群论期末重点复习

严思伟

2025 年 1 月 3 日

目录

1 前言

由于本笔记于 1 月 3 日中午 12 时 16 分创建，而考试时间为 1 月 7 日早 8 时 30 分，故实际内容不会太多，仅会记录部分本人认为较为重要或作业中常出现、考试中出现可能性较大的内容，尽量捡重点、定理不给出证明只管用。

本课程由五个主要部分组成：绪论和数学基础、群的基本概念、群的线性表示理论、置换群、三维转动群。其中绪论和数学基础不会作为独立的考试部分出现，故本复习笔记中将不会包含此部分内容。下面将对每个部分章节的重点内容做一个回顾。

本笔记仅作为复习参考，不能保证我认为的重点内容能够完全匹配考试中的重点内容。本笔记旨在帮助减小复习强度，给出针对考试的复习内容，如果希望全面整体深入地学习群论这门课程，**还是不要看这篇了**。

2 群的基本概念

本章主要给出了群的基本概念和乘法表、群的子集、同态同构、点群空间群简介这些内容。

2.1 群的定义

G 是一些元素的集合，$\forall R$、S、T 为 G 中元素，定义二元运算 RS，满足以下四个条件的 G 称为群：

1. 封闭性：$RS \in G$
2. 结合律：$R(ST) = (RS)T$
3. 恒元：$\exists E \in G, ER = R$
4. 逆元：$\exists R^{-1} \in G, R^{-1}R = E$

2.2 有限群部分概念

1. 有限群的阶: 群的元素数目.
2. 群元素的阶: 对群元素 R, 使 $R^n = E$ 成立的最小正整数 n.

3. 周期: 由群元 R 及其所有幂次构成的集合 $\{R, R^2, \ldots, R^n = E\}$.
4. 生成元: 能够通过乘积生成整个群 G 中所有元素的一组最少群元.
5. 有限群的秩: 生成元的数目.

2.3 重排定理和乘法表

1. 重排定理: 群中任意元素和群中所有元素做乘积, 得到的集合和原群相同.
2. 乘法表: 有限群的二元运算规则，群的全部性质都体现在群的乘法表中。对于有限群，群元素数目有限，我们可能把元素的乘积全部排列出来，构成一个表，称为群的乘法表，简称群表。

重排定理在乘法表中的应用:

1. 乘法表的每一行 (列) 都是所有群元的一个重新排列.
2. 任一群元素在乘法表中的每一行 (列) 中只出现一次.

借助重排定理, 我们只需要知道群 G 中少数几个乘积结果就能够直接给出乘法表.

2.4 子群、陪集和类

1. 子群: H 是群 G 的子集, 且定义有和 G 相同的运算规则, 若满足群的四条定义, 就称 H 是 G 的子群, 记为 $H \subset G$
2. 陪集: 设 H 是 G 的子群,$\forall R \notin H$ 且 $R \in G$, 则 RH 和 HR 分别称为 H 的左陪集和右陪集.
3. 陪集性质: 陪集 RH 和 H 没有公共元素, 且自身没有重复元素.
4. 陪集定理: H 的左右陪集 RH 和 HR, 要么拥有完全相同的元素, 要么拥有完全不同的元素.
5. 拉格朗日定理: 群 G 的阶 g 一定是子群 H 的阶 h 的整数倍,$g = dh$,d 为正整数, 称为子群 H 的指数.

3 群的线性表示理论

本章主要围绕有限群的线性表示展开讨论. 由于作业和考试内容不涉及诱导分导表示、物理应用、投影算符、不可约基，故在这里不做复习。复习内容主要有：线性表示基本概念、正则表示、不等价不可约表示、正交和完备性定理、特征标表。

由于考试题目中不会出现任何证明题，在这里所做的对基本概念的所有回顾均是为了更好地理解计算过程和加快计算速度，而具体对考试的提升需要结合对作业的回顾，我会在某一部分需要结合哪些题目复习时具体指出。

3.1 线性表示基本概念

1. 线性表示: 行列式不为零的 $m\times m$ 阶矩阵集合构成的群 $D(G)$ 和群 G 同构,$D(G)$ 称为群 G 的一个 m 维线性表示, 简称表示. 每一个群元 R 都对应表示矩阵 $D(R)$. 恒元表示矩阵为单位矩阵, 逆元表示矩阵为逆矩阵.

2. 特征标: 表示矩阵 $D(R)$ 的迹,$\chi(R) = \mathrm{Tr}D(R)$ 称为 R 在表示 $D(G)$ 中的特征标. 同类元素特征标相同.

普遍来说, 要给出群 G 的线性表示, 要满足两个条件:

1. 给出基矢 ψ_μ.

2. 给出群元在基矢下对应的对称变换算符 P_G.

则给出对称变换群元 P_R 在基 ψ 中的矩阵形式:

$$P_R\psi_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu D_{\nu\mu}(R) \tag{1}$$

当 P_R 和 R 存在一一对应关系时,$D(R)$ 即是群 G 的线性表示.(其实一多对应也算, 但是这里为了方便理解, 毕竟都是复习了, 主打一个直接简洁)

如果取群元 R 作为基矢, 也取群元 S 作为算符, 那么会给出以下形式的表示:

$$SR = \sum_{P\in G} PD_{PR} \tag{2}$$

此时的 D 即为群 G 的正则表示, 由定义可以知道:

$$D_{PR} = \begin{cases} 1, & P = SR \\ 0, & P \neq SR \end{cases}$$

右正则表示在此不予列出.

3.2 等价表示和可约表示

1. 等价表示: 可以由相似变换联系起来的表示. 两表示等价的充要条件是对所有元素特征标相等.
2. 对有限群, 只需要研究幺正表示和幺正的相似变换.
3. 一个表示的表示矩阵如果能化成上三角阶梯矩阵, 那么就是可约表示, 否则为不可约表示.
4. 有限群的表示要么是完全可约表示, 要么是不可约表示.

3.3 不等价不可约表示

正交定理: 不等价不可约幺正表示 D^i 和 D^j 的矩阵元素, 作为群空间的矢量满足正交关系:

$$\sum_{R\in G} D^i_{\mu\rho}(R)^* D^j_{\nu\lambda}(R) = \frac{g}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

其中 m_j 为 D^j 的维数,g 为群 G 的阶.

完备性定理: 有限群不等价不可约表示维数的平方和等于群的阶数:

$$g = \sum_j m_j^2$$

由此给出有限群不等价不可约幺正表示的矩阵元素 $D^i(G)$, 作为群空间的矢量, 构成群空间的正交完备基, 任何群函数 $f(G)$ 均可按它们展开：

$$f(R) = \sum_{j\mu\nu} C^j_{\mu\nu} D^j_{\mu\nu}(R), \quad C^j_{\mu\nu} = \frac{m_j}{g}\sum_{R\in G} D^j_{\mu\nu}(R)^* f(R)$$

类似傅里叶展开的关系式.

将矩阵元替换为特征标, 群空间替换为类空间, 依然成立, 说明有限群不等价不可约表示的特征标 $\chi^j(G)$ 构成类空间的正交完备基, 任何类函数可以按照下面的关系对特征标做展开:

$$f(R)=f(SRS^{-1})=\sum_j C_j\chi^j(R),\quad C_j=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}\chi^j(R)^*f(R)$$

很容易得到有限群不等价不可约表示的个数等于群的类数.

这给出了特征标在群表示理论中的重要地位, 也是为什么群表示的特征标表如此重要且被列为考试重点.

3.4 新表示构成

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}