TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #03:

ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1	Lê Ngọc Mỹ Trang	20520817
2	Lê Nhật Minh	20521601
3	Vương Vĩnh Thuận	20521997

MỤC LỤC

Bài tập 1:

a. Hãy cho biết ý nghĩa của "độ phức tạp" khi đề cập đến thuật toán.

"Độ phức tạp" không phải là thuật ngữ, đại lượng toán học được nghiên cứu bài bản, thuật ngữ chính xác là "order of growth (bậc tăng trưởng)". "Độ phức tạp được hiểu theo các ký hiệu tiệm cận, định lượng tương đối độ lớn phép toán của giải thuật so với kích thước của bài toán.

b. Hãy cho biết ý kiến của bản về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?

"Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện T(n)"

Em đồng ý với nhận định trên, tuy mọi các nghiên cứu về thuật toán đều đặc biệt quan tâm đến hiệu quả của chúng nhưng bản thân thời gian thực hiện T(n) rất khó khăn để xác định và so sánh nếu không có kiến thức chuyên môn cũng như công cụ hỗ trợ. Thay vào đó người ta đưa ra một phương án so sánh khác là ước lượng tương đối độ lớn của T(n) ở cấp độ nào và so sánh cấp độ lớn của các T thay vì chính bản thân chúng. Bậc tăng trưởng ra đời như một công cụ ước lượng cấp độ lớn của T(n) dựa trên các hàm f(n) đã biết mang tính chất dễ thực hiện hơn so với phương án tính toán tuyệt đối với bản thân T(n)

c. Nói về ĐPT tức là đề cập tới các ký hiệu tiệm cận, mà có nhiều ký hiệu khác nhau. Vậy khi nào (trong trường hợp nào) thì nên dùng ký hiệu nào?

Big-O notation thể hiện mức trên thời gian chạy của thuật toán, vì vậy ta dùng nó khi muốn biết trường hợp xấu nhất của độ phức tạp Big-Ω notation thể hiện mức chặn dưới thời gian chạy của thuật toán, vì vậy ta dùng nó khi muốn biết trường hợp độ phức tạp tốt nhất Big-Θ notation thể hiện cả tiệm cận trên và tiệm cận dưới của thời gian chạy của thuật toán, ta dùng nó khi muốn phân tích trường hợp độ phức tạp trung bình

Bài tập 2:

t / f(n)	1 Second ($10^6 \mu s$)	1 Minute ($6 * 10^7 \mu s$)	1 Hour ($36 * 10^8 \mu s$)	1 Day ($864 * 10^8 \mu s$)	1 Month =30 Days ($2592 * 10^9 \mu s$)	1 Year ($31104 * 10^9 \mu s$)	1 Century ($31104 * 10^{11} \mu s$)
$\lg n$	2^{10^6}	2^{6*10^7}	2^{36*10^8}	2^{864*10^8}	$2^{2592*10^9}$	$2^{31104*10^9}$	$2^{31104*10^{11}}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	$36 * 10^{14}$	$1296 * 10^{16}$	$746496 * 10^{16}$	$2592^2 * 10^{18}$	$31104^2 * 10^{18}$	$31104^2 * 10^{22}$
n	10^6	$6 * 10^7$	$36 * 10^8$	$864 * 10^8$	$2592 * 10^9$	$31104 * 10^9$	$31104 * 10^{11}$
$n \lg n$	62746	2801417	$1.3 * 10^8$	$2.7 * 10^9$	$7.1 * 10^{10}$	$7.8 * 10^{11}$	$6.7 * 10^{13}$
n^2	10^3	$2\sqrt{15} * 10^3$	$6 * 10^4$	$12\sqrt{6} * 10^4$	$72\sqrt{5} * 10^4$	$144\sqrt{15} * 10^4$	$144\sqrt{15} * 10^5$
n^3	10^2	$\sqrt[3]{60} * 10^2$	$\sqrt[3]{450} * 200$	$\sqrt[3]{400} * 600$	$10^3 * 6\sqrt[3]{12}$	$10^3 * 12\sqrt[3]{36}$	$10^3 * 24\sqrt[3]{450}$
2^n	$6 + 6\log 5$	$\log 3 + 8 + 7\log 5$	$10 + 2\log 3 + 8\log 5$	$13 + 3\log 3 + 8\log 5$	$14 + 4\log 3 + 9\log 5$	$16 + 5\log 3 + 9\log 5$	$18 + 5\log 3 + 11\log 5$
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

<u>Giải thích:</u>

$f(n)$	n
$\lg n$	-$t = 1\ second$: $\lg n = 10^6 \Rightarrow n = 2^{10^6}$ -$t = 1\ minute$: $\lg n = 6 * 10^7 \Rightarrow n = 2^{6*10^7}$ -$t = 1\ hour$: $\lg n = 36 * 10^8 \Rightarrow n = 2^{36*10^8}$ -$t = 1\ day$: $\lg n = 864 * 10^8 \Rightarrow n = 2^{864*10^8}$

