TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN
PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1	Lê Ngọc Mỹ Trang	20520817
2	Lê Nhật Minh	20521601
3	Vương Vĩnh Thuận	20521997

TP.HCM, ngày 28 tháng 9 năm 2022

MỤC LỤC

Bài 1:

a. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999$

b. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

c. $\sum_{i=3}^{n+1} 1$ **d.** $\sum_{i=3}^{n+1} i$ **e.** $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

f. $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$ **g.** $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$ **h.** $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1)$

i. $\sum_{j \in \{2,3,5\}} (j^2 + j)$ *j.* $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i + j)$

Câu a. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999$

$$S = \frac{\left(\frac{999 - 1}{2} + 1\right) \times (999 + 1)}{2} = 250000$$

Câu b. $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

Cấp số nhân:

$u_1 = 2, u_n 1024 \Rightarrow n = 10$

$$S = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{2(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 2046$$

Câu c.

$$\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n + 1 - 3 + 1 = n - 1$$

Câu d.

$$\sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{(n-1) \times (n + 1 + 3)}{2} = \frac{(n-1) \times (n+4)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 4)$$

Câu e.

$$\sum_{i=0}^{n-1} i\,(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1}(i^2+i) = \frac{(n-1)\times n\times(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)\times n}{2} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$$

Câu f.

$$\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = 3\sum_{j=1}^{n} 3^{j} = 3\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1} - 1\right) = \frac{3}{2}(3^{n+1}-1) - 3 = \frac{1}{2}\ 3^{n+2} - \frac{9}{2}$$

Câu g.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(i\times\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\times\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

Câu h.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Câu i.

$$\sum_{j\in\{2,3,5\}}(j^2+j) = 2^2+2+3^2+3+5^2+5 = 48$$

Câu j.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100}(i+j) = 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$$

$$= \ 101\times\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)i\right)$$

$$= 101\times\frac{mn(n+1)}{2} + \ 101\times\frac{m(m+1)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{101}{2}(m^2+2mn+m^2n+mn^2+m)$$

Bài 2:

s = 0;	{1 g}
i = 1;	{1 g}
while ($i \le n$) do	{n + 1 ss}
j = 1;	{n g}
while ($j \le i^2$) do	{α_i + 1 ss}
s = s + 1; P_i	{α_i g}
j = j + 1;	{α_i g}
end do;	
i = i + 1;	{n g}
end do;	

- Gọi α_i là số lần lặp của while P_i (Xét độc lập với while ngoài)

  α_i = số con j với j chạy từ 1 → i^2, bước tăng là 1

  $\Rightarrow \alpha_i = i^2$

- Kết luận:

$$Gán(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{7}{2}n + 2$$

$$SoSánh(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 1 + n + n + \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$$

Bài 3:

sum = 0	{1 g}
i = 1	{1 g}
while i <= n do	{n+1 ss}
j = n – i * i	{n g}
while j <= i * i do	
sum = sum + i * j	
j = j + 1	
endw	
i = i + 1	{n g}
endw	

- Gọi α_i là số lần lặp while trong (xét độc lập với while ngoài)

while j <= i * i do	$\{\alpha_i$ + 1 ss$\}$
sum = sum + i * j	$\{\alpha_i$ g$\}$
j = j + 1	$\{\alpha_i$ g$\}$
endw	

Ta có:

$$gán(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$sosánh(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

- While trong chỉ thực hiên được khi

$$j \le i^2 \iff (n - i^2) \le i^2 \iff i^2 \ge \frac{n}{2} \iff \left(i \ge \sqrt{\frac{n}{2}}\right) \cup \left(i \le -\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$$

Mà $i \ge 1 \Rightarrow i \ge \sqrt{\frac{n}{2}}$ thỏa điều kiện

Ta có:

$$\alpha_i = số\ con\ j\ với\ j\ chạy\ từ\ (n - i^2)\ tới\ i^2, bước\ tăng\ 1$$
$$= i^2 - (n - i^2) + 1 = 2i^2 - n + 1$$

