1 Головизнин Григорий БЭК182

1. Кр4 2018-2019 №3. Губка Боб и Патрик ловят медуз для коллекции. Число пойманных за i-ый день медуз имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром λ. Уловы медуз в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они поймали 300 медуз.

   (a) (5) С помощью асимптотических свойств оценок максимального правдоподобия постройте 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра λ.

   (b) (10) С помощью дельта-метода постройте приближенную 95%-ую интервальную оценку вероятности того, что за 101-ый день Губка Боб и Патрик не поймают ни одной медузы.

   Решение:

   (a) $X_i \sim \mathcal{P}\wr\rangle\int(\lambda)$, $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} X_i = 300$, $1-\alpha = 0.95$
   Напишем функцию правдоподобия

$$L = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$\ell = \ln L = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}\bigg|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0$$

   Следовательно:

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$$

   Проверим, является ли данная оценка искомым максимумом, то есть найдем вторую производную.

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial\lambda\partial\lambda} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0 \text{ , следовательно, максимум}$$

   Найдем $I(\lambda)$:

$$I(\lambda) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial\lambda\partial\lambda}\right) = -\left(-\frac{n\lambda}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda}$$

$$\frac{1}{I(\lambda)} = \frac{\lambda}{n}$$

$$\frac{1}{I(\hat{\lambda})} = \frac{\bar{X}}{n}$$

Известно, что оценки метода максимального правдоподобия обладают асимптотической нормальностью, то есть:

$$\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\frac{1}{I(\lambda)}}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Доверительный интервал таков, что

$$\mathbb{P}\left(\hat{\lambda} - Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{1}{I(\hat{\lambda})}} < \lambda < \hat{\lambda} + Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{1}{I(\hat{\lambda})}}\right) \approx 1-\alpha$$

По таблице находим, что $Z_{\alpha/2} \approx 1.96$ для $1-\alpha = 0.95$
Реализация доверительного интервала:

$$3 - 1.96\cdot\sqrt{0.03} < \lambda < 3 + 1.96\cdot\sqrt{0.03}$$
$$2.66 < \lambda < 3.33$$

(b) $g(\lambda) = \mathbb{P}(X_{101} = 0) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$
В силу инвариантности оценок максимального правдоподобия

$$\hat{g}(\lambda) = g(\hat{\lambda}) = e^{-\lambda} = e^{-\bar{X}}$$

$$(g'(\hat{\lambda}))^2 = e^{-2\bar{X}}$$

$$\frac{g(\hat{\lambda}) - g(\lambda)}{\sqrt{\frac{(g'(\hat{\lambda}))^2}{I(\hat{\lambda})}}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Доверительный интервал таков, что

$$\mathbb{P}\left(g(\hat{\lambda}) - Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{(g'(\hat{\lambda}))^2}{I(\hat{\lambda})}} < g(\lambda) < g(\hat{\lambda}) + Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{(g'(\hat{\lambda}))^2}{I(\hat{\lambda})}}\right) \approx 1-\alpha$$

Подставим нашу функцию вместо $g(\lambda)$

$$e^{-\bar{X}} - Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}}}{I(\hat{\lambda})}} < e^{-\lambda} < e^{-\bar{X}} + Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}}}{I(\hat{\lambda})}} \approx 1-\alpha$$

Реализация доверительного интервала:

$$e^{-3} - 1.96\cdot\sqrt{e^{-6}\frac{3}{100}} < g(x) < e^{-3} + 1.96\cdot\sqrt{e^{-6}\frac{3}{100}}$$
$$0.032 < g(x) < 0.067$$

2. Кр3 2018-2019 №9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией θ.

   (a) С помощью метода максимального правдоподобия найдите оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ **(6 баллов)**

   (b) Проверьте несмещенность найденной оценки **(3 балла)**

   (c) Вычислите информацию Фишера о параметре θ, заключенную в выборке **(2 балла)**

   (d) Проверьте, является ли найденная оценка эффективной **(4 балла)** **Подсказка**: четвёртый момент стандартной нормальной случайной величины равен 3.