	-$t = 1\ month$: $\lg n = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = 2^{2592*10^9}$ -$t = 1\ year$: $\lg n = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = 2^{31104*10^9}$ -$t = 1\ century$: $\lg n = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = 2^{31104*10^{11}}$
$\sqrt{n}$	-$t = 1\ second$: $\sqrt{n} = 10^6 \Rightarrow n = (10^6)^2 = 10^{12}$ -$t = 1\ minute$: $\sqrt{n} = 6 * 10^7 \Rightarrow n = (6 * 10^7)^2 \Rightarrow n = 36 * 10^{14}$ -$t = 1\ hour$: $\sqrt{n} = 36 * 10^8 \Rightarrow n = (36 * 10^8)^2 = 1296 * 10^{16}$ -$t = 1\ day$: $\sqrt{n} = 864 * 10^8 \Rightarrow n = (864 * 10^8)^2 = 746496 * 10^{16}$ -$t = 1\ month$: $\sqrt{n} = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = (2592 * 10^9)^2 = 2592^2 * 10^{18}$ -$t = 1\ year$: $\sqrt{n} = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = (31104 * 10^9)^2 = 31104^2 * 10^{18}$ -$t = 1\ century$: $\sqrt{n} = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = (31104 * 10^{11})^2 = 31104^2 * 10^{22}$
n	-$t = 1\ second$: $n = 10^6$ -$t = 1\ minute$: $n = 6 * 10^7$ -$t = 1\ hour$: $n = 36 * 10^8$ -$t = 1\ day$: $n = 864 * 10^8$ -$t = 1\ month$: $n = 2592 * 10^9$ -$t = 1\ year$: $n = 31104 * 10^9$ -$t = 1\ century$: $n = 31104 * 10^{11}$
$n \lg n$	-$t = 1\ second$: $n \lg n = 10^6 \Rightarrow n = \frac{10^6}{W(10^6)}$ -$t = 1\ minute$: $n \lg n = 6 * 10^7 \Rightarrow n = \frac{6*10^7}{W(6*10^7)}$ -$t = 1\ hour$: $n \lg n = 36 * 10^8 \Rightarrow n = \frac{36*10^8}{W(36*10^8)}$ -$t = 1\ day$: $n \lg n = 864 * 10^8 \Rightarrow n = \frac{864*10^8}{W(864*10^8)}$ -$t = 1\ month$: $n \lg n = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = \frac{2592*10^9}{W(2592*10^9)}$ -$t = 1\ year$: $n \lg n = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = \frac{31104*10^9}{W(31104*10^9)}$

	-$t = 1\ century$: $n \lg n = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = \frac{31104*10^{11}}{W(31104*10^{11})}$
n^2	-$t = 1\ second$: $n^2 = 10^6 \Rightarrow n = \sqrt{10^6} \Rightarrow n = 10^3$ -$t = 1\ minute$: $n^2 = 6 * 10^7 \Rightarrow n = \sqrt{6 * 10^7} \Rightarrow n = 2\sqrt{15} * 10^3$ -$t = 1\ hour$: $n^2 = 36 * 10^8 \Rightarrow n = \sqrt{36 * 10^8} \Rightarrow n = 6 * 10^4$ -$t = 1\ day$: $n^2 = 864 * 10^8 \Rightarrow n = \sqrt{864 * 10^8} \Rightarrow n = 12\sqrt{6} * 10^4$ -$t = 1\ month$: $n^2 = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = \sqrt{2592 * 10^9} \Rightarrow n = 72\sqrt{5} * 10^4$ -$t = 1\ year$: $n^2 = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = \sqrt{31104 * 10^9} \Rightarrow n = 144\sqrt{15} * 10^4$ -$t = 1\ century$: $n^2 = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = \sqrt{31104 * 10^{11}} \Rightarrow n = 144\sqrt{15} * 10^5$
n^3	-$t = 1\ second$: $n^3 = 10^6 \Rightarrow n = \sqrt[3]{10^6} = 10^{6/3} = 10^2$ -$t = 1\ minute$: $n^3 = 6 * 10^7 \Rightarrow n = \sqrt[3]{6 * 10^7} = \sqrt[3]{60} * 10^2$ -$t = 1\ hour$: $n^3 = 36 * 10^8 \Rightarrow n = \sqrt[3]{450} * 200$ -$t = 1\ day$: $n^3 = 864 * 10^8 \Rightarrow n = 2^{\frac{5}{3}} * 3^{\frac{3}{3}} * 10^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{400} * 600$ -$t = 1\ month$: $n^3 = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = 2^{\frac{5}{3}} * 3^{\frac{4}{3}} * 10^{\frac{9}{3}} = 10^3 * 6\sqrt[3]{12}$ -$t = 1\ year$: $n^3 = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = 2^{\frac{7}{3}} * 3^{\frac{5}{3}} * 10^3 = 10^3 * 12\sqrt[3]{36}$ - $t = 1\ century$: $n^3 = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = 10^{\frac{11}{3}} * 12\sqrt[3]{36} = 10^3 * 24\sqrt[3]{450}$
2^n	-$t = 1\ second$: $2^n = 10^6 \Rightarrow n = \log 10^6 = 6 + 6\log 5$ -$t = 1\ minute$: $2^n = 6 * 10^7 \Rightarrow n = \log(6 * 10^7) = \log 3 + 8 + 7\log 5$ -$t = 1\ hour$: $2^n = 36 * 10^8 \Rightarrow n = \log(36 * 10^8) = 10 + 2\log 3 + 8\log 5$ -$t = 1\ day$: $2^n = 864 * 10^8 \Rightarrow n = \log(864 * 10^8) = 13 + 3\log 3 + 8\log 5$ -$t = 1\ month$: $2^n = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = \log(2592 * 10^9) = 14 + 4\log 3 + 9\log 5$ -$t = 1\ year$: $2^n = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = \log(31104 * 10^9) = 16 + 5\log 3 + 9\log 5$