Kết hợp với điều kiện, ta có:

$$\alpha_i = f(x) = \begin{cases} 0, & i < \sqrt{\frac{n}{2}} \\ 2i^2 - n + 1, & i \ge \sqrt{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

- Kết luận:

$$\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + 2\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + n - \sqrt{\frac{n}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{n}{2}\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right) + \frac{1}{6}\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}}\right)\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)\left(2n - 2\sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right) + \sqrt{\frac{n}{2}}\left(x - \sqrt{\frac{n}{2}}\right)$$

$$= \left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)\left[\frac{n}{2} + \left(n - \sqrt{\frac{n}{2}}\right)\left(\frac{n}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$$

$$= \left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)\left[\frac{n}{3} + \frac{n^3}{3} + \frac{n}{3}\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{5n}{12} - \frac{n\sqrt{2n}}{12} - \frac{\sqrt{2n}}{12}$$

$$gán(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$= 2 + 2n + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (2i^2 - n + 1)$$

$$= 2 + 2n + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} 1 - 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} n + 4\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2$$

$$= 2 + 2n + 2\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right) - 2n\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right) + 4\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{5n}{12} - \frac{n\sqrt{2n}}{12} - \frac{\sqrt{2n}}{12}\right)$$

$$= 2 + 2n + 2n - \sqrt{2n} + 2 - 2n^2 + n\sqrt{2n} - 2n + 2n^2 + \frac{2n^3}{3} + \frac{5n}{3} - \frac{n\sqrt{2n}}{3} - \frac{\sqrt{2n}}{3}$$

$$= 4 + \frac{4n^3 + 11n - 4\sqrt{2n} + 2n\sqrt{2n}}{3}$$

$$sosánh(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$$= 1 + 2n + \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} \alpha_i$$

$$= 1 + 2n + \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (2i^2 - n + 1)$$

$$= 1 + 2n + \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (1 - n) + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2$$

$$= 2n + 1 + (1 - n)\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}}\right) + 2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{5n}{12} - \frac{n\sqrt{2n}}{12} - \frac{\sqrt{2n}}{12}\right)$$

$$= 2n + 1 + n - n^2 - \sqrt{\frac{n}{2}} + n\sqrt{\frac{n}{2}} + 1 - n + n^2 + \frac{2n^3}{3} + \frac{5n}{6} - \frac{n\sqrt{2n}}{6} - \frac{\sqrt{2n}}{6}$$

$$= 2 + \frac{2n^3}{3} + \frac{17n}{6} - \frac{2\sqrt{2n}}{3} + \frac{n\sqrt{2n}}{3}$$

Bài 4:

float Alpha(float x, long n)	
{	
long i = 1; float z = 0;	{2 g}
while (i ≤ n)	{n + 1 ss}
{	
long j = 1; float t = 1;	{2n g}
while (j ≤ 1)	{$\alpha_i + 1$ ss}
{	
P_i t = t * x;	{α_i g}
j = 2 * j;	{α_i g}
}	
z = z + i * t;	{n g}
i = i + 1;	{n g}
}	
return z;	
}	

- Gọi α_i là số lần lặp của while P_i (Xét độc lập với while ngoài)

α_i = số con j với j chạy từ 1 → i, bước tăng là j*2

Những giá trị có thể có của j bao gồm: $\{2^0;\ 2^1; 2^2; \ldots;\ 2^k \le i\}$

α_i = số con k với $k \in \mathrm{N}, 2^k \le i$

Suy ra:

$$2^k \le i$$

$$\Leftrightarrow 0 \le k \le \log_2 i$$

$$\Rightarrow k = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$$

- Kết luận:

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \log_2 i \rfloor = \lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \cdots + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lfloor \log_2 (1x2x \ldots xn) \rfloor = \lfloor \log_2 n! \rfloor$$

$$Gán(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1)$$

$$= 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor + 2\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}\lfloor \log_2 i \rfloor + 2n$$

$$= \ 2 + 6n + 2\lfloor \log_2 n! \rfloor$$

$$SoSánh(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1) + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \ 1 + 3n + \lfloor \log_2 n! \rfloor$$

Bài 5:

sum = 0;	{1 g}
i = 1;	{1 g}
while (i <= n)	{n+1 ss}
{	
j = n – i ;	{n g}
while (j <= 2 * i)	
{	
sum = sum + i * j;	
j = j + 2;	
}	
k=i;	{n g}
while (k>0)	
{	
sum = sum + 1;	
k = k / 2;	
}	
i = i + 1;	{n g}
}	

- Gọi α_i là số lần lặp while trong của j (xét độc lập với while ngoài)

while (j <= 2 * i)	{α_i + 1 ss}
{	
sum = sum + i * j;	{α_i g}
j = j + 2;	{α_i g}
}	

Ta có:

$$gán_{\alpha_i}(n) = 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$sosánh_{\alpha_i}(n) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

While trong này chỉ thực hiện được khi: $j \leq 2i \Leftrightarrow (n-i) \leq 2i \Leftrightarrow i \geq \frac{n}{3}$

Ta có:

$$\alpha_i = số\ con\ j\ với\ j\ chạy\ từ\ (n-i)\ tới\ 2i, bước\ tăng\ 2$$

$$= \frac{1}{2}(2i - n + i) + 1 = \frac{1}{2}(3i - n) + 1$$

Kết hợp với điều kiện, ta có:

$$\alpha_i = f(x) = \begin{cases} 0, & i < \frac{n}{3} \\ \frac{3i-n}{2} + 1, & i \geq \frac{n}{3} \end{cases}$$

- Gọi β_i là số lần lặp while trong của k (xét độc lập với while ngoài)

while (k>0)
{
    sum = sum + 1;
    k = k / 2;
}
	$\{\beta_i$ + 1 ss$\}$
	
	$\{\beta_i$ g$\}$
	$\{\beta_i$ g$\}$

Ta có:

$$gán_{\beta_i}(n) = 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

$$sosánh_{\beta_i}(n) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + 1)$$

While trong này chỉ thực hiên được khi: $k > 0 \Leftrightarrow i \geq 1$

Ta có:

$$\beta_i = số\ con\ k\ với\ k\ chạy\ từ\ i\ tới > 0, giảm\ \frac{1}{2}\ sau\ mỗi\ lần\ lặp$$

Những giá trị có thể có của k bao gồm: $\{i, \frac{i}{2^1}, \frac{i}{2^2}, \dots, \frac{i}{2^m} > 0\}$

$$\beta_i = số\ con\ m\ với\ \{k \in \mathbb{N}, \frac{i}{2^m} \geq 1\}$$

$$Xét\ \frac{i}{2^m} \geq 1 \ \Leftrightarrow i \geq 2^m \Leftrightarrow 0 \ \leq m \leq \log_2 i$$

$$\beta_i = \log_2 i + 1$$

Kết hợp với điều kiện, ta có:

$$\beta_i = f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad i < 1 \\ \log_2 i + 1 & , \quad i \geq 1 \end{cases}$$

- Kết luận:

$$gán(n) = 2 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

$$= 2 + 3n + 2\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} \left(\frac{3i-n}{2} + 1 \ \right) + 2\sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 1)$$

$$= 2 + 3n + 2\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} 1 + 2\sum_{i=1}^{n} 1 + 2\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} \left(\frac{3i-n}{2} \ \right) + 2\sum_{i=1}^{n} (\log_2 i)$$

$$= 2 + 3n + 2\left(n - \frac{n}{3} + 1\right) + 2n + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} (3i - n) + 2\log_2 n!$$

$$= 2 + 5n + \frac{4n}{3} + 2 + 2\log_2 n! + 3\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} i - \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} n$$

