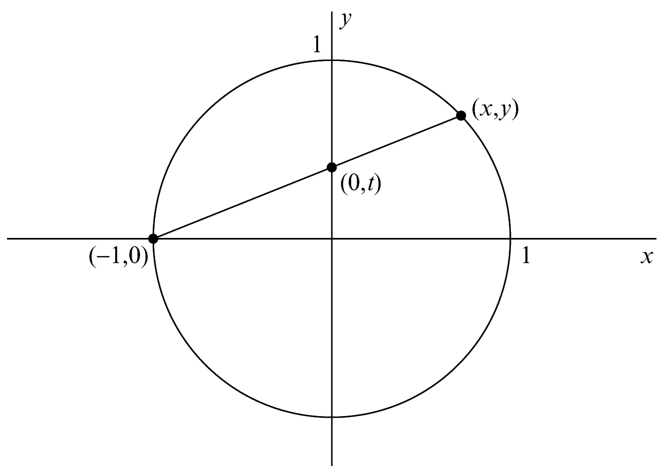
توجه شود که در مثال فوق، راهبرد اصلی حذف متغیر t است به‌طوری‌که معادلهٔ حاصل فقط شامل x و y است. این نقش ایفا شده توسط *نظریهٔ حذف* را نشان می‌دهد که با جزئیات بسیار بیشتر در فصل ۳ مطالعه خواهیم کرد.

در ادامه، دو مثال از نحوهٔ استفادهٔ هندسه در پارامتری‌سازی چندگوناها را مورد بحث قرار می‌دهیم. با دایرهٔ واحد $x^2 + y^2 = 1$ شروع می‌کنیم که در (۴) توسط

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
y &= \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

پارامتری شد. برای اینکه ببینیم این پارامتری‌سازی چطور به‌دست می‌آید، توجه می‌کنیم که هر خط غیرقائم مارّ بر $(-1,0)$ دایره را در یک نقطهٔ یکتای (x,y) قطع می‌کند:



هر خط غیرقائم، y-محور را نیز قطع می‌کند و این نقطهٔ $(0,t)$ در شکل فوق است.

این یک پارامتری‌سازی هندسی از دایره را به‌دست می‌دهد: برای t مفروض، خط واصل نقاط $(-1,0)$ و $(0,t)$ را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم (x,y) نقطهٔ تقاطع این خط با دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ باشد. توجه شود که جملهٔ قبل، واقعاً پارامتری‌سازی را به‌دست می‌دهد: همچنان‌که t از $-\infty$ تا ∞ روی محور قائم تغییر می‌کند، نقطهٔ متناظر (x,y) کل دایره به‌غیر از نقطهٔ $(-1,0)$ را طی می‌کند.

باقی می‌ماند که فرمول‌های صریح x و y برحسب t را بیابیم. برای این منظور، شیب خط در شکل فوق را درنظر می‌گیریم. این شیب را می‌توانیم به دو روش محاسبه کنیم: با استفاده از نقاط $(-1,0)$ و $(0,t)$ یا نقاط $(-1,0)$ و (x,y). این کار معادلهٔ

$$\frac{t-0}{0-(-1)} = \frac{y-0}{x-(-1)}$$

را به‌دست می‌دهد که به‌صورت

$$t = \frac{y}{x+1}$$

ساده می‌شود. بنابراین $y = t(x+1)$. با جانشانی این در $x^2 + y^2 = 1$، معادلهٔ

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

حاصل می‌شود که به معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \tag{۸}$$

منجر می‌شود. این معادله، xـ‌مختصات نقاطی را به‌دست می‌دهد که در آنها خط دایره را قطع می‌کند و درجهٔ دوم است زیرا دو نقطهٔ تقاطع وجود دارند. یکی از نقاط -1 است و درنتیجه $x + 1$ عاملی از (۸) است. اکنون یافتن عامل دیگر ساده است. می‌توانیم (۸) را به‌صورت

$$(x+1)((1+t^2)x - (1-t^2)) = 0$$

بازنویسی کنیم. ازآنجاکه xـ‌مختصی که به‌دنبال آن هستیم توسط عامل دوم تعیین می‌شود، پس

