TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02: PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN ĐỆ QUY

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1	Lê Ngọc Mỹ Trang	20520817
2	Lê Nhật Minh	20521601
3	Vương Vĩnh Thuận	20521997

TP.HCM, ngày 28 tháng 9 năm 2022

MỤC LỤC

Bài 1: Thành lập phương trình đệ quy

a.

Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

Gọi T(n) là số tiền có được sau n năm (đơn vị: USD)

Ta có:

$$T(n) = \begin{cases} 1000 & \text{nếu } n = 0 \\ 1{,}12T(n-1) & \text{nếu } n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 1{,}12T(n-1) \\ &= 1{,}12[1{,}12T(n-2)] \\ &= 1{,}12^2T(n-2) \\ &\ \ \ldots\ldots \\ T(n) &= 1{,}12^iT(n-i) \end{aligned}$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $n - i = 0 \iff i = n$

Khi đó: $T(n) = 1{,}12^n.T(0) = 1{,}12^n.1000$

Số tiền có được sau 30 năm:

$$T(30) = (1{,}12)^{30}.1000 = 29959{,}92212\ (USD)$$

b.

```
long Fibo(int n)
{
	if (n == 0||n == 1) return 1;
	return Fibo(n − 1) + Fibo(n − 2);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1 \quad , & khi\ n \le 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + C_2, & khi\ n > 1 \end{cases}$$

c.

```
public int g(int n) {
	if (n == 1) return 2;
	else
		Return 3 * g(n/2) + g(n/2) + 5;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1 \quad, & khi\ n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + C_2, & khi\ n > 1 \end{cases}$$

d.

```
long xn(int n)
{
        if (n==0) return 1;
        long s=0;
        for(int i=1; i<=n;i++)
                s=s+i*i*xn(n-i);
        return s;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1 \quad, & khi\ n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} T(n-i) + C_2 n, & khi\ n \geq 1 \end{cases}$$

Ta thấy tổng các chi phí khác không tính lời gọi đệ quy là phương trình bậc 1 theo n

=> viết gọn thành $C_2 n$

e.

```
waste(n)
{
        if (n == 0) return 0;
        for (i = 1 to n)
                for (j = 1 to i)
                        print i,j,n;
        for (i = 1 to 3)
                waste(n/2);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1 \quad, & khi\ n = 0 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + C_2 n^2, & khi\ n \geq 1 \end{cases}$$

Ta thấy tổng các chi phí khác không tính lời gọi đệ quy là phương trình bậc 2 theo n

=> viết gọn thành $C_2 n^2$

f.

```
Draw(n)
{
	if (n < 1)
		return 0;
	for (i = 1; i <= n; i++)
		for (j = 1; j <= n; j++)
			print("*");
	Draw(n - 3);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1 \quad , & khi\ n < 1 \\ T(n-3) + C_2 n^2, & khi\ n \geq 1 \end{cases}$$

Ta thấy tổng các chi phí khác không tính lời gọi đệ quy là phương trình bậc 2 theo n

=> viết gọn thành $C_2 n^2$

g.

Gọi T(n) là số phép cộng cần thực hiện khi gọi Zeta(k). Hãy thiết lập công thức truy hồi cho T(n)

Cho hàm:

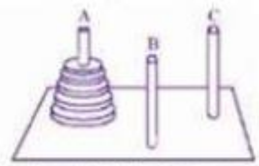
```
Zeta(n)
{
	if (n == 0)
		Zeta = 6;
	else
	{
		k = 0;
		Ret = 0;
		while (k <= n-1)
		{
			Ret = Ret + Zeta(k);
			k = k + 1;
		}
		Zeta = Ret;
	}
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 0 & , \quad khi\ n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1}(T(k)+2), & khi\ n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad khi\ n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} T(k) + 2n, & khi\ n > 0 \end{cases}$$

h.

