1 Открытые и замкнутые множества на прямой, их свойства, связанные с теоретико-множественными операциями. Внутренние, предельные и граничные точки множеств. Четыре эквивалентных описания замкнутого множества.

1.1 Открытые и замкнутые множества на прямой, их свойства, связанные с теоретико-множественными операциями.

Определение 1.
ε-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
Определение 2.
Проколотая ε-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $B'_\varepsilon(a) := B_\varepsilon \backslash \{a\}$.
Определение 3.
Множество $U \subset \mathbb{R}$ называется **открытым**, если для любой $a \in U$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon \subset U$.
Определение 4.
Множество $V \subset \mathbb{R}$ называется **замкнутым**, если его дополнение открыто, т.е. $\mathbb{R} \backslash V-$ открытое множество.
Пример.

1. Всякий интервал (α, β) - открытое множество, т.к. для каждой точки $a \in (\alpha, \beta)$ множество $B_{\min\{\frac{a-\alpha}{2}, \frac{\beta-a}{2}\}} \subset (\alpha, \beta)$. А также вся числовая прямая, лучи $(-\infty, \alpha), (\beta, +\infty)$, пустое множество будут являться открытыми.

2. Отрезок $[\alpha, \beta]$, вся числовая прямая, лучи $(-\infty, \alpha], [\beta, +\infty)$, пустое множество будут замкнутыми. (Если попросят доказать что-то отсюда - скажите, что дополнение будет открытым множеством).

Свойства.
Объединение(1.1) любого набора и пересечение(1.2) конечного набора открытых множеств будет открытым множеством.
Пересечение(2.1) любого набора и объединение(2.2) конечного набора замкнутых множеств будет замкнутым множеством.

Доказательство.

1.1 Пусть $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, причём все $U_\alpha-$ открытые множества. Если $a \in U$, тогда найдётся такой индекс α, что $a \in U_\alpha$. По определению найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \subset U_\alpha$. Значит, по определению операции объединения, $B_\varepsilon(a) \subset U$. Т.е. $U-$ открытое множество.

1.2 Пусть $U = \bigcap\limits_{j=1}^{N} U_j$, причём все U_j- открытые множества. Если $a \in U$, то для каждого $j \in \{1, ..., N\}$ найдётся такое число $\varepsilon_j > 0$, что $B_{\varepsilon_j}(a) \subset U_j$. Пусть $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N\} > 0$. Тогда $B_\varepsilon(a) \subset B_{\varepsilon j}(a) \subset U_j$ при каждом $j \in \{1, ..., N\}$. Значит, $B_\varepsilon(a) \subset U$ и $U-$ открытое множество.

2.1 Пусть $V = \bigcap\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$, причём все V_α− замкнутые множества. По формулам де Моргана $\mathbb{R}\backslash V = \mathbb{R}\backslash \bigcap\limits_{\alpha\in A} = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(\mathbb{R}\backslash V_\alpha)$. По определению замкнутого множества, множества $U_\alpha = \mathbb{R}\backslash V_\alpha$− открыты. По доказанному в 1.1 свойству открытых множеств, множество $\mathbb{R}\backslash V$ также открыто, а значит множество V− замкнуто.

2.2 Пусть $V = \bigcup\limits_{j=1}^{N} V_j$, причём все V_j− замкнутые множества. По формулам де Моргана $\mathbb{R}\backslash V = \mathbb{R}\backslash \bigcup\limits_{j=1}^{N} V_j = \bigcap\limits_{j=1}^{N}(\mathbb{R}\backslash V_j)$. По определению замкнутого множества, множества $U_j := \mathbb{R}\backslash V_j$− открыты. По уже доказанному свойству(1.2) открытых множеств, множество $\mathbb{R}\backslash V$ также открыто, а значит множество V− замкнуто.

□

2 Внутренние, предельные и граничные точки множеств.

