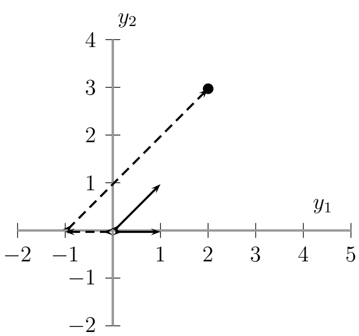
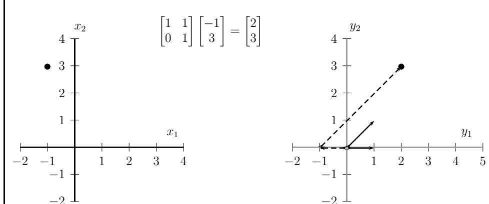
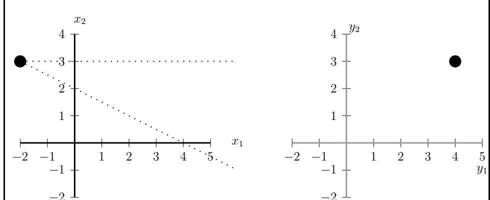
Complemento al libro

0.1. Cuadro comparativo de conceptos

Paradigma: Conjunto finito de n vectores de $\Re^m$. Ejemplo $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$	Paradigma: Matriz de $m \times n$. Ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	Paradigma: Transformación matricial de $\Re^n$ en $\Re^m$. Ejemplo $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
Combinación lineal de vectores. Ejemplo $-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 	Matriz por Vector. Ejemplo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} := -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	Transformación matricial de un punto 
Espacio Generado por un conjunto de vectores. Ejemplo $Gen\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}\right) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \Re \right\}$ Corresponde a la recta en $\Re^2$ que pasa por el origen y los puntos $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$.	Espacio columna de una matriz. Ejemplo $Col\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \Re \right\}$ Corresponde a la recta en $\Re^2$ que pasa por el origen y los puntos $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$.	Imagen de la transformación matricial. Ejemplo Sea $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $Im(T) = \{T(\overline{x}) \mid \overline{x} \in \Re^2\}$ Corresponde a la recta en $\Re^2$ que pasa por el origen y los puntos $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$.

Dimensión de $Gen(S)$	Número de pivotes de A Rango de A, $\rho(A)$	Rango de T $\rho(T)$
▪ $Gen(S) = \Re^m$ ▪ Dimensión de $Gen(S)$ es m	▪ $Col(A) = \Re^m$. ▪ A tiene un pivote equivalente en cada renglón. ▪ A tiene m pivotes equivalentes. ▪ $[A : b]$ es consistente para cualquier $b \in \Re^m$. ▪ Si $B \sim A$ entonces B no tienen renglones de ceros. ▪ $\rho(A) = m$.	▪ T es sobre. ▪ $\rho(T) = m$.
Encontrar coeficientes. Ejemplo $$x_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$	Matriz extendida y sistema de ecuaciones. Ejemplo $$1x_1 + 2x_2 = 4$$ $$0x_1 + 1x_2 = 3$$ $$\begin{bmatrix}1 & 2 & : & 4\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}$$	Imagen inversa de un punto. Ejemplo Sea $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $$T^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right)$$ 
Coeficientes que dan cero. Ejemplo $$x_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$	Espacio nulo de una matriz. Solución del sistema homogéneo. Ejemplo $$Nu\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$ $$= \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$$ $$= \left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$$	Núcleo de la transformación. Ejemplo. Sea $$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$ $$Nu(T) = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$$
-	Nulidad de A, $\nu(A)$ (# columnas)−(# pivotes)	Nulidad de T, $\nu(T)$

Vectores de S son Linealmente Independientes. Ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal de los otros vectores de S.	▪ A tiene n pivotes equivalentes. ▪ A tiene un pivote equivalente en cada columna. ▪ $[A:b]$ no tiene variables libres. ▪ $[A:b]$ no tiene infinitas soluciones. ▪ $A\overline{x}=\overline{0}$ la única solución es la **trivial** ($\overline{x}=\overline{0}$). ▪ $Nu\{A\}=\{\overline{0}\}$ ▪ $\nu\{A\}=0$	▪ $Nu\{T\}=\{\overline{0}\}$ ▪ $\nu\{T\}=0$ ▪ T es 1-1.
▪ S es una base de $\Re^n$ (S es L.I. y $Gen(S)=\Re^n$).	▪ A es invertible (Existe una matriz B tal que $AB=I=BA$). ▪ A es cuadrada y L.I. ▪ A es cuadrada y $Gen(A)=\Re^n$.	▪ T_A es un isomorfismo. ▪ Existe T_A^{-1} tal que $T_A^{-1}(T_A(\overline{x}))=\overline{x}$ y $T_A(T_A^{-1}(\overline{y}))=\overline{y}$.

0.2. Posición pivote

Sabemos que un **pivote** es el elemento delantero en una matriz escalón. Además, como las posiciones de los pivotes no varían en todas las matrices escalón equivalentes, entonces definimos una **posición pivote**, en matrices no escalón, como la posición de un pivote en una matriz escalón equivalente.

Ejemplo: La siguiente matriz en forma escalón tiene dos pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz equivalente tiene dos posiciones pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

0.3. Transformación de una matriz

Definimos la trasformación de una matriz como la matriz de la transformación de sus columnas.
Es decir, dada una transformación

$$T : \Re^n \to \Re^m$$

definimos

$$T : \Re^{n\times k} \to \Re^{m\times k}$$

(donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$ y $\Re^{n\times k}$ es el conjunto de todas la matrices de tamaño $n \times k$), de la siguiente forma. Si A es una matriz de tamaño $n \times k$ entonces $T(A)$ es una matriz de tamaño $m \times k$ en donde la columna i de $T(A)$ corresponde a $T(\overline{v_i})$ donde v_i es la columna i de A.

$$T(\begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \ldots & \overline{v_k} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} T(\overline{v_1}) \; T(\overline{v_2}) \; ... \; T(\overline{v_k}) \end{bmatrix}$$

Proposición:
Con la notación anterior tenemos que si T es lineal entonces:

- $$T(\overline{x}) = A\overline{x}$$
  donde $A = T(I)$,
- $$T(B) = AB$$
  donde $A = T(I)$,
- $$T(AB) = T(A)B$$
  donde A y B son cualquier par de matrices que se puedan multiplicar,
- $$T(\overline{x}) = T(B)B^{-1}\overline{x}$$
  donde B es una base de $\Re^n$.

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.