13 вопрос

Ансар Каржаспаев @ansark4

23 октября 2022 г.

1 Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовани односторонних пределов монотонной ограниченной функции.

1.1 Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 65 (Критерий Коши). Пусть f: D→ R и a предельная точка D. Предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждых $x, y \in B_\delta^{'}(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Доказательство. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной точки $x \in B_\delta^{'}(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - A| < \epsilon/2$. Тогда для произвольных точек $x, y \in B_\delta^{'}(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \epsilon$.

Предположим, что выполнено условие Коши. Тогда для произвольной последовательности точек $x_n \in D\setminus$ {a}, $x_n \to a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной, а значит сходится. Пусть $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$. Если есть другая последовательность точек $y_n \in D\setminus\{a\}, y_n \to a$, то рассмотрим новую последовательность $z_{2k1} = x_k, z_{2k} = y_k$, т.е. эта последовательность вида $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots \subset D\setminus\{a\}$. Эта последовательность также сходится к a, поэтому последовательность образов $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots$ снова оказывается фундаментальной, а потому сходится. В силу того, что предел подпоследовательности сходящейся последовательности совпадает с пределом всей последовательности, получаем, что $\lim_{x\to\infty} f(y_n) = A$. Таким образом, доказано существование предела по Гейне.

1.2 Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовани односторонних пределов монотонной ограниченной функции.

Пусть $D_a^+ := D \cap (a, +\infty)$ и $D_a^- := D \cap (-\infty, a)$
Определение 66. Пусть точка a предельная для множества D_a^+ и существует предел функции f по множеству D_a^+ в точке a. Этот предел называют пределом справа функции f в точке a и обозначают $\lim_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично определяется предел слева, который обозначают $\lim_{x\to a-0} f(x)$.

Теорема 67 (Вейерштрасс). Пусть f не убывает и ограничена на множестве D, a - предельная точка множества D_a^-. Тогда существует предел слева

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = sup\{f(x) : x \in D_a^-\}$$

Пусть f не убывает и ограничена на множестве D, a предельная точка множества D_a^+.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = inf\{f(x) : x \in D_a^+\}$$

Аналогичные утверждения с заменой inf на sup справедливы и для невозрастающей функции.
Доказательство. Пусть M $= sup\{f(x) : x \in D_a^-$. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такая точка $x_0 \in D_a^-$, что $M - \epsilon < f(x_0)$. Т.к. f не убывает на D_a^-, то для каждого $x \in (x_0, a) \cap D_a^{'}$ выполнено $M - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M < M + \epsilon$. Тогда, взяв $\delta := a - x_0$ получаем, что для каждого $x \in B_\delta^{'}(a) \cap D_a^-$ выполнено $|f(x) - M| < \epsilon$.