Коллоквиум по курсу "Математический анализ", I курс, осенний семестр 2022

Группа БПМИ2211

29 октября 2022 г.

1 Рациональные и вещественные числа. Десятичные дроби. Принцип полноты, его выполнение для десятичных дробей.

Рациональные числа

Рациональные числа – это числа вида $\frac{p}{q}$, где p – целое число, q – натуральное число, причём два числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ считаются равными, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Все свойства натуральных, целых, рациональных чисел и операций над ними будем считать известными.

Десятичные дроби и вещественные числа

Каждое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, например: $\frac{1}{10} = 0.1, \frac{1}{7} = 0.(142857)$. Пусть $0.(9) = x$, тогда $10x = 9 + x$, значит, $0,(9) = 1$, поэтому десятичные записи с периодом 9 рассматривать не будем.

Множество **вещественных (действительных)** чисел отождествляется с множеством всех десятичных дробей вида $\pm a_0.a_1a_2\ldots$, где $a_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_j \in \{0,\ldots,9\}$, и записи, в которых с какого-то момента стоят одни девятки, запрещены. Число $\pm 0.00\ldots$ совпадает с числом 0 и называется нулём. Ненулевое число называется положительным, если в его записи стоит знак $+$ (который обычно опускается). Ненулевое число называется отрицательным, если в его записи стоит знак $-$. В вещественные числа естественным образом вложены рациональные.

На множестве вещественных чисел также определены операции сложения и умножения, для которых справедливы все их естественные свойства (множество вещественных чисел является полем).

На вещественных числах задано **отношение порядка** следующим образом: на положительных вещественных числах задан лексикографический порядок, т. е. $a_0.a_1a_2\ldots \le b_0.b_1b_2\ldots$ тогда и только тогда, когда $a_0.a_1a_2\ldots = b_0.b_1b_2\ldots$ или найдётся разряд k, для которого $a_0 = b_0, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ и $a_k < b_k$, который естественным образом переносится на отрицательные.

Для вещественных чисел определён модуль числа $|a|$, равный $-a$ при $a < 0$ и a при $a \ge 0$. Напомним, что для модуля выполнено **неравенство треугольника** $|a+b| \le |a| + |b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a| - |b|| \le |a+b|$.

Принцип полноты

Будем говорить, что множество чисел A лежит **левее** множества B, если для каждого $a \in A$ и каждого $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$. Например, если $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < 4\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} :$

$b > 4\}$, то A левее B.

Если множество A левее множества B, то говорят, что число c **разделяет** множества A и B, если $a \leq c$ для каждого $a \in A$ и $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Например, число 4 разделяет множества A и B, заданные выше.

Будем говорить, что на множестве чисел выполнен **принцип полноты**, если для произвольных непустых подмножеств A левее B нашего множества найдётся разделяющий их элемент.

Теорема. *На множестве вещественных чисел выполняется принцип полноты.*

Доказательство. Пусть A и B – непустые множества чисел, причём A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B – только из неотрицательных, то нуль разделяет множества A и B.

Предположим, что в A есть положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (случай, когда в B есть отрицательное число, рассматривается аналогично). Построим число $c = c_0.c_1c_2\ldots$, разделяющее A и B.

Рассмотрим множество всех целых неотрицательных чисел, с которых начинаются элементы множества B (это множество состоит из целых неотрицательных чисел в силу того, что в B есть только положительные числа). Пусть b_0 – наименьшее из таких чисел и положим $c_0 = b_0$. Теперь рассмотрим все числа в множестве B, начинающиеся с c_0, и найдём у них наименьшую первую цифру после запятой. Пусть эта цифра b_1, тогда полагаем $c_1 = b_1$. Теперь рассмотрим все числа в множестве B, начинающиеся с $c_0.c_1$, и найдём у них наименьшую вторую цифру после запятой. Пусть эта цифра b_2, тогда полагаем $c_2 = b_2$. Аналогично ищутся остальные цифры числа c.

Таким образом построена бесконечная десятичная дробь $c_0.c_1c_2\ldots$. Заметим, что если бы у построенной десятичной записи с какого-то момента шли бы только девятки, то и в B было бы число, в записи которого с какого-то момента участвуют только девятки, но такие записи мы запретили.

Покажем, что построенное число разделяет множества A и B.

Во-первых, по построению $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Действительно, либо $b = c$ (тогда всё ОК), либо $b \neq c$. Во втором случае пусть $b_0 = c_0, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1}$ и $b_k \neq c_k$. Тогда, по построению числа c, $c_k < b_k$ и $c < b$.

