Capítulo 6

Bases, isomorfismos y matrices invertibles

Una matriz A es una **base de** $\Re^n$ si

- A linealmente independiente y
- las columnas de A generan a $\Re^n$.

La identidad es una base y se conoce como base canónica o base estándar. Las bases se pueden visualizar como sistemas de coordenadas.

Una transformación lineal $T_A : R^n \to R^n$ es un **isomorfismo** si

- T_A es sobre
- T_A es 1-1.

(Las transformaciones lineales biyectivas se llaman isomorfismos)

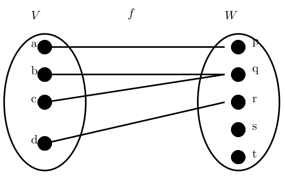
Proposición:
Dada una matriz $A_{m\times n}$, se tienen las siguientes equivalencias.

- A es una base de $\Re^n$ (A es L.I. y $Gen(A) = \Re^n$).
- A es cuadrada y L.I.
- A es cuadrada y $Gen(A) = \Re^n$.
- T_A es un isomorfismo.
- Existe T_A^{-1} tal que $T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x}$ y $T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y}$.
- Existe una matriz B tal que $AB = I = BA$.

6.1. Linealidad de la inversa de una transformación lineal

Recordemos que una **función** $f : V \to W$ está formada por:

- un conjunto V llamado **dominio**,
- un conjunto W llamado **codominio**,
- una relación entre el dominio y el codominio la cual
  - relaciona cada elemento del dominio (V)
  - con solamente un elemento del codominio (W).



En un isomorfismo $T_A : \Re^n \to \Re^n$ también se cumple lo contrario, que se relaciona cada elemento del codominio (por ser sobre) con solamente un elemento del domino (por ser 1-1). Por lo tanto también es una transformación del codominio en el dominio conocida como la transformación inversa y dada por $T_A^{-1} : \Re^n \to \Re^n$ en la cual

$$T_A^{-1}(\overline{y}) = \overline{x},\ \overline{y} = T_A(\overline{x}),\ \overline{x} \in \Re^n$$

. Esto implica que para todo $\overline{x} \in \Re^n$ y que para todo $\overline{y} \in \Re^n$ se tiene que

$$T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x} \text{ y } T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y}$$

La transformación T_A^{-1} también es lineal, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} T_A^{-1}(c_1\overline{y_1} + c_2\overline{y_2}) &= T_A^{-1}(c_1T_A(\overline{x_1}) + c_2T_A(\overline{x_2})) \\ &= T_A^{-1}(T_A(c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2})) \\ &= c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} \\ &= c_1T_A^{-1}(\overline{y}) + c_2T_A^{-1}(\overline{y}) \end{aligned}$$

Como $T_A^{-1} : \Re^n \to \Re^n$ es una transformación lineal entonces existe una matriz $B_{n\times n}$ tal que para cualquier vector $\overline{y} \in \Re^n$ se tiene que $T_A^{-1}(\overline{y}) = B\overline{y}$

Esta matriz B debe cumplir para cualquier $\overline{x} \in \Re^n$ que

$$BA\overline{x} = B(A(\overline{x})) = T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x} = I_n\overline{x}$$

y también para cualquier $\overline{y} \in \Re^n$

$$AB\overline{y} = T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y} = I_n\overline{y}$$

por lo tanto $AB = I_n = BA$

Esto hace a esta matriz B muy interesante. Primero esta matriz B es única porque si existiera otra matriz C con la misma propiedad $AC = I_n = CA$ entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Segundo permite resolver un sistema de ecuaciones con solución única.

$$A\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow BA\overline{x} = B\overline{y} \Leftrightarrow I\overline{x} = B\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} = B\overline{y}$$

6.2. Operación inversa

Antes de definir la operación inversa vamos a resolver un sistema arbitrario de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ cx_1 + dx_2 &= y_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la siguiente matriz extendida en donde se introduce intencionalmente un desface entre y_1 y y_2 que será útil para calcular la inversa

$$\begin{bmatrix} a & b & : & y_1 & \\ c & d & : & & y_2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{c}{a}R_1 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & y_1 & \\ 0 & d - \frac{c}{a}b & : & -\frac{c}{a}y_1 & + \; y_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{ad-cb}R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & y_1 & \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 - bR_2 \to R_2 \begin{bmatrix} a & 0 & : & \frac{ad}{ad-cb}y_1 & - \; \frac{ab}{ad-cb}y_2 \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{a}R_1 \to R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{d}{ad-cb}y_1 & - \; \frac{b}{ad-cb}y_2 \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$

Observe que la solución del sistema de ecuaciones se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-cb}y_1 & - \; \frac{b}{ad-cb}y_2 \\ -\frac{c}{ad-cb}y_1 & + \; \frac{a}{ad-cb}y_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$= B\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ con } B = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc \neq 0$ entonces hemos encontrado una matriz B que permite despejar la ecuación $A\overline{x} = \overline{b}$, quedando la ecuación $\overline{x} = B\overline{b}$.

