Capítulo 5

Imagen, núcleo y transformaciones lineales de $\Re^n$ en $\Re^m$

Dos secciones atrás aprendimos a transformar el vector $\overline{x}$ con una matriz A para obtener el vector $\overline{y} = A\overline{x}$. Estas transformaciones las llamamos transformaciones matriciales y están descritas principalmente en [NJ99, Sección 5.1].

En la sección anterior nos daban un vector $\overline{y} = \overline{b}$ y teníamos que encontrar los vectores $\overline{x}$ tales que $A\overline{x} = \overline{b}$. Este procedimiento corresponde a resolver un sistema de ecuaciones y se describe principalmente en [NJ99, Sección 1.2].

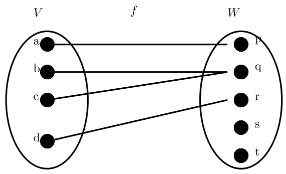
En esta sección vamos a estudiar algunas propiedades exclusivas de la matriz A independientemente de los vectores $\overline{x}$ o $\overline{y}$. Estos temas se describen en [NJ99, Secciones 2.3, 2.4, 2.5 y 4.1]

5.1. Repaso funciones

Una **función** $f : V \to W$ está formada por:

- un conjunto V llamado **dominio**,

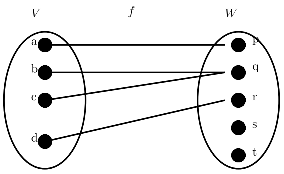
- un conjunto W llamado **codominio**,
- una relación entre el dominio y el codominio la cual
  - relaciona <u>cada</u> elemento del dominio (V)
  - con <u>solamente</u> un elemento del codominio (W).



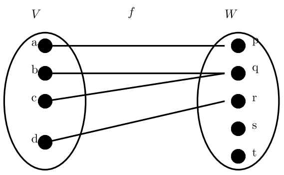
- el dominio de f es el conjunto $V = \{a, b, c, d\}$,
- el codominio de f es el conjunto $W = \{p, q, r, s, t\}$,

f relaciona elementos del dominio con elementos del codominio. Ahora vamos a definir unas relaciones entre <u>subconjuntos</u> del dominio de f y <u>subconjuntos</u> del codominio de f.

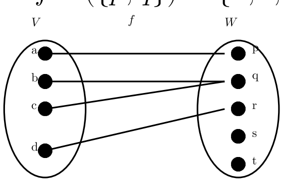
- La **imagen de un subconjunto A del dominio de** f es un subconjunto del codominio de f formado por los elementos que están relacionados con algún elemento de A, se denota $f(A)$. Por ejemplo la imagen de $\{b, c\}$ es $f(\{b, c\}) = \{q\}$,



- la **imagen de la función** f es la imagen del conjunto dominio y se denota $Im(f) = f(V)$. Por ejemplo la imagen de f es $f(V) = \{p, q, r\}$.



- la **imagen inversa de un conjunto** B es el subconjunto del dominio de f formado por los elementos que están relacionados con algún elemento de B, se denota $f^{-}1(B)$. Por ejemplo la imagen inversa del conjunto $\{p, q\}$ es $f^{-1}(\{p, q\}) = \{a, b, c\}$.



En vez de $f(x)$ podemos a usar la notación

$$f(x \in V)$$

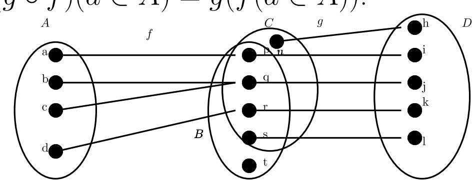
donde V es el <u>dominio</u> de la función. Si el dominio es el intervalo de números reales [a,b] entonces podemos escribir $f(a \leq x \leq b)$.

De manera similar en vez de $f(x)$ podemos a usar la notación

$$f(x) \in W$$

donde W es el <u>codominio</u> de la función. Por lo tanto, si el codominio es el intervalo de números reales [a,b] entonces podemos escribir $a \leq f(x) \leq b$.

