Capítulo 3

Transformaciones lineales en $\Re$

3.1. Combinación lineal

Una combinación lineal de vectores sólo tiene dos operaciones: suma de vectores y escalar por vector. Una combinación lineal de n vectores-m $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$ se puede es escribir como

$$c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_n\overline{v_n}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \Re$

Ejemplo 3.1. *Dados los vectores-2*

$$\overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \overline{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y constantes $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = -3$, se puede construir la combinación lineal

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Proposición 3.1. *Todo vector-n $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se puede escribir*

como la combinación lineal

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots x_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el caso de los vectores-2 se tiene que

$$\widehat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \widehat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y para el caso de los vectores-3

$$\widehat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \widehat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \widehat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

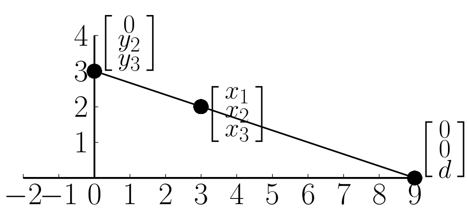
Los llamaremos **vectores de la identidad**. En estos casos se tiene que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\widehat{i} + x_2\widehat{j} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\widehat{i} + x_2\widehat{j} + x_3\widehat{k}$$

3.2. Transformaciones de $\Re^n$ en $\Re^m$

Recordemos que una función $f : A \to B$ relaciona los elementos del **dominio** A con los elementos del **codominio** B,

usualmente en ingeniería el dominio y el codominio es el conjunto de los números reales $\Re$. En esta sección el dominio es el conjunto del los vectores-n $\Re^n$, el codominio es el conjunto del los vectores-m $\Re^m$ y en vez de llamarlas funciones se llamarán **transformaciones**. Un ejemplo de trasformaciones son las proyecciones de $\Re^3$ en $\Re^2$ que se obtienen al tomar una foto o proyectar una sombra. Usamos $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ para denotar los puntos originales en $\Re^3$ y usamos $\overline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ para denotar los puntos de la proyección



Para encontrar la relación entre el vector $\overline{x}$ y el vector $\overline{y}$ utilizamos el modelo de una fuente de luz en las coordenadas $\begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $\overline{y}$ corresponde a la sombra de $\overline{x}$. Debido a la semejanza de triángulos se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{y_2}{d} = \frac{x_2}{d - x_1}, \qquad \frac{y_3}{d} = \frac{x_3}{d - x_1}$$

De aquí se concluye

$$T_d\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d \cdot x_2}{d - x_1} \\ \frac{d \cdot x_3}{d - x_1} \end{bmatrix}$$

En caso que la fuente de luz esté muy alejada ($d >> x_1$), como es el caso del sol, entonces la transformación se puede aproximar a

$$T_{inf}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

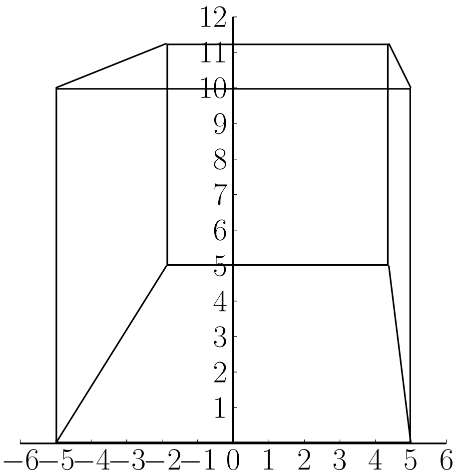
Dado un paralelepípedo con vértices dados por las columnas de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2{,}0 & 2{,}0 & 2{,}0 & 2{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 \\ -2{,}5 & 2{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 \\ 4 & 4 & 9 & 9 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Obtenemos las siguientes transformaciones al considerar $d = 10$

$$T_{10}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}875 & 4{,}375 & -1{,}875 & 4{,}375 & -5 & 5 & -5 & 5 \\ 5 & 5 & 11{,}25 & 11{,}25 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