Покажем, что $a \leq c$ для каждого $a \in A$. Предположим, что $a > c$, т. е. $a \geq c$ и $a \neq c$. Тогда найдётся позиция k, для которой $a_0 = c_0, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}$ и $a_k > c_k$. Но по построению числа c есть такой $b \in B$, что $b_0 = c_0, \ldots b_k = c_k$, а значит $a > b$, что противоречит условию A левее B. □

2 Иррациональность числа $\sqrt{2}$ (т.е. положительного решения уравнения $x^2 = 2$), его существование в рамках вещественных чисел, как следствие принципа полноты.

2.1 Иррациональность числа $\sqrt{2}$ (т.е. положительного решения уравнения $x^2 = 2$).

Докажем, что рациональных решений уравнения $x^2 = 2$ не существует. (от противного)

Доказательство. Предположим, что $\frac{p}{q}$ – такое решение, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и дробь несократима, т.е. нет общ делителей. Тогда $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow p = 2p_1 \Rightarrow 2q^2 = 4p_1^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow q \vdots 2 \Rightarrow p$ и q - чётные, а $\frac{p}{q}$– сократимая дробь $\Rightarrow$ противоречие. Таким образом, доказали, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

2.2 Существование $\sqrt{2}$ в рамках вещественных чисел.

Объясним чем с точки зрения структуры множества чисел обусловлено такое “отсутствие” $\sqrt{2}$. Пусть $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0, a^2 \leq 2\}$ и $B = \{b \in \mathbb{R} : b > 0, b^2 \geq 2\}$. Заметим, что множество A лежит левее множества B, так как $0 < b^2 - a^2 = (b-a)\cdot(b+a)$ для каждых $a \in A$ и $b \in B$, и $a + b > 0$. Если бы существовало число c, разделяющее A и B, то обязательно $c^2 = 2$.

Действительно, во-первых, заметим, что $1 \leq c \leq 2$ т.к. $1 \in A, 2 \in B$.

Теперь, если $c^2 < 2$, то число $c + \frac{2-c^2}{5} \in A$, т.к. $(c+\frac{2-c^2}{5})^2 = c^2 + 2c\cdot\frac{2-c^2}{5} + (\frac{2-c^2}{5})^2 \leq c^2 + 4\cdot\frac{2-c^2}{5} + \frac{2-c^2}{5} \leq 2$, но $c + \frac{2-c^2}{5} > c \Rightarrow c$ не разделяет A и B.

Если $c^2 > 2$, то число $c - \frac{c^2-2}{4} \in B$, т.к. $(c - \frac{c^2-2}{4})^2 \geq c^2 - 2c\cdot\frac{c^2-2}{4} \geq c^2 - 4\cdot\frac{c^2-2}{4} = 2$, но $c - \frac{c^2-2}{4} < c \Rightarrow c$ не разделяет A и B.

Таким образом, $c^2 = 2$. (Так как $c^2 = 2$, где c разделяет A и B, то из принципа полноты для десятичных дробей следует, что число c существует.)

3 Предел последовательности, его основные свойства (единственность, арифметические свойства, ограниченность сходящейся последовательности, отделимость).

3.1 Предел последовательности

Если каждому числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана **числовая последовательность** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится** к числу a, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N(\varepsilon)$. То же самое утверждение можно переписать в кванторах $\forall - \exists$ следующим образом:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \colon \forall n > N(\varepsilon)\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Используются обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пример 1. 1) *Последоввательность* $a_n = \frac{1}{n}$ *сходится к числу* $a = 0$. *Действительно*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n},$$

поэтому при $N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ *выполнено* $|a_n - a| < \varepsilon$.

2) *Последовательность* $a_n = (-1)^n$ *не имеет предела. Действительно, если* a *ее предел, то при достаточно больших* n $|a - a_n| < 1/2$ *и* $|a - a_{n+1}| < 1/2$, *а значит по неравенству треугольника* $2 = |a_n - a_{n+1}| < 1$, *что приводит к противоречию.*

3.2 Основные свойства предела последовательности

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **ограниченной**, если существуют такие числа $C, c \in \mathbb{R}$, что $c \leq a_n \leq C$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Единственность предела

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, тогда $a = b$.

Доказательство. Действительно, если $a \neq b$, то $|a-b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2, для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$ выполено

$$\varepsilon_0 = |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0.$$

Противоречие. □

3.2.2 Арифметика предела

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда
1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;
3) если $b \neq 0$, $b_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$.

1) Получаем, что при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| = |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

2) Замечаем, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется число $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$.

