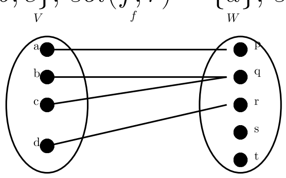
Capítulo 4

Conjunto solución de una transformación matricial

Sea $f : V \to W$ una función y sea $y \in W$ un elemento del codominio, entonces definimos el **conjunto solución** de $f(x) = y$ como el conjunto de elementos x del dominio cuya imagen es y. Es decir $sol(f, y) = \{x \in A | f(x) = y\}$. Por ejemplo, en la figura siguiente $sol(f, p) = \{a\}$, $sol(f, q) = \{b, c\}$, $sol(f, r) = \{d\}$, $sol(f, s) = \{\}$, $sol(f, t) = \{\}$



A continuación vamos a mostrar el proceso para obtener el conjunto solución de una transformación matricial.

4.1. Matrices extendidas

En este capítulo vamos a buscar los vectores x (si existen) tales que

$$A\overline{x} = \overline{b},$$

al remplazar por las componentes queda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Este último se conocen como un **sistema de ecuaciones lineales** con m ecuaciones y n variables. Las componentes de A se conocen como los **coeficientes del sistema lineal**, las componentes del vector-n $\overline{x}$ se llaman **variables** y las componentes del vector-m $\overline{b}$ se llaman **términos constantes**.

Un sistema de ecuaciones se puede representar con la **matriz extendida** de la siguiente forma

$$[A : b]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix}$$

Pero para usar esta notación es necesario fijar el orden de las variables, en este caso es $x_1, x_2, \ldots x_n$. Lo cual personalmente escribo sobre la matriz extendida, aunque esto no se acostumbra en la literatura referenciada para el curso.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada renglón i de la matriz extendida corresponde a una **ecuación lineal**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

En una matriz cualquiera, un **renglón cero** sólo tiene ceros. Un **renglón no cero** tiene al menos un elemento diferente de cero. Lo mismo se define en las columnas. El primer elemento no cero de un renglón no cero se llama **elemento delantero** y la variable correspondiente (si la hay) se llama **variable delantera**.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 3 \end{aligned}$$

ordenando las variable alfabéticamente la matriz extendida corresponde a

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & : & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$$

- La variable delantera del renglón 1 es x_2.
- El renglón 2 es un renglón cero y no tiene variable delantera ni elemento delantero.
- La variable delantera del renglón 3 es x_1.
- La variable delantera del renglón 4 es x_4.
- En el renglón 5 el elemento delantero es el término constante. No tiene variable delantera.

4.2. Clasificación de matrices extendidas

Hay unos sistemas de ecuaciones más sencillos de resolver que otros, primero vamos a caracterizar los más sencillos de resolver y después vamos a convertir los demás sistemas a los más sencillos de resolver. Para esto necesitamos algunas defini-

ciones que no sólo se pueden aplicar a las matrices extendidas, sino en general a todas las matrices [NJ99, 1.1].

(E1) Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.

$$\begin{aligned} 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=3 \\ 0x_1+3x_2+0x_3+1x_4&=5 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+1x_4&=0 \\ 2x_1+1x_2+0x_3+2x_4&=6 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & : & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Un renglón cero es una ecuación $0=0$, la cual no aporta nada para el conjunto solución.

(E2) Para cada elemento delantero $a_{i,j}$ se tiene que el elemento delantero del siguiente renglón $a_{i+1,k}$ (si lo hay) debe estar a la derecha (es decir $j<k$).

$$\begin{aligned} 2x_1+1x_2+2x_3+2x_4&=6 \\ 0x_1+3x_2+4x_3+1x_4&=5 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+1x_4&=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=3 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz está en forma (renglón) **escalón** si cumple (E1) y (E2). A los elementos delanteros de una matriz escalón se les llama **pivotes**. Una variable que no es delantera se llama **variable libre**

En un sistema escalón se pueden despejar las variables delanteras mediante la sustitución hacia atrás.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_1+1x_2+2x_3+2x_4&=6 \\ 0x_1+3x_2+4x_3+1x_4&=5 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+1x_4&=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

a) Se remplazan las variables libres por parámetros. en este caso $x_3=t$

b) Se despeja la variable delantera que está más a la derecha remplazando las variables conocidas. $x_4=0$

c) Se repite con el resto de variables delanteras en orden de derecha a izquierda.

$$3x_2+4t+1(0)=5 \rightarrow x_2=(5-4t)/3$$

$$2x_1+1((5-4t)/3)+2t+2(0)=6 \rightarrow x_1=3-t-(5-4t)$$

Proposición:
En cada columna y en cada renglón de una matriz hay máximo un pivote.