Cho bài toán Tháp Hà Nội như sau:

Mô tả bài toán: Có 3 cột được đặt tên là A,B,C. Cột A hiện đang gắn n đĩa có kích thước khác nhau, đĩa nhỏ ở trên đĩa lớn hơn ở dưới. Hãy chuyển chồng đĩa từ cột A sang cột C (xem cột B là cột trung gian) với điều kiện mỗi lần chỉ dời 1 đĩa, đĩa đặt trên bao giờ cũng nhỏ hơn đĩa đặt dưới.



- **Goal:** transfer all N disks from peg A to peg C
- **Rules:**
  – move one disk at a time
  – never place larger disk above smaller one
- **Recursive solution:**
  – transfer *N* -1 disks from A to B
  – move largest disk from A to C
  – transfer *N* -1 disks from B to C

Giả sử ta chỉ quan tâm đến thao tác chuyển đĩa (transfer) vì đây là tác vụ căn bản của thuật toán. Khi đó, thời gian thực hiện của thuật toán **T(n) được xác định bởi số lần chuyển n đĩa** từ cột này sang cột kia và hiển nhiên T(0) = 0.

Yêu cầu:

- Viết mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội

- Thành lập phương trình đệ quy về số lần tác vụ căn bản được thực thi trong thuật toán.

Yêu cầu: đến chính xác số thao tác chuyển đĩa (ko dùng tham số C1, C2)

void Trans(int m, char A, char C, char B)
{
    If $(n == 0)$ return;
    Else:
    {
        Trans(n-1,A,B,C);
        Print("trans",n,"from",A,"to".C);
        Trans(n-1,B,C,A);
    }
}
	# n là số đĩa, A là cột nguồn, C là cột đích và B là cột trung gian

$$T(n) = \begin{cases} 0 & , \quad khi\ n = 0 \\ 2T(n-1)+1, & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Bài 2: Giải các phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi

1. $\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + 5} \qquad \boldsymbol{T(1) = 0}$

$T(n) = T(n-1) + 5$

$= [T(n-2) + 5] + 5$

$= T(n-2) + 2 * 5$

$= T(n-3) + 3 * 5$

...

$= T(n-i) + i * 5$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $n - i = 1 \ \Leftrightarrow i = n - 1$

Khi đó:

$$T(n) = T(1) + 5(n-1) = 0 + 5(n-1) = 5(n-1)$$

2. $\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n} \qquad \boldsymbol{T(1) = 1}$

$T(n) = T(n-1) + n$

$= [T(n-2) + n - 1] + n$

$= [T(n-3) + n - 2] + n - 1 + n$

$= T(n-3) + 3n - (0 + 1 + 2)$

$= \cdots$

$$= T(n-i) + in - \sum_{k=0}^{i-1} k$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1 \Leftrightarrow i = n - 1$

Khi đó

$$T(n) = T(1) + (n-1)n - \sum_{k=0}^{n-2} k$$

$$= 1 + n^2 - n - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= 1 + n^2 - n - \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$$

3. $\boldsymbol{T(n) = 3T(n-1) + 1 \quad T(1) = 4}$

$$T(n) = 3T(n-1) + 1$$

$$= 3[3T(n-2) + 1] + 1$$

$$= 3^2T(n-2) + 3 + 1$$

$$= 3^2[3T(n-3) + 1] + 3 + 1$$

$$= 3^3T(n-3) + 3^2 + 3 + 1$$

…

$$= 3^iT(n-i) + 3^{i-1} + \cdots + 3^2 + 3 + 3^0$$

$$= 3^iT(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k$$

$$= 3^iT(n-i) + \frac{3^i - 1}{2}$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $n - i = 1 \iff i = n - 1$

Khi đó: $T(n) = 3^{n-1}T(1) + \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) = 4.3^{n-1} + \frac{3^{n-1}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$

4. $\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad T(1) = 1}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right] + 1$$

$$= 2^2T\left(\frac{n}{4}\right) + 2 + 1$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{8}\right)\right] + 2 + 1$$

$$= 2^3T\left(\frac{n}{8}\right) + 2^2 + 2 + 1$$

$$\ldots\ldots$$

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + 2^{i-1} + 2^2 + 2 + 1$$

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$$

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + 2^i - 1$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \iff i = \log_2 n$