$$= 4 + \frac{19n}{3} + 2\log_2 n! + \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{n\left(\frac{n}{3} - 1\right)}{2} - n\left(n - \frac{n}{3} + 1\right)$$

$$= 4 + \frac{19n}{3} + 2\log_2 n! + \frac{4n^2}{3} + 2n - \frac{2n^2}{3} - n$$

$$= 4 + \frac{22n}{3} + 2\log_2 n! + \frac{2n^2}{3}$$

$$sosánh(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + 1)$$

$$= 1 + n + 2\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

$$= 1 + n + 2n + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}\left(\frac{3i-n}{2} + 1\right) + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$$

$$= 1 + 3n + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n}(3i - n) + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i)$$

$$= 1 + 3n + \left(n - \frac{n}{3} + 1\right) + n + \log_2 n! + \frac{3}{2}\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} n$$

$$= 1 + 3n + \left(n - \frac{n}{3} + 1\right) + n + \log_2 n! + \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3} - 1\right)}{2}\right) - \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{3} + 1\right)$$

$$= 2 + \frac{14n}{3} + \log_2 n! - \frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{2n^2}{3} + n$$

$$= 2 + \frac{n^2}{3} + \frac{31n}{6} + \log_2 n!$$

Bài 6:

i = 1; count = 0;
while (i <=4n)
{
    x = (n-i)(i-3n);
    y = i – 2n;
    j = 1;
    while(j<=x)
    {   count = count – 2;
        j = j+2;
    }
    if(x>0)
        if(y>0)
            count = count + 1;
    i = i + 1;
}
	{2 g}
	{4n+1 ss}
	
	{4n g}
	{4n g}
	{4n g}
	
	{4n ss}
	
	{4n g}

- Gọi số lần lặp của vòng while trong là a_i, a_i là con j chạy từ 1 đến x với số bước tăng là 2

  Ta có:

$$a_i = \frac{1}{2}[(n-i)(i-3n)-1]+1 = \frac{1}{2}\left(-i^2+4in-3n^2-1\right)+1$$

While trong chỉ thực hiện khi:

$$1 \le (n-i)(i-3n)$$

$$\text{hay} \quad 0 < (n-i)(i-3n)$$

$$\Rightarrow n < i < 3n$$

Ta có: $a_i = \begin{cases} 0, khi\ i \le n\ hoặc\ i \ge 3n \\ \frac{1}{2}\left(-i^2+4in-3n^2-1\right)+1, khi\ n < i < 3n \end{cases}$

- Bảng xét dấu

i	1	n	2n	3n $+\infty$
X= $(n-i)(i-3n)$	-	0 +	+	0 -
Y = i – 2n	-	-	0 +	+

- Câu lệnh if(y>0) chỉ thực hiện khi x>0

$$= (3n-1)-(n+1)+1 = 2n-1\ ss$$

Xét lệnh count = count + 1 chỉ thực hiện khi $x, y > 0$

$$= 3n-1-(2n+1)+1 = n-1\ g$$

- Kết luận:

$$Gán(n) = 2+16n+\sum_{i=0}^{4n} a_i + n - 1$$

$$= 17n+1+2\sum_{i=n+1}^{3n-1}[\frac{1}{2}\left(-i^2+4in-3n^2-1\right)+1]$$

$$= 17n+1+\sum_{i=n+1}^{3n-1}\left(-i^2+4in-3n^2+1\right)$$

$$= 17n+1-\sum_{i=n+1}^{3n-1} i^2 + 4n\sum_{i=n+1}^{3n-1} i + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(-3n^2+1)$$

$$= 17n+1-\left(\sum_{i=1}^{3n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right) + \frac{4n(3n-1+n+1)(2n-1)}{2} + (2n-1)(-3n^2+1)$$

$$= 17n + 1 - \left(\frac{(3n-1)(3n)(6n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 16n^3 - 8n^2 - 6n^3 + 3n^2 + 2n - 1$$

