بردار گرادیان f بردار مشتق‌های جزئی $\nabla f = (\, f_x,\ f_y,\ f_z)$ است].

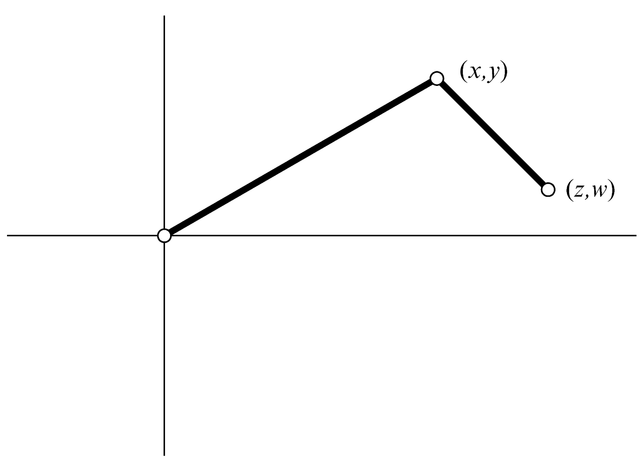
این دستگاه چهار معادله از چهار مجهول x, y, z, λ زیر را برای حل به‌دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yz &= 2x\lambda, \\ 2xz &= 2y\lambda, \\ 2xy - 2z &= 2z\lambda, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned} \tag{۲}$$

این معادلات یک چندگونای آفین در $\mathbb{R}^4$ را تعریف می‌کنند و شهود ما دربارهٔ بُعد، ما را به این خواسته سوق می‌دهد که این چندگونا مرکب از تعدادی متناهی نقطه (یعنی دارای بُعد 0) است زیرا توسط چهار معادله تعریف می‌شود. اغلب ضرایب لاگرانژ برای دانشجویان مشکل است زیرا حل دستگاه معادلات حاصل سخت است. الگوریتم‌های فصل ۲، ابزاری قدرتمند برای حمله به چنین مسائلی مهیا می‌سازند. به‌ویژه، تمام جواب‌های معادلات فوق را خواهیم یافت.

شایان ذکر است که چندگوناهای آفین می‌توانند مجموعه تهی نیز باشند. برای مثال، وقتی $k = \mathbb{R}$، واضح است که $\mathbf{V}(x^2+y^2+1) = \emptyset$ زیرا $x^2+y^2 = -1$ دارای جواب حقیقی نیست (اگرچه وقتی $k = \mathbb{C}$، جواب‌هایی وجود دارند). مثال دیگر، $\mathbf{V}(xy, xy-1)$ است که صرف‌نظر از اینکه k چه میدان باشد، تهی است زیرا هیچ x و y مفروضی نمی‌توانند در هر دو معادله $xy = 0$ و $xy = 1$ صدق کنند. در فصل ۴، روشی را برای تعیین ناتهی بودن یک چندگونای آفین روی $\mathbb{C}$ مطالعه می‌کنیم.

برای ارائهٔ ایده‌ای از برخی از کاربردهای چندگونای آفین، مثال ساده‌ای از ربات‌ها را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم یک بازوی ربات در صفحه داریم که مرکب از دو میلهٔ متصل به طول‌های 1 و 2 است و میلهٔ بلندتر در مبدأ لنگر انداخته است. همان‌طورکه در شکل زیر مشخص است، «حالت» این بازو به‌طور کامل توسط مختصات (x, y) و (z, w) توصیف می‌شود. بنابراین حالت را می‌توان به‌صورت یک 4ـتایی $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ درنظر گرفت. اگرچه، همهٔ 4ـتایی‌ها به‌عنوان حالت این بازو رخ نمی‌دهند. درحقیقت، به‌سادگی می‌توان دید که زیرمجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن، چندگونای آفین تعریف شده توسط معادلات



$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4, \\ (x-z)^2+(y-w)^2 &= 1 \end{aligned}$$

در $\mathbb{R}^4$ است. توجه شود که ابعاد بزرگتر کاملاً به‌راحتی وارد می‌شوند: اگر همان بازو را در فضای 3ـبُعدی درنظر بگیریم، دراین‌صورت چندگونای حالت‌ها توسط دو معادله در $\mathbb{R}^6$ تعریف خواهد شد. روش‌هایی که در این کتاب مطرح می‌شوند، کاربردهای مهمی در نظریهٔ ربات‌ها دارند.

تاکنون تمام ترسیم‌هایمان روی $\mathbb{R}$ بوده‌اند. بعداً در این کتاب، چندگوناهای روی $\mathbb{C}$ را درنظر خواهیم گرفت. در این حالت، به‌دست آوردن ایده‌ای هندسی از اینکه چنین چندگونایی چه شکلی دارد، مشکل‌تر است (امّا غیرممکن نیست). سرانجام، برخی از خاصیت‌های اصلی چندگوناهای آفین را به‌خاطر می‌سپاریم.