Khi đó: $T(n) = nT(1) + n - 1 = 2n - 1$

5. $\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \qquad T(1) = 1}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n$$

$$= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4}\right] + 2n$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n$$

$$= \cdots$$

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1 \iff i = \log_2 n$

Khi đó: $T(n) = nT(1) + n\log_2 n = n + n\log_2 n$

6. $\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad T(1) = 1}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2$$

$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + n^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + n^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2$$

$$= 8\left[2T\left(\frac{n}{16}\right) + \left(\frac{n}{8}\right)^2\right] + n^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2$$

$$= 16T\left(\frac{n}{16}\right) + n^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 8\left(\frac{n}{8}\right)^2$$

$$= 16T\left(\frac{n}{16}\right) + n^2\left(1 + 2 * \frac{1}{2^2} + 4 * \frac{1}{4^2} + 8 * \frac{1}{8^2}\right)$$

$$= 16T\left(\frac{n}{16}\right) + n^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

...

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}}\right)$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{2^k}$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{n^2\left(\frac{1}{2^{i-1+1}} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) - 2n^2\left(\frac{1}{2^i} - 1\right)$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow n = 2^i \Leftrightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) - 2n^2\left(\frac{1}{2^i} - 1\right)$$

$$= n - 2n^2\left(\frac{1}{2^{\log_2 n}} - 1\right)$$

$$= n - 2n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

$$= n - 2n + 2n^2$$

$$= 2n^2 - n$$

7. $\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + logn \quad T(1) = 1}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + logn$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \log\left(\frac{n}{2}\right)\right] + logn$$

$$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + logn + 2\log\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= 4\left[2T\left(\frac{n}{8}\right) + \log\left(\frac{n}{4}\right)\right] + logn + 2\log\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + logn + 2\log\left(\frac{n}{2}\right) + 4\log\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + logn + 2logn - 2\log\left(\frac{1}{2}\right) + 4logn - 4\log\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + logn + 2logn + 4logn - 2\log 2 - 4\log 4$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + logn(1 + 2 + 4) - (2.log2 + 4.2log2)$$

$$= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + logn(1 + 2 + 4) - (2.1 + 4.2)log2$$

...

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + logn(1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{i-1})$$
$$- [2^1.1 + 2^2.2 + 2^3.3 + \cdots + 2^{i-1}.(i-1)]\log 2$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + logn\sum_{k=0}^{i-1} 2^i - log2\sum_{k=1}^{i-1} i2^i$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{logn(2^{i-1+1} - 1)}{2 - 1} - log2[(i - 1 - 1)2^{i-1+1} + 2]$$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + (2^i - 1)logn - [(i-2)2^i + 2]log2$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow n = 2^i \Leftrightarrow i = \log_2 n$

Khi đó:

$$T(n) = nT(1) + \left(2^{\log_2 n} - 1\right)logn - \left[(\log_2 n - 2)2^{\log_2 n} + 2\right]log2$$

$$= n + (n-1)logn - [n(\log_2 n - 2) + 2]log2$$

$$= n + nlogn - logn - [nlog_2 n - 2n + 2]log2$$

$$= n + nlogn - logn - n(log_2 n)log2 + 2nlog2 - 2log2$$

$$= n + nlogn - logn - nlogn + 2nlog2 - 2log2$$

$$= n - logn + 2(n-1)log2$$

$$= 3n - logn - 2$$

Bài 3: Giải các phương trình đệ quy sau bằng phương pháp truy hồi

1. $\boldsymbol{T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad T(1) = 1}$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$= 3\left[3T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2$$

$$= 9\left[3T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2$$

$$= 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3^2\left(\frac{n}{2^2}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 3^0\left(\frac{n}{2^0}\right)^2$$

$$= \cdots$$

$$= 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k\left(\frac{n}{2^k}\right)^2$$

$$= 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^i}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + 4n^2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^i\right]$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n$.