Para el siguiente sistema de ecuaciones de 2×2, encuentre la matriz de coeficientes A, la matriz inversa A^{-1}, despeje $\overline{x}$ y compruebe el resultado.

$$3x_1 + 2x_2 = 4$$
$$1x_1 + 3x_2 = 2$$

Encontramos que la inversa de $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ es $B = \frac{1}{ea-db}\left[\begin{smallmatrix} d \\ -c \end{smallmatrix}\right.$ Observe que pasa al multiplicar las dos matrices (por supuesto asumiendo que $ea - db \neq 0$).

$$AB = I \qquad\qquad BA = I$$

En términos generales decimos que si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y se puede encontrar una matriz B del mismo tamaño tal que $AB = I = BA$, entonces se dice que A es **invertible** y B se denomina la **inversa** de A que se denota A^{-1}.

Proposición:
La matriz A de tamaño $n \times n$ se puede invertir si y sólo si el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cada vector-n $\overline{b}$. Esta solución única esta dada por

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

Al comienzo de la sección encontramos la inversa de $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ resolviendo el sistema $\left[\begin{smallmatrix} a & b & : & y_1 & \\ c & d & : & & y_2 \end{smallmatrix}\right]$. Pero debido a que $\left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right]$, el procedimiento para calcular la inversa de la matriz A usualmente se realiza extendiendo la matriz con la matriz identidad, de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ c & d & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{c}{a}R_1 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a}b & : & -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{ea-db}R_2 \to R_2 \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ 0 & 1 & : & -\frac{c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}$$

$$R_1 - bR_2 \to R_1 \begin{bmatrix} a & 0 & : & \frac{ea}{ea-db} & \frac{-ab}{ea-db} \\ 0 & 1 & : & \frac{-c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{a}R_1 \to R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{d}{ea-db} & \frac{-b}{ea-db} \\ 0 & 1 & : & \frac{-c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}$$

Este procedimiento se puede generalizar para matrices cuadradas de cualquier tamaño.

Proposición:
La matriz A de tamaño $n \times n$ se puede invertir si y sólo si $T_A : \Re^n \to \Re^n$ es un isomorfismo si y sólo si A tiene n pivotes.

Resumiendo. A^{-1} **Inversa de una matriz A de orden n**

- A^{-1} existe si es cuadrada y tiene n pivotes.
- su tamaño es $size(A^{-1}) := size(A)$
- sus elementos son $(A^{-1})_{ij} := b_{ij}$ que se calcularán usando Gauss-Jordan o la adjunta

Usando la eliminación de Gauss encuentre la inversa de las siguientes matrices, si es posible.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Si A y B tienen inversa y c es un escalar distinto de cero entonces las siguientes construcciones son invertibles y cada una cumple la correspondiente igualdad.

Proposición 6.1. *Si A y B son matrices invertibles*

1. y si $AC = I = CA$ entonces $C = A^{-1}$.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $(A^{-1})^{-1} = A$.

4. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}(A)^{-1}$.

5. A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Se recomienda estudiar la sección 3.2 de [NJ99]

6.3. Potencia de una matriz

Para una matriz invertible A se definen las potencias:

- $A^0 = I$,
- $A^n = AA \dots A$, n veces
- $A^{-n} = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}$, n veces

para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

Por ejemplo la matriz de rotación de un grado $\begin{bmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{bmatrix}$

Proposiciones: Asumiendo que A es invertible, que c es un escalar distinto se cero y que $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene que A^r es invertible, que las siguientes construcciones también lo son y se cumplen las siguientes igualdades.

1. $A^rA^s = A^{r+s}$.
2. $((A)^r)^s = A^{rs}$.
3. $(cA)^r = c^r(A)^r$.
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$.

Si A es una matriz cuadrada no invertible entonces cumple sólo algunas de las propiedades anteriores

Proposiciones: Si A es una matriz cuadrada, c es un escalar distinto se cero y $r, s \in \mathbb{N}$ se tiene que se cumplen las siguientes igualdades.

1. $A^rA^s = A^{r+s}$.
2. $((A)^r)^s = A^{rs}$.
3. $(cA)^r = c^r(A)^r$.

Se recomienda hacer los ejercicios de la sección 3.2 de [NJ99].

6.4. Transformación de una matriz

Definimos la trasformación de una matriz como la matriz de la transformación de sus columnas.

Es decir, dada una transformación

$$T : \Re^n \to \Re^m$$

definimos

$$T : \Re^{n\times k} \to \Re^{m\times k}$$

(donde $k \in \{1, 2, \dots\}$ y $\Re^{n\times k}$ es el conjunto de todas la matrices de tamaño $n \times k$), de la siguiente forma. Si A es una matriz de tamaño $n \times k$ entonces $T(A)$ es una matriz de tamaño $m \times k$ en donde la columna i de $T(A)$ corresponde a $T(\overline{v_i})$ donde v_i es la columna i de A.

$$T(\begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \dots & \overline{v_k} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} T(\overline{v_1}) & T(\overline{v_2}) & \dots & T(\overline{v_k}) \end{bmatrix}$$

Proposición:
Con la notación anterior tenemos que si T es lineal entonces:

- $$T(\overline{x}) = A\overline{x}$$
  donde $A = T(I)$,
- $$T(B) = AB$$
  donde $A = T(I)$,
- $$T(BC) = T(B)C$$
  donde B y C son cualquier par de matrices que se puedan multiplicar,
- $$T(\overline{x}) = T(B)B^{-1}\overline{x}$$
  donde B es una base de $\Re^n$.