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, tales que la imagen de f esté contenida en el dominio de g, $Im(f) \subseteq C$. Entonces definimos la **composición de las funciones** $(g \circ f)(a \in A) = g(f(a \in A))$.



¿Cuál es el dominio, codominio e imagen de $g \circ f$?

Una función f es:

- **sobre** si la imagen de f es igual a su codominio, en otras palabras si la imagen inversa de cada síngleton tiene al menos un elemento.

- **1-1** si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, en otras palabras si la imagen inversa de cada síngleton tiene a lo más un elemento.
- **biyectiva** si es sobre y 1-1. Es decir, si la imagen inversa de cada síngleton es un síngleton.

Proposición:
Si f es biyectiva entonces existe una función f^{-1} (llamada la inversa de f) tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$

5.2. Transformaciones lineales de $\Re^n$ en $\Re^m$

Una transformación $T(\overline{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^m$ es **lineal** si para todo $\overline{u}, \overline{v} \in \Re^n$ y para todo $k \in \Re$ se cumple:

li1 $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$.
(Da igual sumar en el dominio y codominio)

li2 $T(k\overline{u}) = kT(\overline{u})$
(Mult. por const. da igual en dom. y codom.)

Gráficamente esto se puede interpretar que si tenemos una proyección $T : \Re^3 \rightarrow \Re^2$ y dos vectores en $\Re^3$, da lo mismo sumar los vectores y después proyectarlos que sumar sus proyecciones.

Esta propiedad permite descubrir una transformación si sabemos como transforma la matriz identidad.

Proposición:
Toda transformación lineal de $\Re^n$ en $\Re^m$ es una transformación matricial (de $A_{m\times n}$) y toda transformación matricial (de $A_{m\times n}$) es una transformación lineal de $\Re^n$ en $\Re^m$

5.3. Sistemas homogéneos y núcleo de la transformación

Una forma de estudiar las propiedades de una matriz consiste en encontrar todos los puntos que se transforman en el cero. Por lo tanto definimos que si todos los términos constantes de un sistema de ecuaciones lineales son cero, el sistema se llama **sistema homogeneo**. Un sistema que no es homogéneo $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene el **sistema homogéneo asociado** $A\overline{x} = \overline{0}$.

Proposición:
Un sistema homogéneo siempre es consistente

.

El **subespacio nulo** de $A_{m\times n}$ o **núcleo** de $T_A : \Re^n \rightarrow \Re^m$ contiene todos los vectores-n $\overline{x}$ tales que $A\overline{x} = 0_m$ y se denota

$$Nu(A) = \{\overline{x} \in \Re^n \mid A\overline{x} = 0_m\}$$

La **nulidad** de A es el número de variables libres del sistema homogéneo de $[A : 0]$ y se denota $\nu(A)$.

5.4. Independencia lineal

Proposición:
Dada la matriz $A_{m\times n}$ y cualquier $b \in \Re^m$, las siguiente afirmaciones son equivalentes.

- A tiene n pivotes equivalentes.
- A tiene un pivote equivalente en cada columna.
- $[A : b]$ no tiene variables libres.
- $[A : b]$ no tiene infinitas soluciones.
- $A\overline{x} = \overline{0}$ la única solución es la **trivial** ($\overline{x} = \overline{0}$).
- $Nu\{A\} = \{\overline{0}\}$
- $\nu\{A\} = 0$
- $T_A : \Re^n \rightarrow \Re^m$ es 1-1.

Si sucede lo anterior entonces se dice que A es **linealmente independientes** (L.I.).

Si no se cumple la anterior proposición se dice que A es **linealmente dependientes** (L.D.).