$$= 10n^3 - 5n^2 + 19n - \left(\frac{26}{3}n^3 - 5n^2 + \frac{1}{3}n\right)$$

$$= \frac{4}{3}n^3 + \frac{56}{3}n$$

$$SS(n) = 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n}(a_i + 1) + 4n + 2n - 1$$

$$= 10n + \sum_{i=1}^{4n} 1 + \sum_{i=n+1}^{3n-1}\left[\frac{1}{2}\left(-i^2 + 4in - 3n^2 - 1\right) + 1\right]$$

$$= 10n + 4n + \frac{1}{2}[-\left(\frac{26}{3}n^3 - 5n^2 + \frac{1}{3}n\right) + 16n^3 - 8n^2 - 6n^3 + 3n^2 + 2n - 1]$$

$$= 14n + \frac{1}{2}(\frac{4}{3}n^3 + \frac{5}{3}n - 1)$$

$$= \frac{2}{3}n^3 + \frac{89}{6}n - \frac{1}{2}$$

Bài 7:

i = 1;	{1 g}
count = 0;	{1 g}
while (i <= 4n)	{4n+1 ss}
{	
x = (n - i)(i - 3n);	{4n g}
y = i - 2n;	{4n g}
j = 1 ;	{4n g}
while (j <= x)	
{	
if (i >= 2y)	
count = count – 2;	
j = j + 1;	
}	
i = i + 1;	{4n g}
}	

- Bảng xét dấu:

i	1		n		2n		3n		4n
x= (n - i)(i - 3n)		-	0	+		+	0	-	
y = i - 2n		-		-	0	+		+	

- Gọi α_i là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

while (j <= x)
{
if (i >= 2y)
count = count – 2;
j = j + 1;
}
	$\{\alpha_i + 1 \text{ ss}\}$
	
	$\{\alpha_i \text{ ss}\}$
	
	$\{\alpha_i \text{ g}\}$

While trong chỉ thực hiên được khi: $x > j \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow x > 0$

Từ bảng xét dấu ta có: $n + 1 \leq i \leq 3n - 1$

Ta có:

$$\alpha_i = số\ con\ j\ với\ j\ chạy\ từ\ 1\ tới\ x, bước\ tăng\ 1$$

$$= x - 1 + 1 = x = (n - i)(i - 3n) = 4ni - i^2 - 3n^2$$

Kết hợp với điều kiện, ta có:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i \leq n\ \cup i \geq 3n \\ 4ni - i^2 - 3n^2, & n + 1 \leq i \leq 3n - 1 \end{cases}$$

- Gọi β_i là số phép gán của lệnh $count = count - 2$ khi xét cùng với while trong (độc lập với while ngoài), β_i chỉ thực hiện khi vòng while j được thực hiện và if trước đó trả về giá trị True

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ i \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow n + 1 \leq i \leq 2n - 1$$

Kết hợp điều kiện, ta có:

$$\beta_i = (2n - 1) - (n + 1) + 1 = 2n - 1 - n - 1 + 1 = n - 1$$

- Kết luận:

$$(*) = \sum_{i=n+1}^{2n-1} (4ni - i^2 - 3n^2)$$

$$= 4n \sum_{i=n+1}^{2n-1} (i) - \sum_{i=n+1}^{2n-1} (i^2) - 3n^2 \sum_{i=n+1}^{2n-1} 1$$

$$= 4n[(n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + n - 1)]$$
$$- [(n + 1)^2 + (n + 2)^3 + \cdots + (n + n - 1)^2]$$
$$- 3n^2(2n - 1 - n - 1 + 1)$$

$$= 4n[n(n-1) + (1 + 2 + \cdots + n - 1)]$$
$$- \{n^2(n-1) + 2n[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$
$$+ [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\} - 3n^2(n-1)$$

$$= 4n\left[n(n-1) + \frac{(n-1)n}{2}\right] - \left\{n^2(n-1) + 2n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6}\right\}$$
$$- 3n^2(n-1)$$

