## Capítulo 2

## Imagen, núcleo y transformaciones lineales de $\Re^n$ en $\Re^m$

Dos secciones atrás aprendimos a transformar el vector $\overline{x}$ con una matriz $A$ para obtener el vector $\overline{y} = A\overline{x}$. Estas transformaciones las llamamos transformaciones matriciales y están descritas principalmente en [NJ99, Sección 5.1].

En la sección anterior nos daban un vector $\overline{y} = \overline{b}$ y teníamos que encontrar los vectores $\overline{x}$ tales que $A\overline{x} = \overline{b}$. Este procedimiento corresponde a resolver un sistema de ecuaciones y se describe principalmente en [NJ99, Sección 1.2].

En esta sección vamos a estudiar algunas propiedades exclusivas de la matriz $A$ independientemente de los vectores $\overline{x}$ o $\overline{y}$. Estos temas se describen en [NJ99, Secciones 2.3, 2.4, 2.5 y 4.1]

### 2.1. Repaso funciones

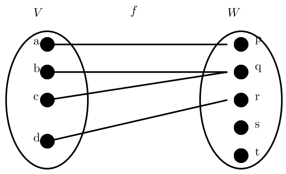
Una **función** $f : V \to W$ está formada por:

- un conjunto $V$ llamado **dominio**,





- un conjunto $W$ llamado **codominio**,
- una relación entre el dominio y el codominio la cual
  - relaciona cada elemento del dominio ($V$)
  - con solamente un elemento del codominio ($W$).



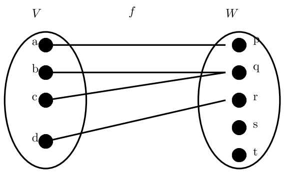

- el dominio de $f$ es el conjunto $V = \{a, b, c, d\}$,
- el codominio de $f$ es el conjunto $W = \{p, q, r, s, t\}$,

$f$ relaciona elementos del dominio con elementos del codominio. Ahora vamos a definir unas relaciones entre subconjuntos del dominio de $f$ y subconjuntos del codominio de $f$.

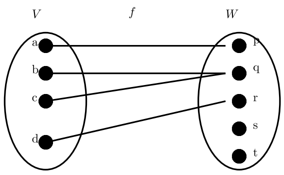
- La **imagen de un subconjunto $A$ del dominio de** $f$ es un subconjunto del codominio de $f$ formado por los elementos que están relacionados con algún elemento de $A$, se denota $f(A)$. Por ejemplo la imagen de $\{b, c\}$ es $f(\{b, c\}) = \{q\}$,



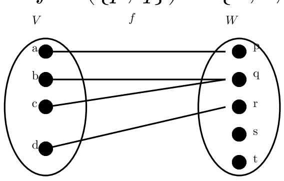





- la **imagen de la función** $f$ es la imagen del conjunto dominio y se denota $Im(f) = f(V)$. Por ejemplo la imagen de $f$ es $f(V) = \{p, q, r\}$.




- la **imagen inversa de un conjunto** $B$ es el subconjunto del dominio de $f$ formado por los elementos que están relacionados con algún elemento de $B$, se denota $f^-1(B)$. Por ejemplo la imagen inversa del conjunto $\{p, q\}$ es $f^{-1}(\{p, q\}) = \{a, b, c\}$.








En vez de $f(x)$ podemos a usar la notación

$$f(x \in V)$$

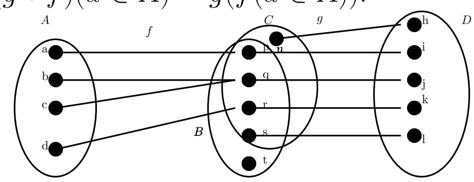
donde $V$ es el dominio de la función. Si el dominio es el intervalo de números reales [a,b] entonces podemos escribir $f(a \leq x \leq b)$.

De manera similar en vez de $f(x)$ podemos a usar la notación

$$f(x) \in W$$

donde $W$ es el codominio de la función. Por lo tanto, si el codominio es el intervalo de números reales [a,b] entonces podemos escribir $a \leq f(x) \leq b$.

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, tales que la imagen de $f$ esté contenida en el dominio de $g$, $Im(f) \subseteq C$. Entonces definimos la **composición de las funciones** $(g \circ f)(a \in A) = g(f(a \in A))$.




¿Cuál es el dominio, codominio e imagen de $g \circ f$?