Khi đó:

$$T(n) = 3^{\log_2 n} T(1) + 4n^2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}\right]$$

$$= 3^{\log_2 n} + 4n^2\left[1 - \frac{3^{\log_2 n}}{4^{\log_2 n}}\right]$$

$$= 3^{\log_2 n} + 4n^2\left[1 - \frac{3^{\log_2 n}}{n^2}\right]$$

$$= 3^{\log_2 n} + 4n^2 - 4.3^{\log_2 n}$$

$$= 4n^2 - 3^{1+\log_2 n}$$

2. $\boldsymbol{T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \qquad T(1) = 1}$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 = 8\left[8T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right] + n^3$$

$$= 8^2 T\left(\frac{n}{4}\right) + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3$$

$$= 8^2.\left[8T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^3\right] + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3$$

$$= 8^3 T\left(\frac{n}{8}\right) + 8^2.\frac{n^3}{4^3} + 8.\frac{n^3}{2^3} + n^3$$

$$= 8^3 T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n^3$$

……

$$= 8^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i.n^3$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n$

Khi đó: $T(n) = 8^{\log_2 n}.T(1) + n^3.\log_2 n = n^3 + n^3.\log_2 n = (\log_2 n + 1).n^3$

3. $\boldsymbol{T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n} \qquad \boldsymbol{T(1) = 1}$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$= 4\left[4T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right] + n$$

$$= 16T\left(\frac{n}{9}\right) + n + \frac{4n}{3}$$

$$= 16\left[4T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right] + n + \frac{4n}{3}$$

$$= 64T\left(\frac{n}{27}\right) + n + \frac{4n}{3} + \frac{16n}{9}$$

$$= 4^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n + \left(\frac{4}{3}\right)^1 n + \left(\frac{4}{3}\right)^2 n$$

$$= 4^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n\left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$$

...

$$= 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}\right)$$

$$= 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k$$

$$= 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + \frac{n\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1+1} - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1}$$

$$= 4^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + 3n\left(\left(\frac{4}{3}\right)^i - 1\right)$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \Leftrightarrow n = 3^i \Leftrightarrow i = \log_3 n$

Khi đó:

$$T(n) = 4^{\log_3 n}T(1) + 3n\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 1\right)$$

$$= 4^{\log_3 n} + 3n\left(\frac{4^{\log_3 n}}{3^{\log_3 n}} - 1\right)$$

$$= 4^{\log_3 n} + 3n\left(\frac{4^{\log_3 n}}{n} - 1\right)$$

$$= 4^{\log_3 n} + 3.4^{\log_3 n} - 3n$$

$$= 4.4^{\log_3 n} - 3n = 4^{(\log_3 n)+1} - 3n$$

4. $\boldsymbol{T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 \qquad T(1) = 1}$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$= 9\left[9T\left(\frac{n}{9}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^2\right] + n^2$$

$$= 9^2T\left(\frac{n}{9}\right) + n^2 + 9\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

$$= 9^2\left[9T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(\frac{n}{9}\right)^2\right] + n^2 + 9\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

$$= 9^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n^2 + 9\left(\frac{n}{3}\right)^2 + 9^2\left(\frac{n}{3^2}\right)^2$$

$$= 9^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n^2 + n^2 + n^2$$

$$= 9^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3n^2$$

...

$$= 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + n^2 i$$

Quá trình sẽ dừng lại khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \Leftrightarrow n = 3^i \Leftrightarrow i = \log_3 n$

Khi đó:

$$T(n) = 9^{\log_3 n}T(1) + n^2 \log_3 n = n^2 + n^2 \log_3 n = n^2(1 + \log_3 n)$$

5. $\boldsymbol{T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 \qquad T(2) = 0}$

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$$

$= 2\left[2T\left(\sqrt[4]{n}\right) + 1\right] + 1$

$= 2^2T\left(\sqrt[4]{n}\right) + 2 + 1$

$= 2^2\left[2T\left(\sqrt[8]{n}\right) + 1\right] + 2 + 1$

$= 2^3T\left(\sqrt[8]{n}\right) + 2^2 + 2 + 1$

……

$= 2^iT\left(\sqrt[2^i]{n}\right) + 2^{i-1} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$

$$= 2^iT\left(\sqrt[2^i]{n}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$$