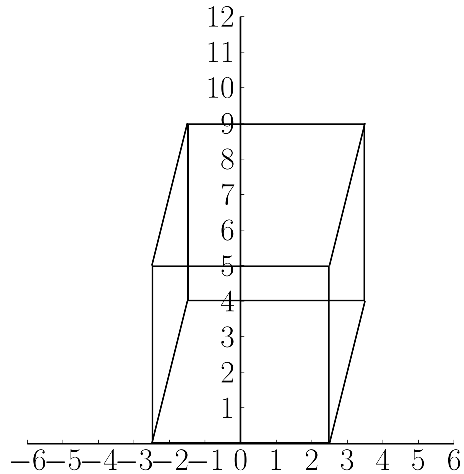
la proyección del paralelepípedo sería



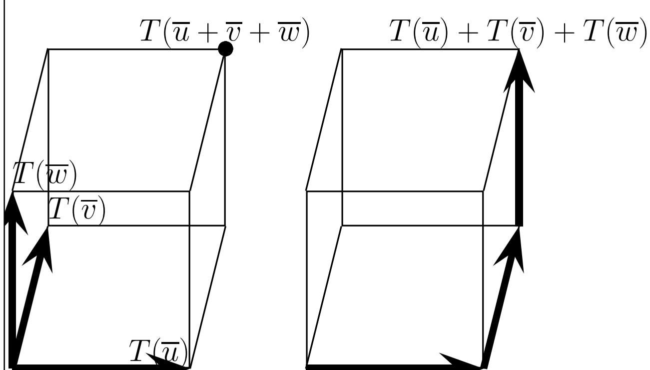
Al considerar un valor de d muy grande se aproxima a

$$T_{inf}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}5 & 3{,}5 & -1{,}5 & 3{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 & -2{,}5 & 2{,}5 \\ 4 & 4 & 9 & 9 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

con su respectiva proyección del paralelepípedo



El paralelepípedo está definido por tres vectores $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ que al sumarlos $(\overline{u} + \overline{v} + \overline{w})$ llega al vértice al opuesto.

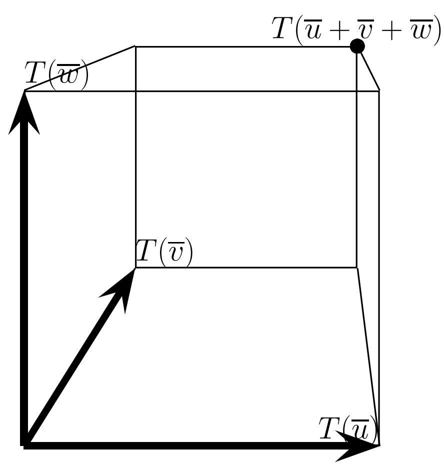


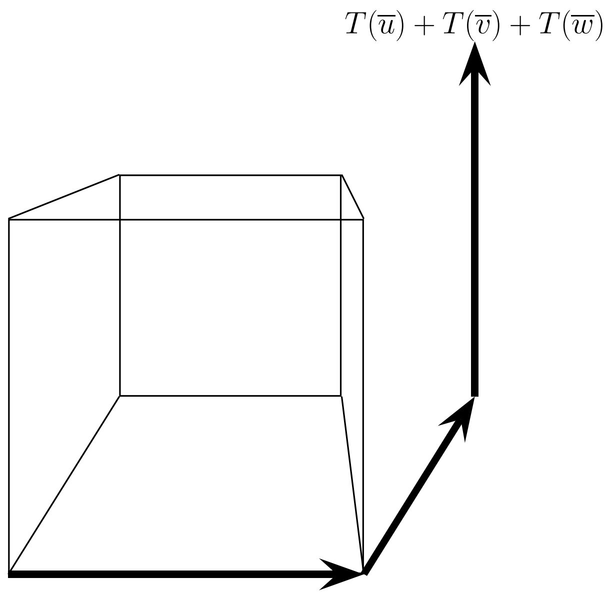
En las proyecciones del paralelepípedo hay una diferencia muy importante. En la transformación T_{inf} cada uno de los vectores es transformado en $T_{inf}(\overline{u}), T_{inf}(\overline{v}), T_{inf}(\overline{w})$ respectivamente. Al sumar estos vectores también se llega al vértice opuesto el cual corresponde a $T_{inf}(\overline{u} + \overline{v} + \overline{w})$ es decir

$$T_{inf}(\overline{u}) + T_{inf}(\overline{v}) + T_{inf}(\overline{w}) = T_{inf}(\overline{u} + \overline{v} + \overline{w})$$

Por otro lado, en la transformación T_{10} la suma de los vectores, $T_{10}(\overline{u}) + T_{10}(\overline{v}) + T_{10}(\overline{w})$, no llega al vértice opuesto. Entonces

$$T_{10}(\overline{u}) + T_{10}(\overline{v}) + T_{10}(\overline{w}) \neq T_{10}(\overline{u} + \overline{v} + \overline{w})$$





3.3. Transformaciones lineales de $\Re^n$ en $\Re^m$

Una transformación $T : \Re^n \to \Re^m$ es **lineal** si cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones:

I T transforma cualquier combinación lineal de vectores-n: $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ..., $\overline{v_m}$; en la combinación lineal de las transformaciones. Es decir,

$$T(c_1\overline{v_1}+\cdots+c_k\overline{v_k}) = c_1T(\overline{v_1})+\cdots+c_kT(\overline{v_k})$$

