{m,n} = \begin{cases} 0 & m < 0 \text{ or } n < 0 \\ 1 & m = n = 0 \\ na_{m,n-1} + ma_{m-1,n} (*) & \text{Other} \end{cases}$  در کلاس مورد بررسی قرار گرفت  $(a_{m,n} = (m+n)!)$ . اگر

در ضابطه بازگشتی سطر سوم تعریف فوق، به جای عبارت  $(*)$ ، عبارت  $ma_{m,n-1} + na_{m-1,n}$  را قرار دهیم، چه اتفاقی می افتد؟ به طور کامل شرح دهید، مقادیر دنباله را به دست آورید و بگویید چه تغییرات احتمالی ای لازم است تا همان آرایه حاصل شود؟

(۴) موارد زیر را ثابت کنید.

$$a) (m-1) \binom{n}{m} = (n-1) \binom{n-1}{m-1} - \binom{n-1}{m} \quad ; \quad (1 \leq m \leq n)$$

$$b) \binom{n}{m} \binom{n-m}{p-q} \binom{m}{q} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{m-q} \binom{p}{q}$$

(۵) بستنی فروشی که فقط یک نوع بستنی به قیمت ۱۰ تومان می فروشد، دارای طرفداران زیادی در منطقه شده است. یک روز صبح که دیر به محل کارش می رسد، مشاهده می کند که کارت خوان مغازه خراب است و  $a + b$  نفر جلوی مغازه صف کشیده اند. بستنی فروش هیچ پولی همراه خود یا در کشوی مغازه ندارد. اگر بدانیم  $b$  نفر از خریداران فقط دارای اسکناس ۲۰ تومانی و  $a$  نفر دیگر فقط دارای اسکناس ۱۰ تومانی هستند...

الف) چقدر احتمال دارد که پس از شروع کار، همیشه (به جز در ابتدا) حداقل یک ۱۰ تومانی در کشوی میز داشته باشد؟

ب) چقدر احتمال دارد که پس از شروع کار، هیچکس برای دریافت پول خود معطل نشود؟

پ) اگر  $a = b = n$ ، در این حالت، پاسخ الف و ب را بررسی کنید.