$$= 4n\frac{3n(n-1)}{2} - \left\{2n^2(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\} - 3n^2(n-1)$$

$$= 3n^2(n-1) - \left\{2n^3 - 2n^2 + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right\}$$

$$= 3n^3 - 3n^2 - \frac{7n^3}{3} + \frac{5n^2}{2} - \frac{n}{6}$$

$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$$

$$(**) = \sum_{i=n+1}^{3n-1}\left(4ni - i^2 - 3n^2\right)$$

$$= \sum_{i=n+1}^{2n-1}\left(4ni - i^2 - 3n^2\right) + \sum_{i=2n}^{3n-1}\left(4ni - i^2 - 3n^2\right)$$

$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 4n\sum_{i=2n}^{3n-1}(i) - \sum_{i=2n}^{3n-1}\left(i^2\right) - 3n^2\sum_{i=2n}^{3n-1}1$$

$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 4n[2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + (2n+n-1)]$$
$$- [(2n)^2 + (2n+1)^2 + (2n+2)^2 + \cdots + (2n+n-1)^2]$$
$$- 3n^2(3n - 1 - 2n + 1)$$

$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 4n[2n(n-1+1) + 1 + 2 + \cdots + (n-1)]$$
$$- \left[(2n)^2(n-1+1) + 4n(1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6}\right] - 3n^3$$

$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 4n\left[2n^2 + \frac{(n-1)n}{2}\right] - \left[4n^3 + \frac{4n(n-1)n}{2} + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right]$$
$$- 3n^3$$

$$= \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 10n^3 - 2n^2 - \left[\frac{19n^3}{3} - \frac{5n^2}{2} + \frac{n}{6}\right] - 3n^3$$

$$= \frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

$$gán(n) = 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{4n} \beta_i$$

$$= 2 + 16n + \sum_{i=n+1}^{2n-1} (4ni - i^2 - 3n^2) + \sum_{i=1}^{4n} (n-1)$$

$$= 2 + 16n + \sum_{i=n+1}^{2n-1} (4ni - i^2 - 3n^2)^{(*)} + \sum_{i=1}^{4n} (n-1)$$

$$= 2 + 16n + \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + (n-1)(4n-1+1)$$

$$= 2 + 16n + \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} + 4n^2 - 4n$$

$$= 2 + \frac{71n}{6} + \frac{7n^2}{2} + \frac{2n^3}{3}$$

$$sosánh(n) = 1 + 4n + \sum_{i=1}^{4n} (2\alpha_i + 1)$$

$$= 1 + 4n + \sum_{i=1}^{4n} 1 + 2\sum_{i=1}^{4n} \alpha_i$$

$$= 1 + 4n + 4n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} (4ni - i^2 - 3n^2)^{(**)}$$

$$= 1 + 8n + 2\left(\frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3}\right)$$

$$= 1 + \frac{22n}{3} + \frac{8n^3}{3}$$

Bài 8:

```
i=1; count = 0;                                  {2g}
while (i<=3n)                                    {3n+1 ss}
{
```

```
    x = 2n-i;
    y = i-n;                                    {9n g}
    j = 1;
    while (j <= x)                              {a_i + 1ss}
    {
        If(j >= n)                              {a_i ss}
            count = count – 1;                  {b_i g}
        j = j + 1;                              {a_i g}
    }
    If (y > 0)                                  {3nss}
        if (x > 0)                       P_i    {c_i ss}
            count = count + 1;                  {d_i g}
    i = i + 1;                                  {3n g}
}
```

