

群论期末重点复习

严思伟

2025 年 1 月 3 日

目录

1	前言	1
2	群的基本概念	1
2.1	群的定义	1
2.2	有限群部分概念	1
2.3	重排定理和乘法表	2
2.4	子群、陪集和类	2

1 前言

由于本笔记于 1 月 3 日中午 12 时 16 分创建，而考试时间为 1 月 7 日早 8 时 30 分，故实际内容不会太多，仅会记录部分本人认为较为重要或作业中常出现、考试中出现可能性较大的内容。

本课程由五个主要部分组成：绪论和数学基础、群的基本概念、群的线性表示理论、置换群、三维转动群。其中绪论和数学基础不会作为独立的考试部分出现，故本复习笔记中将不会包含此部分内容。下面将对每个部分章节的重点内容做一个回顾。

本笔记仅作为复习参考，不能保证我认为的重点内容能够完全匹配考试中的重点内容。本笔记旨在帮助减小复习强度，给出针对考试的复习内容，如果希望全面整体深入地学习群论这门课程，还是不要看这篇了。

2 群的基本概念

本章主要给出了群的基本概念和乘法表、群的子集、同态同构、点群空间群简介这些内容。

2.1 群的定义

G 是一些元素的集合， $\forall R, S, T$ 为 G 中元素，定义二元运算 RS ，满足以下四个条件的 G 称为群：

1. 封闭性： $RS \in G$
2. 结合律： $R(ST) = (RS)T$
3. 恒元： $\exists E \in G, ER = R$
4. 逆元： $\exists R^{-1} \in G, R^{-1}R = E$

2.2 有限群部分概念

1. 有限群的阶：群的元素数目。
2. 群元素的阶：对群元素 R ，使 $R^n = E$ 成立的最小正整数 n 。
3. 周期：由群元 R 及其所有幂次构成的集合 $\{R, R^2, \dots, R^n = E\}$ 。

4. 生成元: 能够通过乘积生成整个群 G 中所有元素的一组最少群元.
5. 有限群的秩: 生成元的数目.

2.3 重排定理和乘法表

1. 重排定理: 群中任意元素和群中所有元素做乘积, 得到的集合和原群相同.
2. 乘法表: 有限群的二元运算规则, 群的全部性质都体现在群的乘法表中. 对于有限群, 群元素数目有限, 我们可能把元素的乘积全部排列出来, 构成一个表, 称为群的乘法表, 简称群表.

重排定理在乘法表中的应用:

1. 乘法表的每一行 (列) 都是所有群元的一个重新排列.
2. 任一群元素在乘法表中的每一行 (列) 中只出现一次.

借助重排定理, 我们只需要知道群 G 中少数几个乘积结果就能够直接给出乘法表.

2.4 子群、陪集和类

1. 子群: H 是群 G 的子集, 且定义有和 G 相同的运算规则, 若满足群的四条定义, 就称 H 是 G 的子群, 记为 $H \subset G$
2. 陪集: 设 H 是 G 的子群, $\forall R \notin H$ 且 $R \in G$, 则 RH 和 HR 分别称为 H 的左陪集和右陪集.
3. 陪集性质: 陪集 RH 和 H 没有公共元素, 且自身没有重复元素.
4. 陪集定理: H 的左右陪集 RH 和 HR , 要么拥有完全相同的元素, 要么拥有完全不同的元素.
5. 拉格朗日定理: 群 G 的阶 g 一定是子群 H 的阶 h 的整数倍, $g = dh, d$ 为正整数, 称为子群 H 的指数.