Определение 5.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **внутренней** точкой множества M, если она входит в это множество M с некоторой своей окрестностью полностью (т.е. $\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset M$).

Определение 6.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **предельной** точкой множества M, если каждая её проколотая окрестность имеет непустое пересечение с множеством M (т.е. $\forall\varepsilon > 0 : B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \varnothing$).

Определение 7.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **граничной** точкой множества M, если каждая её окрестность имеет непустое пересечение как с множеством M, так и с его дополнением (т.е. $\forall\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \cap M \neq \varnothing$ и $B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}\backslash M) \neq \varnothing$).

Пример.

Для множества $M = (0, 1] \cup \{3\}$ точки $0, \frac{1}{2}, 1$ будут предельными, а точки $-1, 3$ не будут. Точки $0, 1, 3$ будут граничными, а -1 и $\frac{1}{2}$ не будут. Точка $\frac{1}{2}$ будет внутренней, а точки $-1, 0, 1, 3$ не будут.

Замечание.

Точка a предельная для M тогда и только тогда, когда найдётся сходящаяся к a последовательность $a_n \in M\backslash\{a\}$.

Доказательство. Действительно, если a предельная, то для каждого n найдётся точка $a_n \in B'_{1/n}(a) \cap M$. Тогда $a_n \in M\backslash\{a\}$ и $a_n \to a$.

Наоборот (если есть сходящаяся к a последовательность, то a− предельная точка для M), если $a_n \in M\backslash\{a\}$, то каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Таким образом, $a_{N+1} \in B'_\varepsilon(a) \cap M$. □

3 Четыре эквивалентных описания замкнутого множества.

Теорема

Следующие утверждения равносильны.

1) V *- замкнутое множество;*

2) V *содержит все свои граничные точки;*

3) V *содержит все свои предельные точки*

4) *если* $a_n \in V$ *и* $a_n \to a$, *то* $a \in V$.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) *(Если* V *- замкнутое множество, то оно содержит все свои граничные точки)*:
Пусть a граничная точка для V, для которой выполнено, что $a \notin V$, то $a \in \mathbb{R}\backslash V$ - открытое множество. Это значит, что найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\epsilon(a) \subset \mathbb{R}\backslash V$ (т.к. $\mathbb{R}\backslash V$ - открытое множество). Т.е. нашлась окрестность $B_\varepsilon(a)$, которая не пересекается с множеством V, а значит a не граничная точка.

2) $\Rightarrow$ 3) *(Если* V *содержит все свои граничные точки, то оно содежит и все свои предельные)*:
Пусть a предельная для V точка и предположим, что $a \notin V$. Значит a и не граничная точка (т.к. V содержит все свои граничные точки). Поэтому найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \cap V = \varnothing$. Таким образом, $B'_\varepsilon(a) \cap V = \varnothing$ и a не предельная для V.

3) $\Rightarrow$ 4) *(Если* V *содержит все свои предельные точки, то если* $a_n \in V$ *и* $a_n \to a$, *то* $a \in V$*)*:
Пусть $a_n \in V, a_n \to a$. Если $a \notin V$, то $a \neq a_n$ при каждом n. По замечанию выше $a-$ предельная точка для множества V, что противоречит тому, что V содержит все свои предельные точки.

4) $\Rightarrow$ 1) *(Если* $a_n \in V$ *и* $a_n \to a$, *то* $a \in V$. *А отсюда* $V-$ *замкнутое множество)*:
Пусть V - не замкнуто. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\backslash V$ - не открыто $\Rightarrow$ существует такое $a \in \mathbb{R}\backslash V : B_\varepsilon(a) \cap V \neq \varnothing$ и при этом $B_\varepsilon(a) \not\subset V$. Тогда пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists a_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap V \Rightarrow a_n \in V$ и $a_n \to a \Rightarrow a \in V$ (по условию). Получили противоречие, а значит V - замкнуто.

$\square$