$= 2^iT\left(\sqrt[2^i]{n}\right) + 2^i - 1$

Quá trình sẽ dừng lại khi:

$$\sqrt[2^i]{n} = 2 \Leftrightarrow n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^i} = \log_n 2 \Leftrightarrow 2^i = \log_2 n \Leftrightarrow i = \log_2(\log_2 n)$$

Khi đó: $T(n) = \mathrm{T}(2).\log_2 n + \log_2 n - 1 = \log_2 n - 1$

Bài 4: Giải phương trình đệ quy sau dùng phương trình đặc trưng

a. $\boldsymbol{T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)}$ với $T(0) = 1, T(1) = 2$

$T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)$

$\Leftrightarrow T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0 \quad (1)$

Đặt $T(n) = x^n$

$(1) \Leftrightarrow x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0 \Leftrightarrow x^{n-2}(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình (1) là: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Giải phương trình trên ta được 2 nghiệm đơn là: $x_1 = 1, x_2 = 3$

Khi đó: $T(n) = c_1.{x_1}^n + c_2.{x_2}^n = c_1 + c_2.3^n$

Thay:

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Kết luận: $T(n) = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} = \frac{1}{2}(3^n + 1)$

b. $\boldsymbol{T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3)}$với $T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 2$

$T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0(*)$

Đặt $x^n = T(n)$

$$(*) \Leftrightarrow x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{n-3}(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{n-3} = 0\ (không\ xét) \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0\ (**) \end{array}\right.$$

Giải phương trình đặc trưng $(**)$ của phương trình $(*)$, ta có 1 nghiệm kép $x_1 = 1$ và 1 nghiệm đơn $x_2 = 2$

Ta có:

$$T(n) = C_1 x_1^n + C_2 n x_1^n + C_3 x_2^n = C_1 + C_2 n + C_3 2^n$$

Thay:

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 + 2C_3 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 + 2C_3 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

Kết luận:

$$T(n) = n$$

c. $\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + T(n-2)}$ với $T(0) = 1, T(1) = 1$

Xét phương trình:$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n = X^{n-1} + X^{n-2} \Leftrightarrow X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0$

Phương trình đặc trưng:

$$X^2 - X - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2.\frac{1}{2}X + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ X = \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{array}\right.$$

Có 2 nghiệm đơn $X_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ và $X_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

$$T(n) = c_1 X_1^n + c_2 X_2^n$$

$$T(n) = c_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$$

Ta có:

$$T(0) = 1 \to c_1 + c_2 = 1$$

$$T(1) = 1 \to c_1\frac{\sqrt{5}+1}{2} + c_2\frac{-\sqrt{5}+1}{2} = 1$$

Giải hệ phương trình ta có

$$c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Kết luận:

$$T(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$$

Bài 5: Giải phương trình đệ quy sau đây dùng phương pháp hàm sinh

a. $\boldsymbol{T(n) = \begin{cases} 1, & khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7, & khi\ n > 0 \end{cases}}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1) + 7]x^n + T(0)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n + T(0)$$

$$= 2A + 7B + 1$$

Trong đó:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^0 = \frac{1}{1-x} - 1$$

Thay vào f(x), ta có:

$$f(x) = 2xf(x) + 7\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)f(x) = \frac{7}{1-x} - 6$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{7}{(1-x)(1-2x)} - \frac{6}{1-2x} = -\frac{7}{1-x} + \frac{14}{1-2x} - \frac{6}{1-2x}$$

$$= \frac{8}{1-2x} - \frac{7}{1-x} = 8\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 7\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(8.2^n - 7)x^n$$

Vậy

$$T(n) = 8.2^n - 7$$

b. $\boldsymbol{T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2), n\text{ếu } n \geq 2}$ **với** $\boldsymbol{T(0) = 1, T(1) = 2}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_{0}^{\infty}$ có dạng:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\big(7T(n-1) - 12T(n-2)\big)x^n + T(1)x + T(0)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n + 2x + 1 \ (*)$$