لم ۲. *اگر $V, W \subseteq k^n$ چندگوناهایی آفین باشند، دراین‌صورت $V \cup W$ و $V \cap W$ نیز چنین‌اند.*

برهان. فرض کنیم $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ و $W = \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)$. دراین‌صورت ادعا می‌کنیم که

$$\begin{aligned} V \cap W &= \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t), \\ V \cup W &= \mathbf{V}(f_i g_j \mid 1 \le i \le s, 1 \le j \le t). \end{aligned}$$

اثبات تساوی نخست بدیهی است: اینکه نقطه‌ای در $V \cap W$ باشد، بدین معنی است که $f_1, \ldots, f_s$ و $g_1, \ldots, g_t$ در آن نقطه صفر شوند و این نیز همان صفر شدن $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t$ در آن نقطه است.

اثبات تساوی دوم به اندکی کار بیشتر نیاز دارد. اگر $(a_1, \ldots, a_n) \in V$، دراین‌صورت تمام f_iها در این نقطه صفر می‌شوند و این نیز ایجاب می‌کند که تمام $f_i g_j$ها نیز در $(a_1, \ldots, a_n)$ صفر می‌شوند. بنابراین $V \subseteq \mathbf{V}(f_i g_j)$ و به‌طور مشابه نتیجه می‌شود که $W \subseteq \mathbf{V}(f_i g_j)$. این ثابت می‌کند که $V \cup W \subseteq \mathbf{V}(f_i g_j)$. برای اثبات عکس این مشمول، نقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{V}(f_i g_j)$ را انتخاب می‌کنیم. اگر این نقطه در V باشد که کار تمام است. درغیراین‌صورت برای یک i_0 داریم $f_{i_0}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. ازآنجاکه برای هر j، $f_{i_0} g_j$ در $(a_1, \ldots, a_n)$ صفر می‌شود، پس g_jها باید در این نقطه صفر شوند که ثابت می‌کند $(a_1, \ldots, a_n) \in W$. این نشان می‌دهد که $\mathbf{V}(f_i g_j) \subseteq V \cup W$. □

این لم ایجاب می‌کند که اشتراک‌ها و اجتماع‌های متناهی از چندگوناهای آفین، دوباره چندگوناهای آفین باشند. قبلاً مثال‌هایی از اجتماع‌ها و اشتراک‌ها دیده‌ایم. در مورد اجتماع‌ها، اجتماع (x, y)ـصفحه و zـمحور در فضای 3ـبُعدی را درنظر می‌گیریم. طبق فرمول فوق، داریم

$$\mathbf{V}(z) \cup \mathbf{V}(x, y) = \mathbf{V}(zx, zy).$$

البته این یکی از مثال‌هایی است که قبلاً در این بخش بررسی کردیم. برای اشتراک‌ها، توجه می‌کنیم که خم درجهٔ سه تابدار به‌صورت اشتراک دو رویه ارائه شد.

مثال‌های ارائه شده در این بخش، به پرسش‌های جالبی دربارهٔ چندگوناهای آفین منجر می‌شوند. فرض کنیم $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ داده شده‌اند. دراین‌صورت

- (سازگاری) آیا می‌توانیم ناتهی بودن $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ را معین کنیم، یعنی، آیا می‌توانیم معین کنیم که معادلات $f_1 = \cdots = f_s = 0$ دارای یک جواب مشترک‌اند؟
- (تناهی) آیا می‌توانیم متناهی بودن $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ را معین کنیم و اگر چنین است، آیا می‌توانیم تمام جواب‌ها را به‌صورت صریح بیابیم؟
- (بُعد) آیا می‌توانیم «بُعد» $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ را تعیین کنیم؟

پاسخ این پرسش‌ها مثبت است. اگرچه در انتخاب میدانی که روی آن کار می‌کنیم، باید دقت شود. سخت‌ترین، پرسشِ مربوط به بُعد است زیرا درگیر مفاهیم پیچیده‌ای است. بااین‌حال، پاسخ کامل هر سه پرسش را ارائه خواهیم کرد.

تمرین‌های ۲§

۱. هر یک از چندگوناهای آفین زیر را در $\mathbb{R}^2$ رسم کنید.

الف) $\mathbf{V}(x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1)$.

ب) $\mathbf{V}(x^2 - y^2)$.

پ) $\mathbf{V}(2x + y - 1, 3x - y + 2)$.

در هر حالت، آیا چندگونا دارای بُعدی است که به‌طور شهودی انتظار دارید؟

۲. در $\mathbb{R}^2$، $\mathbf{V}(y^2 - x(x-1)(x-2))$ را رسم کنید. راهنمایی: برای کدام xها y دارای جواب است؟ به هر x چند y متناظر می‌شود؟ خم دارای چه تقارنی است؟

۳. در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$، شکلی برای نشان دادن

$$\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 4) \cap \mathbf{V}(xy - 1) = \mathbf{V}(x^2 + y^2 - 4, xy - 1),$$

رسم کنید و نقاط اشتراک را تعیین کنید. توجه شود که این حالت خاصی از لم ۲ است.

۴. چندگوناهای آفین زیر را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنید.

الف) $\mathbf{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

ب) $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1)$.