II T transforma una combinación lineal de cualquier <u>par</u> de vectores-n: $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$; en la combinación lineal de la transformación de los dos vectores. Es decir,

$$T(c_1\overline{v_1}+c_2\overline{v_2}) = c_1T(\overline{v_1})+c_2T(\overline{v_2})$$

III Para cualquier par de vectores-n, T cumple que:

- $T(\overline{v_1}+\overline{v_2}) = T(\overline{v_1})+T(\overline{v_2})$
- $T(c_1\overline{v_1}) = c_1T(\overline{v_1})$

IV Para cualquier vector-n $\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ se cumple que

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right) = x_1T\left(\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right) + x_2T\left(\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right) +$$

$$\cdots + x_nT\left(\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

Antes de mostrar sus equivalencias, es de resaltar que la primera definición permite resaltar la importancia de la combinación lineal en la definición de la transformación lineal. La segunda definición es más sencilla y es equivalente que la primera. La tercera definición es la más practica, general y es la que se encuentra en los textos referenciados. La cuarta definición se usará más adelante para ilustrar geométricamente una transformación lineal de $\Re^n$ en $\Re^m$.

Proposición 3.2. *Las definiciones dadas de transformación lineal son equivalentes.*

Demostración. Para probar las equivalencias vamos a probar que I $\Rightarrow$ IV $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ I.

I $\Rightarrow$ IV .

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(x_1\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1T\left(\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right) + x_2T\left(\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right) + \cdots + x_nT\left(\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

IV $\Rightarrow$ III . Supongamos que $\overline{v_1} = \begin{bmatrix} v_{11}\\ v_{21}\\ \vdots\\ v_{n1}\end{bmatrix}$ y que $\overline{v_2} = \begin{bmatrix} v_{12}\\ v_{22}\\ \vdots\\ v_{n2}\end{bmatrix}$

entonces

- Primero se probará que $T(\overline{v_1}+\overline{v_2}) = T(\overline{v_1})+T(\overline{v_2})$

$$T(\overline{v_1}+\overline{v_2}) = T\left(\begin{bmatrix} v_{11}+v_{12}\\ v_{21}+v_{22}\\ \vdots\\ v_{n1}+v_{n2}\end{bmatrix}\right)$$

$$= (v_{11}+v_{12})T\left(\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\right) + \cdots + (v_{n1}+v_{n2})T\left(\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= v_{11}T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right)+\cdots+v_{n1}T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$+\, v_{12}T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right)+\cdots+v_{n2}T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= T(\overline{v_1})+T(\overline{v_2})$$

- Ahora se probará que $T(c_1\overline{v_1}) = c_1T(\overline{v_1})$

$$T(c_1\overline{v_1}) = T\left(\begin{bmatrix}c_1v_{11}\\c_1v_{21}\\\vdots\\c_1v_{n1}\end{bmatrix}\right)$$
$$= c_1v_{11}T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right)+\cdots+c_1v_{n1}T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= c_1\left(v_{11}T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right)+\cdots+v_{n1}T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right)\right)$$
$$= c_1T(\overline{v_1})$$

III $\Rightarrow$ II .

$$T(c_1\overline{v_1}+c_2\overline{v_2}) = T(c_1\overline{v_1})+T(c_2\overline{v_2}) = c_1T(\overline{v_1})+c_2T(\overline{v_2})$$

II $\Rightarrow$ I . Esta prueba se realizará utilizando inducción. Para el caso $k=2$ es claro que se cumple. Vamos a suponer que I se cumple para el caso k y vamos a probar que se cumple para el caso $k+1$.

$$\begin{aligned}&T(c_1\overline{v_1}+c_2\overline{v_2}+\cdots+c_k\overline{v_k}+c_{k+1}\overline{v_{k+1}})\\&\quad= T((c_1\overline{v_1}+c_2\overline{v_2}+\cdots+c_k\overline{v_k})+c_{k+1}\overline{v_{k+1}})\\&\quad= T(c_1\overline{v_1}+c_2\overline{v_2}+\cdots+c_k\overline{v_k})+c_{k+1}T(\overline{v_{k+1}})\\&\quad= c_1T(\overline{v_1})+c_2T(\overline{v_1})+\cdots+c_kT(\overline{v_k})+c_{k+1}T(\overline{v_{k+1}})\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2. *Si se sabe que T es una transformación lineal que cumple:*

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$
$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

entonces hay que encontrar $T\left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right)$ *y* $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$

La Proposición 3.1 permite resolver ambas preguntas

$$T\left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right)=T\left(5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= 5T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= 5\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}$$

Ahora usamos el mismo procedimiento para resolver el caso general

$$T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}) = T\left(x_11\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= x_1T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+x_2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= x_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2x_1-2x_2\\1x_1+2x_2\end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.3. *Si sabemos que la transformación T cumple*

$$T\left(\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$$
$$T\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

entonces T no es lineal porque

$$-2T\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\right)\neq T\left(\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right)$$

Ejemplo 3.4. *Para mostrar que la transformación de $\Re^2$ en $\Re^2$ dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3x_1+2x_2\\4x_2-1x_1\end{bmatrix}$$

es lineal, se puede utilizar cualquiera de las definiciones I,II, III o IV ya que son equivalentes.

