群论期末重点复习

严思伟[1,2]

[1] 中国科学院物理研究所

[2] 中国科学院大学物理学院

2025 年 1 月 5 日

目录

1 前言

由于本笔记于 1 月 3 日中午 12 时 16 分创建，而考试时间为 1 月 7 日早 8 时 30 分，故实际内容不会太多，仅会记录部分本人认为较为重要或作业中常出现、考试中出现可能性较大的内容，尽量捡重点、定理不给出证明只管用。

本课程由五个主要部分组成：绪论和数学基础、群的基本概念、群的线性表示理论、置换群、三维转动群。其中绪论和数学基础不会作为独立的考试部分出现，故本复习笔记中将不会包含此部分内容。下面将对每个部分章节的重点内容做一个回顾。

本笔记仅作为复习参考，不能保证我认为的重点内容能够完全匹配考试中的重点内容。本笔记旨在帮助减小复习强度，给出针对考试的复习内容，如果希望全面整体深入地学习群论这门课程，**还是不要看这篇了**。

2 群的基本概念

本章主要给出了群的基本概念和乘法表、群的子集、同态同构、点群空间群简介这些内容。

2.1 群的定义

G 是一些元素的集合，$\forall R$、S、T 为 G 中元素，定义二元运算 RS，满足以下四个条件的 G 称为群：

1. 封闭性：$RS \in G$
2. 结合律：$R(ST) = (RS)T$
3. 恒元：$\exists E \in G, ER = R$
4. 逆元：$\exists R^{-1} \in G, R^{-1}R = E$

2.2 有限群部分概念

1. 有限群的阶: 群的元素数目.
2. 群元素的阶: 对群元素 R, 使 $R^n = E$ 成立的最小正整数 n.

3. 周期: 由群元 R 及其所有幂次构成的集合 $\{R, R^2, \ldots, R^n = E\}$.
4. 生成元: 能够通过乘积生成整个群 G 中所有元素的一组最少群元.
5. 有限群的秩: 生成元的数目.

2.3 重排定理和乘法表

1. 重排定理: 群中任意元素和群中所有元素做乘积, 得到的集合和原群相同.
2. 乘法表: 有限群的二元运算规则，群的全部性质都体现在群的乘法表中。对于有限群，群元素数目有限，我们可能把元素的乘积全部排列出来，构成一个表，称为群的乘法表，简称群表。

重排定理在乘法表中的应用:

1. 乘法表的每一行 (列) 都是所有群元的一个重新排列.
2. 任一群元素在乘法表中的每一行 (列) 中只出现一次.

借助重排定理, 我们只需要知道群 G 中少数几个乘积结果就能够直接给出乘法表.

2.4 子群、陪集和类

1. 子群: H 是群 G 的子集, 且定义有和 G 相同的运算规则, 若满足群的四条定义, 就称 H 是 G 的子群, 记为 $H \subset G$
2. 陪集: 设 H 是 G 的子群,$\forall R \notin H$ 且 $R \in G$, 则 RH 和 HR 分别称为 H 的左陪集和右陪集.
3. 陪集性质: 陪集 RH 和 H 没有公共元素, 且自身没有重复元素.
4. 陪集定理: H 的左右陪集 RH 和 HR, 要么拥有完全相同的元素, 要么拥有完全不同的元素.
5. 拉格朗日定理: 群 G 的阶 g 一定是子群 H 的阶 h 的整数倍,$g = dh$,d 为正整数, 称为子群 H 的指数.
6. 不变子群: 拥有相同左右陪集的子群.

7. 商群: 群 G 的不变子群 H 和其所有陪集, 作为复元素、按复元素定义乘积规则且满足群的四条定义, 则称为群 G 关于不变子群 H 的商群, 记为 G/H.

8. 商群性质: 恒元为不变子群 H; 商群的阶数是子群 H 的指数 $d = g/h$.

9. 共轭元素: 对群元 R、T, 若 $\exists S \in G$, 使得 $T = SRS^{-1}$, 则 R、T 相互共轭.

10. 共轭类: 所有相互共轭的元素集合, 简称类

$$C_\alpha = \{R_k | R_k = SR_jS^{-1}, S \in G\}$$

, 定义 $n(\alpha)$ 为类 C_α 中元素数目. 群可以按照类做划分, 所有元素会且仅会在一个类中出现.

在实际题目中，我们通常需要将群对类做划分，下面给出几种快速找出共轭元素的方法：

1. 若已知乘法表, 共轭元素在乘法表中处于转置位置, 即两个关于对角线对称的元素一定是共轭元素.

