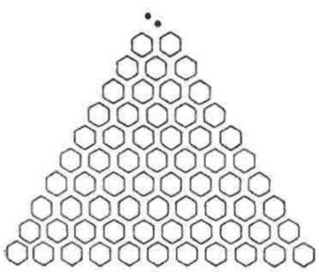
دانشگاه تهران

پاسخ تمرین سری هشتم مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **نیمسال دوم تحصیلی ۰۰-۹۹**



۱) 2^{1000} توپ در بالای یک ذخیره کننده به شکل زیر قرار دارد. این ماشین عملاً ۱۰۰۱ سطر از شش‌ضلعی ها دارد. هر توپ در نقطه اتصال با احتمال $\frac{1}{2}$ به راست و به $\frac{1}{2}$ چپ می‌رود.

الف) چند توپ نهایتاً در چپ‌ترین حجره قرار می‌گیرد؟

ب) چند توپ در حجره k-اُم از سمت چپ قرار می‌گیرد؟

پاسخ:

هر توپ را که در نظر می‌گیریم، برای رسیدن به پایین‌ترین ضلع مثلث، دقیقاً 2^{1000} بار در حال انتخاب است (که به کدام سمت راست یا چپ حرکت کند).

الف) در این بخش تمامی انتخاب‌های توپ‌هایی که به چپ‌ترین حجره می‌رسند، باید به سمت چپ باشند و چون هر کدام از دو جهت با احتمال $\frac{1}{2}$ انتخاب می‌شوند، بنابراین هر توپ در نهایت با احتمال $(\frac{1}{2})^{1000}$ به این حجره می‌رسد. پس برای کل توپ‌ها و در نهایت تعداد توپ‌هایی که به این خانه می‌رسند می‌توان نوشت:

$$2^{1000} \times (\frac{1}{2})^{1000} = 1$$

ب) اگر یک توپ بخواهد که در خانه k-ام از سمت چپ قرار گیرد، باید در کل مسیر دقیقاً $k-1$ بار به سمت راست حرکت کند. تعداد مسیرهایی از بالا به پایین که دقیقاً $k-1$ بار به سمت راست می روند، $\binom{1000}{k-1}$ می‌باشد. حال با توجه با این که هر مسیر شامل 1000 انتخاب می‌باشد، پس احتمال عبور یک توپ از یک مسیر خاص $(\frac{1}{2})^{1000}$ بوده و در کل احتمال قرار گرفتن یک توپ در حجره k-ام از سمت چپ برابر است با:

$$\frac{\binom{1000}{k-1}}{2^{1000}}$$

در نتیجه برای کل توپ‌ها و تعداد توپ‌هایی که به k-امین خانه از سمت چپ می‌رسند، می‌توان نوشت:

$$2^{1000} \times \frac{\binom{1000}{k-1}}{2^{1000}} = \binom{1000}{k-1}$$

۲) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) ثابت کنید با به کار بردن حروف واژه $ALFALFA$،۶۲ واژه به طول ۴ می‌توان ساخت.

ب) ۳ قوطی آبی، ۲ قوطی صورتی و ۲ قوطی زرد در اختیار داریم. قرار است ۴ اتاق را رنگ کنیم. رنگ‌آمیزی هر اتاق با یک رنگ صورت می‌گیرد. این رنگ‌آمیزی به چند حالت امکان‌پذیر است؟

پاسخ:

الف) با حالت بندی روی نوع واژه و شمردن تمامی حالات، نشان می‌دهیم حکم مذکور برقرار است.

- واژه با دو عضو یکسان و باقی متفاوت [AABC] : $3 \times \frac{4!}{2!} = 36$
- واژه با دو عضو یکسان و دو عضو دیگر یکسان [AABB] : $3 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 18$
- واژه با سه عضو یکسان[AAAB] : $2 \times \frac{4!}{3!} = 8$

اگر حالات بدست آمده را با هم جمع کنیم داریم: $36 + 18 + 8 = 62$ که یعنی با حروف واژه ی ALFALFA دقیقا 62 واژه به طول 4 می توان ساخت.

ب) اگر اتاق‌ها را با همان واژه‌های نهایی که به طول 4 در مورد الف می‌خواستیم بسازیم، در نظر بگیریم و رنگ آبی را همان حرف A، رنگ صورتی را همان حرف L و رنگ زرد را همان حرف F در نظر بگیریم (جابه جایی تناظر برای 2 حرف آخر تغییر در کلیت جواب ایجاد نمی‌کند)، به وضوح تناظر یک به یک بین جواب‌های این دو بخش وجود دارد. بنابراین جواب برابر 62 است.

۳) فرض کنید n عدد صحیح مثبت و $\left\{ {n \atop k} \right\}$ نمایانگر عدد استرلینگ نوع ۲ باشد:

الف) ثابت کنید $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

ب) اگر $n \geq 2$، $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف) $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ برابر است با تعداد راه های افراز [n] به 2 مجموعه.

عدد 1 را در نظر می‌گیریم. بعد از افراز هر عدد از بین اعداد 2 تا n را که در نظر بگیریم 2 حالت دارند: یا با عدد 1 در یک دسته قرار می‌گیرند و یا در دسته‌ی متفاوت با عدد 1 هستند. این یعنی هرکدام از این اعداد دو حالت دارند و چون در مجموع $\mathrm{n} - 1$ عدد داریم به صورت کلی 2^{n-1} حالت ممکن است. توجه کنید در این روش ممکن است دسته ای که شامل تمامی اعداد باشد نیز به وجود آید و دسته دیگر تهی باشد. بنابراین در واقع تعداد حالات به $2^{n-1} - 1$ کاهش پیدا می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

ب) $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$ برابر است با تعداد راه‌های افراز $[n]$ به $n-2$ جز. این مسئله به کمک حالت‌بندی روی گروه‌هایی که بیش از یک عضو دارند حل می کنیم.

