Коллоквиум по курсу "Математический анализ", I курс, осенний семестр 2022

Группа БПМИ2211

24 октября 2022 г.

1 Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.

1.1 Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств.

Пусть A — непустое подмножество вещественных чисел.

Число b называется **верхней гранью** множества A, если $a \leq b$ для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна верхняя грань, то множество называют **ограниченным сверху**. Наименьшая из верхних граней множества A называется **точной верхней гранью** множества A и обозначается $\sup A$ (супремум).

Число b называется **нижней гранью** множества A, если $b \leq a$ для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называют **ограниченным снизу**. Наибольшая из нижних граней множества A называется **точной нижней гранью** множества A и обозначается $\inf A$ (инфимум).

Ограниченное и сверху и снизу множество называется **ограниченным**.

Пример 1. Пусть $A = (0, 1]$. Тогда $\inf A = 0$
$\forall x \in A : x \geq 0 \Rightarrow 0$ – нижняя грань. Если b – нижняя грань, то $\frac{1}{n} \in A$, $\frac{1}{n} \geq b \Rightarrow 0 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} > b$
и $\sup A = 1$. 1 – верхняя грань, т.к. $\forall x \in A : 1 \geq x$
b – верхняя грань, $b \geq 1, 1 \in A$

Установим существование точных верхних (нижних) граней у ограниченных сверху (снизу) множеств.

Теорема 2. *Пусть A — непустое ограниченное сверху (снизу) множество. Тогда существует точная верхняя (нижняя) грань $\sup A$ ($\inf A$).*

Доказательство. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество из условия, а B — непустое (по условию) множество его верхних граней. Тогда A левее B и существует разделяющий A и B элемент c. Он явлется верхней гранью для A и $c \leq b$ для каждой верхней грани множества A(c – наименьшая из верхних граней). По определению $c = \sup A$.

Наличие $\inf$ доказывается аналогично или переходом к множеству $-A$. $\square$

Отсюда получается полезное утверждение о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

1.2 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.

Аналогично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.

Доказательство. Докажем только первое утверждение. Второе доказывается аналогично или переходом к последовательности $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $M = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $M - \varepsilon < a_N$ (иначе $M - \varepsilon$ — верхняя грань, чего не может быть). В силу того, что последовательность неубывающая, при каждом $n > N$ выполнено

$$M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon.$$

Тем самым, по определению $M = \lim a_n$. $\square$

В качестве примера см. п.1 билет 6.