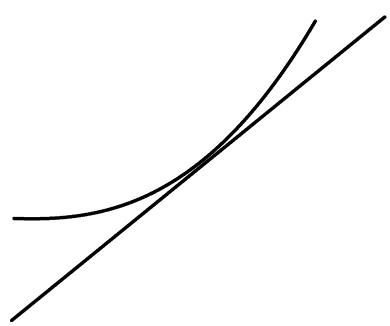
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

به‌علاوه، $y = t(x+1)$ به‌سادگی به

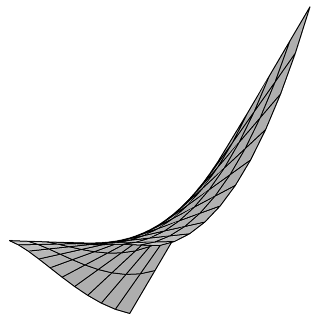
$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

منجر می‌شود (آن را بررسی کنید). اکنون پارامتری‌سازی داده شدهٔ قبل را استخراج کرده‌ایم. توجه شود که هندسه دقیقاً می‌گوید که کدام بخش از دایره توسط این پارامتری‌سازی پوشانده می‌شود.

برای مثال دوم، خم درجهٔ سهٔ تابدار $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ از §۲ را درنظر می‌گیریم. این خمی در فضای 3ـ‌بُعدی است و با درنظر گرفتن خطوط مماس بر این خم، رویه‌ای جالب به‌دست می‌آوریم. ایده به‌صورت زیر است. برای یک نقطهٔ مفروض روی این خم، می‌توانیم خط مماس در این نقطه را رسم کنیم:



اکنون فرض کنیم که خطوط مماس را برای *تمام* نقاط روی خم درجهٔ سهٔ تابدار رسم کرده‌ایم. دراین‌صورت رویهٔ زیر حاصل می‌شود:



این شکل، تعدادی از خطوط مماس را نشان می‌دهد. رویهٔ فوق، *رویهٔ مماس* خم درجهٔ سهٔ تابدار نامیده می‌شود.

برای تبدیل این توصیف هندسی به چیزی جبری‌تر، توجه می‌کنیم که قرار دادن $x = t$ در $y - x^2 = z - x^3 = 0$ پارامتری‌سازی

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= t^2, \\ z &= t^3 \end{aligned}$$

از خم درجهٔ سهٔ تابدار را به‌دست می‌دهد. این را به‌صورت $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ می‌نویسیم. اکنون یک مقدار خاص t را ثابت می‌گیریم که یک نقطه روی خم به‌دست می‌دهد. از حسابان می‌دانیم که بردار مماس بر خم در نقطهٔ $\mathbf{r}(t)$ عبارت است از $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$. درنتیجه خط مماس توسط

$$\mathbf{r}(t) + u\mathbf{r}'(t) = (t, t^2, t^3) + u(1, 2t, 3t^2) = (t + u, t^2 + 2tu, t^3 + 3t^2u)$$

پارامتری می‌شود که در آن u پارامتری است که در امتداد خط مماس تغییر می‌کند. اکنون اگر اجازه دهیم که t تغییر کند، دراین‌صورت کل رویه مماس را می‌توانیم به‌صورت

$$\begin{aligned} x &= t + u, \\ y &= t^2 + 2tu, \\ z &= t^3 + 3t^2u \end{aligned}$$

پارامتری کنیم. پارامترهای t و u دارای تعابیر زیر هستند: t می‌گوید در کجای خم و u می‌گوید در کجای خط مماس هستیم. از این پارامتری‌سازی برای رسم شکل رویهٔ مماس که قبلاً آن را دیدیم، استفاده شده است.