Решение:

$X_1, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(0, \theta)$

(a)

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{\frac{-x_i^2}{2\theta}} = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \cdot \theta^{\frac{-n}{2}} \cdot e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}}$$

$$\ell = \ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{-n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{ml}} = 0$$

$$-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \text{ , следовательно, } \hat{\theta}_{ml} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$$

Проверим знак второй производной:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta\partial\theta} = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta^3} = \frac{\theta n - 2\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^3}$$

При $\theta = \hat{\theta}$ числитель имеет знак:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} n - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0 \text{ , следовательно, максимум}$$

(b)

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \mathbb{E}(X_i^2) = \mathrm{Var}(X_i) + (\mathbb{E}(X_i))^2 = \theta$$

Следовательно, оценка является несмещённой.

(c)

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial\theta\partial\theta}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\theta^3}\right) = -\frac{n}{2\theta^2} + \frac{n}{\theta^3}\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{-n+2n}{2\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2}$$

$$\frac{1}{I(\theta)} = \frac{2\theta^2}{n}$$

(d) Оценка является эффективной, если $\mathrm{Var}(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$

$$\mathrm{Var}(\theta) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \mathrm{Var}(X_i^2) = \frac{\mathrm{Var}(X_i^2)}{n} = \frac{\mathbb{E}(X_i^4) - (\mathbb{E}(X_i^2))^2}{n}$$

Известно, что $\mathbb{E}(X_i^4) = 3$.

$$Z = \frac{X_i - 0}{\sqrt{\theta}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{E}(Z^4) = \mathbb{E}\left(\frac{X_i^4}{\theta^2}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_i^4)}{\theta^2} = 3 \text{ , следовательно, } \mathbb{E}(X_i^4) = 3\theta^2$$

Получили, что:

$$\mathrm{Var}(\theta) = \frac{3\theta^2 - \theta^2}{n} = \frac{2\theta^2}{n} \text{ , следовательно, } \mathrm{Var}(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$$

Следовательно, оценка является эффективной.

3. Кр3 2008-2009 №3. Доходности акций двух компаний являются случайными величинами X и Y с одинаковым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

   (a) Найдите $\mathrm{Corr}(X,Y)$.

   (b) В какой пропорции нужно приобрести акции этих двух компаний, чтобы дисперсия доходности получившегося портфеля была наименьшей?

   Подсказка: Если R — доходность портфеля, то $R = \alpha X + (1-\alpha)Y$

   (c) Можно ли утверждать, что величины $X+Y$ и $7X - 2Y$ независимы?

Решение:

(a)

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Corr}(X,Y)\cdot 2\cdot 3=-2 \text{ , следовательно, } \operatorname{Corr}(X,Y)=-\frac{1}{3}$$

(b)

$$R=\alpha X+(1-\alpha)Y$$

$$\operatorname{Var}(R)=\alpha^2\operatorname{Var}(X)+(1-\alpha)^2\operatorname{Var}(Y)+2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Cov}(X,Y)$$
$$\operatorname{Var}(R)=4\alpha^2+9(1-\alpha)^2-4\alpha(1-\alpha)=17\alpha^2-22\alpha+9\to min$$

$$34\alpha-22=0 \text{ , следовательно, } \alpha=\frac{11}{17}$$

(c)

$$\operatorname{Cov}(X+Y,7X-2Y)=7\operatorname{Var}(X)-2\operatorname{Cov}(X,Y)+7\operatorname{Cov}(X,Y)-2\operatorname{Var}(Y)=$$
$$=7\operatorname{Var}(X)+5\operatorname{Cov}(X,Y)-2\operatorname{Var}(Y)=7\cdot 4+5\cdot(-2)-2\cdot 9=0$$

Из того, что ковариация равна 0 не следует, что величины независимы.

4. Кр3 2009-2010 №1. Имеются наблюдения -1.5, 2.6, 1.2, -2.1, 0.1, 0.9. Найдите выборочное среднее, выборочную дисперсию. Постройте эмпирическую функцию распределения.