	-$t = 1\ century$: $2^n = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = \log(31104 * 10^{11}) = 18 + 5\log 3 + 11\log 5$
$n!$	-$t = 1\ second$: $n! = 10^6 \Rightarrow n = 10$ -$t = 1\ minute$: $n! = 6 * 10^7 \Rightarrow n = 12$ -$t = 1\ hour$: $n! = 36 * 10^8 \Rightarrow n = 12$ -$t = 1\ day$: $n! = 864 * 10^8 \Rightarrow n = 14$ -$t = 1\ month$: $n! = 2592 * 10^9 \Rightarrow n = 15$ -$t = 1\ year$: $n! = 31104 * 10^9 \Rightarrow n = 16$ -$t = 1\ century$: $n! = 31104 * 10^{11} \Rightarrow n = 17$

Bài tập 3:

a. Phép suy ra bên dưới là đúng hay sai và vì sao?

$$\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$$

$$n^2 + 1 = O(n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$$

Từ $\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$ và $n^2 + 1 = O(n^2)$, ta suy ra $T(n) = \frac{1}{2}n^2$ và $T(n) = n^2 + 1$ là 2 hàm cùng thuộc tập hợp $O(n^2)$ gồm các hàm $t(n)$ sao cho $\forall t(n) \in O(n^2), \exists\ c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: t(n) \le cn^2$ Vậy nên dấu "=" ở đây có nghĩa là "∈" và không đủ cơ sở để có thể áp dụng tính chất bắc cầu để suy ra $\frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$ (vì $n^2 + 1 > \frac{1}{2}n^2, \forall n \ge 1$)

b. Xét

$$f(n) = 7n^2$$

$$g(n) = n^2 - 80$$

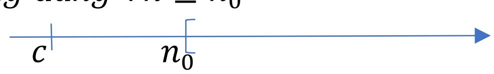
$$h(n) = n^3$$

Chứng minh:

$f(n) = O(g(n))$	$\exists\, c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ sao\ cho\ 7n^2 \le c(n^2 - 80n), \forall\, n\ \ge n_0$ Thử chọn $c = 8, ta$ được: $7n^2\ \le\ 8(n^2 - 80n)$ $n^2 - 640n\ \ge 0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \le\ \ \ \ 0 \\ n \ge 640 \end{array}\right.$ Chọn c = 8, n_0 = 640 Theo định nghĩa của Big-O, ta được $f(n) =\ \mathrm{O}(g(n))$
$g(n) = O(f(n))$	$\exists\, c \in\ \mathbb{R}^+, n_0 \in\ \mathbb{N}\ sao\ cho: (n^2 - 80n) \le c.7n^2, \forall\, n\ \ge n_0$ Ta có: $n^2\ \le\ n^2, \forall\, n\ \ge 1$ $\Leftrightarrow n^2 - 80n\ \le\ n^2, \forall\, n\ \ge 1$ $\Leftrightarrow n^2 - 80n\ \le\ n^2\ \le 7n^2, \forall\, n\ \ge 1$ Chọn c = 1, n_0 = 1 Theo định nghĩa của Big-O, ta được $g(n) = \mathrm{O}(f(n))$
$f(n) = O(h(n))$	$\exists\, c \in\ \mathbb{R}^+, n_0 \in\ \mathbb{N}\ sao\ cho: 7n^2 \le cn^3, \forall\, n\ \ge n_0$ Chọn $c = 7, n_0 = 1$ thì: $7n^2 \le 7n^3, \forall\, n\ \ge 1$ Theo định nghĩa của Big-O, ta được $f(n) = \mathrm{O}(h(n))$
$h(n) \ne O(f(n))$	Giả sử: $h(n) = \mathrm{O}(f(n))$, ta có: $\exists\, c \in\ \mathbb{R}^+, n_0 \in\ \mathbb{N}$ sao cho: $n^3 \le c.7n^2, \forall\, n\ \ge n_0$ $\Leftrightarrow c\ \ge\ \frac{n}{7}, \forall\, n\ \ge n_0$ Điều này mâu thuẫn và vô lý Suy ra giả sử ban đầu là sai Vậy $h(n) \ne \mathrm{O}(f(n))$

c. Chứng minh

$n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$	Giả sử: $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$ **(1)** $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^4 + n + 1 \le cn^2, \forall n \ge n_0$ Ta có: $n^4 + n + 1 \ge n^4, \forall n \ge 1$ Giả sử $n^4 \in O(n^2)$ **(2)** $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^4 \le cn^2, \forall n \ge n_0$ $\Leftrightarrow n^2 \le c, \forall n \ge n_0$**(*)**