Se ve que cumple IV debido a que

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$
$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

y como

$$x_1\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1+2x_2\\4x_2-1x_1\end{bmatrix}$$

entonces cumple IV

En segundo lugar se probará que cumple III. Sean $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$

y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ *dos vectores-2, entonces*

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 3(a_1+b_1) + 2(a_2+b_2) \\ 4(a_2+b_2) - 1(a_1+b1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 4a_2 - 1a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b_1 + 2b_2) \\ 4b_2 - 1b1 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} T\left(c_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} c_1 a_1 \\ c_1 a_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 3(c_1a_1) + 2(c_1a_2) \\ 4(c_1a_2) - 1(c_1a_1) \end{bmatrix} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 4a_2 - 1a_1 \end{bmatrix} \\ &= c_1 T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Las pruebas de II y I son muy similares a sus demostraciones.

Ejemplo 3.5. *La transformación de* $\Re^2$ *en* $\Re^2$ *dada por*

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2 \\ 4x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

no es una transformación lineal ya que si

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$T(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

y como

$$x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3x_1 + 2 \\ 4x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

no cumple ninguna de las equivalencias.

3.4. matrices

Dado un conjunto de 3 vectores-2 $\overline{v1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overline{v2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\overline{v3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

podemos transformar $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \Re^3$

en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \Re^2$ dada por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformaciones como estas son muy utilizas en este curso y por lo tanto tienen una notación simplificada, agrupando los vectores en una matriz y los x_i en un vector, de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1x1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

El ejemplo anterior permite introducir la siguiente definición.

3.5. Operación matriz por vector

Dada una matriz $A_{m\times n} = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{smallmatrix}\right]$

y un vector-n $\overline{x} = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right]$ definimos el producto de matriz por vector de la siguiente forma

$$\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{smallmatrix}\right]_{m\times n} \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right]_{n\times 1} = \left[\begin{smallmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{smallmatrix}\right]_{m\times 1}$$

la cual se puede interpretar de dos formas. La primera es considerando la matriz cómo vectores renglón y el resultado utiliza el producto punto

$$\begin{bmatrix} \overline{u_1}^T \\ \overline{u_2}^T \\ \vdots \\ \overline{u_m}^T \end{bmatrix} \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{u_1} \cdot \overline{x} \\ \overline{u_2} \cdot \overline{x} \\ \vdots \\ \overline{u_m} \cdot \overline{x} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(-1) + (1)(3) \\ (0)(-1) + (1)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

La segunda forma considera la matriz como vectores columna y el resultado es conocido como la combinación lineal de las columnas de A.

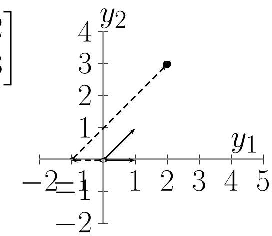
$$[\overline{v_1}\ \overline{v_2} \cdots \overline{v_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\overline{v_1} + x_2\overline{v_2} + \cdots + x_n\overline{v_n}$$

con la combinación lineal obtenemos el mismo resultado

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Cuando la matriz A es de 2×2 se puede interpretar gráficamente cómo la transformación de un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ en un vector $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Las propiedades de matriz por vector serán un caso particular de las propiedades de la multiplicación entre matrices que se presentan más adelante.

Se sugiere estudiar de la sección [NJ99, 2.5] las paginas 104 a 106 y realizar los ejercicios 1,2,11,12,13.

3.6. Transformación matricial

Dada una matriz fija $A_{m\times n}$ definimos la transformación de $\Re^n$ a $\Re^m$ dada por $\overline{y} = A\overline{x}$.