Una función $f$ es:

- **sobre** si la imagen de $f$ es igual a su codominio, en otras palabras si la imagen inversa de cada síngleton tiene al menos un elemento.

- **1-1** si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, en otras palabras si la imagen inversa de cada síngleton tiene a lo más un elemento.
- **biyectiva** si es sobre y 1-1. Es decir, si la imagen inversa de cada síngleton es un síngleton.

> Proposición:
> Si $f$ es biyectiva entonces existe una función $f^{-1}$ (llamada la inversa de $f$) tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$

### 2.2. Transformaciones lineales de $\Re^n$ en $\Re^m$

Una transformación $T(\overline{x}) : \Re^n \to \Re^m$ es **lineal** si para todo $\overline{u}, \overline{v} \in \Re^n$ y para todo $k \in \Re$ se cumple:

li1 $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$.
(Da igual sumar en el dominio y codominio)

li2 $T(k\overline{u}) = kT(\overline{u})$
(Mult. por const. da igual en dom. y codom.)

Gráficamente esto se puede interpretar que si tenemos una proyección $T : \Re^3 \to \Re^2$ y dos vectores en $\Re^3$, da lo mismo sumar los vectores y después proyectarlos que sumar sus proyecciones.





Esta propiedad permite descubrir una transformación si sabemos como transforma la matriz identidad.

> Proposición:
> Toda transformación lineal de $\Re^n$ en $\Re^m$ es una transformación matricial (de $A_{m\times n}$) y toda transformación matricial (de $A_{m\times n}$) es una transformación lineal de $\Re^n$ en $\Re^m$

### 2.3. Sistemas homogéneos y núcleo de la transformación

Una forma de estudiar las propiedades de una matriz consiste en encontrar todos los puntos que se transforman en el cero. Por lo tanto definimos que si todos los términos constantes de un sistema de ecuaciones lineales son cero, el sistema se llama **sistema homogeneo**. Un sistema que no es homogéneo $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene el **sistema homogéneo asociado** $A\overline{x} = \overline{0}$.

> Proposición:
> Un sistema homogéneo siempre es consistente

.

El **subespacio nulo** de $A_{m\times n}$ o **núcleo** de $T_A : \Re^n \to \Re^m$ contiene todos los vectores-$n$ $\overline{x}$ tales que $A\overline{x} = 0_m$ y se denota

$$Nu(A) = \{\overline{x} \in \Re^n \mid A\overline{x} = 0_m\}$$

La **nulidad** de $A$ es el número de variables libres del sistema homogéneo de $[A : 0]$ y se denota $\nu(A)$ .





### 2.4. Independencia lineal

> Proposición:
> Dada la matriz $A_{m\times n}$ y cualquier $b \in \Re^m$, las siguiente afirmaciones son equivalentes.
>
> - $A$ tiene $n$ pivotes equivalentes.
> - $A$ tiene un pivote equivalente en cada columna.
> - $[A : b]$ no tiene variables libres.
> - $[A : b]$ no tiene infinitas soluciones.
> - $A\overline{x} = \overline{0}$ la única solución es la **trivial** ($\overline{x} = \overline{0}$).
> - $Nu\{A\} = \{\overline{0}\}$
> - $\nu\{A\} = 0$
> - $T_A : \Re^n \to \Re^m$ es 1-1.
>
> Si sucede lo anterior entonces se dice que $A$ es **linealmente independientes** (L.I.).

Si no se cumple la anterior proposición se dice que $A$ es **linealmente dependientes** (L.D.).

A continuación se ilustra el origen del nombre. En [NJ99, Ejemplo 1.2.16] se presenta como se aplica la eliminación de





Gauss de tal forma que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & : & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & : & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & : & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & : & -8 \end{bmatrix}$$

queda transformada en la matriz en forma escalón

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & : & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & : & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & : & -0 \end{bmatrix}$$

y en la matriz en forma escalón reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & : & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que las posiciones pivote de las dos últimas matrices son las mismas, aunque los valores cambian. Por este motivo en las <u>tres</u> matrices las columnas pivotes son la primera, la segunda, la cuarta y la quinta. La tercera columna corresponde a un parámetro.

$$x_3 = t$$

Despejando las variables obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-4t \\ 1+2t \\ 0+t \\ 2+0t \\ 0+0t \end{bmatrix}$$

Proposición:
Las columnas que corresponden a parámetros se pueden escribir como una combinación lineal de las columnas pivote de su izquierda (dependen de las columnas pivote). Por el contrario, las columnas pivote no se pueden escribir como combinación lineal de las otras columnas pivote (no dependen de las otras columnas pivote)

Es de resaltar que cuando decimos que los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, $\ldots \overline{v_n}$ son L. I. nos referimos a que la matriz $[\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots \overline{v_n}]$ es L. I., lo mismo aplica para L. D.