2. 对于 C_n 群, 所有元素都自成一类.

3. 对于 D_{2n} 群, 所有平面上的转动可分为两类; 对于 D_{2n+1} 群, 所有平面上的转动均属于同一类.

类的特殊意义在于, 由于其中元素特殊的共轭性质, 使得所有的不变子群一定是由若干个完整的类组成.

2.5 群的同构同态

1. 同态: 若群 G 中元素按某种规则和群 G' 中元素多一对应, 且群元素乘积也满足对应关系, 则称群 G' 与群 G 同态, 记为 $G' \sim G$. 同态关系中, 先后顺序很重要, 在这类描述中, 后者与前者多一对应.

2. 同态: 同态中的多一对应改为一一对应, 记为 $G' \approx G$. 和同态不同, 由于一一对应, 同构不再具有方向性.

(重要) 同态核定理: 群 G' 与群 G 同态, 与 G' 中恒元对应的 G 中元素的集合 H 称为同态核,H 具有以下性质:

1. H 是 G 的不变子群.
2. 与 G' 中每个其他元素对应的 G 中元素的集合构成 H 的陪集.
3. 群 G' 和群 G 关于群 H 的商群 G/H 同构, 即 $G' \approx G/H$.

除循环群外, 八阶即以下阶群仅有以下几种非同构群:

1. 四阶直积群:$V_4 = C_2 \otimes C_2$
2. 六阶 D_3 群
3. 八阶 D_4 群
4. 八阶直积群: $C_2 \otimes C_4$
5. 八阶直积群: $C_2 \otimes C_2 \otimes C_2$
6. 八阶四元数群 Q_4

2.6 点群

在这里不会详细说明课程中所提及的所有点群, 只会说明一些点群的独特性质.

D_n 群:

1. 所有类均为自逆类.
2. D_{2n} 群有 $n+3$ 个自逆类: 恒元,N 次轴对应转动角度相同、方向相反的转动操作对应元素，$2n$ 个 2 次轴对应的转动元素间隔抽取组成 2 类.
3. D_{2n+1} 群有 $n+2$ 个自逆类: 恒元,N 次轴对应转动角度相同、方向相反的转动操作对应元素，$2n$ 个 2 次轴对应的转动元素全部属于一类.

T 群、O 群、I 群的群元不会作为知识点考察，故在这里不做说明.

非固有点群: 包含固有转动元素和非固有转动元素的点群, 按以下方式分为两类: 设群 G 为非固有点群, 群 H 为固有点群

1. I 型非固有点群: 包含空间反演变换 σ, 构造方式为 $G = H \cup \sigma H = H \otimes \{E, \sigma\}$

2. P 型非固有点群: 不包含空间反演变换, 构造方式为取出 H 中的指数为 2 的不变子群, 保持子群元素不变, 将陪集元素全部乘上空间反演.

注意:

1. 对循环群, 只有形如 C_{2n} 的群才具有 P 型非固有点群.
2. 对 D_n 群, 当 n 为奇数时, 仅有一种 P 型群; 当 n 为偶数时, 有两种 P 型群, 选取的不变子群分别为 C_{2n} 群和 D_n 群.

3 群的线性表示理论

本章主要围绕有限群的线性表示展开讨论. 由于作业和考试内容不涉及诱导分导表示、物理应用、投影算符、不可约基，故在这里不做复习。复习内容主要有：线性表示基本概念、正则表示、不等价不可约表示、正交和完备性定理、特征标表。

由于考试题目中不会出现任何证明题，在这里所做的对基本概念的所有回顾均是为了更好地理解计算过程和加快计算速度，而具体对考试的提升需要结合对作业的回顾，我会在某一部分需要结合哪些题目复习时具体指出。

3.1 线性表示基本概念

1. 线性表示: 行列式不为零的 $m \times m$ 阶矩阵集合构成的群 $D(G)$ 和群 G 同构,$D(G)$ 称为群 G 的一个 m 维线性表示, 简称表示. 每一个群元 R 都对应表示矩阵 $D(R)$. 恒元表示矩阵为单位矩阵, 逆元表示矩阵为逆矩阵.
2. 特征标: 表示矩阵 $D(R)$ 的迹,$\chi(R) = \mathrm{Tr}D(R)$ 称为 R 在表示 $D(G)$ 中的特征标. 同类元素特征标相同.