Proposición:
El número de pivotes de una matriz $A_{m\times n}$ es menor o igual que m y que n.

Proposición:
Si en la columna de términos constantes de una matriz extendida hay un elemento delantero el conjunto solución del sistema es vacío. En este caso se dice que el sistema de ecuaciones es **inconsistente** o que no tiene solución.

Proposición:
Si en la columna de términos constantes de una matriz extendida en forma escalón no hay un elemento delantero entonces el sistema tiene solución y se llama **consistente**.

Proposición:
Un sistema consistente que tiene variables libres también tiene infinitas soluciones. Si el sistema consistente no tiene variables libres entonces tiene solución única.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

La primera matriz extendida es inconsistente ya que tiene elemento delantero en los términos constantes.

La matrices extendidas segunda y tercera son consistentes ya que están en forma escalón y sus pivotes son coeficientes. La segunda matriz tiene infinitas soluciones ya que tiene variable libre. La tercera matriz tiene solución única ya que no tiene variables libres.

Para la cuarta matriz extendida, no podemos afirmar a priori que sea inconsistente, porque no tiene elementos delanteros en los términos constantes. Tampoco podemos afirmar a priori que sea consistente, ya que no está en forma escalón.

(E3) Cada pivote es 1 (y se llama **1 delantero**). En [Gro06] se define una matriz **escalonada** (por renglones) como la matriz que cumple (E1), (E2) y (E3).

En una matriz escalonada, el despeje de la variable delantera se simplifica un poco más. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 0x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 1x_4 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

(E4) Arriba y abajo del pivote hay ceros.

Una matriz está en forma **escalón reducida** o **escalonada reducida** si cumple (E1), (E2), (E3) y (E4).

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 &= 6 \\ 0x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 0x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & : & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices en escalón reducida se encuentran prácticamente despejadas las variables delanteras en función de las variable libre (a estas últimas hay que asignarle parámetros).

4.3. Conjunto solución

Dada una matriz extendida $[A : b]$, un vector $\overline{x}$ que cumple la ecuación $A\overline{x} = \overline{b}$ se llama **solución particular** del sistema lineal.

El conjunto de todas las soluciones particulares se llama **conjunto solución**.

Una solución particular escrita en forma genérica se llama **solución general**.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 &= 6 \\ 0x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 0x_4 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & : & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Variables libres: $x_3 = t$

Variables delanteras:

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 \\ x_2 &= 5 - 4t \\ x_1 &= 6 - 2t \end{aligned}$$

Conjunto solución:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2t \\ 5-4t \\ t \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \Re \right\}$$

Solución general:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2t \\ 5-4t \\ t \\ 3 \end{bmatrix}$$

Soluciones particulares:

$$\text{Para } t = 0, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{para } t = 1, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{para } t = -3, \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.4. Representación gráfica de ecuaciones lineales de 2 variables

Una ecuación lineal de n variables corta el espacio $\Re^n$ en dos. En particular una ecuación lineal de dos variables $ax_1 + bx_2 = c$ representa una recta en el plano, siempre y cuando a y b no sean ambos cero. Para encontrar la recta obtenemos el conjunto solución del sistema de una ecuación dos variables.

Ejemplo: la ecuación

$$1x_1 + 2x_2 = 4$$

se puede escribir como una matriz extendida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

Este sistema de una ecuación dos incógnitas está en forma escalón. Como x_2 es la variable libre entonces le asignamos un parámetro.

$$x_2 = t$$

Ahora despejamos la variable delantera x_1

$$x_1 = 4 - 2t$$

El conjunto solución es

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2t \\ t \end{bmatrix}, t \in \Re \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \Re \right\}$$

La solución general es

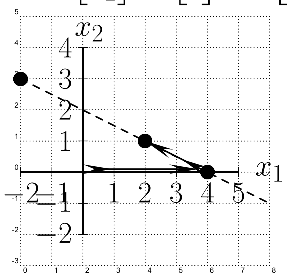
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algunas soluciones particulares son:

si $t = 0$, $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

si $t = 1$, $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

si $t = 3$, $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

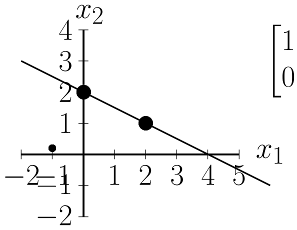


Las soluciones particulares las podemos graficar como puntos. El conjunto solución corresponde a la linea recta que une los puntos.