	TH1: $n_0 < c$ Xét $n = c + 1$, ta có $n^2 = c^2 + c + 1 \geq c$ $\Rightarrow không\ đúng\ \forall n \geq n_0$ TH2: $n_0 > c$, ta có: $n^2 \leq c$ khi $n \leq 1$ $\Rightarrow không\ đúng\ \forall n \geq n_0$ Suy ra **(*)** mâu thuẫn $\Rightarrow$ Giả sử **(2)** sai Theo giả sử **(1)**: Nếu $n^4 + n + 1 \geq n^4, \forall n \geq 1$ và $n^4 + n + 1 \geq cn^2, \forall n \geq n_0$ thì $n^4 \leq cn^2, \forall n \geq n_0$ (vô lý) Vậy ta có đccm
$O(n^2) \neq O(n)$	Giả sử $O(n^2) = O(n)$ **(1)** Xét $O(n^2) \subset O(n)$, ta có: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^2 \leq cn, \forall n \geq n_0$ $\Leftrightarrow n \leq c, \forall n \geq n_0$**(*)** TH1: $n_0 < c$  $n \leq c$ khi $n \in [n_0, c]$ $\Rightarrow không\ đúng\ \forall n \geq n_0$ TH2: $n_0 > c$  Không tồn tại $n \leq c, \forall n \geq n_0$ trong TH này Suy ra **(*)** mâu thuẫn, giả sử **(1)** vô lý Vậy $O(n^2) \not\subset O(n)$ nên $O(n^2) \neq O(n)$ (đccm)
$n \notin O(\log_2 n)$	Giả sử $n \in O(\log_2 n)$ $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n \leq c \log_2 n, \forall n \geq 1$ **(1)** Ta có: $n \geq \frac{n}{10}, \forall n \geq 1$ Chọn $c = \frac{1}{10}, n_0 = 1 \Rightarrow n \geq cn, \forall n \geq 1$ theo định nghĩa Big-Ω, ta suy ra:$n \in \Omega(n), \forall n \geq n_0$**(2)**

	Từ **(1)**, **(2)** ta có: $cn \le n \le c\log_2 n, \forall n \ge 1$ **(*)** Vì $n \ge \log_2 n \Rightarrow cn \ge c\log_2 n, \forall n \ge 1$ nên **(*)** mâu thuẫn Giả sử $n \in O(\log_2 n)$ sai Vậy $n \notin O(\log_2 n)$

Bài tập 4: Với mỗi nhóm hàm tăng trưởng bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần theo bậc tăng trưởng Big-O

Group 1:	$\boldsymbol{f_1(n) = \binom{n}{100}} = C_n^{100} = \frac{(n-99)\ldots(n-1)n}{100!} = O(n^{100})$ $\boldsymbol{f_2(n) = n^{100}} = O(n^{100})$ $\boldsymbol{f_3(n) = \frac{1}{n}} = O(n^{-1})$ $\boldsymbol{f_4(n) = 10^{1000}n} = O(n)$ $\boldsymbol{f_5(n) = n\log n} = O(n.n^c) = O(n^{1+c})$ Vậy: $f_3(n) < f_4(n) < f_5(n) < f_1(n) \approx f_2(n)$
Group 2:	$\boldsymbol{f_1(n) = 2^{2^{1000000}}} = O(1)$ $\boldsymbol{f_2(n) = 2^{100000n}} = O(2^n)$ $\boldsymbol{f_3(n) = \binom{n}{2}} = C_n^2 = \frac{(n-1)n}{2!} = O(n^2)$ $\boldsymbol{f_4(n) = n\sqrt{n}} = O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$ Vậy: $f_1(n) < f_4(n) < f_3(n) < f_2(n)$
Group 3:	$\boldsymbol{f_1(n) = n^{\sqrt{n}}} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log_2 n} = 2^{O\left(n^{\frac{1}{2}+c}\right)}$ $\boldsymbol{f_2(n) = 2^n} = 2^{O(n)}$ $\boldsymbol{f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}}} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{10}.2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}+10\log_2 n} = 2^{O(n+c)}$ $\boldsymbol{f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)} = \frac{n(n+3)}{2} = 2^{\log_2 n+\log_2(n+3)-1} = 2^{O(n^c)}$ Vậy: $f_4(n) < f_1(n) < f_3(n) \approx f_2(n)$

Group 4:	$\boldsymbol{f_1(n) = n^4 \binom{n}{2}} = n^4 C_n^2 = \frac{n^4(n-1)n}{2!} = O(n^6)$ $\boldsymbol{f_2(n) = \sqrt{n}(\log n)^4} = O\left(n^{\frac{1}{2}+4c}\right)$ $\boldsymbol{f_3(n) = n^{5\log n}} = O\left(n^{5\log n}\right)$ $\boldsymbol{f_4(n) = 4\log n + \log\log n} = O(\log n)$ $\boldsymbol{f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} i} = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$ Vậy: $f_4(n) < f_2(n) < f_5(n) < f_1(n) < f_3(n)$
Group 5:	$\boldsymbol{f_1(n) = n^{\sqrt{n}}} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log_2 n} = 2^{O\left(n^{\frac{1}{2}+c}\right)}$ $\boldsymbol{f_2(n) = n^{\log n}} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log n} = 2^{(\log_2 n)^2} = 2^{O(n^{2c})}$ $\boldsymbol{f_3(n) = n^{\frac{n}{2}}} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}\log_2 n} = 2^{O(n^{1+c})}$ $\boldsymbol{f_4(n) = 3^{\sqrt{n}}} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log_2 3} = 2^{O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)}$ $\boldsymbol{f_5(n) = 4^{n^{\frac{1}{4}}}} = 2^{2n^{\frac{1}{4}}} = 2^{O\left(n^{\frac{1}{4}}\right)}$ Vậy: $f_5(n) < f_4(n) < f_1(n) < f_3(n) < f_2(n)$

Bài tập 5: Chứng minh

a. $O(C) = O(1)$ với C là hằng số

Chứng minh: $\mathbf{O}(\boldsymbol{C}) \subset \mathbf{O}(\mathbf{1})$

- Xét 1 hàm $f(n)$ bất kỳ, $f(n) \in O(C)$
- Ta có: $\exists d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n) \leq dC, \forall\, n \geq n_0$
- Chọn $e = d.C, n_0 \in \mathbb{N}$

  Theo định nghĩa Big-O, ta có: $\exists e \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: f(n) \leq e.1 \Rightarrow f(n) \in \mathrm{O}(1)$