(a)

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

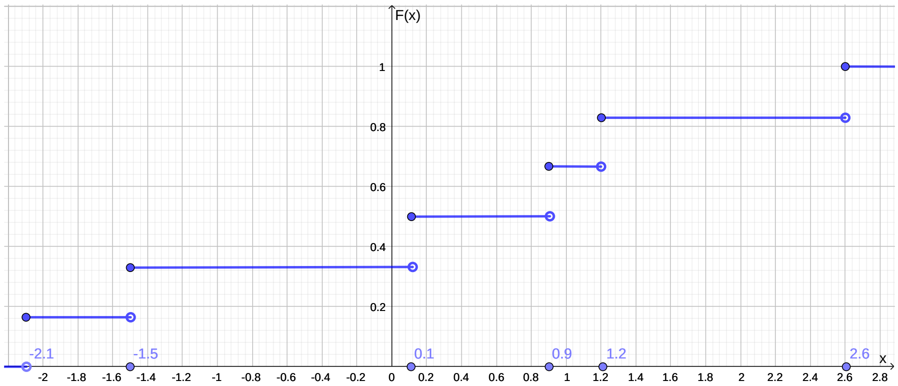
$$\bar{x}=\frac{-1.5+2.6+1.2-2.1+0.1+0.9}{6}=0.2$$

(b)

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$s^2=\frac{(-1.5-0.2)^2+(2.6-0.2)^2+(1.2-0.2)^2}{6}+$$
$$+\frac{(-2.1-0.2)^2+(0.1-0.2)^2+(0.9-0.2)^2}{6}=2.57$$

(c) Выборочная функция распределения:



5. Кр4 2009-2010 №4. Известно, что для двух случайных величин X и Y: $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 2$, $\mathbb{E}(Y^2) = 8$, $\mathbb{E}(XY) = 1$.

   (a) Найдите ковариацию и коэффициент корреляции величин X и Y.

   (b) Определите, зависимы ли величины X и Y.

   (c) Вычислите дисперсию их суммы.

   Решение:

   (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= 1 - 1 \cdot 2 = -1 \\
\mathrm{Corr}(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2 - 1^2 = 1 \\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 8 - 2^2 = 4 \\
\mathrm{Corr}(X,Y) &= \frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 4}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   (b) $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, следовательно, X и Y зависимы

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\
\mathrm{Var}(X+Y) &= 1 + 4 + 2 \cdot (-1) = 3
\end{aligned}$$

6. Кр4 2009-2010 №5. Предположим, что время «жизни» X энергосберегающей лампы распределено по нормальному закону. По 10 наблюдениям среднее время «жизни» составило 1200 часов, а выборочное стандартное отклонение 120 часов.

(a) Постройте двусторонний доверительный интервал для математического ожидания величины X с уровнем доверия 0.90.

(b) Постройте двусторонний доверительный интервал для стандартного отклонения величины X с уровнем доверия 0.80.

(c) Какова вероятность, что несмещенная оценка для дисперсии, рассчитанная по 20 наблюдениям, отклонится от истинной дисперсии меньше, чем на 40%?

Решение:

(a) $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), n = 10, \bar{X} = 1200, \hat{\sigma} = 120$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Доверительный интервал:

$$\bar{X} - t_{n-1;\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Реализация доверительного интервала:

$$1200 - 1.83 \cdot \frac{120}{\sqrt{10}} < \mu < 1200 + 1.83 \cdot \frac{120}{\sqrt{10}}$$

$$1130.44 < \mu < 1269.57$$

(b)

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2_{n-1}$$

(c)

7. Кр4 2009-2010 №6. Учебная часть утверждает, что все три факультатива «Вязание крючком для экономистов», «Экономика вышивания крестиком» и «Статистические методы в макраме» одинаково популярны. В этом году на эти факультативы соответственно записалось 35, 31 и 40 человек. Правдоподобно ли заявление учебной части?

Решение:

$$H_0 : p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{3}$$
$$H_a : p_1 \neq \frac{1}{3}, p_2 \neq \frac{1}{3}, p_3 \neq \frac{1}{3}$$

$$W_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \sim \chi^2_2$$

$$W_{obs} = \frac{(35 - 106 \cdot \frac{1}{3})^2}{106 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(31 - 106 \cdot \frac{1}{3})^2}{106 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(40 - 106 \cdot \frac{1}{3})^2}{106 \cdot \frac{1}{3}} \approx 1.15$$

Возьмём $\alpha = 0.05$.

W_{crit} находим по табличке, $W_{crit} \approx 5.99$.

Заметим, что $W_{obs} < W_{crit}$, поэтому гипотеза H_0 не отвергается.