- Xét vòng lặp while trong có số lần lặp là a_i xét độc lập với vòng while ngoài, là số con j chạy từ 1 đến x với số bước nhảy là 1

$$a_i = 2n - i - 1 + 1 = 2n - i$$

Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi

$$1 \leq 2n - i$$

$$\Leftrightarrow \quad i \leq 2n - 1$$

- Câu lệnh count = count - 1 được thực hiện khi vòng while trong được thực hiện và thỏa điều kiện if

$$\Rightarrow \begin{cases} i \leq 2n - 1 \\ n \leq j \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \leq 2n - 1 \\ n \leq j \leq 2n - i \end{cases} \Rightarrow i \leq n$$

Số lần thực hiện lệnh count = count - 1 b_i là

$$b_i = 2n - i - n + 1 = n - i + 1$$

- Xét Pi, lập bảng xét dấu

i	1	n	2n
x	+	+	0 -
y	-	0 +	+

Câu lệnh if(x>0) được thực hiện khi y>0

$\Rightarrow i > n$, ta lại có i<=3n, số lần thực hiện if(x>0):

$$c_i\text{=3n-(n+1)+1=2n ss}$$

Câu lệnh count = count+1 được thực hiện khi x,y>0

$$\Rightarrow n < i < 2n$$

Số lần thực hiện count = count + 1 $d_i$là

$$d_i = 2n - 1 - (n + 1) + 1 = n - 1 \text{ g}$$

- Kết luận:

$$Gán(n) = 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n} (a_i + b_i) + d_i$$

$$= 12n + 2 + \left[\sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)\right] + n - 1$$

$$= 13n + 1 + \left[2n(2n - 1) - \frac{2n(2n - 1)}{2} + n^2 + n - \frac{n(n + 1)}{2}\right]$$

$$= 13n + 1 + \left(2n^2 - n + n^2 + n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right)$$

$$= 13n + 1 + \left(\frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right)$$

$$= \frac{5}{2}n^2 + \frac{25}{2}n + 1$$

$$SS(n) = 3n + 1 + \sum_{i=1}^{3n} (2a_i + 1) + 3n + 2n$$

$$= 8n + 1 + \sum_{i=1}^{3n} 1 + 2\sum_{i=1}^{2n-1} 2n - i$$

$$= 8n + 1 + 3n + 2\left[2n(2n - 1) - \frac{1}{2}(2n)(2n - 1)\right]$$

$$= 11n + 1 + 4n^2 - 2n$$

$$= 4n^2 + 9n + 1$$

Bài 9:

i = 1;	{1 g}
res = 0;	{1 g}
while i ≤ n do	{n + 1 ss}
j = 1;	{n g}
k = 1;	{n g}
while j ≤ i do	$\{\alpha_i + 1$ ss$\}$
res = res + i * j; P_i	$\{\alpha_i$ g$\}$
k = k + 2;	$\{\alpha_i$ g$\}$
j = j + k;	$\{\alpha_i$ g$\}$
endw	
i = i + 1;	{n g}
endw	

- Gọi α_i là số lần lặp của while P_i (Xét độc lập với while ngoài)

  α_i = số con j với j chạy từ 1 → i, bước tăng là k, mà k có bước tăng là 2

  Những giá trị có thể có có của j bao gồm:

  $$\{1;\ 1 + 3;\ 1 + 3 + 5;\ \dots;\ 1 + 3 + \dots + (2x - 1) \le i\}$$

  $1 + 3 + \dots + (2x - 1)$ (là 1 cấp số cộng, có x số hạng, công sai d = 2)

  $\Longrightarrow u_x = u_1 + (x-1)d = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$

  Ta có: $1 + 3 + \dots + (2x - 1) \le i\}$

  $$\Longrightarrow \frac{[1 + (2x-1)]x}{2} \le i$$

  $$\Longrightarrow x^2 \le i$$

  $$\Longrightarrow x \le \lfloor \sqrt{i} \rfloor$$

  Suy ra:

  $$\alpha_i = x + 1 = \lfloor \sqrt{i} \rfloor + 1$$

- Kết luận:

$$Gán(n) = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} (\lfloor \sqrt{i} \rfloor + 1)$$

