دانشگاه تهران

پاسخ تمرین سری چهارم مبانی ترکیبیات | **دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر** | **نیمسال دوم تحصیلی ۰۰-۹۹**

---

۱) یک گراف کامل n رأسی داریم که یال‌های آن را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. اگر تعداد مثلث‌های تک‌رنگ برابر Δ باشد، نشان دهید:

$$\Delta \geq \binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$$

پاسخ:

باید نشان دهیم تعداد Δ حداقل برابر با مقدار سمت راست است. همه‌ی مثلث‌ها یا تک‌رنگ هستند و یا دورنگ. پس باید تعداد کل مثلث‌ها را از مثلث‌های دورنگ کم کنیم. وقتی تعداد مثلث‌های تک‌رنگ حداقل است که تعداد مثلث‌های دورنگ حداکثر باشد. تعداد کل مثلث‌ها با انتخاب ۳ رأس از کل n رأس بدست می آید. پس $\binom{3}{n}$ انتخاب داریم. برای بدست آوردن حداکثر تعداد مثلث‌های دورنگ، می‌دانیم که هر رأس دلخواه از گراف کامل n رأسی، $n-1$ یال مجاور دارد که x تا از آن ها قرمز و $n-1-x$ تا از آن‌ها آبی هستند. هر یک از این x یال قرمز (x انتخاب) با هر یک از $n-1-x$ یال آبی ($n-1-x$ انتخاب)، دو ضلع یک مثلث دورنگ را تشکیل می‌دهند، یعنی $x(n-1-x)$ تا، که زمانی بیشینه می‌شود که مقدار x و $n-1-x$ برابر باشند. پس تعداد یال های آبی و قرمز برابر $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ می‌باشد و تعداد مثلث‌های دورنگ هر رأس برابر $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ است. برای هر n رأس این شرایط برقرار است پس $\left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor n$. چون هر مثلث دورنگ دو رأس دارد که دو یال مجاور با رنگ‌های متفاوت دارند، پس هر مثلث دو بار شمرده می‌شود و باید بر دو تقسیم شود که $\left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$ بدست می‌آید. بنابراین حداقل تعداد مثلث‌های تک‌رنگ (Δ) برابر $\binom{3}{n} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$ می باشد، یعنی $\Delta \geq \binom{3}{n} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$.

۲) برنامه تمرین ماهانه یک تیم بسکتبال تنظیم شده است. این تیم در ماه 30 روزه‌ای که در پیش است، قرار است هر روز حداقل یک بازی انجام دهد و در کل ماه حداکثر 45 بازی انجام دهد.

الف) بررسی کنید با رعایت شرایط مذکور، آیا می‌توان ثابت کرد تیم به هر صورتی که چیده شود، چند روز متوالی وجود دارد که در آن روزها، تیم دقیقاً 16 بازی انجام دهد؟

ب) به ازای چه m هایی، تعدادی روزهای متوالی وجود دارد که تیم در این روزها دقیقاً m بازی انجام دهد؟

پاسخ:

تعداد بازی‌های انجام شده در روز i را g_i می‌نامیم. پس تعداد کل بازی‌ها از شروع از روز m-ام و پایان در روز n-ام برابر $g_m + g_{m+1} + \cdots + g_n$ می باشد. حالا s_i را تعداد بازی‌های i روز اول قرار می‌دهیم که برابر است با:

$$s_1 = g_1$$
$$s_2 = g_1 + g_2$$
$$\vdots$$
$$s_{30} = g_1 + g_2 + \cdots + g_{30}$$

در دنباله $s_1, s_2, \dots, s_{30}$ می‌دانیم که برای هر i رابطه $1 \le s_i \le 45$ برقرار می‌باشد. حالا دنباله‌ای جدید با اضافه کردن m به هر عضو دنباله قبلی می‌سازیم. پس داریم $s_1 + m, s_2 + m, \dots, s_{30} + m$ که برای هر i، $1 + m \le s_i + m \le 45 + m$.

حالا دو دنباله زیر را داریم:

1) $s_1, s_2, \dots, s_{30}$

2) $s_1 + m, s_2 + m, \dots, s_{30} + m$

این دو دنباله، روی هم 60 عضو دارند که هر عضو مقدار $\le 45 + m$ را می‌گیرد. اگر $45 + m < 60$ باشد، طبق قضیه لانه کبوتری 60 کبوتر و $45 + m$ لانه وجود دارد. پس حتما دو عبارت با مقدار برابر وجود دارند. همچنین می‌دانیم که هر دو دنباله 1 و 2 اکیدا صعودی هستند (چون هر روز حداقل یک بازی انجام می‌شود) پس دو عبارت برابر، یکی متعلق به دنباله 1 و دیگری متعلق به دنباله 2 می‌باشد. فرض کنید s_i عبارت متعلق به دنباله 1 که عبارتی با مقدار برابر با آن مثل s_j در دنباله 2 باشد.

$$s_i = s_j$$
$$s_j = s_k + m$$

که به این معنی است که از روز k-ام تا روز i-ام، m بازی انجام شده است، پس ثابت شد که اگر $45 + m < 60$ یعنی به ازای $m < 15$ چند روز متوالی وجود دارد که در آن روزها، تیم دقیقاً m بازی انجام دهد.

حال برای $m < 31$ باقی‌مانده تعداد بازی‌های انجام شده تا روز i بر m را r_i می‌نامیم و m روز اول را در نظر می‌گیریم، $r_1, r_2, \dots, r_m$.