A continuación se ilustra el origen del nombre. En [NJ99, Ejemplo 1.2.16] se presenta como se aplica la eliminación de

Gauss de tal forma que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & : & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & : & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & : & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & : & -8 \end{bmatrix}$$

queda transformada en la matriz en forma escalón

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & : & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & : & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & : & -0 \end{bmatrix}$$

y en la matriz en forma escalón reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & : & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que las posiciones pivote de las dos últimas matrices son las mismas, aunque los valores cambian. Por este motivo en las <u>tres</u> matrices las columnas pivotes son la primera, la segunda, la cuarta y la quinta. La tercera columna corresponde a un parámetro.

$$x_3 = t$$

Despejando las variables obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-4t \\ 1+2t \\ 0+t \\ 2+0t \\ 0+0t \end{bmatrix}$$

Proposición:
Las columnas que corresponden a parámetros se pueden escribir como una combinación lineal de las columnas pivote de su izquierda (dependen de las columnas pivote). Por el contrario, las columnas pivote no se pueden escribir como combinación lineal de las otras columnas pivote (no dependen de las otras columnas pivote)

Es de resaltar que cuando decimos que los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, $\ldots \overline{v_n}$ son L. I. nos referimos a que la matriz $[\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots \overline{v_n}]$ es L. I., lo mismo aplica para L. D.

Por ejemplo, para la tercera matriz se tiene que

$$4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformaciones Matriciales - gmunoz@udistrital.edu.co - 2 de marzo de 2017

para la segunda matriz se tiene

$$4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y para la primera matriz

$$4\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 34 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes (4 y -2) coinciden en las tres porque los tres sistemas son equivalentes (ya que uno se obtiene del otro aplicando operaciones elementales de [NJ99, Ejemplo 1.2.16]) y los sistemas equivalentes tienen la misma solución $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

De aquí se concluye que las columnas de la matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \\ 2 & -6 \end{smallmatrix}\right]$ son linealmente independientes. Las columnas de

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & 9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

Transformaciones Matriciales - gmunoz@udistrital.edu.co - 2 de marzo de 2017

son linealmente dependientes, al igual que las columnas de

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Proposición:
Si se elimina una columna de una matriz linealmente independiente también es linealmente independiente. Por otro lado si se aumentan las columnas de una matriz linealmente dependiente entonces también es linealmente dependiente.

Proposición:
Una matriz que tiene más columnas que renglones no puede ser linealmente independiente

- El vector 0_n es L.D.
- Un vector diferente de cero es L.I.
- Dos vectores paralelos son L.D.
- Dos vectores no paralelos son L.I.

Observe que [NJ99, Ejemplo 1.2.18] es similar a [NJ99, Ejemplo 1.2.16] pero se presentan dos parámetros.

Transformaciones Matriciales - gmunoz@udistrital.edu.co - 2 de marzo de 2017

5.5. Imagen, espacio generado y espacio columnas de A

El **conjunto generado** por los vectores $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_k}$

$Gen(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_k})$
$= \{\overline{y} \mid \overline{y} = x_1\overline{v_1} + x_2\overline{v_2} + \cdots + x_n\overline{v_n}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Re\}$

Este conjunto también se conoce como el **espacio columna** de la matriz $A = \begin{bmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{bmatrix}$

$$Col(A) = \{\overline{y} \mid \overline{y} = A\overline{x}, \overline{x} \in \Re^m\}$$

El cual también coincide con la **imagen de una transformación matricial** $T_A : \Re^n \to \Re^m$ que es

$$Im(T_A) = \{\overline{y} \mid \overline{y} = T_A(\overline{x}), \overline{x} \in \Re^m\}$$

El **rango** de la transformación matricial T_A es el número de pivotes de A y se denota $\rho(A)$

Proposición:
Si un vector $\overline{u}$ es combinación lineal de otros vectores

$$\overline{u} = c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_n\overline{v_n}$$

entonces

$$Gen\{\overline{u}, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\} = Gen\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$$

5.6. $\Re^n$ es generado por A

Proposición:
Dada una matriz $A_{m\times n}$ y cualquier $b \in \Re^m$, se tienen las siguientes equivalencias.