8. Кр4 2009-2010 №7. Имеются две конкурирующие гипотезы:

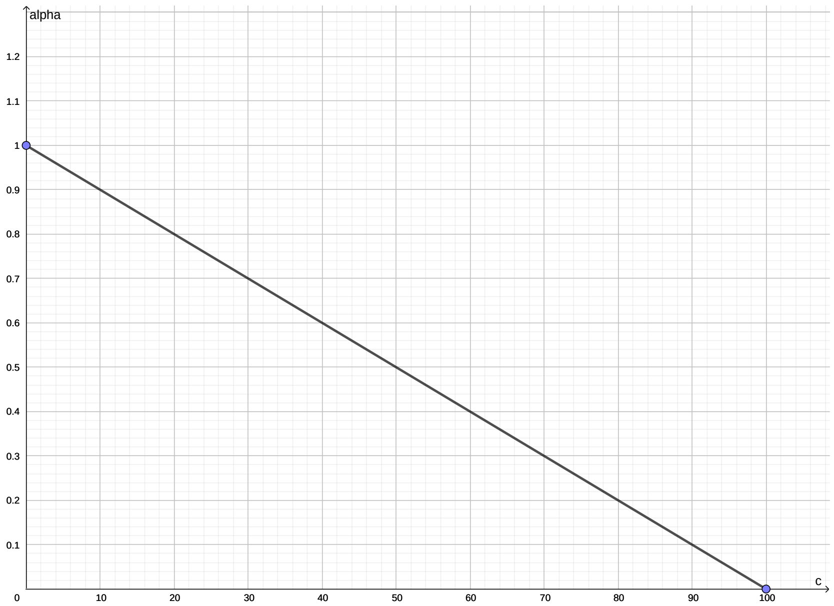
   H_0: Случайная величина X распределена равномерно на (0,100);
   H_a: Случайная величина X распределена равномерно на (50,150).

   Исследователь выбрал следующий критерий: если $X < c$, принимать гипотезу H_0, иначе H_a.

$$H_0 : X_i \sim \mathcal{U}(0, 100)$$
$$H_a : X_i \sim \mathcal{U}(50, 150)$$

   (a) Определения
   (b)

$$\mathbb{P}(\text{ошибка первого рода}) = \mathbb{P}(X_i > c | X_i \sim \mathcal{U}(0, 100))$$
$$\alpha = \mathbb{P}(\text{ошибка первого рода}) = \frac{100 - c}{100} = 1 - \frac{c}{100}$$



Видно, что график зависимости ошибки первого рода от с является прямой с отрицательным наклоном, при этом с может принимать значения от 0 до 100, поскольку вероятность принимает значения от 0 до 1.

$$\mathbb{P}(\text{ошибка второго рода}) = \mathbb{P}(X_i < c | X_i \sim \mathcal{U}(50, 150))$$
$$\beta = \mathbb{P}(\text{ошибка второго рода}) = \frac{c - 50}{100} = \frac{c}{100} - \frac{1}{2}$$

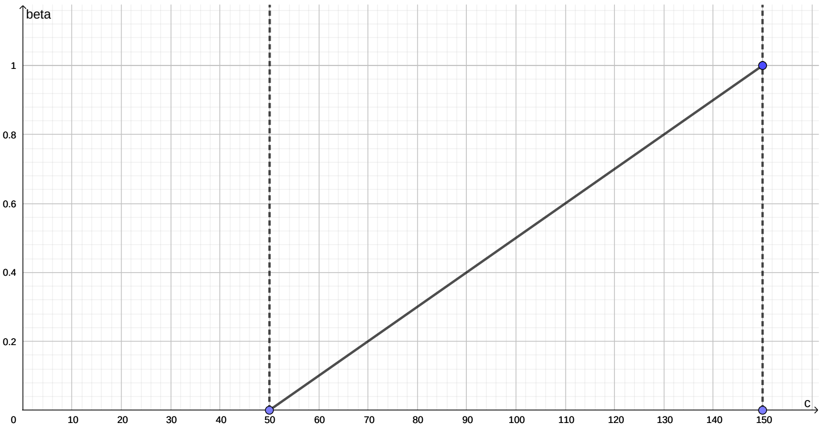


График зависимости ошибки второго рода от с является прямой с положительным наклоном, при этом с может принимать значения от 50 до 150, так как вероятность принимает значения от 0 до 1.