پ) $\mathbf{V}(x + 2, y - 1.5, z)$.

ت) $\mathbf{V}(xz^2 - xy)$. راهنمایی: $xz^2 - xy$ را تجزیه کنید.

ث) $\mathbf{V}(x^4 - zx, x^3 - yx)$.

ج) $\mathbf{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1)$.

در هر حالت، آیا چندگونا دارای بُعدی است که به‌طور شهودی انتظار دارید؟

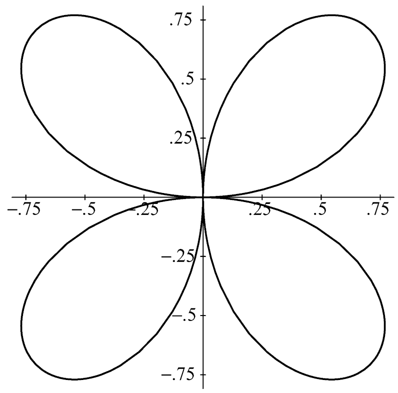
۵. اثبات لم ۲ را برای رسم $\mathbf{V}((x-2)(x^2-y), y(x^2-y), (z+1)(x^2-y))$ در $\mathbb{R}^3$ به‌کار ببرید. راهنمایی: این اجتماع کدام دو چندگوناست؟

۶. می‌خواهیم نشان دهیم که تمام زیرمجموعه‌های متناهی k^n چندگوناهای آفین‌اند.

الف) ثابت کنید که یک تک‌نقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ یک چندگونای آفین است.

ب) ثابت کنید که زیرمجموعه متناهی از k^n یک چندگونای آفین است. راهنمایی: لم ۲ مفید است.

۷. یکی از زیباترین مثال‌ها از مختصات قطبی، رُز چهاربرگ است:



این خم با معادلهٔ قطبی $r = \sin(2\theta)$ تعریف می‌شود. می‌خواهیم نشان دهیم که این خم یک چندگونای آفین است.

الف) با استفاده از $r^2 = x^2+y^2$، $x = r\cos(\theta)$ و $y = r\sin(\theta)$، نشان دهید که رُز چهاربرگ مشمول چندگونای‌آفین $\mathbf{V}((x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2)$ است.

ب) اکنون با دقت بحث کنید که $\mathbf{V}((x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2)$ مشمول رُز چهاربرگ است. این دشوارتر از آن است که به‌نظر می‌رسد زیرا r در $r = \sin(2\theta)$ می‌تواند منفی باشد.

با ترکیب قسمت‌های (الف) و (ب)، نشان داده‌ایم که رُز چهاربرگ چندگونای آفین $\mathbf{V}((x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2)$ است.

۸. نشان دادن اینکه یک مجموعه چندگونای آفین نیست، می‌تواند نیازمند کمی تلاش باشد. برای مثال، مجموعهٔ

$$X = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R},\, x \neq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

که خط $x = y$ با نقطهٔ محذوف $(1,1)$ است را درنظر می‌گیریم. برای اینکه نشان دهیم X یک چندگونای آفین نیست، فرض می‌کنیم $X = \mathbf{V}(f_1,\ldots,f_s)$. دراین‌صورت هر f_i روی X صفر می‌شود و اگر نشان دهیم f_i در $(1,1)$ نیز صفر می‌شود، شرط مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. بنابراین آنچه باید ثابت کنید این است: اگر $f \in \mathbb{R}[x,y]$ روی X صفر شود، دراین‌صورت $f(1,1) = 0$. راهنمایی: فرض کنیم $g(t) = f(t,t)$ که یک چندجمله‌ای در $\mathbb{R}[t]$ است. اکنون برهان گزاره ۵ از ۱§ را به‌کار ببرید.

۹. فرض کنیم $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ نیم صفحهٔ بالایی باشد. ثابت کنید که R یک چندگونای آفین نیست.

۱۰. فرض کنیم $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ مرکب از نقاط با مختصات صحیح باشد. ثابت کنید که $\mathbb{Z}^n$ یک چندگونای آفین نیست. راهنمایی: تمرین ۶ از ۱§ را ببینید.

۱۱. تاکنون، راجع‌به چندگوناهای روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ صحبت کرده‌ایم. این امکان وجود دارد که چندگوناهای روی میدان $\mathbb{Q}$ را درنظر بگیریم، اگرچه پرسش‌ها در اینجا *بسیار* سخت‌ترند. برای مثال، فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. چندگونای $F_n \subseteq \mathbb{Q}^2$ که توسط

$$x^n + y^n = 1$$

تعریف می‌شود را درنظر می‌گیریم. توجه شود که تعدادی جواب واضح برای وقتی که x یا y صفر است، وجود دارند. این جواب‌ها را *جواب‌های بدیهی* می‌نامیم. یک پرسش جالب، وجود یا عدم وجود جواب‌های نابدیهی است.

الف) نشان دهید که اگر n فرد باشد، F_n دو جواب بدیهی دارد و اگر n زوج باشد، چهار جواب بدیهی دارد.