普遍来说, 要给出群 G 的线性表示, 要满足两个条件:

1. 给出基矢 ψ_μ.
2. 给出群元在基矢下对应的对称变换算符 P_G.

则给出对称变换群元 P_R 在基 ψ 中的矩阵形式:

$$P_R\psi_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu D_{\nu\mu}(R) \tag{1}$$

当 P_R 和 R 存在一一对应关系时,$D(R)$ 即是群 G 的线性表示.(其实一多对应也算, 但是这里为了方便理解, 毕竟都是复习了, 主打一个直接简洁)

如果取群元 R 作为基矢, 也取群元 S 作为算符, 那么会给出以下形式的表示:

$$SR = \sum_{P\in G} PD_{PR} \tag{2}$$

此时的 D 即为群 G 的正则表示, 由定义可以知道:

$$D_{PR} = \begin{cases} 1, & P = SR \\ 0, & P \neq SR \end{cases}$$

右正则表示在此不予列出.

3.2 等价表示和可约表示

1. 等价表示: 可以由相似变换联系起来的表示. 两表示等价的充要条件是对所有元素特征标相等.
2. 对有限群, 只需要研究幺正表示和幺正的相似变换.
3. 一个表示的表示矩阵如果能化成上三角阶梯矩阵, 那么就是可约表示, 否则为不可约表示.
4. 有限群的表示要么是完全可约表示, 要么是不可约表示.

3.3 不等价不可约表示

正交定理: 不等价不可约幺正表示 D^i 和 D^j 的矩阵元素, 作为群空间的矢量满足正交关系:

$$\sum_{R\in G} D^i_{\mu\rho}(R)^* D^j_{\nu\lambda}(R) = \frac{g}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

其中 m_j 为 D^j 的维数,g 为群 G 的阶.
取 $\rho = \mu, \lambda = \nu$, 对 $\rho\lambda$ 求和, 则有特征标第一正交定理:

$$\sum_{R\in G}\sum_{\rho\lambda} D^i_{\rho\rho}(R)^* D^j_{\lambda\lambda}(R) = \frac{g}{m_j}\delta_{ij}\sum_{\rho\lambda}\delta_{\rho\lambda}\delta_{\rho\lambda}$$

即

$$\sum_{R\in G}\chi^i(R)^*\chi^j(R)=g\delta_{ij}$$

完备性定理: 有限群不等价不可约表示维数的平方和等于群的阶数:

$$g=\sum_j m_j^2$$

由此给出有限群不等价不可约幺正表示的矩阵元素 $D^i(G)$, 作为群空间的矢量, 构成群空间的正交完备基, 任何群函数 $f(G)$ 均可按它们展开:

$$f(R)=\sum_{j\mu\nu}C^j_{\mu\nu}D^j_{\mu\nu}(R),\quad C^j_{\mu\nu}=\frac{m_j}{g}\sum_{R\in G}D^j_{\mu\nu}(R)^*f(R)$$

类似傅里叶展开的关系式.

将矩阵元替换为特征标, 群空间替换为类空间, 依然成立, 说明有限群不等价不可约表示的特征标 $\chi^j(G)$ 构成类空间的正交完备基, 任何类函数可以按照下面的关系对特征标做展开:

$$f(R)=f(SRS^{-1})=\sum_j C_j\chi^j(R),\quad C_j=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}\chi^j(R)^*f(R)$$

很容易得到有限群不等价不可约表示的个数等于群的类数.

这说明了特征标在群表示理论中的重要地位, 也是为什么群表示的特征标表如此重要且被列为考试重点.

3.4 可约表示向不可约表示的约化

对于可约表示, 总可以通过相似变换 X 将其变为已约表示, 即不可约表示的直和:

$$X^{-1}D(R)X=\oplus a_jD^j(R),\quad \chi(R)=\sum_j a_j\chi^j(R)$$

a_j 为不可约表示 $D^j(R)$ 在 $D(R)$ 中的重数. 将上面的群函数对特征标做展开中的群函数替换为特征标, 可以得到 a_j 的表达式:

$$a_j=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}\chi^j(R)^*\chi(R)$$

表示为不可约表示的判据是:$\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2=g$, 若大于, 则此表示可约.