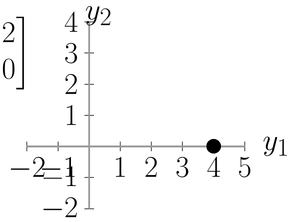
Ejemplo:

$(A\overline{x} = \overline{b})$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
(Sis. de ecuaciones l.)	$\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{array}$
(Matriz extendida)	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$
(Clasificación)	Escalón reducida
(Variable libre)	$x_2 = t$
(Variable delantera)	$x_1 = 4 - 2t$

(Soluciones)	infinitas
(conjunto sol.)	$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2t \\ t \end{bmatrix}, t \in \Re \right\}$
(solución general)	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2t \\ t \end{bmatrix}$
(soluciones part.)	para t=2 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ para t=1 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



La transformación dada por la matriz $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ convierte los puntos de la recta $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 4-2t \\ t \end{smallmatrix}\right]$ en el punto $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

En este caso la solución de "una" ecuación con 2 variables es una línea recta.

Ejemplo:

$(A\overline{x} = \overline{b})$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
(Sistema de ecuaciones)	$\begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{array}$
(Matriz extendida)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$

Clasificación: Escalón reducida

Variable libre:

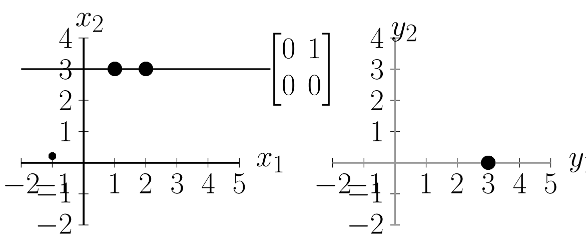
$$x_1 = t$$

Variable delantera:

$$x_2 = 3$$

Infinitas soluciones:

(el conjunto solución)	$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \Re \right\}$
(la solución general)	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 3 \end{bmatrix}$
(soluciones part.)	para t=2 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ para t=1 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$



La transformación dada por la matriz $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ convierte los puntos de la recta $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\3\end{bmatrix}$ en el punto $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$.

También en este caso la solución de "una" ecuación con 2 variables es una línea recta.

Ejemplo:

$(A\overline{x}=\overline{b})$ $$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

(Sistema de ecuaciones) $$\begin{aligned}1x_1 + 2x_2 &= 4\\ 0x_1 + 1x_2 &= 3\end{aligned}$$

(Matriz extendida) $$\begin{bmatrix}1&2&:&4\\0&1&:&3\end{bmatrix}$$

Clasificación: Escalón
No hay variable libres.

Variable delantera:

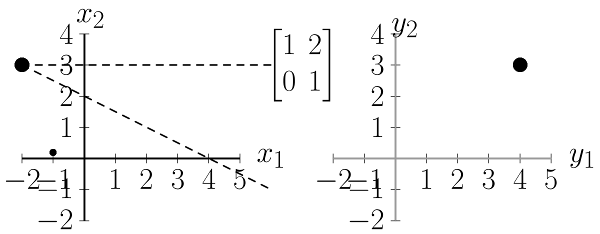
$$x_2 = 3$$
$$x_1 = -2$$

Solución única:

(conjunto sol.) $$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

(solución general) $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

(soluciones part.) $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$



En la transformación dada por la matriz $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$, el único punto que se convierte en $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ es el punto $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$.

En este caso la solución de dos ecuación con 2 variables es un sólo punto. Cada ecuación representa una recta y la solución es donde se interceptan las rectas.

4.5. Representación gráfica de ecuaciones lineales de 3 variables

Una ecuación lineal de tres variables $ax_1+bx_2+cx_3=d$ representa un plano en el espacio, siempre y cuando a, b y c no sean cero al mismo tiempo. El plano corresponde al conjunto solución del sistema de una ecuación y tres variables.