  Vậy $\mathrm{O}(C) \subset \mathrm{O}(1)$ **(1)**

Chứng minh: $\mathbf{O}(\mathbf{1}) \subset \mathbf{O}(\boldsymbol{C})$

- Xét 1 hàm $g(n)$ bất kỳ, $g(n) \in \mathrm{O}(1)$

- Ta có: $\exists a \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n) \leq a.1 \Leftrightarrow f(n) \leq a.\frac{C}{C}.1, \forall n \geq n_0$
- Chọn $b = \frac{a}{C}, n_0 \in \mathbb{N}$

  Theo định nghĩa Big-O, ta có: $\exists b \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: g(n) \leq b.C \Longrightarrow g(n) \in O(C)$

  Vậy $O(1) \subset O(C)$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** $\Longrightarrow O(C) = O(1)$

b. $O(Cf(n)) = O(f(n))$ với C là hằng số

Chứng minh $O(Cf(n)) \subset O(f(n))$

- Xét 1 hàm $f(n)$ bất kỳ, $f(n) \in O(Cf(n))$
- Ta có: $\exists d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n) \leq dCf(n), \forall n \geq n_0$
- Chọn $e = d.C, n_0 \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa Big-O, ta có:

$$\exists d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: f(n) \leq ef(n) \Longrightarrow f(n) \in O(f(n))$$

  Vậy $O(Cf(n)) \subset O(f(n))$ **(1)**

Chứng minh: $O(f(n)) \subset O(Cf(n))$

- Xét 1 hàm $g(n)$ bất kỳ, $g(n) \in O(f(n))$
- Ta có: $\exists a \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n) \leq af(n) \Leftrightarrow f(n) \leq a.\frac{C}{C}f(n), \forall n \geq n_0$
- Chọn $b = \frac{a}{C}, n_0 \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa Big-O, ta có:

$$\exists b \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: g(n) \leq bCf(n) \Longrightarrow g(n) \in O(Cf(n))$$

  Vậy $O(f(n)) \subset O(Cf(n))$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** $\Longrightarrow O(f(n)) = O(Cf(n))$

c. Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$

Từ $f(n) \in O(g(n))$, ta có: $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq c_1 g(n), \forall n \geq n_1$

Từ $g(n) \in O(h(n))$, ta có: $\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \leq c_2 h(n), \forall n \geq n_2$

Ta thấy: $\begin{cases} f(n) \leq c_1 g(n) \\ g(n) \leq c_2 h(n) \end{cases} \Leftrightarrow f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 h(n), \forall n \geq n_1, n_2$

Chọn $c_3 = c_1 c_2, n_3 = \max(n_1, n_2)$, theo định nghĩa Big-O ta có:

$\exists c_3 \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le c_3 h(n), \forall n \ge n_3$

Kết luận: $f(n) \in O\big(h(n)\big)$

d. Nếu $t_1(n) \in O\big(f(n)\big)$ và $t_2(n) \in O\big(g(n)\big)$ thì $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$

Từ $t_1(n) \in O\big(f(n)\big)$, ta có: $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $t_1(n) \le c_1 f(n), \forall n \ge n_1$

Từ $t_2(n) \in O\big(g(n)\big)$, ta có: $\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $t_2(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_2$

Ta thấy: $\begin{cases} t_1(n) \le c_1 f(n), & \forall n \ge n_1 \\ t_2(n) \le c_2 g(n), & \forall n \ge n_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t_1(n) + t_2(n) \le c_1 f(n) + c_2 g(n), \forall n \ge n_1, n_2$

$\Leftrightarrow t_1(n) + t_2(n) \le c_1 \max\{f(n), g(n)\} + c_2 \max\{f(n), g(n)\}, \forall n \ge n_1, n_2$

$\Leftrightarrow t_1(n) + t_2(n) \le (c_1 + c_2) \max\{f(n), g(n)\}, \forall n \ge n_1, n_2$

Chọn $c_3 = c_1 + c_2$, $n_3 = \max(n_1, n_2)$, theo định nghĩa Big-O ta có:

$\exists c_3 \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N}$ sao cho: $t_1(n) + t_2(n) \le c_3 \max\{f(n), g(n)\}, \forall n \ge n_3$

Kết luận: $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$

Bài tập 6: Chứng minh

a. If $t(n) \in O\big(g(n)\big)$, then $g(n) \in \Omega\big(t(n)\big)$

Từ $t(n) \in O\big(g(n)\big)$, ta có: $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $t(n) \le c_1 g(n), \forall n \ge n_1$

Ta thấy: $t(n) \le c_1 g(n) \Leftrightarrow \frac{1}{c_1} t(n) \le g(n), \forall n \ge n_1$

Chọn $c = \frac{1}{c_1}$, $n_0 = n_1$, theo định nghĩa Big-O ta có:

$\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \ge c t(n), \forall n \ge n_0$

Kết luận: $g(n) \in \Omega\big(t(n)\big)$

b. $\Theta\big(\alpha g(n)\big) = \Theta\big(g(n)\big)$ where $\alpha > 0$

Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta\big(\alpha g(n)\big) \subset \Theta\big(g(n)\big)}$

- Xét 1 hàm $f(n)$ bất kỳ, $f(n) \in \Theta\big(\alpha g(n)\big)$
- Ta có: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_{01} \in \mathbb{N}$ sao cho $c_1 \alpha g(n) \le f(n) \le c_2 \alpha g(n), \forall\, n \ge n_{01}$