如何将可约表示化为不可约表示:

1. 选取一组生成元, 写出其在此表示下的表示矩阵.
2. 计算 $\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2$, 判断表示是否可约.
3. 若可约, 给出此群对应的不可约表示个数及维数. 判据有二: 不等价不可约表示个数的和为类数; 不等价不可约表示维数的平方和为群的阶.
4. 计算此表示约化后各不等价不可约表示的重数
$$a_j = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\chi^j(R)^*\chi(R)$$
, 并给出在选择约化的次序下给出之前选取生成元的表示矩阵.
5. 将各生成元的两个表示矩阵代入 $X^{-1}D(R)X = \oplus a_j D^j(R)$, 即可以给出变换矩阵 X.
6. 给出基矢变换 $\phi_\mu = \sum_\nu \psi_\nu X_{\nu\mu}$

结合第 3 章作业第 17 题边做边看食用更佳.

3.5 新表示构成

这里仅简单提及，因为不是考试内容但是和特征标表的填写有关.

1. 商群的不可约表示也是原群的不可约表示.
2. 直乘群的不可约表示可以表示为两子群不可约表示的直乘.

3.6 不可约表示的特征标表

要顺利写出一个群的特征标表, 以下几点性质是必须牢记的:

1. 不等价不可约表示的数目为类的个数 $\sum_j 1 = g_c$.
2. 不等价不可约表示维数的平方和为群的阶 $\sum_j m_j = g$.
3. 恒元的特征标为不可约表示的维数 $\chi^j(E) = m_j$.
4. 恒等表示的特征标均为 1.
5. 除了恒等表示, 每一行特征标乘类中元素数目求和等于 0.
6. 每一列特征标平方和乘类中元素数目等于群的阶.

7. 阿贝尔群的表示都是一维的.
8. 商群和直乘群表示的性质.
9. D_{2n} 群有 $n+3$ 个自逆类,$4n$ 个元素, 有 4 个一维和 n-1 个二维不等价不可约表示.
10. D_{2n+1} 群有 $n+1$ 个自逆类,$4n+2$ 个元素, 有 2 个一维和 n 个二维不等价不可约表示.

结合第 3 章作业第 14 题边做边看食用更佳.
给出几个常见的特征标表:
C_3 群:

C_3	E	R	R^2
A	1	1	1
E	1	ω	ω^*
E^*	1	ω^*	ω

D_4 群:

D_4	E	$2C_4$	C_4^2	$2C_2'$	$2C_2''$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

T 群:

T	E	$3C_2$	$4C_3'$	$4C_3'^2$
a_{51}	1	1	1	1
a_{51}	1	1	ω	ω^*
a_{51}	1	1	ω^*	ω
a_{51}	3	-1	0	0

O 群:

O	E	$3C_4^2$	$8C_3'$	$6C_4$	$6C_2''$
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	-1	-1
E	2	2	-1	0	0
T_1	3	-1	0	1	-1
T_2	3	-1	0	-1	1

建议读者推导试试, 有助于理解上文所给出的方法.

4　置换群

本章主要考察部分为: 杨图杨表杨算符、置换群的不可约表示、置换群不可约表示的内积和外积. 具体考查方式可能为:

1. 写出置换群对应的杨图, 杨表, 杨算符.
2. 使用列表法计算置换群元素的不可约表示.
3. 使用等效方法计算置换群的特征标表.
4. 写出置换群元素在表示中的实正交形式.
5. 按照 Littlewood-Richardson 规则, 写出: 置换群的某表示, 作为子群直积的分导表示, 按子群的不可约表示约化, 并验证维数.
6. 按照 Littlewood-Richardson 规则, 写出: 置换群某表示的外积, 约化为一系列置换群不可约表示的直和, 并验证维数.

置换群的基本概念在考察中并不重要, 所以我直接从置换群和杨图杨表杨算符的关系开始. 本章我的部分分析过程非常粗暴, 有部分错误, 但是能够得到正确的结果, 旨在帮助大家应对考试, 望海涵.

4.1　杨图, 杨表, 杨算符

为什么要有杨图? 原因如下:

1. 在置换群 S_n 中, 相互共轭的两个置换一定具有相同的置换结构. 例如: 置换 (12)(34) 与 (13)(24) 共轭, 但与 (123)(4) 不共轭. 于是对置换群

来说, 在不同类中的元素一定拥有不同的置换结构, 故置换群类的个数即为对 n 做整数划分的个数.

2. 有限群不等价不可约表示的数目等于类的个数, 也等于 n 做整数划分的个数. 将这个过程可视化, 即使用格子在某一行 (列) 上的增减来替代配分数的变化, 这就是我们需要杨图的原因.