Por ejemplo.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 3x_1 + 6x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + 5x_2$$

Cuando la matriz A es constante entonces

$$\overline{y}_{m\times 1} = A_{m\times n}\overline{x}_{n\times 1}$$

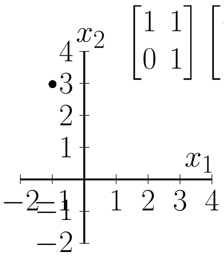
transforma vectrores-n en vectores m. En este caso definimos T_A llamada **trasformación matricial** para la cual $\Re^n$ es el **dominio** y $\Re^m$ es el **codominio**,

$$T_A : \Re^n \rightarrow \Re^m$$

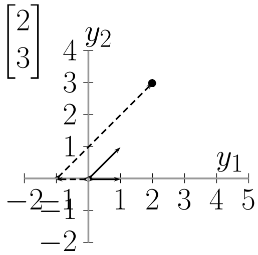
dada por

$$T_A(\overline{x}) = A\overline{x}$$

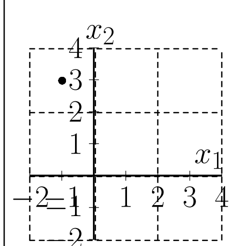
algunos autores llaman $\overline{x}$ el **valor** y $\overline{y}$ el **covalor**. (Repasar [NJ99, Fig 5.2])

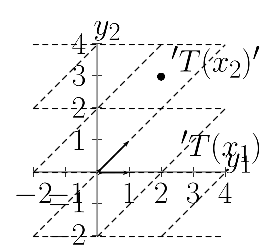


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



A continuación se observa como se transforman los eje x_1 y x_2





Representaciones equivalentes:

- combinación lineal $x_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$,
- operación matriz por vector $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y
- vector de productos punto $\begin{bmatrix} a(x_1) + b(x_2) \\ c(x_1) + d(x_2) \end{bmatrix}$.

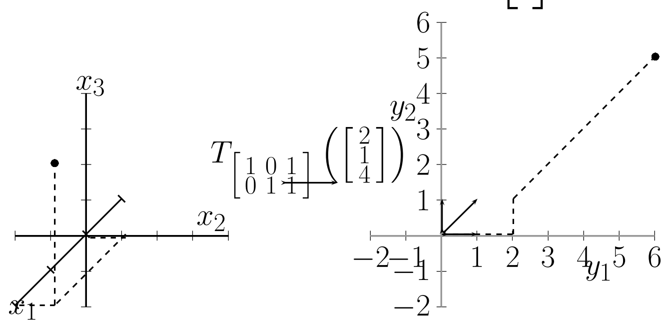
3.7. Transformaciones con $\Re^3$

De $\Re^3$ en $\Re^2$. Ahora la transformación T_A dada por la matriz $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ convierte vectores de $\Re^3$ en vectores de $\Re^2$.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$



De $\Re^2$ en $\Re^3$.

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}$$

Dibuje el punto $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ en $\Re^2$ y $T_{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]}\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)$ en $\Re^3$.

De $\Re^3$ en $\Re^3$.

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_2+x_3\\0\end{bmatrix}$$

Dibuje el punto $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ en $\Re^3$ y $T_{\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]}\left(\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ también en $\Re^3$.

3.8. Multiplicación matricial

La multiplicación matricial AB corresponde a multiplicar A por cada columna de B

$$AB=A[\overline{p_1}\;\overline{p_2}\;\ldots\;\overline{p_n}]=[A\overline{p_1}\;A\overline{p_2}\;\ldots\;A\overline{p_n}]$$

Al considerar los renglones de A como vectores transpuestos se obtiene una expresión para la multiplicación matricial.

$$AB=\begin{bmatrix}\overline{u_1}^T\\\overline{u_2}^T\\\vdots\\\overline{u_m}^T\end{bmatrix}[\overline{p_1}\;\overline{p_2}\;\ldots\;\overline{p_n}]$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{u_1}\cdot\overline{p_1}&\overline{u_1}\cdot\overline{p_2}&\ldots&\overline{u_1}\cdot\overline{p_n}\\\overline{u_2}\cdot\overline{p_1}&\overline{u_2}\cdot\overline{p_2}&\ldots&\overline{u_2}\cdot\overline{p_n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\overline{u_m}\cdot\overline{p_1}&\overline{u_1}\cdot\overline{p_2}&\ldots&\overline{u_m}\cdot\overline{p_n}\end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1{,}5&-1\\0{,}5&0&-0{,}5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}5&-1{,}5&-1{,}5\\0{,}5&0&-0{,}5\end{bmatrix}$$

3.9. Propiedades de las matriciales

Como un vector es un caso particular de una matriz de una columna, entonces algunas definiciones dadas para los vectores se pueden extrapolar a las matrices.