پرسش نهایی به نمایش ضمنی این رویهٔ مماس مربوط است: چگونه می‌توانیم معادلهٔ تعریف آن را بیابیم؟ این حالتی خاص از مسئلهٔ ضمنی‌سازی است که قبلاً به آن اشاره شد و به‌معنی حذف t و u از معادلات پارامتری فوق است. در فصل ۲ و ۳، خواهیم دید که الگوریتمی برای انجام آن وجود دارد و به‌ویژه، ثابت می‌کنیم که رویهٔ مماس بر خم درجهٔ سهٔ تابدار توسط معادلهٔ

$$-4x^3z + 3x^2y^2 - 4y^3 + 6xyz - z^2 = 0$$

تعریف می‌شود.

این بخش را با مثالی از *طراحی هندسی به کمک رایانه*[1] (CAGD) خاتمه می‌دهیم. در هنگام ایجاد شکل‌های پیچیده، مانند درب موتور خودرو یا بال‌های هواپیما، مهندسان طراح نیاز به خم‌ها و رویه‌های دارند که شکل آنها قابلِ‌تغییر، توصیفشان ساده و رسم آنها سریع باشد. معادلات پارامتری که برحسب توابع چندجمله‌ای یا توابع گویا بیان می‌شوند، در این شرایط صدق می‌کنند. مراجع بسیاری در این زمینه وجود دارند.

برای سادگی، فرض کنیم که یک مهندس طراح بخواهد یک خم در صفحه را توصیف کند. خم‌های پیچیده معمولاً از اتصال قطعه‌های ساده‌تر ایجاد می‌شوند و برای اتصال هموار قطعات، جهت‌های مماس باید در نقاط انتهایی با یکدیگر مطابقت کنند. بنابراین برای هر قطعه، لازم است که طراح اطلاعات هندسی زیر را کنترل کند:

- نقاط شروع و پایان خم.
- جهت‌های مماس در نقاط شروع و پایان.

خم *درجهٔ سهٔ بزیه*، معرفی شده توسط طراح خودرو رنو، پ. بزیه[2]، به‌طور خاص، برای این منظور مناسب است، یک خم درجهٔ سهٔ بزیه به‌طور پارامتری توسط معادلات

$$\begin{aligned} x &= (1-t)^3x_0 + 3t(1-t)^2x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3x_3, \\ y &= (1-t)^3y_0 + 3t(1-t)^2y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3y_3 \end{aligned} \tag{۹}$$

برای $0 \leq t \leq 1$ داده می‌شود که در آن $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ ثابت‌هایی‌اند که توسط مهندس طراح مشخص می‌شوند. می‌خواهیم ببینیم که چگونه این ثابت‌ها به اطلاعات هندسی فوق متناظر می‌شوند.

اگر فرمول‌های فوق را در $t = 0$ و $t = 1$ ارزیابی کنیم، دراین‌صورت تساوی‌های

$$\begin{aligned} (x(0), y(0)) &= (x_0, y_0), \\ (x(1), y(1)) &= (x_3, y_3) \end{aligned}$$

را به‌دست می‌آوریم. همچنان‌که t از 0 تا 1 تغییر میکند، معادلات (۹) یک خم را توصیف می‌کنند که از (x_0, y_0) شروع می‌شود و در (x_3, y_3) خاتمه می‌یابد. این نیمی از اطلاعات مورد نیاز را به‌دست می‌دهد. اکنون از حسابان استفاده خواهیم کرد تا جهت‌های مماس را وقتی $t = 0$ و $t = 1$ بیابیم. می‌دانیم که بردار مماس بر (۹) وقتی $t = 0$، $(x'(0), y'(0))$ است. برای محاسبهٔ $x'(0)$ از خط نخست (۹) مشتق می‌گیریم تا معادلهٔ