正则杨图: 在绘制杨图的过程中, 某一个格子如果不在左边界, 则保证他左边有格子; 如果不在上边界, 则保证他上面有格子. 正则杨图可以由配分数描写: 对一个杨图, 第一行含 λ_1 格, 第二行含 λ_2 格, 以此类推, 得到的杨图称为配分数 $[\lambda]$ 对应的杨图, 简称杨图 $[\lambda]$

正则杨图有大小之分: 从上往下第一行左起开始向右数, 如果存在某个位置杨图 A 有格子而杨图 B 没有, 则此时称杨图 A 小于杨图 B. 按照定义可以得到正则杨图的个数就是 n 配分数 $(\lambda)_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ 的个数, 即是不等价不可约表示的个数. 可以通过画图或者是配分数计算来给出正则杨图的个数. 例如,S_4 有 5 个正则杨图,S_5 有 7 个正则杨图.

正则杨表: 对于一个给定的正则杨图, 可以向其中从 1 开始按顺序填入自然数, 填充规则如下:

1. 每一行中, 右边的填数大于左边的填数.
2. 每一列中, 下面的填数大于上面的填数.

这样得到的杨表即是正则杨表. 例如: 杨图 [3,2] 的全部正则杨表从小到大排列如下:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

正则杨表的个数由钩形数规则给出:

1. 对杨图第 i 行第 j 列的格子, 定义钩形数 h_{ij}, 等于一条钩形在杨图中经过的格子数. 这条钩形是这样的: 它从第 i 行的最右边向选定格子前进, 到达选定格子后向下转向, 并行进到第 j 列的最下面.
2. 杨图 $[\lambda]$ 对应的正则杨表个数为

$$d_\lambda(S_n) = \frac{n!}{\prod_{ij} h_{ij}}$$

正则杨图, 正则杨表的一些性质:

1. 所有 n 格杨图的正则杨表数的平方和等于 $n!$:

$$\sum_{[\lambda]} d_{[\lambda]}(S_n)^2 = n!$$

2. 每个 n 格正则杨图 $[\lambda]$ 都唯一地对应置换群 S_n 的一个不可约表示, 不同的正则杨图对应的不可约表示不等价, 杨图 $[\lambda]$ 对应的不可约表示的维数等于杨图对应的正则杨表个数 $d_{[\lambda]}(S_n)$.

对某一杨表, 我们可以定义:

1. 横向置换: 同行数字间的置换. 记为 P.
2. 横算符: 杨表中所有横向置换的和, 记为 $\mathcal{P}$.
3. 纵向置换: 同列数字间的置换. 记为 Q.
4. 纵算符: 杨表中所有横向置换与其置换宇称相乘后加和得到, 记为 $\mathcal{Q}$.
5. 杨算符: 横算符与纵算符的乘积 $\mathcal{Y} = \mathcal{P}\mathcal{Q}$

给定杨表写出杨算符的方法:

1. 列出每一行所有的横向置换之和, 然后把不同行的置换之和相乘.
2. 列出每一列的纵向置换, 乘上每个置换的置换宇称后加起来, 然后把不同列的置换宇称与置换的乘积之和相乘.
3. 把步骤一和步骤二得到的结果相乘, 并把每一项化成没有公共客体的轮换乘积.

例：写出该杨表的杨算符：$\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&\end{smallmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y} &= \{E+(12)+(13)+(23)+(123)+(321)\}\{E+(45)\}\{E-(14)\}\{E-(25)\} \\
&= \{E+(12)+(13)+(23)+(123)+(321)\}\times\{E+(45)\}\{E-(25)-(14)+(14)(25)\} \\
&= \{E+(12)+(13)+(23)+(123)+(321)\} \\
&\quad \times\{E-(25)-(14)+(14)(25)+(45)-(452)-(541)+(4152)\} \\
&= \{E-(25)-(14)+(14)(25)+(45)-(452)-(541)+(4152)\} \\
&\quad +\{(12)-(125)-(214)+(1425)+(12)(45)-(1245)-(2154)+(15)(24)\} \\
&\quad +\{(13)-(13)(25)-(314)+(314)(25)+(13)(45)-(13)(452)-(3154)+(31524)\} \\
&\quad +\{(23)-(325)-(23)(14)+(14)(325)+(23)(45)-(3245)-(23)(541)+(32415)\} \\
&\quad +\{(123)-(1253)-(2314)+(14253)+(123)(45)-(12453)-(23154)+(24)(153)\} \\
&\quad +\{(321)-(3251)-(3214)+(32514)+(321)(45)-(32451)-(32154)+(15)(324)\}
\end{aligned}
$$

4.2 列表法计算置换群不可约表示矩阵

上一节中提到, 每个正则杨图 $[\lambda]$ 都唯一地对应置换群 S_n 的一个不可约表示, 且此不可约表示的维数等于杨图 $[\lambda]$ 对应的正则杨表的个数. 我们在这里不讨论表示的基是什么、如何由理想和幂等元给出等等，仅给出计算表示矩阵的必需知识和计算步骤.