حال اگر r_i برابر با صفر شود، پس تا روز i مضرب m بازی (km بازی) انجام شده و اگر نه، $m - 1$ لانه (باقی‌مانده می‌تواند از 1 از تا m باشد) و m کبوتر داریم، بنابراین r_i و r_j وجود دارند به‌طوری‌که باقی‌مانده یکسان بر m دارند. پس تعدادی روزهای متوالی وجود دارد که تیم در این روزها دقیقاً مضربی از m بازی (km بازی) انجام دهد. اما k فقط می‌تواند 1 باشد، چون در غیر اینصورت حداقل $30 + m$ بازی خواهیم داشت و چون $m > 15$ است، پس تعداد بازی‌ها بیشتر از 45 می‌شود که خلاف فرض سوال است. در نتیجه مضربی از m بازی، تنها می‌تواند برابر با خود m باشد. بنابراین برای $m < 31$ چند روز متوالی وجود دارد که در آن روزها، تیم دقیقاً m بازی انجام دهد.

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد تیم به هر صورتی که چیده شود، چند روز متوالی وجود دارد که در آن روزها، تیم دقیقاً 16 بازی انجام دهد.

۳) ۱۲ دانش‌آموز در کلاس علوم سال هشتم یک مدرسه حضور دارند. ابتدای هر هفته، معلم پروژه‌هایی را به دانش‌آموزان اختصاص می‌دهد و آن‌ها نیز آزادانه گروه‌هایی را تشکیل می‌دهند. هر گروه، مستقلاً روی پروژه‌اش کار می‌کند و نتیجه را انتهای هفته ارائه می‌دهد. این مراحل هفته‌های بعد نیز تکرار می‌شود. ثابت کنید صرف نظر از تشکیل گروه‌ها، همیشه ۲ دانش‌آموز وجود دارند به طوری‌که ۵ دانش‌آموز دیگر همگی با آن‌ها کار کرده یا همگی با هیچ یک از آن‌ها کار نکرده‌اند.

پاسخ:

با مثال نقض رد درستی مسئله را نشان می‌دهیم.

در هفته اول دانش آموزان به دو گروه ۶ نفره تقسیم می‌شوند. در هفته بعد ۶ گروه ۲ نفره را تشکیل می‌شود. به این صورت که عضو اول گروه اول با عضو اول گروه دوم جفت می‌شود و عضو دوم گروه اول با عضو دوم گروه دوم یک گروه را تشکیل می‌دهند و همین طور تا عضو ششم پیش می‌رویم. در این صورت هیچ ۲ دانش‌آموزی وجود ندارند به طوری‌که ۵ دانش‌آموز دیگر همگی با آن‌ها کار کرده یا همگی با هیچ یک از آن‌ها کار نکرده‌اند.

۴) فرض کنید (P, L) که P مجموعه نقاط و L مجموعه خطوط، یک پیکربندی هندسی باشد که در آن، هر دو نقطه دقیقا روی یک خط و همه نقاط روی یک خط قرار ندارند. ثابت کنید: $|L| \geq |P|$.

پاسخ:

اثبات با استقرا روی تعداد رئوسی که اضافه می‌کنیم، در حالت پایه، فرض کنید سه نقطه داریم (هنوز نقطه ای اضافه نکرده‌ایم) و طبق فرض سوال سه نقطه روی یک خط نیستند و هر دو نقطه دقیقا روی یک خط (سه خط داریم) پس $|L| \geq |P|$ برقرار است. فرض می‌کنیم ادعا برای k نقطه اضافه شده ($n - 1 - 3 = k$) نیز برقرار است. نشان می‌دهیم که برای $k + 1$ نیز برقرار است.

حال برای اثبات حکم استقرا $k + 1$ نقطه اضافه کرده‌ایم. دقت کنید در کل n نقطه داریم. این n نقطه روی یک خط نیستند، بنابراین طبق قضیه $Sylvester - Gallai$ خطی وجود دارد که دقیقا از دو نقطه می‌گذرد. حال اگر یکی از نقاط روی این خط را حذف کنیم (منجر به حذف خط) $n - 1$ نقطه داریم و طبق فرض استقرا حداقل $n - 1$ خط موجود است. حالا نقطه و خط حذف شده را اضافه می‌کنیم و شکل هندسی با n نقطه به دست می‌آید که $|L| \geq |P|$ همچنان برقرار است.

۵) مثلث‌های غیر تک‌رنگ در گراف کامل n رأسی که یال‌های آن با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند را در نظر بگیرید. ثابت کنید تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i b_i$$

که برای هر رأس، r_i تعداد یال‌های قرمز مجاورش و b_i تعداد یال‌های آبی مجاورش است.

پاسخ:

یک رأس دلخواه گراف را در نظر می‌گیریم، r_i یال قرمز و b_i یال آبی مجاورش است. هر یک از این r_i یال قرمز (r_i انتخاب) با هر یک از b_i یال آبی (b_i انتخاب)، دو ضلع یک مثلث غیر تک‌رنگ را تشکیل می‌دهند، یعنی $b_i r_i$ مثلث. برای هر n رأس این کار را تکرار می‌کنیم ($\sum_{i=1}^{n} r_i b_i$) و تعداد مثلث‌ها را با هم جمع می‌کنیم. هر مثلث دورنگ، دو رأس دارد که دو یال مجاور با رنگ‌های متفاوت دارند. پس هر مثلث دو بار شمرده می‌شود و باید بر دو تقسیم شود که $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i b_i$ بدست می‌آید.