- Una matriz de **tamaño** $m\times n$ tiene m renglones y n columnas. Para hacer énfasis, el tamaño se puede escribir como subíndice. Por ejemplo, $A_{2\times 3}=\left[\begin{smallmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{smallmatrix}\right]$
- Los elementos a_{ij} de una matriz son números reales, i es el número del renglón y j es la columna.
- Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

- Una **matriz cero** tiene cero en todos sus elementos. Por ejemplo, $0_{2\times 2}=\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$. Si no se confunde con un escalar se puede denotar simplemente 0.
- La **transpuesta de una matriz** de tamaño $m\times n$ es una matriz de tamaño $n\times m$ en la que la columna i se escribe en el renglón i.
- La **suma de dos matrices** de igual tamaño da una matriz del mismo tamaño en el que cada elemento es la suma de los respectivos elementos.
- La **multiplicación de escalar por matriz** da una matriz del mismo tamaño en la cual cada elemento de la matriz original fue multiplicado por el escalar.
- Una matriz de tamaño $m\times n$ es **cuadrada** si $m=n$. Su **diagonal principal** consta de los elementos a_{ij} con $i=j$.
- La **matriz identidad** es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en el resto de elementos. Se denota I o I_n para indicar que es de $n\times n$. Por ejemplo, $I_3=\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$.

En general las propiedades son semejantes a la de los reales. Sin embargo, la multiplicación matricial no es conmutativa Es de resaltar que la multiplicación de matrices no está definida entre cualquier par de matrices.

A continuación se presenta un cuadro comparativo de las propiedades matriciales con la de los números reales.

Proposición 3.3. *Dadas las matrices A, B y C con los tamaños adecuados y los escalares a, b, c. Se tienen las siguientes propiedades.*

	Reales	*Matrices*
Suma conmutativa	$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
Mult. conmutativa	$ab=ba$	$a\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ *pero* $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\cancel{a}$ $\left[\begin{smallmatrix}2&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]\neq\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}2&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$
Suma asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
Mult. asociativa	$(ab)c=a(bc)$	$(ab)C=a(bC)$ $(aB)C=a(BC)$ $(AB)C=A(BC)$
Modulativa	$a+0=a$	$A+0_{m\times n}=A$
Identidad	$1a=a$	$1A=A$ $IA=A$ $AI=A$
Nulidad	$0a=0$	$0A_{m\times n}=0_{m\times n}$ $0_{m\times k}A_{k\times n}=0_{m\times n}$ $A_{m\times k}0_{k\times n}=0_{m\times n}$
Opuesto	$a+(-a)=0$	$A+(-A)=0_{m\times n}$
Distributiva I	$(a+b)c=ac+bc$	$(a+b)C=aC+bC$ $(A+B)C=AC+BC$
Distributiva D	$a(b+c)=ab+ac$	$a(B+C)=aB+aC$ $A(B+C)=AB+AC$

Además, respecto a la transpuesta y al producto punto se tiene las siguientes propiedades

Proposición 3.4. *Dadas las matrices A y B y los vectores columna $\overline{u}$ y $\overline{v}$ con los tamaños adecuados se cumple:*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

2. $(AB)^T = B^T A^T$.

3. $\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{u}^T\overline{v}$.

4. $(A\overline{u})\cdot\overline{v} = \overline{u}\cdot(A^T\overline{v})$.

Las demostraciones de las propiedades de la multiplicación de matrices tienen más detalles que las de la suma de matrices. A continuación se presenta la demostración de la distribución a izquierda de las matrices A de $m\times r$ y B, C de $r\times n$, la cual se presenta en [Ant06][demo. Teorema 1.4.1.d]. Lo primero es demostrar que los tamaños de las matrices son iguales $size(A(B+C)) = size(AB+AC)$.

$$
\begin{aligned}
& size(A_{m\times r}(B_{r\times n}+C_{r\times n})) \\
& \quad = size(A_{m\times r}(B+C)_{r\times n}) && \text{def. suma matricial} \\
& \quad = size((A(B+C))_{m\times n}) && \text{def. mult. matricial}
\end{aligned}
$$

es $m\times n$, además

$$
\begin{aligned}
& size(A_{m\times r}B_{r\times n}+A_{m\times r}C_{r\times n})) \\
& \quad = size((AB)_{m\times n}+(AC)_{m\times n}) && \text{def. mult matricial} \\
& \quad = size((AB+AC)_{m\times n}) && \text{def. suma matricial}
\end{aligned}
$$

que también es $m\times n$. Ahora hay que probar que cada uno de los elementos de la matrices son iguales.

$$(AB+AC)_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{(AB)_{ij}\} + \{(AC)_{ij}\} \\
&= \{(A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \cdots + (A)_{ir}(B)_{rj}\} \\
&\quad + \{(A)_{i1}(C)_{1j} + (A)_{i2}(C)_{2j} + \cdots + (A)_{ir}(C)_{rj}\} \\
&= \{(A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i1}(C)_{1j}\} \\
&\quad + \{(A)_{i2}(B)_{2j} + (A)_{i2}(C)_{2j}\} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \{(A)_{ir}(B)_{rj} + (A)_{ir}(C)_{rj}\} \\
&= \{(A)_{i1}((B)_{1j} + (C)_{1j})\} \\
&\quad + \{(A)_{i2}((B)_{2j} + (C)_{2j})\} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \{(A)_{ir}((B)_{rj} + (C)_{rj})\} \\
&= \{(A)_{i1}(B+C)_{1j}\} \\
&\quad + \{(A)_{i2}(B+C)_{2j}\} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \{(A)_{ir}(B+C)_{rj})\} \\
&= (A(B+C))_{ij}
\end{aligned}
$$