解决问题: 计算置换 R 在表示 $[\lambda]$ 中的表示矩阵.

例：用列表法计算轮换 $S=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ 在表示 $[3,2]$ 中的表示矩阵。

$$\boldsymbol{y}_1 = E-P_{15} = E-(2\ 4)(5\ 3), \quad \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{y}_4=\boldsymbol{y}_5=E$$

杨表$\mathcal{Y}_\mu$	$\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&2&4\\3&5&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&2&5\\3&4&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&3&4\\2&5&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&\end{smallmatrix}$
$\sum_k \delta_k\,\{$杨表$\mathcal{Y}_{\nu k}\}$	杨表$\mathcal{Y}_\mu(S)$				
	$\begin{smallmatrix}2&3&4\\5&1&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&3&5\\4&1&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&3&1\\4&5&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&4&5\\3&1&\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&4&1\\3&5&\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&\end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix}1&4&5\\2&3&\end{smallmatrix}$	$-1-0$	$0-1$	$1-0$	$0+1$	$0-0$
$\begin{smallmatrix}1&2&4\\3&5&\end{smallmatrix}$	-1	0	0	0	1
$\begin{smallmatrix}1&2&5\\3&4&\end{smallmatrix}$	0	-1	0	0	0
$\begin{smallmatrix}1&3&4\\2&5&\end{smallmatrix}$	-1	0	0	1	0
$\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4&\end{smallmatrix}$	0	-1	0	1	0

4.2.1 给出表示的基

在置换群中, 表示的基为群代数, 是若干置换的线性组合, 则其一定可以写为若干杨算符的线性组合, 于是我们用杨图 [λ] 的杨表的线性组合来指代这个群代数.

如何找出这些杨表? 一个简单的想法是直接从正则杨表开始, 因为它们的个数正好等于此表示的维数. 列出此杨图的所有正则杨表, 并由此构造出互相正交的杨表线性组合, 即是我们想要的基.

考虑这些正则杨表 $\mathcal{Y}_\mu$ 的杨算符 $\mathcal{Y}_\mu$, 如果这些杨算符的乘积 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu$ 为零, 则它们相互正交; 如果不为零, 则需要去掉非正交的分量才能作为基.

在这里给出以下结论:

1. 当 $\mu > \nu$ 时,$\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu = 0$.
2. 当 $\mu < \nu$ 时, 需要比较杨表 $\mathcal{Y}_\mu$ 中每一列出现的两个数字和杨表 $\mathcal{Y}_\nu$ 中每一行出现的两个数字. 如果没有任何两个数字是同时出现在杨表 $\mathcal{Y}_\mu$ 的一列和杨表 $\mathcal{Y}_\nu$ 的一行, 则说明 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu \neq 0$, 反之则 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu = 0$.
3. 如果出现了 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu \neq 0$ 的情况, 则需要寻找杨表 $\mathcal{Y}_\nu$ 中的横向置换 $P_{\mu\nu}$, 它的效果是左乘在杨算符 $\mathcal{Y}_\nu$ 上, 即对杨表 $\mathcal{Y}_\nu$ 做 $P_{\mu\nu}$ 置换得到 $\mathcal{Y}'_\nu$ 后, 所有出现在 $\mathcal{Y}_\mu$ 中同一列的数字均出现在了 $\mathcal{Y}'_\nu$ 中对应的列中 (如 $\mathcal{Y}_\mu$ 中第一列的数字出现在 $\mathcal{Y}'_\nu$ 中的第一列).
4. 如果没有出现步骤三中的情况, 则 $P_{\mu\nu} = 0$.
5. 基由以下公式给出:
$$y_\mu = \left(E - \sum_\nu P_{\mu\nu}\right)\mathcal{Y}_\mu$$
6. 若对 $\mathcal{Y}_\mu$, 所有的 $P_{\mu\nu}$ 均为 0, 则其对应正交基 $y_\mu = \mathcal{Y}_\mu$

将得到的 y_μ 按顺序写到待求表示矩阵的左边, 即得到例题中左边的部分.