- Chọn $\begin{cases} d_1 = c_1\alpha \\ d_2 = c_2\alpha \\ n_0 = n_{01} \end{cases}$ thì $d_1.\alpha g(n) \le f(n) \le d_2.\alpha g(n), \forall n \ge n_0$
- Theo định nghĩa Big-Θ, theo cách chọn như trên ta được $f(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$

  Vậy $\Theta\big(\alpha g(n)\big) \subset \Theta\big(g(n)\big)$ **(1)**

Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta\big(g(n)\big) \subset \Theta\big(\alpha g(n)\big)}$

- Xét 1 hàm h(n) bất kỳ, $h(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$
- Ta có: $\exists e_1, e_2 \in \mathbb{R}^+, n_{02} \in \mathbb{N}$ sao cho $e_1 g(n) \le h(n) \le e_2 g(n), \forall\, n \ge n_{02}$
- Chọn $\begin{cases} f_1 = \frac{e_1}{\alpha} \\ f_2 = \frac{e_2}{\alpha} \\ n_0 = n_{02} \end{cases}$ thì $e_1\alpha g(n) \le h(n) \le e_2\alpha g(n), \forall n \ge n_0$
- Theo định nghĩa Big-Θ, theo cách chọn như trên ta được $h(n) \in \Theta\big(\alpha g(n)\big)$

  Vậy $\Theta\big(g(n)\big) \subset \Theta\big(\alpha g(n)\big)$ **(2)**

Từ **(1)** *v*à **(2)** $\Longrightarrow \Theta\big(\alpha g(n)\big) \in \Theta\big(g(n)\big), \alpha > 0$

c. $\Theta\big(g(n)\big) = O\big(g(n)\big) \cap \Omega\big(g(n)\big)$

Chứng minh $\boldsymbol{\Theta\big(g(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \cap \Omega\big(g(n)\big)}$

- Xét 1 hàm $f(n)$ bất kỳ, $f(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$
- Ta có: $\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d_1 g(n) \le f(n) \le d_2 g(n), \forall\, n \ge n_0$ **(*)**
- Từ **(*)** ta thấy:

  + Chọn $e_1 = d_1, n_0 \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa Big-**Ω**, ta có:

  $$\exists e_1 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: f(n) \ge e_1 g(n) \Longrightarrow f(n) \in \Omega\big(g(n)\big) \ \textbf{(1)}$$

  + Chọn $e_2 = d_2, n_0 \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa Big-O, ta có:

  $$\exists e_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: f(n) \le e_2 g(n) \Longrightarrow f(n) \in \mathrm{O}\big(g(n)\big) \ \textbf{(2)}$$

  Từ **(1)** và **(2)** suy ra $f(n) \in \Omega\big(g(n)\big) \cap \mathrm{O}\big(g(n)\big), \forall f(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$

  Vậy $\Theta\big(g(n)\big) \subset O\big(g(n)\big) \cap \Omega\big(g(n)\big)$ **(3)**

Chứng minh: $\boldsymbol{O\big(g(n)\big) \cap \Omega\big(g(n)\big) \subset \Theta\big(g(n)\big)}$

- Xét 1 hàm $f(n)$ bất kỳ, $g(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Từ $f(n) \in \Omega(g(n))$, ta có: $\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \geq c_1 g(n), \forall n \geq n_1$

Từ $f(n) \in O(g(n))$, ta có: $\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_2$

Suy ra theo định nghĩa Big- Θ: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$ sao cho

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall\, n \geq n_0 \text{(**)}$$

- Từ **(**)** ta suy ra: $f(n) \in \Theta(g(n)), \forall f(n) \in \Omega(g(n)) \cap O(g(n))$

  Vậy $O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \Theta(g(n))$ **(4)**

Từ **(3)** *và* **(4)** $\Longrightarrow \Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

d. $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$

Ta có: $\begin{cases} f(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \\ g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \end{cases} \Rightarrow \max\{f(n), g(n)\} \geq \frac{f(n)+g(n)}{2}$ **(1)**

Ta lại có: $\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)**, ta suy ra: $\frac{f(n)+g(n)}{2} \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$

Chọn $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$, theo định nghĩa Big-Θ ta có:

$\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$d_1(f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq d_2(f(n) + g(n)), \forall n \geq n_0$$

Kết luận: $\max\{f(n), g(n)\} \in \Theta(f(n) + g(n))$

e. $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$

Ta có: $\begin{cases} f(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \\ g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \end{cases} \Rightarrow f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}$ (1)

Ta lại có: $\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}$

Chọn $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $n_0 \in \mathbb{N}$, theo định nghĩa Big-Θ ta có:

$\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$d_1 \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq d_2 \max\{f(n), g(n)\}, \forall n \geq n_0$$

Kết luận: $f(n) + g(n) \in \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$

Bài tập 7: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

a. Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$, thì $h(n) = \Theta(f(n))$

Từ $f(n) = \Theta(g(n))$, ta có:

$$\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} \text{ sao cho: } a_1 g(n) \le f(n) \le a_2 g(n), \forall\, n \ge n_1$$

Từ $g(n) = \Theta(h(n))$, ta có:

$$\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} \text{ sao cho: } b_1 h(n) \le g(n) \le b_2 h(n), \forall\, n \ge n_2$$

Mặt khác: $\begin{cases} h(n) \le \dfrac{g(n)}{b_1} \le \dfrac{f(n)}{a_1 b_1} \\ h(n) \ge \dfrac{g(n)}{b_2} \ge \dfrac{f(n)}{a_2 b_2} \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{f(n)}{a_2 b_2} \le h(n) \le \dfrac{f(n)}{a_1 b_1}$