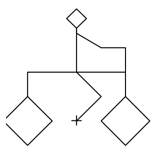
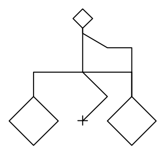
3.10. Transformaciones de matrices elementales

Identidad La combinación lineal de dos vectores, uno en el eje y_1 $\overline{v_1} = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ y otro en el eje y_2 $\overline{v_2} = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, está dada por

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

En este caso da el mismo vector $\overline{c}$, por este motivo la matriz $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ se llama la matriz identidad de 2×2.

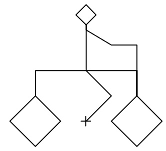
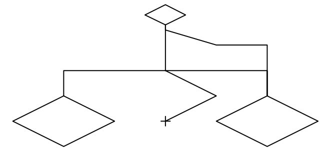
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix}$$

Escalamiento del primer componente con $k = 2$

$$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k\ x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

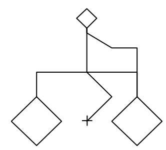
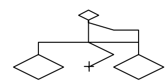
$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -3 & -2\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix}$$

Escalamiento del segundo componente con $k = 0{,}5$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\k\ x_2\end{bmatrix}$$

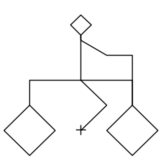
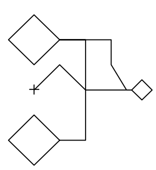
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}25 & 0 & -0{,}25\end{bmatrix}$$

Intercambio de componentes

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & -0{,}5\\-1 & -1{,}5 & -1\end{bmatrix}$$

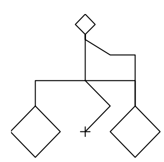
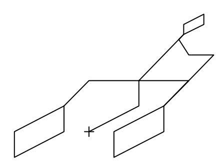
Deslizamiento en la primera componente con $k = 1$

$$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 + (k\ x_2)\\x_2\end{bmatrix}$$

La combinación lineal del vector del eje x con el vector a 45 grados es

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1 + c_3\\c_3\end{bmatrix}$$

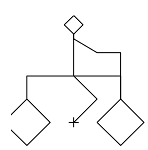
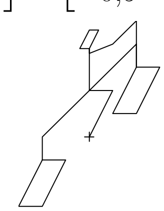
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix}$$

Deslizamiento la segunda componente con $k = 1$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2 + (k\ x_1)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\0{,}5 & 0 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1{,}5 & -1\\-0{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5\end{bmatrix}$$

Ejercicio. ¿Cómo queda la figura al aplicarle la transformación

$$\begin{bmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}$$

3.11. Multiplicación matricial como composición de transformaciones matriciales

Suponga que $A \in \Re^{m\times r}$ (A pertenece al conjunto de las marices de tamaño $m \times r$), que $B \in \Re^{r\times n}$ y que $\overline{c}$ es un vector-n. Debido a que la multiplicación matricial es asociativa se tiene la siguiente igualdad al considerar los vectores como matrices columna.

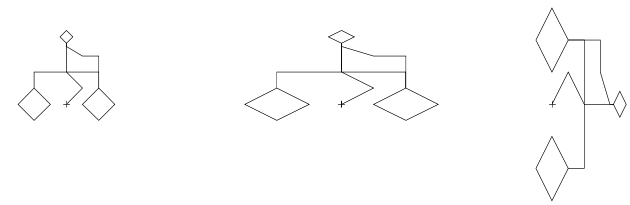
$$A(B\overline{c}) = (AB)\overline{c}$$

Recordemos que una matriz se puede ver como una transformación matricial. ¿Cómo se puede ver las transformaciones en este caso? Para el lado izquierdo de la anterior ecuación se puede ver la *composición* de dos transformaciones matriciales (la cual se ilustra en [NJ99, Figura 5.27 pg 357]), mientras que el lado derecho se puede ver como una transformación matricial de la matriz resultante del producto AB.

$$T_A(T_B(\overline{c})) = T_{AB}(\overline{c})$$

Esto se puede interpretar como que la composición de transformaciones matriciales es la transformación dada por el producto de matrices. Lo cual queda más claro con el siguiente ejemplo. Sabemos que la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz que intercambia componentes y que $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz que escalona (duplica) la primera componente. $T_A(T_B(\overline{c}))$ significa que primero se duplica la primera componente y luego se

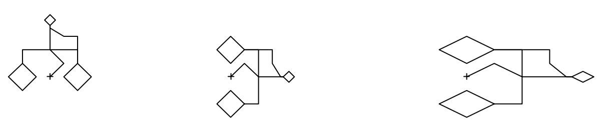
intercambian las componente. En la siguiente figura primero se muestra la imagen original, luego escalonada en la primera componente y finalmente se intercambia las componentes.