4.2.2 给出群元素的作用结果

实际的计算比较复杂, 直观上理解作用结果是群元素 S 作为置换对正则杨表作用得到的杨表 $S\mathcal{Y}_\mu$, 即例题中待求矩阵的上部.

4.2.3 计算矩阵

矩阵元 $D_{\mu\nu}$ 实际上是杨表运算的线性组合, 所以按照类似 4.2.1 中提及的乘积判定规则计算每一个即可, 但规则略有不同: 对于杨表乘积 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu$

1. 如果没有任何两个数字同时出现在 $\mathcal{Y}_\mu$ 的一列内和 $\mathcal{Y}_\nu$ 的一行内, 则乘积 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu \neq 0$. 对于这样两个杨表, 给出 $\mathcal{Y}_\mu$ 中的纵向置换 $Q_{\nu\mu}$, 使得 $\mathcal{Y}'_\nu = Q_{\nu\mu}\mathcal{Y}_\mu$ 中的每个数字均出现在和这个数字在 $\mathcal{Y}_\nu$ 出现的相同一行中. 这个乘积结果规定为这个纵向置换 $Q_{\nu\mu}$ 的置换字称.

2. 不满足 1 中条件, 则 $\mathcal{Y}_\mu\mathcal{Y}_\nu = 0$.

注意:

1. 矩阵元可能包含多个乘积, 请注意不要遗漏.

2. 此结果仅用于计算, 如有什么问题还请查阅教材, 在此只能保证结果的准确性.

4.3 相邻元素对换在表示中的实正交形式

等效方法正则填充计算置换群的特征标表原理非常简单, 但对于稍微高维数一些的表示就无能为力, 所以我认为考试中不会涉及, 故跳过, 特此说明.

实正交表示 $\bar{D}^{[\lambda]}$ 可以通过 4.2 中得到的不可约表示做相似变换得到, 但这里只给出简单的计算办法: 设 $P_a = (a, a+1)$, 则 $\bar{D}^{[\lambda]}(P_a)$ 是由 1×1,2×2 子矩阵的直和构成的实正交矩阵.

1. 当 a 和 $a+1$ 在正则杨表 $\mathcal{Y}_\nu^{[\lambda]}$ 中填在同一行 (列) 中时, 有 1×1 子矩阵 $\bar{D}_{\nu\nu}^{[\lambda]} = 1(-1)$;

2. 当 a 和 $a+1$ 在正则杨表 $\mathcal{Y}_\nu^{[\lambda]}$ 中既不填在同一行也不填在同一列时, 则交换 a 和 $a+1$ 的位置, 杨表 $\mathcal{Y}_\nu^{[\lambda]}$ 变为 $\mathcal{Y}_{\nu_a}^{[\lambda]}$, 不失一般性, 设杨表 $\mathcal{Y}_\nu^{[\lambda]}$ 小于 $\mathcal{Y}_{\nu_a}^{[\lambda]}$, 则填入 2×2 子矩阵:

$$\begin{pmatrix} \bar{D}_{\nu\nu}^{[\lambda]} & \bar{D}_{\nu\nu_a}^{[\lambda]} \\ \bar{D}_{\nu_a\nu}^{[\lambda]} & \bar{D}_{\nu_a\nu_a}^{[\lambda]} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{m^2-1} \\ \sqrt{m^2-1} & 1 \end{pmatrix}$$

其中 m 是在杨表 $\mathcal{Y}_\nu^{[\lambda]}$ 中从 a 走到 $a+1$ 所需要的最短步数.

4.4 Littlewood-Richardson 规则应用

Littlewood-Richardson 规则使我们能方便地利用杨图计算置换群不可约表示诱导表示 (外积) 的约化. 它主要能解决本开开头提到的最后两个问题: 如何将置换群不可约表示的诱导表示约化为置换群不可约表示的直和、如何将置换群不可约表示作为子群的分导表示按子群的不可约表示约化.L-R 规则如下:

1. 对表示 $[\lambda]\odot[\mu]$, 取格数较多、格数相同时更小的杨表作为基础, 此处假设为 $[\lambda]$, 将另一个杨图 $[\mu]$ 的各行格子分别填入其所在行的行数, 即第 j 行的格子填入 j.

2. 将杨图 $[\mu]$ 从第一行开始从上往下逐行将格子补到杨图 $[\lambda]$ 上. 填补过程中一次只能将一行杨图 $[\mu]$ 中的格子填到杨图 $[\lambda]$, 每一行填补完后应满足以下规则: 得到的杨图是正则杨图; 相同数字的格子不能出现在同一列; 从第一行最右边的格子开始往左数、数完一行后换到下一行从头继续, 在这样的顺序下下全程保证数字小的格子数不小于数字大的格子数.

