1 Определения предела функции (по множеству) по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Свойства предела функции (единственность, линейность, предел произведения и отношения, предел и неравенства, ограниченность, отделимость, предел композиции). Замечательные пределы. @Quizert

1.1 Предел функции по Коши

Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset R$ и a - предельная для D точка, тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x) - A| < \epsilon$$

1.2 Предел функции по Гейне

Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset R$ и a - предельная для D точка, тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow$$
$$\forall \{x_n\} \in D \backslash \{a\} : \lim_{n \to \infty} x_n = a \to \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

1.3 Эквивалентность двух определений

От Коши к Гейне:
Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = A$ в смысле коши, тогда рассмотрим последовательность точек $x_n \in D \backslash \{a\} : x_n \to a$, по определению предела по коши

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x) - A| < \epsilon$$

последовательность $x_n \to a$, то есть

$$\exists N : \forall n > N \to x_n \in \beta_\delta(a)$$

при $n > N$ $x_n \in D \backslash \{a\} \cap \beta_\delta(a)$, то есть при $n > N$ выполняется $|f(x_n) - A| < \epsilon$, что и означает, что A - предел функции по гейне
От Гейне к Коши:
Пусть число A не является пределом функции f в точке a в смысле коши, тогда это означает, что

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in D \cap \beta'_\delta(a) : |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon$$

по определению по гейне: для последовательности точек $x_{1/n} \in D \backslash \{a\}$ (то есть берем $\delta = 1/n$) выполняется, что $\{x_{1/n}\} \to a$ но заметим, что $|f(x_{1/n}) - A| \geq \epsilon$, тогда A не является пределом f в смысле гейне

1.4 Свойства

Пусть функции f, g, h определены на некотором множестве $D \subset R$ и пусть a - предельная для D точка, тогда выполнены следующие свойства:
• Единственность:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B \Rightarrow A = B$$

• Линейность:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$$
$$\forall \alpha, \beta \in R$$

• Предел произведения:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

• Предел частного:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} f(x) = B \neq 0, \forall x \in D \to g(x) \neq 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

• Предел и неравенства: (входит ли сюда лемма о милиционерах или нет? Жду ответ Музы)

$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to f(x) \leq g(x),$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B \Rightarrow$$
$$\text{A} \leq B$$

• Ограниченность:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0, C > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x)| \leq C$$

• Отделимость:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x)| > \tfrac{|A|}{2}$$

Все свойства кроме отделимости и ограниченности следуют из аналогичных свойств для предела последовательности и определения через Гейне (так написано в учебнике).
• Доказательство ограниченности: найдется такое $\delta > 0 : |f(x) - A| < 1$ при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$, таким образом при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ выполнено $|f(x)| < 1 + |A|$
• Доказательство отделимости: найдется такое $\delta > 0 : |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$, таким образом при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ будет выполнено

$$|A| - |f(x)| \leq |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

• Предел композиции:
Пусть $f : D \to E, g : E \to R, a-$ предельная точка множества D, b - предельная точка множества E, $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) = c$ и есть такая проколотая окрестность $\beta'_\delta(a)$ точки a, что $f(x) \neq b$ для каждой точки $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$. Тогда $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$
Доказательство:
Пусть $x_n \to a, x_n \in D$. $x_n \neq a$. Т.к. $f(x) \neq b$ для каждой точки $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$, то найдется такой номер N, что $f(x_n) \neq b$ при $n > N_0$. Поэтому последовательность $f(x_{N+1}), f(x_{N+2}), ...$ состоит из элементов множества E, ни один из этих элементов не совпадает с b и эта последовательность сходится к b. Поэтому последовательность $g(f(x_{N+1})), g(f(x_{N+2})), ...$ сходится к c. Значит и вся последовательность $\{g(f(x_n))\}$ сходится к c

1.5 Замечательные пределы

• Первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Доказательство: для $x\in(0,\pi/2)$ рассмотрим два треугольника и площадь сектора, сравним их и получим (сначала треугольник внутри круга, потом сектор, потом треугольники со стороной по касательной к кругу)

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x\leq\frac{x}{2}\leq\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x$$

откуда, в силу четности при $x\in(-\pi/2,\pi/2), x\neq 0$ выполнено

$$\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1$$

Утверждение теперь следует из теоремы о зажатой функции, т.к. $\lim_{x\to y}\cos x=\cos y$
Действительно, $|\cos x-\cos y|=2|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)|\leq 2|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)|\leq|x-y|$

• Второй замечательный предел: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Доказательство: рассмотрим функции $f(x):=(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}, g(x):=(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$, тогда
$f(x)\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq g(x)$, кроме того, т.к. $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$, то и $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=e$. Утверждение теперь следует из теореме о пределе зажатой функции.