Por ejemplo, para la tercera matriz se tiene que

$$4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$





para la segunda matriz se tiene

$$4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y para la primera matriz

$$4\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 34 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes (4 y $-2$) coinciden en las tres porque los tres sistemas son equivalentes (ya que uno se obtiene del otro aplicando operaciones elementales de [NJ99, Ejemplo 1.2.16]) y los sistemas equivalentes tienen la misma solución $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.

De aquí se concluye que las columnas de la matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & 9 \\ 2 & -6 \end{smallmatrix}\right]$ son linealmente independientes. Las columnas de

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & 9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$





son linealmente dependientes, al igual que las columnas de

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Proposición:
Si se elimina una columna de una matriz linealmente independiente también es linealmente independiente. Por otro lado si se aumentan las columnas de una matriz linealmente dependiente entonces también es linealmente dependiente.

Proposición:
Una matriz que tiene más columnas que renglones no puede ser linealmente independiente

- El vector $0_n$ es L.D.
- Un vector diferente de cero es L.I.
- Dos vectores paralelos son L.D.
- Dos vectores no paralelos son L.I.

Observe que [NJ99, Ejemplo 1.2.18] es similar a [NJ99, Ejemplo 1.2.16] pero se presentan dos parámetros.





### 2.5. Imagen, espacio generado y espacio columnas de $A$

El **conjunto generado** por los vectores $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_k}$

$$Gen(\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_k})$$
$$= \{\overline{y} \mid \overline{y} = x_1\overline{v_1} + x_2\overline{v_2} + \cdots + x_n\overline{v_n}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Re\}$$

Este conjunto también se conoce como el **espacio columna** de la matriz $A = \begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{bmatrix}$

$$Col(A) = \{\overline{y} \mid \overline{y} = A\overline{x}, \overline{x} \in \Re^m\}$$

El cual también coincide con la **imagen de una transformación matricial** $T_A : \Re^n \to \Re^m$ que es

$$Im(T_A) = \{\overline{y} \mid \overline{y} = T_A(\overline{x}), \overline{x} \in \Re^m\}$$

El **rango** de la transformación matricial $T_A$ es el número de pivotes de $A$ y se denota $\rho(A)$

Proposición:
Si un vector $\overline{u}$ es combinación lineal de otros vectores

$$\overline{u} = c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_n\overline{v_n}$$

entonces

$$Gen\{\overline{u}, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\} = Gen\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$$

### 2.6. $\Re^n$ es generado por $A$

Proposición:
Dada una matriz $A_{m\times n}$ y cualquier $b \in \Re^m$, se tienen las siguientes equivalencias.

- Las columnas de $A$ generan $\Re^m$.
- $Col(A) = \Re^m$.
- $Im(T_A) = \Re^m$.
- $A$ tiene un pivote en cada renglón.
- $A$ tiene $m$ pivotes.
- $[A : b]$ es consistente.
- Si $B \sim A$ entonces $B$ no tienen renglones de ceros.
- $\rho(A) = m$
- $T_A : \Re^n \to \Re^m$ es **sobre**

Proposición:
Si se elimina una columna de una matriz que no genera $\Re^n$, esta tampoco genera $\Re^n$.
Por otro lado si se aumentan las columnas de una matriz que genera $\Re^n$, entonces también genera $\Re^n$.





Proposición:
Una matriz que tiene más renglones que columnas no puede generar $\Re^n$

Se sugiere mirar el ejemplo 20 y 21 de la sección 2.3 de la página 90 y los ejercicios 1 y 2.

### 2.7. Bases e isomorfismos de $\Re^n$

Una matriz $A$ es una **base de** $\Re^n$ si

- $A$ linealmente independiente y
- las columnas de $A$ generan a $\Re^n$.

La identidad es una base y se conoce como base canónica o base estándar. Las bases se pueden visualizar como sistemas de coordenadas.