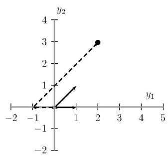
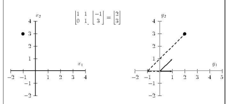
- Las columnas de A generan $\Re^m$.
- $Col(A) = \Re^m$.
- $Im(T_A) = \Re^m$.
- A tiene un pivote en cada renglón.
- A tiene m pivotes.
- $[A : b]$ es consistente.
- Si $B \sim A$ entonces B no tienen renglones de ceros.
- $\rho(A) = m$
- $T_A : \Re^n \to \Re^m$ es **sobre**

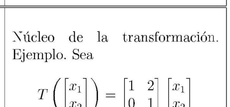
Proposición:
Si se elimina una columna de una matriz que no genera $\Re^n$, esta tampoco genera $\Re^n$.
Por otro lado si se aumentan las columnas de una matriz que genera $\Re^n$, entonces también genera $\Re^n$.

Proposición:
Una matriz que tiene más renglones que columnas no puede generar $\Re^n$

Se sugiere mirar el ejemplo 20 y 21 de la sección 2.3 de la página 90 y los ejercicios 1 y 2.

5.7. Cuadro comparativo de conceptos

Paradigma: Conjunto finito de n vectores de $\Re^m$. Ejemplo $S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \right\}$	Paradigma: Matriz de $m \times n$. Ejemplo $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$	Paradigma: Transformación lineal de $\Re^n$ en $\Re^m$. Ejemplo $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$
Combinación lineal de vectores. Ejemplo $-1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 	Matriz por Vector. Ejemplo $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} := -1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	Transformación matricial de un punto 
Espacio Generado por un conjunto de vectores. Ejemplo $Gen\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}\right) = \left\{x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \Re\right\}$ Corresponde a la recta en $\Re^2$ que pasa por el origen y los puntos $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right]$.	Espacio columna de una matriz. Ejemplo $Col\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \Re\right\}$ Corresponde a la recta en $\Re^2$ que pasa por el origen y los puntos $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right]$.	Imagen de la transformación matricial. Ejemplo Sea $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $Im(T) = \{T(\overline{x}) \mid \overline{x} \in \Re^2\}$ Corresponde a la recta en $\Re^2$ que pasa por el origen y los puntos $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right]$.

Dimensión de $Gen(S)$	Número de pivotes de A Rango de A, $\rho(A)$	Rango de T $\rho(T)$
▪ $Gen(S) = \Re^m$ ▪ Dimensión de $Gen(S)$ es m	▪ $Col(A) = \Re^m$. ▪ A tiene un pivote equivalente en cada renglón. ▪ A tiene m pivotes equivalentes. ▪ $[A : b]$ es consistente para cualquier $b \in \Re^m$. ▪ Si $B \sim A$ entonces B no tienen renglones de ceros. ▪ $\rho(A) = m$.	▪ T es sobre. ▪ $\rho(T) = m$.
Encontrar coeficientes. Ejemplo $x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$	Matriz extendida y sistema de ecuaciones. Ejemplo $1x_1 + 2x_2 = 4$ $0x_1 + 1x_2 = 3$ $\begin{bmatrix}1 & 2 & : & 4\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}$	Imagen inversa de un punto. Ejemplo Sea $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right)$ 
Coeficientes que dan cero. Ejemplo $x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	Espacio nulo de una matriz. Solución del sistema homogéneo. Ejemplo $Nu\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$	Núcleo de la transformación. Ejemplo. Sea $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $Nu(T) = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$
-	Nulidad de A, $\nu(A)$ (# columnas)−(# pivotes)	Nulidad de T, $\nu(T)$