$\alpha = 0.05$

(c)

$$1 - \frac{c}{100} = 0.05 \text{ , следовательно, } \frac{c}{100} = 0.95 \text{ , следовательно, } c = 95$$

$$\beta = \frac{c - 50}{100} = 0.45$$

9. Кр4 2009-2010 №9. Случайная величина X, характеризующая срок службы элементов электронной аппаратуры, имеет распределение Релея: $F(x) = 1 - e^{-x^2/\theta}$ при $x \geq 0$.

   По случайной выборке X_1, X_2, ..., X_n найдите оценку максимального правдоподобия параметра θ.

   Решение:

$$F(x) = 1 - e^{-x^2/\theta}$$
$$f(x) = F'(x) = -\, e^{-x^2/\theta} \cdot \left(-\frac{2x}{\theta}\right) = x \cdot \frac{2}{\theta} \cdot e^{-x^2/\theta}$$

Функция правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^{n} x_i \frac{2}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{\theta}} = \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{2^n}{\theta^n} \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

$$\ell = \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + n \ln 2 - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \left. \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{ML}} = 0$$

$$-n\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \text{ , следовательно, } \hat{\theta}_{ml} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta} = \frac{n}{\theta^2} - 2 \cdot \frac{\sum_{i=1} x_i^2}{\theta^3} = \frac{n\theta - 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^3}$$

Знаменатель > 0. Определим знак числителя в точке $\theta = \hat{\theta_{ml}}$:

$$n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0 \text{ , следовательно, максимум}$$

10. Кр4 2009-2010 №10. По случайной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из равномерного на интервале $[\theta; \theta + 10]$ распределения методом моментов найдите оценку параметра θ. Дайте определение несмещенности и состоятельности оценки и определите, будет ли обладать этими свойствами найденная оценка.

    Решение:

    $X_i \sim \mathcal{N}(\theta; \theta + 10$

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{\theta + (\theta + 10)}{2} = \theta + 5$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ - выборочный первый начальный момент}$$

    Найдем оценку, приравняв математическое ожидание и выборочный первый начальный момент.

$$\hat{\theta}_{MM} + 5 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Таким образом, получаем:

$$\hat{\theta}_{MM} = \bar{X} - 5$$

Оценка является несмещённой, если $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\bar{X} - 5) = \mathbb{E}(X_i) - 5 = \theta \text{ ,следовательно, не смещена}$$

Оценка является состоятельной, если $\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $n \to \infty$

Так как наша оценка не смещена, то можем использовать предел дисперсии оценки для определения состоятельности.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\bar{X} - 5) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{((\theta + 10) - \theta)^2}{12} = 100/12$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{100}{12} = 0$$

Следовательно, оценка является состоятельной.

11. Кр4 2009-2010 №11. При расчете страхового тарифа страховая компания предполагает, что вероятность наступления страхового случая 0.005. По итогам прошедшего года из 10000 случайно выбранных договоров страховых случаев наблюдалось 67.

    (a) Согласуются ли полученные данные с предположением страховой компании? Альтернативная гипотеза: вероятность страхового случая больше.

    (b) Определить минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается.

    Решение:

    (a) $\hat{p} = \frac{67}{10000} = 0.0067$

    $$X_i = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.005 \\ H_a : p > 0.005 \end{cases}$$

Известно, что:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Z_{obs} = \frac{0.0067 - 0.005}{\sqrt{\frac{0.0067 \cdot 0.9933}{10000}}} \approx 2.08$$

Возьмём уровень доверия $\alpha = 0.05$

Гипотеза односторонняя, отсекаем только хвост справа

$$Z_{crit} = Z_{1-\alpha} \approx 1.65$$

Область, в которой H_0 не отвергается: $[-\infty; 1.65]$.

Т.к. $Z_{obs} = 2.08 > 1.65$ гипотеза H_0 отвергается.

(b) $p - value$ - минимальный уровень значимости, при котором гипотеза H_0 не отвергается.

$$p - value = \mathbb{P}(Z > 2.08) = 1 - \mathbb{P}(Z < 2.08) = 0.018$$