Una transformación lineal $T_A : R^n \to R^n$ es un **isomorfismo** si

- $T_A$ es sobre
- $T_A$ es 1-1.

(Las transformaciones lineales biyectivas se llaman isomorfismos)





Proposición:
Dada una matriz $A_{m\times n}$, se tienen las siguientes equivalencias.

- $A$ es una base de $\Re^n$ ($A$ es L.I. y $Gen(A) = \Re^n$ ).
- $A$ es cuadrada y L.I.
- $A$ es cuadrada y $Gen(A) = \Re^n$.
- $T_A$ es un isomorfismo.
- Existe $T_A^{-1}$ tal que $T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x}$ y $T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y}$.
- Existe una matriz $B$ tal que $AB = I = BA$.

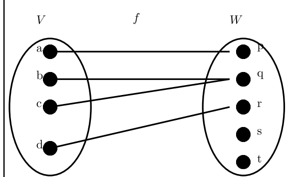
### 2.8. Linealidad de la inversa de una transformación lineal

Recordemos que una **función** $f : V \to W$ está formada por:

- un conjunto $V$ llamado **dominio**,
- un conjunto $W$ llamado **codominio**,
- una relación entre el dominio y el codominio la cual
  - relaciona <u>cada</u> elemento del dominio ($V$)
  - con <u>solamente</u> un elemento del codominio ($W$).








En un isomorfismo $T_A : \Re^n \to \Re^n$ también se cumple lo contrario, que se relaciona cada elemento del codominio (por ser sobre) con solamente un elemento del domino (por ser 1-1). Por lo tanto también es una transformación del codominio en el dominio conocida como la transformación inversa y dada por $T_A^{-1} : \Re^n \to \Re^n$ en la cual

$$T_A^{-1}(\overline{y}) = \overline{x},\ \overline{y} = T_A(\overline{x}),\ \overline{x} \in \Re^n$$

. Esto implica que para todo $\overline{x} \in \Re^n$ y que para todo $\overline{y} \in \Re^n$ se tiene que

$$T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x} \text{ y } T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y}$$

La transformación $T_A^{-1}$ también es lineal, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} T_A^{-1}(c_1\overline{y_1} + c_2\overline{y_2}) &= T_A^{-1}(c_1 T_A(\overline{x_1}) + c_2 T_A(\overline{x_2})) \\ &= T_A^{-1}(T_A(c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2})) \\ &= c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} \\ &= c_1 T_A^{-1}(\overline{y}) + c_2 T_A^{-1}(\overline{y}) \end{aligned}$$

Como $T_A^{-1} : \Re^n \to \Re^n$ es una transformación lineal entonces existe una matriz $B_{n\times n}$ tal que para cualquier vector $\overline{y} \in \Re^n$ se tiene que $T_A^{-1}(\overline{y}) = B\overline{y}$

Esta matriz $B$ debe cumplir para cualquier $\overline{x} \in \Re^n$ que

$$BA\overline{x} = B(A(\overline{x})) = T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x} = I_n\overline{x}$$

y también para cualquier $\overline{y} \in \Re^n$

$$AB\overline{y} = T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y} = I_n\overline{y}$$

por lo tanto $AB = I_n = BA$

Esto hace a esta matriz $B$ muy interesante. Primero esta matriz $B$ es única porque si existiera otra matriz $C$ con la misma propiedad $AC = I_n = CA$ entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Segundo permite resolver un sistema de ecuaciones con solución única.

$$A\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow BA\overline{x} = B\overline{y} \Leftrightarrow I\overline{x} = B\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} = B\overline{y}$$

### 2.9. Operación inversa

Antes de definir la operación inversa vamos a resolver un sistema arbitrario de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ cx_1 + dx_2 &= y_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$





que corresponde a la siguiente matriz extendida en donde se introduce intencionalmente un desface entre $y_1$ y $y_2$ que será útil para calcular la inversa

$$\begin{bmatrix} a & b & : & y_1 & \\ c & d & : & & y_2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{c}{a}R_1 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & y_1 & \\ 0 & d - \frac{c}{a}b & : & -\frac{c}{a}y_1 & + \; y_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{ad-cb}R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & y_1 & \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - bR_2 \to R_2 \begin{bmatrix} a & 0 & : & \frac{ad}{ad-cb}y_1 & - \; \frac{ab}{ad-cb}y_2 \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{a}R_1 \to R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{d}{ad-cb}y_1 & - \; \frac{b}{ad-cb}y_2 \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

Observe que la solución del sistema de ecuaciones se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-cb}y_1 & - \; \frac{b}{ad-cb}y_2 \\ -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$





$$= \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ con } B = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc \neq 0$ entonces hemos encontrado una matriz $B$ que permite despejar la ecuación $A\overline{x} = \overline{b}$, quedando la ecuación $\overline{x} = B\overline{b}$.