Chọn $c_1 = \dfrac{1}{a_2 b_2}, c_2 = \dfrac{1}{a_1 b_1}, n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, theo định nghĩa Big-Θ, ta có:

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N} \text{ sao cho } c_1 f(n) \le h(n) \le c_2 f(n), \forall\, n \ge n_3$$

Vậy $h(n) = \Theta(f(n))$, khẳng định trên đúng

b. Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$, thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Từ $f(n) = O(g(n))$, ta có: $\exists a \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le a g(n), \forall\, n \ge n_1$ **(1)**

Từ $g(n) = O(h(n))$, ta có: $\exists b \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \le b h(n), \forall\, n \ge n_2$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** suy ra: $f(n) \le a g(n) \le ab h(n) \Leftrightarrow \dfrac{f(n)}{ab} \le \dfrac{g(n)}{b} \le h(n), \forall n \ge n_1, n_2$

Chọn $c = \dfrac{1}{ab}, n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, theo định nghĩa Big-Ω, ta có:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \text{ sao cho: } h(n) \ge c f(n), \forall\, n \ge n_0$$

Vậy $h(n) = \Omega(f(n))$, khẳng định trên đúng

c. Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(f(n))$, thì $f(n) = g(n)$

Xét $f(n) = n$ và $g(n) = 3n$, ta có: $\begin{cases} f(n) \in O(3n) \\ g(n) \in O(n) \\ f(n) \ne g(n) \end{cases}$

Vậy khẳng định trên sai.

d. $\frac{n}{100} = \Omega(n)$

Ta thấy: $\frac{n}{100} \geq \frac{n}{1000}, \forall\, n \geq 1$

Chọn $c = \frac{1}{1000}$, $n_0 = 1$

Theo định nghĩa Big- Ω,ta được $\frac{n}{100} = \Omega(n)$

Vậy khẳng định trên đúng

e. $f(n) + O\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$

- Xét 1 hàm $g(n)$ bất kỳ, $g(n) \in O\big(f(n)\big)$

  Từ $g(n) \in O\big(f(n)\big)$, ta có: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \leq cf(n), \forall n \geq n_0$

$$\Leftrightarrow f(n) \leq f(n) + g(n) \leq (1+c)f(n), \forall n \geq n_0, \forall g(n) \in O\big(f(n)\big)$$

$$\Rightarrow f(n) \leq f(n) + O\big(f(n)\big) \leq (1+c)f(n), \forall n \geq n_0$$

Chọn $c_1 = 1, c_2 = 1 + c, n_1 = n_0$

Suy ra theo định nghĩa Big- Θ: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$c_1 f(n) \leq f(n) + O\big(f(n)\big) \leq c_2 f(n), \forall\, n \geq n_1 \text{(**)}$$

- Từ **(**)** ta suy ra: $f(n) + \mathrm{O}\big(f(n)\big) = \Theta\big(f(n)\big)$, khẳng định trên đúng

f. $2^{10n} = O(2^n)$

Giả sử $2^{10n} = O(2^n)$, ta có: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$2^{10n} \leq c2^n, \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow 2^{9n} \leq c, \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow (2^9)^n \leq c, \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow n \leq \log_{2^9} c\,, \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow n_0 \leq n \leq \log_{2^9} n \text{ (không đúng } \forall n \geq n_0)$$

Vậy khẳng định trên sai

g. $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$

Giả sử $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$, ta có:

$\exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$d_1 \log_2 n \le \log_{10} n \le d_2 \log_2 n\,, \forall n \ge n_0 \ (*)$$

Từ $\begin{cases} d_1 \log_2 n \le \log_{10} n \\ \log_{10} n \le d_2 \log_2 n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d_1 \log_{10} n}{\log_{10} 2} \le \log_{10} n \\ \log_{10} n \le \frac{d_2 \log_{10} n}{\log_{10} 2} \end{cases} \Leftrightarrow d_1 \le \log_{10} 2 \le d_2,\ \forall n \ge 2$

Nếu chọn $\begin{cases} d_1 = \frac{\log_{10} 2}{2} \\ d_2 = 1 + \log_{10} 2 \\ n_0 = 2 \end{cases}$, theo định nghĩa Big- Θ thì **(*)** đúng

Kết luận: $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$

Vậy khẳng định trên đúng

Bài tập 8:

a. $n + n^2 O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$

Xét 1 hàm $g(n)$ bất kỳ, $g(n) \in O(\ln n)$

Từ $g(n) \in O\big(O(\ln n)\big)$, ta có: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \le c \ln n\,, \forall n \ge n_0$

Ta có: $\forall g(n) \in O(\ln n), n + n^2 O(\ln n) = n + n^2 g(n)$

$\Rightarrow\ n + n^2 O(\ln n) = n + n^2 g(n) \le cn^2 \ln n + n^2 \ln n\,, \forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow n + n^2 O(\ln n) = n + n^2 g(n) \le (1 + c) n^2 \ln n\,, \forall n \ge n_0$

Chọn $e = 1 + c, n_1 = n_0$

Suy ra theo định nghĩa Big- Θ: $\exists e \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n + n^2 O(\ln n) \le e n^2 \ln n\,, \forall\, n \ge n_1 (*)$$

Từ **(*)** ta suy ra: $n + n^2 O(\ln n) = \mathrm{O}(n^2 \ln n)$

b. $g(n) \in O\big(h(n)\big) \Rightarrow O\big(g(n)\big) \subseteq O\big(h(n)\big)$