3. 当杨图 $[\mu]$ 中的格子都被使用完、全部填到杨图 $[\lambda]$ 中时, 就找出了一个约化的表示, 这个表示就是填补后的杨表. 继续完成另外的所有填补, 就能找出诱导表示中出现的所有表示.

通常这样的填补方式会有很多, 为了验证结果的正确性, 我们分别计算诱导表示的维数和约化表示的维数.

诱导表示的维数表达式如下:

$$d_{[\lambda]\odot[\mu]}=\frac{(n_\lambda+n_\mu)!}{n_\lambda!n_\mu!}d_{[\lambda]}d_{[\mu]}$$

其中 $n_{[\lambda]}$ 是杨图 $[\lambda]$ 的格子数,$d_{[\lambda]}$ 是表示 $[\lambda]$ 的维数 (即正则杨表数).

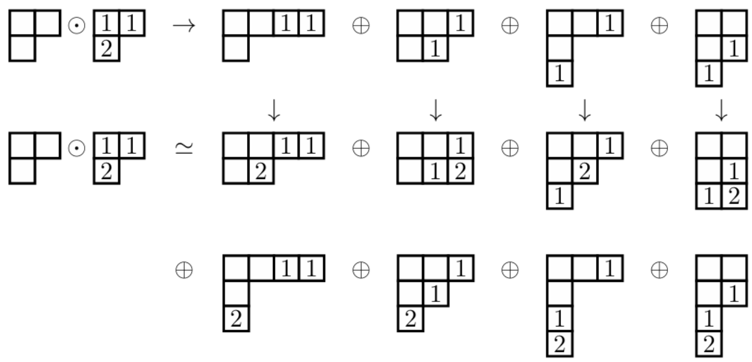
一些建议:

1. 先把只填充数字 1 的格子的情况全部列出来, 不要对一个填充直接填上所有的格子, 很容易混淆.

2. 每一行的填充结果从最小的杨图开始数起。

3. 一定记得维数验证.

例: $[2,1]\odot[2,1]$ 的约化



维数验证: $\dfrac{6!}{3!3!}\times 2\times 2 = 9+10+5+16+16+10+5+9$

正向使用 L-R 规则可以给出诱导表示的直和分解, 而反向使用 L-R 规则就可以给出置换群 S_{n+m} 的不可约表示关于子群 $S_n\otimes S_m$ 的分导表示按子群的不可约表示 $[\lambda]\otimes[\mu]$ 约化结果. 具体过程如下:

1. 给出 S_{n+m} 群的表示 $[\lambda]_{n+m}$, 画出杨图 $[\lambda_{n+m}]$. 列出杨图 $[\lambda_{n+m}]$ 所有满足 L-R 规则的填补方式: 设 $n>m$, 基底格子数为 n 且是位于左上角的正则杨图, 将剩余 m 个格子填充上满足 L-R 规则填充方式的数字.

2. 每一种填充对应一个 S_n 的正则表示和 S_m 的正则表示的直乘, 约化的最终结果就是将这写直乘结果直和起来.

3. 最后进行维数验证.

一些建议:

1. 基底先从最小的杨图开始.

2. 不是基底那个杨图也从最小的杨图开始.

3. 一定记得维数验证.

例: S_6 群的不可约表示 $[3,2,1]$, 作为子群 $S_3 \otimes S_3$ 的分导表示, 按子群不可约表示约化。先列出所有满足 Littlewood-Richardson 规则的杨图 $[3,2,1]$:

$$\ytableaushort{{}{}{},11,2} \quad \ytableaushort{{}{}1,{}1,1} \quad \ytableaushort{{}{}1,{}1,2} \quad \ytableaushort{{}{}1,{}2,1} \quad \ytableaushort{{}{}1,{}2,3} \quad \ytableaushort{{}11,{}2,{}}$$

即将每个杨图拆成子群对应杨图的直乘，再直和起来

$$\begin{aligned} \ydiagram{3,2,1} \simeq\ & \ydiagram{3} \otimes \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{3} \\ \oplus\ & \ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} \\ \oplus\ & \ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{1,1,1} \oplus \ydiagram{1,1,1} \otimes \ydiagram{2,1} \end{aligned}$$

维数验证:: $16 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2$