Para el siguiente sistema de ecuaciones de $2 \times 2$, encuentre la matriz de coeficientes $A$, la matriz inversa $A^{-1}$, despeje $\overline{x}$ y compruebe el resultado.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 1x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Encontramos que la inversa de $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ es $B = \frac{1}{ea-db}\left[\begin{smallmatrix} d \\ -c \end{smallmatrix}\right.$
Observe que pasa al multiplicar las dos matrices (por supuesto asumiendo que $ea - db \neq 0$).

$$AB = I \qquad\qquad BA = I$$

En términos generales decimos que si $A$ es una matriz de tamaño $n \times n$ y se puede encontrar una matriz $B$ del mismo tamaño tal que $AB = I = BA$, entonces se dice que $A$ es **invertible** y $B$ se denomina la **inversa** de $A$ que se denota $A^{-1}$.





Proposición:
La matriz $A$ de tamaño $n \times n$ se puede invertir si y sólo si el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cada vector-$n$ $\overline{b}$. Esta solución única esta dada por

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

Al comienzo de la sección encontramos la inversa de $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ resolviendo el sistema $\left[\begin{smallmatrix} a & b & : & y_1 & \\ c & d & : & & y_2 \end{smallmatrix}\right]$. Pero debido a que $\left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right]$, el procedimiento para calcular la inversa de la matriz $A$ usualmente se realiza extendiendo la matriz con la matriz identidad, de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ c & d & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{c}{a}R_1 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a}b & : & -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{ea-db}R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}$$

$$R_1 - bR_2 \to R_1 \begin{bmatrix} a & 0 & : & \frac{ea}{ea-db} & \frac{-ab}{ea-db} \\ 0 & 1 & : & \frac{-c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{a}R_1 \to R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{d}{ea-db} & \frac{-b}{ea-db} \\ 0 & 1 & : & \frac{-c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}$$

Este procedimiento se puede generalizar para matrices cuadradas de cualquier tamaño.

Proposición:
La matriz $A$ de tamaño $n \times n$ se puede invertir si y sólo si $T_A : \Re^n \to \Re^n$ es un isomorfismo si y sólo si $A$ tiene $n$ pivotes.

Resumiendo. $A^{-1}$ **Inversa de una matriz $A$ de orden $n$**

- $A^{-1}$ existe si es cuadrada y tiene $n$ pivotes.
- su tamaño es $size(A^{-1}) := size(A)$
- sus elementos son $(A^{-1})_{ij} := b_{ij}$ que se calcularán usando Gauss-Jordan o la adjunta

Usando la eliminación de Gauss encuentre la inversa de las siguientes matrices, si es posible.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Si $A$ y $B$ tienen inversa y $c$ es un escalar distinto de cero entonces las siguientes construcciones son invertibles y cada una cumple la correspondiente igualdad.

**Proposición 2.1.** *Si $A$ y $B$ son matrices invertibles*





1. *y si $AC = I = CA$ entonces $C = A^{-1}$.*
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}(A)^{-1}$.
5. $A^T$ *es invertible y* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Se recomienda estudiar la sección 3.2 de [NJ99]

### 2.10. Potencia de una matriz

Para una matriz invertible $A$ se definen las potencias:

- $A^0 = I$,
- $A^n = AA \dots A$, $n$ veces
- $A^{-n} = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}$, $n$ veces

para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,





Proposiciones: Asumiendo que $A$ es invertible, que $c$ es un escalar distinto se cero y que $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene que $A^r$ es invertible, que las siguientes construcciones también lo son y se cumplen las siguientes igualdades.

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$.
3. $((A)^r)^s = A^{rs}$.
4. $(cA)^r = c^r(A)^r$.

Si $A$ es una matriz cuadrada no invertible entonces cumple sólo algunas de las propiedades anteriores

Proposiciones: Si $A$ es una matriz cuadrada, $c$ es un escalar distinto se cero y $r, s \in \mathbb{N}$ se tiene que se cumplen las siguientes igualdades.