Ejemplo:

(Sistema de ecuaciones) $$1x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 4$$

(Matriz extendida) $$\begin{bmatrix}1&2&-1&:&4\end{bmatrix}$$

Clasificación: Escalón reducida
Variable libres.

$$x_2 = t_2$$
$$x_3 = t_3$$

Variable delantera:

$$x_1 = 4-2t_2+t_3$$

Infinitas soluciones:
(conjunto sol.)

$$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-2t_2+t_3\\t_2\\t_3\end{bmatrix}, t_2,t_3\in\Re\right\}$$
$$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, t_2,t_3\in\Re\right\}$$

(solución general)

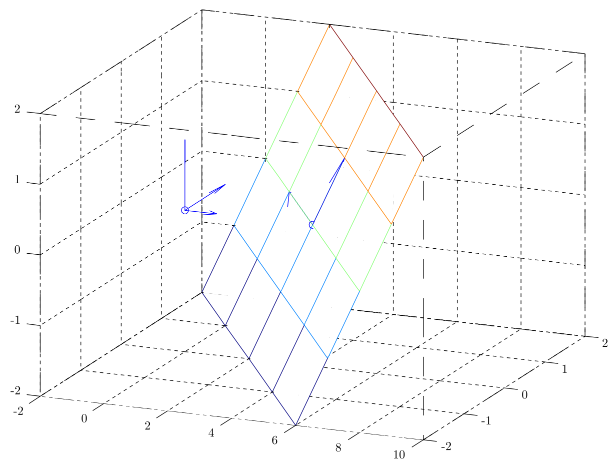
$$\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(soluciones part.)

si $t_2 = 0$ y $t_3 = 0$ $\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$

si $t_2 = 1$ y $t_3 = 0$ $\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

si $t_2 = 0$ y $t_3 = 1$ $\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix}$



¿ qué sucederá si el sistema tiene dos ecuaciones de tres variables ?

¿ y si son tres ecuaciones de tres variables ?

4.6. Resumen

Teorema: En una matriz extendida en forma escalón:

- si la última columna es pivote entonces no tiene solución y la matriz se llama **inconsistente**.

- si la ultima columna no tiene pivote entonces sí tiene solución y la matriz se llama **consistente**. En estas matrices:
  - si no tiene parámetros la **solución es única**.
  - si tiene parámetros tiene **infinitas soluciones**.

Además, en esta sección se debe identificar si una matriz extendida tiene las propiedades (E1), (E2), (E3) y (E4) y concluir si una matriz está en forma escalón, escalonada o escalón reducido. Se debe encontrar los pivotes y determinar los renglones y columnas con pivotes y las variables delanteras y libres. Determinar si el sistema de ecuaciones asociado es inconsistente o consistente con solución única o con infinitas soluciones. También se debe relacionar la matriz extendida con el producto de matriz por vector.

4.7. Multiplicación de matrices elementales por matrices extendidas

En la sección de la operación de multiplicación entre matrices se vieron unos ejemplos de como se alteraban los puntos de un dibujo al ser multiplicados por matrices elementales. En esta sección veremos como se alteran las matrices extendidas y sus soluciones al ser multiplicadas por matrices elementales.

Escalamiento del primer componente con $k = 2$ Rec como se afecta cada columna en esta operación

$$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k\ x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

y para $k = 2$ la matriz extendida es transformada de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & : & 2\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2 & : & 4\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}$$

la cual corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 &= 4\\0x_1 + 1x_2 &= 3\end{aligned}$$

La segunda ecuación nuevamente es la línea horizontal que cruza el eje de x_2 en 3. La primera ecuación se multiplico por dos a ambos lados de la ecuación, lo que no afecta la solución, por lo tanto queda nuevamente la misma ecuación. Entonces la intersección de las dos líneas es la misma $\left[\begin{smallmatrix}3\\-1\end{smallmatrix}\right]$

Escalamiento del segundo componente En el escalamiento del segundo componente sucede algo similar al escalamiento del primer componente y por lo tanto no se altera la solución del sistema de ecuaciones.

Intercambio de componentes Al ser multiplicado por $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.$

la matriz extendida intercambian los renglones

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & : & 2\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & : & 3\\1 & 1 & : & 2\end{bmatrix}$$

lo cual corresponde a intercambiar las ecuaciones

$$\begin{aligned}0x_1 + 1x_2 &= 3\\1x_1 + 1x_2 &= 2\end{aligned}$$

Por supuesto, esto no genera ningún cambio en la solución del sistema de ecuaciones.