- یک دسته 3 تایی و $n-3$ دسته ی تک عضوی داشته باشیم: $\binom{n}{3}$
- دو دسته 2 تایی و $n-4$ دسته ی تک عضوی داشته باشیم: $3 \times \binom{n}{4}$

که 3 نوشته شده در این حالت برای دوهای 2 تایی است: ab, cd / ad, bc / ac, bd

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

۴) فرض کنید n, K اعداد صحیح مثبتی باشند، تعداد K تایی‌های مرتب $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ که در آن به ازای $i = 1, \dots, k$ داریم $A_i \in [n]$ در هر یک از شرایط محاسبه کنید.

الف) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k$

ب) $\varnothing \neq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k \subsetneq [n]$

پاسخ:

الف) شرط مذکور سوال یعنی $A_1 \subseteq \ A_2 \subseteq \cdots \subseteq \ A_k$ را شرط (❋) می‌گذاریم. طبق شرط (❋) واضح است اگر عنصر دلخواه x عضو A_{m} باشد(یعنی $x \in A_{\mathrm{m}}$) حتما در تمامی مجموعه‌های $A_{m+1},\ A_{m+2}, \cdots, A_k$ نیز خواهد آمد. بنابراین برای هر عضو از مجموعه ی $[n]$ ، کافی است اولین i (با شرط $1 \leq i \leq k$) را انتخاب کنیم که عضو مورد نظر (مثلا x) در مجموعه A_{i} عضو باشد (یعنی $x \in A_{\mathrm{i}}$). از طرفی برای هر یک از اعضای $[n]$ ممکن است این عدد کلا در هیچ یک از مجموعه های $A_1,\ A_2, \cdots,\ A_k$ ظاهر نشده باشد، این بدان معناست که هر عضو دقیقا $k+1$ انتخاب دارد. پس داریم جواب مسئله برابر است با $(k+1)^n$.

ب)می توانیم مجموعه های A_i را به شکل زیر بسازیم:

$$[n] = a_0 \ \cup \ a_1 \ \cup \dots \cup a_k$$

$$A_k = a_0 \ \cup \ a_1 \ \cup \dots \cup a_{k-1}$$

$$A_{k-1} = a_0 \ \cup \ a_1 \ \cup \dots \cup a_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$A_1 = a_0$$

در تساوی های بالا A_1 را مساوی یک مجموعه به نام a_0 می گذاریم. حال مجموعه A_2 علاوه به اعضای مجموعه a_0، باید یک تعداد عضو دیگر هم داشته باشد($A_1 \subset A_2, A_1 \neq A_2$). پس A_2 مساوی a_0 اجتماع یک مجموعه دیگر به نام a_1 می باشد به‌طوری‌که اشتراک این دو مجموعه تهی بوده

و هر کدامشان نیز ناتهی می‌باشند. اگر این فرآیند را ادامه دهیم می‌توانیم مجموعه $[n]$ را به صورت اجتماع $k+1$ مجموعه بسازیم به‌طوری‌که اشتراک آن ها تهی بوده و هر کدامشان مخالف تهی می‌باشند.

بنابراین مجموعه $[n]$ را به $k+1$ دسته متمایز به نام‌های $a_0,\ a_1,\cdots,\ a_k$ افراز می‌کنیم. پس هر k تایی مرتب $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ متناظر با یک افراز مجموعه $[n]$ را به $k+1$ دسته متمایز می‌باشد.(اثبات تناظر یک به یک داشتن این دو مجموعه بر عهده شما)

حال می دانیم که تعداد افراز های مجموعه $[\mathrm{n}]$ را به $k+1$ دسته متمایز برابر است با:

$$T(n,k+1) = (k+1)! \times \left\{ {n \atop k+1} \right\} = (k+1)! \times S(n,k+1)$$

که $S(n,k+1)$ عدد استرلینگ نوع دوم بوده و در واقع تعداد افراز های n شی به $k+1$ دسته یکسان می‌باشد.

۵) خانواده‌ای با ۹ فرزند در روستایی که دارای چهار مدرسه A, B, C, D است، ساکن است، قرار است تمام فرزندان در مدرسه ثبت‌نام شوند. این کار در هر یک از حالت‌ها به چند طریق ممکن است؟

الف) دقیقاً دو فرزند در مدرسه A ثبت‌نام شوند.

ب) در هر مدرسه لااقل یکی از فرزندان ثبت‌نام شود.

پاسخ:

الف) ابتدا فرزندانی که به مدرسه A فرستاده می‌شوند را به $\binom{9}{2}$ طریق انتخاب می‌کنیم. سپس برای هرکدام از فرزندان باقی‌مانده 3 حالت داریم. یعنی جواب نهایی سوال برابر است با $\binom{9}{2} \times 3^7$.

ب) ابتدا 9 فرزند را به 4 دسته تقسیم می کنیم (به کمک فرمول استرلینگ):

$$\left\{ {9 \atop 4} \right\} = \frac{1}{4!} \sum_{i=٠}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} (4-i)^9 = \frac{1}{4!} (4^9 - 4 \times 3^9 + 6 \times 2^9 - 4 + 1)$$

چون مدارس متمایز هستند و باید تعیین کنیم هر دسته متناظر با کدام مدرسه است. پس عبارت بالا باید در $4!$ ضرب شود و جواب نهایی برابر با 186480 می‌شود.