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $((A)^r)^s = A^{rs}$.
3. $(cA)^r = c^r(A)^r$.

Se recomienda hacer los ejercicios de la sección 3.2 de [NJ99].

### 2.11. Ejercicios

1. Ejemplos 5.2.5 (pg 320) y 5.2.23 (pg 327) de [NJ99].
2. Ejemplos 2.3.{22, 23} (pg 90), 2.3.{25, 26, 27} (pg 91) y





2.3.28 (pg 92) de [NJ99].

3. Ejemplos 2.4.{31, 33} (pg 97) y 2.4.{34,36} (pg 98) de [NJ99].
4. Ejemplos 5.3.26 (pg 332), 5.2.27 (pg 333) y 5.2.34 (pg 338) de [NJ99]
5. Ejemplos 4.1.{9,10,11,12,13} (pgs 230 y 231) de [NJ99].
6. Ejemplos 3.2.{15, 16, 17, 18, 19, 20} (pgs 170 - 174) de [NJ99].
7. Sean $A$ y $B$ dos matrices cuadradas de orden $n = 3$ y sean $A'$ y $B'$ sus matrices equivalentes en forma escalón reducida. Se sabe que $A$ es invertible y que $B$ no lo es. Para cada una de las preguntas diga cual matriz cumple el enunciado, cual matriz no lo cumple y cual matriz no se sabe si cumple o no lo cumple. En el enunciado $M$ remplaza cada una de las matrices $A$, $A'$, $B$ y $B'$
   *a*) Sus columnas son linealmente dependientes.
   *b*) La solución de $[M : 0]$ tiene parámetros
   *c*) La única solución del sistema homogéneo $M\overline{x} = 0$ es $\overline{x} = 0$?
   *d*) El sistema $M\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cualquier $b \in \Re^n$?
   *e*) La transformación $T_M$ es 1-1.

*f*) Todas las columnas tienen lugares pivotes (Puede considerar los lugares pivotes de $A'$ y $B'$ como lugares pivotes de $A$ y de $B$ respectivamente)

*g*) El sistema $M\overline{x} = \overline{b}$ es consistente para cualquier $b \in \Re^n$?

*h*) Las columnas de $M$ generan a $\Re^n$.

*i*) $M$ tiene al menos un renglón de ceros.

*j*) La transformación $T_M$ es sobre.

*k*) Todos los renglones tienen lugares pivotes (Puede considerar los lugares pivotes de $A'$ y $B'$ como lugares pivotes de $A$ y de $B$ respectivamente)

*l*) Tiene 3 lugares pivotes (Puede considerar los lugares pivotes de $A'$ y $B'$ como lugares pivotes de $A$ y de $B$ respectivamente)

*m*) Es el producto de matrices elementales.

*n*) Es la identidad.

*ñ*) La transformación $T_M$ es un isomorfismo.

*o*) Las columnas forman una base de $\Re^n$

8. Ejercicios de [NJ99, sec 3.2].{1 al 11, 17.a, 20, 22}

9. Encuentre una transformación matricial que cumpla las siguientes condiciones y dibuje como se transforma una casa de 1 de frente por 1 de alto.





*a*) $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

*b*) $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $T(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. Encuentre tres puntos en cada conjunto generado y grafique dicho conjunto.

*a*) $Gen(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$

*b*) $Gen(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix})$

*c*) $Gen(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$

*d*) $Gen(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$

11. Para las últimas tres transformaciones determine si $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ está en la imagen de la transformación.

12. Para cada una de las siguientes transformaciones matriciales encuentre la imagen (y grafíquela) y el núcleo (escríbalo como el generado de un conjunto de vectores y grafíquelo).

*a*) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

*b*) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$





*c*) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. Para cada inciso grafique el conjunto solución de cada sistema y compárelos.

*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 3 \end{bmatrix}$

*b*) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & 0 \\ -6 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & -2 \\ -6 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$

*c*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 \\ -2 & 0 & : & 0 \\ 8 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & -1 \\ -2 & 0 & : & 2 \\ 8 & 0 & : & -8 \end{bmatrix}$

Que concluye de los tres sistemas anteriores.

14. Para cada inciso grafique el conjunto solución de cada sistema y compárelos.

*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$

*b*) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & : & 0 \\ -6 & 2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & : & -2 \\ -6 & 2 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$



## Bibliografía


[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.