Por otro lado para graficar T_{AB} hay que calcular el producto

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

la corresponde a una transformación que realiza las dos operaciones en un sólo paso. En la siguiente figura se tienes las imágenes de la composición $T_B(T_A(\overline{c})) = T_{BA}(\overline{c})$ lo cual muestra que ni la composición ni la multiplicación son conmutativas.



Se sugiere mirar [Ant06, pag. 239-243]. De manera opcional se puede ojear la sección [NJ99, 5.5] y se recomienda realizar los ejercicios 8 9 y 10. De manera opcional se pueden hacer los ejercicios del 1 al 17.

3.12. Resumen

- combinación lineal $c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$
  donde a_{ij} y c_k son escalares y da un vector-m,
- operación matriz por vector $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$
  donde a_{ij} y c_k son escalares y da un vector-m,

- vector de productos punto
  $$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$
  donde los a_{ij} son escalares y los x_k son variables.

En esta sección usted debe estar en capacidad de encontrar el covalor de la transformación de un valor numérico o de un valor arbitrario. Además, dada una transformación matricial (es decir una matriz) debe saber cual es el dominio y el codominio. También debe identificar aquellas transformaciones matriciales que: sólo escalona alguna componente, sólo intercambia componentes, suman una componente a otra. Por último debe componer transformaciones matriciales.

3.13. Preguntas

1. Recordemos unas definiciones. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\overline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vamos a denotar $A_{i,j}$ el elemento del renglón i y la columna j de la matriz A y $\overline{v}_i$ es el elemento del renglón i del vector $\overline{v}_i$. Calcule, si es posible. (a) $(A + B^T)_{2,3}$; (b) $(\overline{v} + \overline{w})_2$; (c) $dist(v, w)$; (d) $(A\overline{v})_2$; (d) $(B\overline{v})_2$; (e) $AB_{2,2}$.

2. Para las siguientes transformaciones encuentre la matriz A_T, si T es una transformación matricial, de lo contrario demuestre que no es una transformación matricial.
   - $T(\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]) = 3\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$
   - $T(\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$
   - $T(\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
   - $T(\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$
   - $T(\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{smallmatrix}\right]$
   - $T(\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]) = proy_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]} \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$
3. Encuentre una matriz A tal que
$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
4. (Opcional) Un robot que está en la posición $\overline{R}$ debe llegar a su destino $\overline{P}$ y esquivar el obstáculos en $\overline{Q}$. Para lograr esto se mueve por pasos y la longitud del paso corresponde

a $\hat{T}$ donde T es la combinación lineal $T = a\hat{RP} - b\hat{RQ}$, con $a = 1$ y $b = 1/||\overline{RQ}||$. Si $\overline{R} = [0{,}0]$, $\overline{P} = [3{,}3]$ y $\overline{Q} = [1{,}4{,}1{,}6]$, determine la posición del robot de los primeros 4 pasos.

5. (Opcional) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ que transforma vectores de $\Re^3$ en $\Re^2$. Si los puntos de la casa son
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
Dibuje los puntos de B en 3D, calcule AB y dibuje los puntos de AB en 2D.
6. (Opcional) Encuentre una matriz que transforme de $\Re^2$ en $\Re^2$ girando un ángulo α en contra de las manecillas del reloj.
Encuentre otra matriz que transforme de $\Re^3$ en $\Re^3$ girando un ángulo α el plano yz.
7. (Opcional) Dibuje en una hoja un cubo con un vértice en el origen. Encuentre la matriz de transformación de $\Re^3$ en $\Re^2$ tal que transforme un cubo de azúcar (de 1cm de arista con un vértice en el origen y cada eje en una arista) en el dibujo del cubo que realizó.

8. (Opcional) Sea $A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{bmatrix}$ una matriz de transformación y $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ cuatro puntos de un cuadrado. Dibuje el cuadrado. Calcule $B_1 = AB_0$ y dibuje el nuevo cuadro. Calcule $B_2 = AB_1$ y dibuje el nuevo cuadro. y así sucesivamente hasta B_9.

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Len13] E. Lengyel, *Matemáticas para videojuegos*, Editorial Cengage Learning, 2a. edición, 2013

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.