Chứng minh $\boldsymbol{g(n) \in O\big(h(n)\big) \Rightarrow O(g(n)) \subset O\big(h(n)\big)}$

Từ $g(n) \in O\big(h(n)\big)$, ta có: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \le ch(n), \forall n \ge n_1$ **(1)**

Xét $O\big(g(n)\big)$,ta có:

$\forall f(n) \in O\big(g(n)\big), \exists d \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le dg(n), \forall n \ge n_2$ **(2)**

Từ **(1)**, **(2)** ta suy ra: $f(n) \le cdh(n), \forall n \ge n_1, n_2$

Chọn $e = cd, n = \max\{n_1, n_2\}$, theo định nghĩa Big-O ta có:

$f(n) \in O(h(n)), \forall f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subset O(h(n))$ **(*)**

Chứng minh $\boldsymbol{g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) = O(h(n))}$

Xét $O(h(n))$,ta có:

$\forall f(n) \in O(h(n)), \exists a \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq ah(n), \forall n \geq n_3$ **(3)**

Giả sử $h(n) \in O(g(n))$, ta có: $\exists b \in \mathbb{R}^+, n_4 \in \mathbb{N}$ sao cho: $h(n) \leq bg(n), \forall n \geq n_4$**(4)**

Từ **(3)**, **(4)** ta suy ra: $f(n) \leq abg(n), \forall n \geq n_3, n_4$

Chọn $m = ab, n = \max\{n_3, n_4\}$, theo định nghĩa Big-O ta có:

$f(n) \in O(g(n)), \forall f(n) \in O(h(n)), h(n) \in O(g(n))$

$\Rightarrow O(h(n)) \subset O(g(n)), h(n) \in O(g(n))$**(**)**

Kết hợp **(*)** và **(**)**, ta được: $O(g(n)) = O(h(n))$ khi $h(n) \in O(g(n))$

Vậy $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$ dấu "=" xảy ra khi $h(n) \in O(g(n))$

c. $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

Chứng minh $\boldsymbol{g(n) \in O(f(n))}$ **và** $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))}$

Từ tính chất được chứng minh ở câu b, ta có:

Từ $g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ **(1)**

Từ $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subseteq O(g(n))$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** kết luận:

Nếu $g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))$ **(*)**

Chứng minh $\boldsymbol{O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))}$ **và** $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n))}$

Giả sử: $f(n), g(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0f}$ với $f(n), \forall n \geq n_{0g}$ với $g(n)$

Ta thấy:

$$\begin{cases} O(f(n)) = O(g(n)) \\ f(n) \leq 2f(n), \ \forall n \geq n_{0f} \\ g(n) \leq 2g(n), \forall n \geq n_{0g} \end{cases}$$

$$\begin{cases} O(f(n)) = O(g(n)) \\ \text{Chọn } c_1 = 2, n_1 = n_{0f}. \text{ Theo định nghĩa Big} - \text{O ta được } f(n) \in O(f(n)) \\ \text{Chọn } c_2 = 2, n_2 = n_{0g}. \text{ Theo định nghĩa Big} - \text{O ta được } g(n) \in O(g(n)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} O(f(n)) = O(g(n))\ và\ f(n) \in O(f(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \\ O(f(n)) = O(g(n))\ và\ g(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n)) \end{cases}$$

Vậy suy ra nếu $O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$ **(**)**

Từ **(*)** và **(**)** ta được: $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

d. $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

Chứng minh $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subset O(g(n))$

Theo giả thuyết ta có:

$$\begin{cases} f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subseteq O(g(n))\ \left(Dấu = xảy\ ra\ khi\ g(n) \in O(f(n))\right) \\ g(n) \notin O(f(n))\ \textbf{(1)} \end{cases}$$

Kết hợp giả thuyết ta có $O(f(n)) \subset O(g(n))$ (dấu "=" không xảy ra vì giả thuyết (1))

Vậy nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n)) \Rightarrow O(f(n)) \in O(g(n))$ **(*)**

Chứng minh $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

Giả sử: $f(n), g(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0f}$ với $f(n), \forall n \geq n_{0g}$ với $g(n)$

Ta thấy:

$$\begin{cases} O(f(n)) \subset O(g(n)) \\ f(n) \leq 2f(n),\ \forall n \geq n_{0f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} O(f(n)) \subset O(g(n)) \\ \text{Chọn } c_1 = 2, n_1 = n_{0f}. \text{Theo định nghĩa Big} - \text{O ta được } f(n) \in O(f(n)) \end{cases}$$

Vì $O(f(n)) \subset O(g(n))$ và $f(n) \in O(f(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ **(2)**

Mà: $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

Suy ra dấu "=" không xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} g(n) \notin O(f(n)) \\ f(n) \notin O(g(n)) \end{array}\right.$ **(3)**

Từ **(2)** và **(3)** ta có:

Nếu $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$ **(**)**

Từ **(*)** và **(**)** ta được: $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

e. $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

Từ $f(n) \in O(n)$

$\Rightarrow \exists c_f \in \mathbb{R}^+, \exists n_{0f} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(n) \leq c_f n, \forall n \geq n_{0f}$

$\Rightarrow 2^{f(n)} \leq 2^{c_f}.2^n, \forall n \geq n_{0f}$

Chọn: $c = 2^{c_f}$, $n_0 = n_{0f}$, theo định nghĩa Big-O ta được $2^{f(n)} \in O(2^n)$