Sumando a la primera componente un múltiplo (*k*

Recordemos que con esta operación cada vector es transformado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+(k\ x_2)\\x_2\end{bmatrix}$$

Con $k = 1$, la transformación del la matriz extendida es

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & : & 2\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & : & 5\\0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}$$

la cual corresponde al sistema de ecuaciones

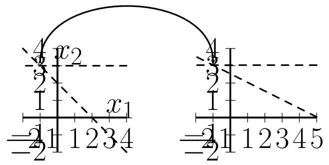
$$\begin{aligned}1x_1 + 2x_2 &= 5\\0x_1 + 1x_2 &= 3\end{aligned}$$

La segunda ecuación nuevamente es la línea horizontal que cruza el eje de x_2 en 3. La primera ecuación resulta ser la

suma de las ecuaciones originales. Para dibujarla despejamos x_1

$$x_1 = 5 - 2x_2$$

y tabulamos algunos valores, por ejemplo si $x_2 = 0$, $x_1 = 5$ pero si $x_2 = 1$ entonces $x_1 = 3$. Por lo tanto a segunda línea pasa por los valores $\left[\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$.



Sin embargo, se puede apreciar que al sumar las dos ecuaciones se genera una nueva ecuación cuya solución pasa entre las soluciones las dos ecuaciones originales.

Sumando a la segunda componente un múltiplo d

Al sumar al segundo componente un múltiplo del primero sucede algo similar que el caso anterior y por lo tanto no se altera la solución del sistema de ecuaciones.

Proposiciones: Las sigientes **operaciones elementales** entre renglones de una matriz extendida, no altera su solución

1. Al multiplicar un reglón por una constante diferente de cero.
2. Al intercambiar dos reglones.
3. Al sumar un múltiplo de un reglón a otro.

Al realizar una operación elemental sobre la matriz identidad se obtiene una **matriz elemental**.

Dos matrices (A y B) son **equivalentes** si una (A) se puede obtener de la otra (B) a partir de aplicar operaciones elementales entre renglones y se denota $A \sim B$.

Proposición:
Las operaciones elementales no alteran las posiciones de los pivotes

Por lo anterior podemos definir la posición de un pivote en una matriz cualquiera como la posición de un pivote en una matriz equivalente en forma escalón.

4.8. Eliminación de Gauss

En esta sección vamos a usar las operaciones elementales para transformar cualquier matriz extendida en matrices en forma escalón o escalón reducido por medio de la eliminación

de Gauss. [NJ99]

Proposición:
Los siguientes cuatro pasos permiten convertir una matriz en forma escalón y el último paso la convierte en forma escalón reducida.

(1) Vaya a la columna no cero extrema izquierda.

(2) Si el primer renglón tiene un cero en la columna del paso (1), intercámbielo con uno que tenga un elemento no cero en la misma columna.

(3) Obtenga ceros abajo del elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él.

(4) Cubra el renglón superior y repita el mismo proceso comenzando por el paso (1) aplicado a la sub-matriz restante. Repita este proceso con el resto de los renglones.

(5) Comenzando con el último renglón no cero, avance hacia arriba: para cada renglón obtenga un 1 delantero e introduzca ceros arriba de él, sumando múltiplos adecuados a los renglones correspondientes.

Proposición:
Una matriz extendida es equivalente a muchas matrices en forma escalón pero sólo a una matriz escalón reducida.

Es decir que dos matrices son equivalentes si ambas son equivalentes a la misma matriz escalón reducida.

Se recomienda estudiar [NJ99, Secciones 1.1 y 1.2] y hacer sus ejercicios.

4.9. Ejercicios

Para la matriz extendida $E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & : & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 6 & : & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$ diga:

1. ¿Cuantas columnas tiene de la matriz de coeficientes de E?
2. ¿Cuál es el elemento del renglón 2 de los términos constantes de E?
3. ¿Cuál es el elemento 3,6 de E?
4. ¿Cuantas ecuaciones tiene E?
5. ¿Cuantas variables tiene E?
6. ¿Cómo queda el elemento 1,5 después de restarle el renglón 2 al renglón 1?
7. Encuentre la forma escalón. ¿Cuantos pivotes tiene?

8. ¿Cuantos pivotes máximo puede tener una matriz de 5×8?
9. ¿Cuantos pivotes máximo puede tener una matriz de 7×4?
10. ¿Cuantos parámetros máximo puede tener una matriz de 5×8?
11. ¿Cuantos parámetros máximo puede tener una matriz de 7×4?
12. ¿Cuantos parámetros tiene E?
13. Encuentre la forma reducida de E ¿Cuál es el valor del primer término constante?
14. ¿Cuál es el valor del segundo término constante?
15. ¿Cuál es el valor del tercer término constante?
16. Escriba: 0 si E es inconsistente, 1 si E es consistente y tiene solución única o 2 si E es consistente y tiene infinitas soluciones.

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.