$$x' = -3(1-t)^2x_0 + 3((1-t)^2 - 2t(1-t))x_1 + 3(2t(1-t) - t^2)x_2 + 3t^2x_3$$

حاصل شود. دراین‌صورت جانشانی $t = 0$، نتیجه می‌دهد که

$$x'(0) = -3x_0 + 3x_1 = 3(x_1 - x_0)$$

و از اینجا به بعد، نشان دادن اینکه

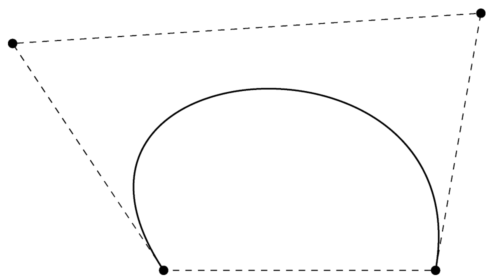
[1] Computer Aided Geometric Design

[2] P. Bézier

$$(x'(0), y'(0)) = 3(x_1 - x_0, y_1 - y_0),$$
$$(x'(1), y'(1)) = 3(x_3 - x_2, y_3 - y_2) \qquad (۱۰)$$

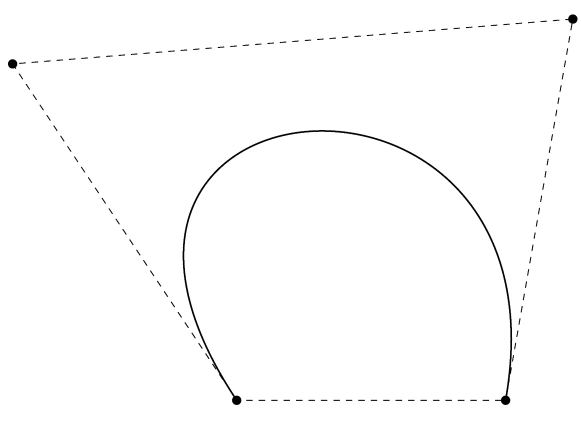
سر راست است. ازآنجاکه $(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (x_1, y_1) - (x_0, y_0)$، نتیجه می‌شود که $(x'(0), y'(0))$ سه برابر بردار از (x_0, y_0) به (x_1, y_1) است. بنابراین، با جابابی (x_1, y_1)، طراح می‌تواند جهت مماس در شروع خم را کنترل کند. به روش مشابه، جابابی (x_2, y_2)، جهت مماس در پایان خم را کنترل می‌کند.

نقاط (x_0, y_0)، (x_1, y_1)، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) *نقاط کنترل* خم درجهٔ سهٔ بزیه نامیده می‌شوند. آنها معمولاً با P_0، P_1، P_2 و P_3 نام‌گذاری می‌شوند و چهارضلعی محدبی را که تعیین می‌کنند، *چندضلعی کنترل* نامیده می‌شود. در اینجا تصویری از خم بزیه همراه با چندضلعی کنترل آن ارائه می‌شود.



در تمرین‌ها، نشان خواهید داد که خم درجهٔ سهٔ بزیه همواره در درون چندضلعی کنترل قرار می‌گیرد.

بنابراین اطلاعاتی که یک خم بزیه را معین می‌کنند، به‌سادگی مشخص می‌شوند و دارای تعبیر هندسی قوی‌اند. مسئله‌ای که تاکنون حل نشده است طول بردارهای مماس $(x'(0), y'(0))$ و $(x'(1), y'(1))$ است. طبق (۱۰)، می‌توان نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را به‌گونه‌ای تغییر داد به‌طوری‌که جهت‌های مماس تغییر نکنند. برای مثال، اگر همان جهت‌های شکل قبل را حفظ کنیم، امّا طول بردارهای مماس را بیشتر کنیم، دراین‌صورت خم زیر را به‌دست می‌آوریم:



بنابراین افزایش سرعت در یک نقطهٔ انتهایی سبب می‌شود که خم نزدیک خط مماس برای فاصلهٔ طولانی‌تری بماند. با آزمون و خطا، طراح می‌تواند در به‌کار بردن خم‌های درجهٔ سهٔ بزیه برای ایجاد طیف گسترده‌ای از خم‌ها ماهر شود. نکتهٔ جالب توجه این است که طراح ممکن است اطلاعاتی دربارهٔ معادلات (۹) که خم را توصیف می‌کنند، نداشته باشد.