Xét

$$A = 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n = 7x\left(\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} - T(0)x^0\right) = 7xf(x) - 7x$$

$$B = 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n = 12x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} = 12x^2 f(x)$$

Thế vào (*)

$$f(x) = 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = [7xf(x) - 7x] - 12x^2 f(x) + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (7x - 12x^2)f(x) - 5x + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x)(12x^2 - 7x + 1) = -5x + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-5x+1}{12x^2 - 7x + 1} = \frac{-5x+1}{(4x-1)(3x-1)} = \frac{1}{4x-1} + \frac{-2}{3x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4^n + 2.3^n)x^n$$

Mà

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$$

Nên:

$$T(n) = -4^n + 2.3^n$$

c. $\boldsymbol{T(n+1) = T(n) + 2(n+2),\ n\text{ếu } n \geq 1}$ **với** $\boldsymbol{T(0) = 3}$

Đặt $m = n + 1$

$T(m) = T(m-1) + 2(m+1)$

$\Rightarrow T(n) = T(n-1) + 2(n+1) \qquad n\text{ếu } n \geq 1$

$Hàm$ sinh $của$ $dãy$ $vô$ $hạn$ $\{T(n)\}_0^{\infty}$ $có$ $dạng$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n).x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1) + 2(n+1)].x^n + T(0).x^0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)x^n + 3$$

$$= A + B + 3 \qquad (*)$$

Trong đó:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x.\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} [2(n+1)]x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = 2\left[\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right]$$

$Thế$ $vào$ $(*)$:

$$f(x) = xf(x) + \frac{2}{(1-x)^2} - 2 + 3$$

$$f(x) - xf(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + 1$$

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}$$

$Xét$ $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

Đạo hàm 2 vế ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Thay vào f(x):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)+1]x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+3)x^n$$

Vậy: $T(n) = n^2 + 3n + 3$

Bài 6: Giải phương trình đệ quy dùng phương pháp đoán nghiệm

$$T(n) = \begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n, & nếu\ n \geq 2 \end{cases}$$

i. $\boldsymbol{f(n) = an^3}$

Đoán nghiệm: $f(n) = an^3$

B1: Với n=1, T(1)=c1 và f(1)=a

Để $T(1) \leq f(1)$ thì chọn $c_1 \leq a$

B2: Giả sử $T(k) \leq f(k)\ với\ mọi\ k < n$

B3: CM $T(n) \leq f(n), với\ mọi\ n$

- Áp dụng giả thiết quy nạp với k=n/2<n (n>1)
- Ta có $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq f\left(\frac{n}{2}\right) = a\left(\frac{n}{2}\right)^3$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4a\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n$$

$$T(n) \leq \frac{an^3}{2} + n$$

$$T(n) \leq an^3 - \frac{an^3}{2} + n$$

Nếu $-\frac{an^3}{2} + n \leq 0$ thì: $T(n) \leq an^3 = f(n)$

Giải hệ $\begin{cases} -\frac{an^3}{2} + n \le 0 \\ c_1 \le a \end{cases}$ (**)

Xét: $-\frac{an^3}{2} + n \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}an^2 - 1 \ge 0$ ($khử$ $được$ n $không$ $đổi$ $dấu$ $vì$ $n \ge 2$)

Ta $có$: $\begin{cases} an^2 \ge 2 \\ n \ge 2 \end{cases} \Rightarrow a \ge \frac{1}{2}$, (**) trở thành $\begin{cases} a \ge \frac{1}{2} \\ a \ge c_1 \end{cases}$

B4: Chọn $a = c_1 + \frac{1}{2}$ thỏa (**)