Ejemplo 6.1. *¿Existe una sola transformación lineal? para:*

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución:La matriz está dada por

$$A = T(B)B^{-1}$$

Como $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} A &= T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{(1)(-1)-(1)(1)}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2-4 & -2+4 \\ 0 & 0 \\ -1-2 & -1+2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificación:

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-6+2)/-2 \\ 0 \\ (-3+1)/-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-6-2)/-2 \\ 0 \\ (-3-1)/-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

Conclusión: Sí existe una sola transformación lineal dada por la matriz

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.2. *¿Existe una sola transformación lineal? para:*

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Sabemos que si hay una única transformación la matriz está dada por

$$A = T(B)B^{-1}$$

Pero como $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ no se puede invertir ya que su determinante es cero.

Para entender mejor lo que sucede vamos a encontrar las posiciones pivote de B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cómo no todos los renglones tienen pivote entonces los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ no generan todo $\Re^2$.

Conclusión: Esto implica que falta información para definir la transformación. Por lo tanto no hay una sola transformación lineal que cumpla con esos datos.

Ejemplo 6.3. *¿Existe una sola transformación lineal? para:*

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como ya sabemos

$$A = T(B)B^{-1}$$

Pero $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ no se puede invertir porque no es una matriz cuadrada.

Vamos a encontrar las posiciones pivote de B para entender mejor lo que sucede.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Todos los renglones tienen pivote entonces los vectores generan todo $\Re^2$. Pero como el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ no tiene una posición pivote entonces podemos prescindir de él. De esta forma obtenemos una nueva matriz $B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ que es invertible, igual a la del ejemplo 6.1

$$\begin{aligned} A &= T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{(1)(-1)-(1)(1)}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2-4 & -2+4 \\ 0 & 0 \\ -1-2 & -1+2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificación: Las dos siguientes verificaciones sólo muestran que los cálculos se realizaron bien.

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-6+2)/-2\\0\\(-3+1)/-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-6-2)/-2\\0\\(-3-1)/-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

La siguiente verificación muestra que la transformación es lineal.

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-12+4)/-2\\0\\(-6+2)/-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)$$

Conclusión: Sí existe una sola transformación lineal dada por la matriz

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.4. *¿Existe una sola transformación lineal? para:*

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}8\\0\\4\end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$$

Solución: Como ya sabemos

$$A = T(B)B^{-1}$$

Pero $B = \begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$ no se puede invertir porque no es una matriz cuadrada.

Vamos a encontrar las posiciones pivote de B para entender mejor lo que sucede.

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Todos los renglones tienen pivote entonces los vectores generan todo $\Re^2$. Pero como el vector $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ no tiene una posición pivote entonces podemos prescindir de él. De esta forma obtenemos una nueva matriz $B' = \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ que es invertible, igual a la del ejemplo 6.1

$$\begin{aligned} A &= T\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix}2&4\\0&0\\1&2\end{bmatrix}\left(\frac{1}{(1)(-1)-(1)(1)}\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}2&4\\0&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-2-4&-2+4\\0&0\\-1-2&-1+2\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Verificación: Las dos siguientes verificaciones sólo muestran que los cálculos se realizaron bien.

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-6+2)/-2\\0\\(-3+1)/-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-6-2)/-2\\0\\(-3-1)/-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

La siguiente verificación muestra que la transformación no es lineal.

$$\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}8\\0\\4\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)$$

Conclusión: No existe una transformación lineal que cumpla con las tres condiciones.

6.5. Ejercicios

1. Ejemplo 5.2.23 (pg 327) de [NJ99].
2. Ejemplos 4.1.{9,10,11,12,13} (pgs 230 y 231) de [NJ99].
3. Ejemplos 3.2.{15, 16, 17, 18, 19, 20} (pgs 170 - 174) de [NJ99].
4. Ejercicios de [NJ99, sec 3.2].{1 al 11, 17.a, 20, 22}
5. Para cada inciso, encuentre una transformación matricial que cumpla las condiciones y dibuje como se transforma una casa de 1 de frente por 1 de alto.
   a) $T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ y $T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$
   b) $T(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ y $T(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$
6. Calcule $(A^T)^{-1}(3A^T + (2A)^T)$, donde $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}$
7. Si $A^2 = \begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$, encuentre $2A^{-4}$

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Len13] E. Lengyel, *Matemáticas para videojuegos*, Editorial Cengage Learning, 2a. edición, 2013

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.