Vectores de S son Linealmente Independientes. Ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal de los otros vectores de S.	▪ A tiene n pivotes equivalentes. ▪ A tiene un pivote equivalente en cada columna. ▪ $[A : b]$ no tiene variables libres. ▪ $[A : b]$ no tiene infinitas soluciones. ▪ $A\overline{x} = \overline{0}$ la única solución es la **trivial** ($\overline{x} = \overline{0}$). ▪ $Nu\{A\} = \{\overline{0}\}$ ▪ $\nu\{A\} = 0$	▪ $Nu\{T\} = \{\overline{0}\}$ ▪ $\nu\{T\} = 0$ ▪ T es 1-1.
▪ S es una base de $\Re^n$ (S es L.I. y $Gen(S) = \Re^n$).	▪ A es invertible (Existe una matriz B tal que $AB = I = BA$). ▪ A es cuadrada y L.I. ▪ A es cuadrada y $Gen(A) = \Re^n$.	▪ T_A es un isomorfismo. ▪ Existe T_A^{-1} tal que $T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x}$ y $T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y}$.

1. Ejemplos 2.3.{22, 23} (pg 90), 2.3.{25, 26, 27} (pg 91) y 2.3.28 (pg 92) de [NJ99].
2. Ejemplos 2.4.{31, 33} (pg 97) y 2.4.{34,36} (pg 98) de [NJ99].
3. Ejemplos 5.3.26 (pg 332), 5.3.27 (pg 333) y 5.3.34 (pg 338) de [NJ99]
4. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden $n = 3$ y sean A' y B' sus matrices equivalentes en forma escalón reducida. Se sabe que A es invertible y que B no lo es. Para cada una de las preguntas diga cual matriz cumple el enunciado, cual matriz no lo cumple y cual matriz no se

sabe si cumple o no lo cumple. En el enunciado M remplaza cada una de las matrices A, A', B y B'

a) Sus columnas son linealmente dependientes.
b) La solución de $[M : 0]$ tiene parámetros
c) La única solución del sistema homogéneo $M\overline{x} = 0$ es $\overline{x} = 0$?
d) El sistema $M\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cualquier $b \in \Re^n$?
e) La transformación T_M es 1-1.
f) Todas las columnas tienen lugares pivotes (Puede considerar los lugares pivotes de A' y B' como lugares pivotes de A y de B respectivamente)
g) El sistema $M\overline{x} = \overline{b}$ es consistente para cualquier $b \in \Re^n$?
h) Las columnas de M generan a $\Re^n$.
i) M tiene al menos un renglón de ceros.
j) La transformación T_M es sobre.
k) Todos los renglones tienen lugares pivotes (Puede considerar los lugares pivotes de A' y B' como lugares pivotes de A y de B respectivamente)
l) Tiene 3 lugares pivotes (Puede considerar los lugares pivotes de A' y B' como lugares pivotes de A y de B respectivamente)

m) Es el producto de matrices elementales.
n) Es la identidad.
ñ) La transformación T_M es un isomorfismo.
o) Las columnas forman una base de $\Re^n$

5. Encuentre tres puntos en cada conjunto generado y grafique dicho conjunto.

a) $Gen(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$
b) $Gen(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix})$
c) $Gen(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$
d) $Gen(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$

Determine si $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ pertenece a cada uno se los conjuntos de los tres últimos incisos.

6. Para cada una de las transformaciones asociadas a las siguientes matriciales, encuentre la imagen (y grafíquela) y el núcleo (escríbalo como el generado de un conjunto de vectores y grafíquelo).

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Para cada inciso grafique el conjunto solución de cada sistema y compárelos.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 3 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & 0 \\ -6 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & -2 \\ -6 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 \\ -2 & 0 & : & 0 \\ 8 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & -1 \\ -2 & 0 & : & 2 \\ 8 & 0 & : & -8 \end{bmatrix}$

Que concluye de los tres sistemas anteriores.

8. Para cada inciso grafique el conjunto solución de cada sistema y compárelos.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & : & 0 \\ -6 & 2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & : & -2 \\ -6 & 2 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Len13] E. Lengyel, *Matemáticas para videojuegos*, Editorial Cengage Learning, 2a. edición, 2013

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.