Ta có: $T(n) \le \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) n^3$

B5: Thay n=1 vào f(n) ta có $f(1) = c_1 + \frac{1}{2} \ge c_1 \ge T(1)$

Vậy đoán nghiệm thành công

ii. $\boldsymbol{f(n) = an^2}$

B1: Chứng minh $T(1) \le f(1) \Leftrightarrow C_1 \le a$

Nếu chọn a thỏa $C_1 \le a$ thì ta có điều phải chứng minh

B2: Giả sử $T(k) \le f(k)\ \forall\ k < n$

B3: Chứng minh $T(n) \le f(n)$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$
$$T(n) \le \frac{4an^2}{4} + n$$
$$T(n) \le an^2 + n$$
$$T(n) \le f(n) + n$$

Để $T(n) \le f(n)$ thì ta chỉ cần cần tìm $n \le 0$

Mâu thuẫn với giả thuyết vì giả thuyết cho $n \ge 1$

Vậy lần đoán nghiệm thứ 2 ($f(n) = an^2$) thất bại

iii. $\boldsymbol{f(n) = an^2 - bn}$

Cần chứng minh: $T(n) \le f(n),\ \forall n$

B1: CMR

$$T(1) \le f(1)$$

Nếu chọn a và b sao cho: $C_1 \le a - b$ ta có điều cần chứng minh

B2: Giả sử $T(k) \le f(k), \forall k < n$

B3: CMR

$$T(n) \le f(n)\ (bđt\ đúng\ tại\ n)$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le 4a\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{4bn}{2} + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le an^2 - bn - bn + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le f(n) - bn + n$$

Nếu chọn b sao cho: $-bn + n \le 0$ ta có điều cần chứng minh

B4:

Giả sử chọn $a = C_1 + 1, b = 1$ thay vào điều kiện, ta có:

$$\begin{cases} C_1 \le C_1 + 1 + 1 \\ -n + n \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \le C_1 + 2 \\ 0 \le 0 \end{cases} \Rightarrow thỏa\ điều\ kiện$$

Kết luận: chọn $b = 1, a = C_1 + 1$

Ta có: $T(n) \le (C_1 + 1)n^2 - n, \forall n$

B5:

Thay $n = 1$ vào $f(n) = (C_1 + 1)n^2 - n$, ta có:$f(1) = C_1 = T(1)$

Vậy lần đoán nghiệm thứ 3 với $f(n) = (C_1 + 1)n^2 - n$ thành công

Bài 7: Giải phương trình đệ quy dùng phương pháp đoán nghiệm

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$T(n) = 1 \text{ với } n \le 5$$

Đoán nghiệm: $f(n) = an + b$
Cần chứng minh: $T(n) \le f(n),\ \forall n$
B1: CMR

$$T(n) \le f(n)\ với\ n \le 5$$

Nếu chọn a và b sao cho: $1 \le a + b$ ta có điều cần chứng minh

B2: Giả thiết quy nạp:

Giả sử $T(k) \leq f(k), \forall k < n$

B3: CMR

$$T(n) \leq f(n)\ (b\text{đ}t\ \text{đú}ng\ t\text{ạ}i\ n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq \frac{an}{2} + b + \frac{an}{4} + b + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq \frac{3an}{4} + 2b + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq f(n) - \frac{an}{4} + b + n$$

Nếu chọn a, b sao cho: $-\frac{an}{4} + b + n \leq 0$ ta có điều cần chứng minh

B4:

Điều kiện $a + b \geq 1$ xảy ra khi $|a| < b$ hoặc $a > |b|$

Ta thấy $-\frac{an}{4} + b + n \leq 0$ tương đương $n\left(1 - \frac{a}{4}\right) + b \leq 0$

Vì n dương nên để cho $n\left(1 - \frac{a}{4}\right) + b \leq 0$ thì nên chọn $a \geq 4, |b| < a$

Giả sử chọn $a = 4, b = 0$ thay vào điều kiện, ta có:

$$\begin{cases} 1 \leq a + b \\ -\frac{an}{4} + b + n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq 4 - 0 \\ -n + 0 + n \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq 4 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow th\text{ỏ}a\ \text{đ}i\text{ề}u\ ki\text{ệ}n$$

Kết luận: chọn $a = 4, b = 0$

Ta có: $T(n) \leq 4n, \forall n$