$$= 2 + 3n + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} \lfloor \sqrt{i} \rfloor = 2 + 6n + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \sqrt{i} \rfloor$$

$$= 2 + 6n + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} n^{\frac{1}{2}+1} = 2 + 6n + \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$SoSánh(n) = 1 + n + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) = 1 + n + n + \sum_{i=1}^{n} (\lfloor\sqrt{i}\rfloor + 1)$$

$$= 1 + 3n + \sum_{i=1}^{n} (\lfloor\sqrt{i}\rfloor) = 1 + 3n + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} n^{\frac{1}{2}+1} = 1 + 3n + \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Bài 10:

sum = 0; i = 1; idx = -1;	{3 g}
while (i <= n)	{n+1 ss}
{	
j = 1;	{n g}
while (j <= n)	
{	
if (i==j) &&(i+j == n+1)	
idx=i;	
sum=sum+a[i][j];	
j++;	
}	
i++;	{n g}
}	
if (idx != -1)	{1 ss}
sum=sum-a[idx][idx];	

- Gọi α_i là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

while (j <= n)	{α_i + 1 ss}
{	
if (i==j) &&(i+j == n+1)	{2α_i ss}
idx=i;	
sum=sum+a[i][j];	{α_i g}
j++;	{α_i g}
}	

While trong chỉ thực hiên được khi: $1 \leq j \leq n$

Ta có:

$$\alpha_i = số\ con\ j\ với\ j\ chạy\ từ\ 1\ tới\ n, bước\ tăng\ 1$$

$$= n - 1 + 1 = n$$

Kết hợp với điều kiện, ta có:

$$\alpha_i = n$$

- Gọi β_i là số phép gán của lệnh $idx = i$ khi xét cùng với while trong (độc lập với while ngoài), β_i chỉ thực hiện khi vòng while j được thực hiện và if trước đó trả về giá trị True

$$\Rightarrow \begin{cases} j \le n \\ i == j \\ i + j == n + 1 \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} j = i \Leftrightarrow (i + j) ⋮ 2 \Leftrightarrow (n + 1) ⋮ 2 \Leftrightarrow n \not⋮ 2 \Leftrightarrow n \text{ là số lẻ} \\ i = j = \frac{n+1}{2} (do\ n \text{ đã xác định nên chỉ tồn tại duy nhất } 1 \text{ cặp số } i, j \text{ thỏa điều kiện}) \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta có:

$$\beta_i = \begin{cases} 1, khi\ n\ không\ chia\ hết\ cho\ 2 \\ 0, \quad khi\ n\ chia\ hết\ cho\ 2 \end{cases}$$

- Gọi γ_i là số phép gán của lệnh $sum = sum - a[idx][idx]$, γ_i chỉ thực hiện khi if (idx != -1) trước đó trả về giá trị True

$$\Leftrightarrow if\big((i == j) \&\& (i + j == n + 1)\big) == True$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ là số lẻ} \\ i = j = \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, ta có:

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, khi\ n\ không\ chia\ hết\ cho\ 2 \\ 0, \quad khi\ n\ chia\ hết\ cho\ 2 \end{cases}$$

- Kết luận:

$$gán(n) = 3 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$$

$$= \begin{cases} 5 + 2n + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n\, , khi\ n\ không\ chia\ hết\ cho\ 2 \\ 3 + 2n + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n\, , khi\ n\ chia\ hết\ cho\ 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5 + 2n + 2n^2, khi\ n\ không\ chia\ hết\ cho\ 2 \\ 3 + 2n + 2n^2, khi\ n\ chia\ hết\ cho\ 2 \end{cases}$$

$$sos\acute{a}nh(n) = 2 + n + \sum_{i=1}^{n}(3\alpha_i + 1)$$

$$= 2 + n + \sum_{i=1}^{n} 1 + 3\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$= 2 + n + n + 3\sum_{i=1}^{n} n$$

$$= 2 + n + n + 3n^2$$

$$= 2 + 2n + 3n^2$$