1 Числовые ряды

1.1 Числовой ряд

Пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда числовым рядом с членами a_n называется выражение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1.2 Переформулировка критерия Коши для числовых рядов

Ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N \to \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = |S_n - S_m| < \varepsilon$$

1.3 Необходимое условие сходимости числового ряда

Если числовой ряд сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$

Доказательство. Из критерия коши следует, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N + 1 \to |a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

□

1.4 Абсолютная и условная сходимость рядов

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится

1.5 Сходимость абсолютно сходящегося ряда

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ тоже сходится

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует выполнение критерия Коши для этого ряда, то есть что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N \to \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

но так как $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| \geq \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right|$, то критерий Коши выполнен и для ряда без модулей. □

1.6 Признак сравнения

Пусть $0 \le a_n \le b_n$ тогда если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если же $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

1.7 Признак Коши

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность, $a_n \ge 0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство. Заметим, что $a_2 + 2a_3 + ... + 2^{n-1} a_{2^n} \le a_2 + a_3 + ... + a_{n^k} \le 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^n a_{2^n}$, тогда из ограниченности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ следует ограниченность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и наоборот □

1.8 Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$

Доказательство. При $p < 0$ слагаемое $\frac{1}{k^p}$ не стремится к нулю следовательно ряд расходится. При $p > 0$: по признаку Коши ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$, а это сумма геометрической прогрессии, которая сходится при $2^{1-p} < 1$, то есть при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$ □