3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in \mathbb{N}$, для которого, при $n > N_3$, выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $n > \max\{N_2, N_3\}$ выполнено

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

□

3.2.3 Ограниченность сходящейся последовательности

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N$. Отсюда $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит,

$$|a_n| \leq M = \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_N|\},$$

т.е. $-M = c \leq a_n \leq C = M$. □

3.2.4 Лемма об отделимости

Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 : N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$
Возьмем $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 : \exists N\ \forall n > N : |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$
$|a_n| = |a_n + a - a| \geq |a| - |a_n - a| > \frac{|a|}{2}$ □

4 Переход к пределу в неравенствах. Принцип вложенных отрезков и геометрическая интерпретация вещественных чисел, вещественная прямая.

4.1 Переход к пределу в неравенствах

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда $\exists\, N\ \forall n > N : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$.

Доказательство. Предположим $a - b = \varepsilon_0 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists N_1,\ N_2 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}\ \forall\, n > N_1,\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}\ \forall\, n > N_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \epsilon_0 = a - b = a - a_n + a_n - b + b_n - b_n \leq a - a_n + b_n - b < \varepsilon_0$ – противоречие. □

4.2 Лемма о зажатой последовательности

Лемма 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. *Тогда* $\exists N\ \forall n > N : a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. По определению $\forall \varepsilon\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N},\ N_2 \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon\, \forall n > N_1,\ |b - b_m| < \varepsilon\, \forall m > N_2 \Rightarrow \forall k > \max\{N, N_1, N_2\} : a - \varepsilon < a_k \leq c_k \leq b_k < a + \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ □

4.3 Вещественная прямая

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Множества $[a;\, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\ (a;\, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ называются отрезком и интервалом соответственно.
Длина отрезка (интервала) – величина $b - a$.

4.4 Принцип вложенных отрезков

Теорема 3. *Всякая последовательность* $\{[a_n;\, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *вложенных отрезков (то есть таких, что* $[a_{n+1};\, b_{n+1}] \subset [a_n;\, b_n]$*) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, то есть* $b_n - a_n \to 0$*, то такая общая точка только одна.*

Доказательство. По условию $[a_{n+1};\, b_{n+1}] \subset [a_n;\, b_n]$, откуда $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
Пусть $n < m$, тогда $a_n \leq a_m \leq b_m \Rightarrow a_n < b_m$. При $n > m$ получим, что $a_n \leq b_n \leq b_m \Rightarrow a_n < b_m$.
Таким образом, $a_n < b_m\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$, тогда если $A := \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{b_m,\, m \in \mathbb{N}\}$, то A левее B.
Тогда по принципу полноты $\exists\, c \in \mathbb{R} :\ a_n \leq c \leq b_m\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$.
В частности, $a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n;\, b_n]$.

Пусть общих точек две: c и c'. Без ограничения общности, скажем, что $c < c'$.
Тогда, получим, что $a_n \leq c \leq c' \leq b_n$ и $c' - c \leq b_n - a_n$.

Но $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon)\, |0 - b_n + a_n| < \varepsilon$.
Пусть $\varepsilon = c' - c$, тогда $|a_n - b_n| < c' - c \Rightarrow b_n - a_n < c' - c$ – противоречие. $\square$

4.5 Геометрическая интерпретация вещественных чисел

Сопоставим десятичной дроби $0.a_1a_2...$ последовательность вложенных отрезков по следующему правилу.
Разделим отрезок $[0;\ 1]$ на 10 равных частей и выберем из получившихся частей a_1+1-ый по счету. Проделываем ту же самую процедуру с выбранным отрезком и выбираем $a_2 + 1$-ый по счету. И так далее.
Получаем последовательность вложенных отрезков. Причем длина отрезка, получаемого на n-ом шаге, равна $\frac{1}{10^n}$.
По теореме 1 существует единственная ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$) общая точка получившейся последовательности вложенных отрезков, которая совпадает с $0.a_1a_2$.

5 Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.

5.1 Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств.

Пусть A — непустое подмножество вещественных чисел.

Число b называется **верхней гранью** множества A, если $a \leq b$ для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна верхняя грань, то множество называют **ограниченным сверху**. Наименьшая из верхних граней множества A называется **точной верхней гранью** множества A и обозначается $\sup A$ (супремум).

Число b называется **нижней гранью** множества A, если $b \leq a$ для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называют **ограниченным снизу**. Наибольшая из нижних граней множества A называется **точной нижней гранью** множества A и обозначается $\inf A$ (инфимум).

Ограниченное и сверху и снизу множество называется **ограниченным**.

Пример 4. Пусть $A = (0, 1]$. Тогда $\inf A = 0$
$\forall x \in A : x \geq 0 \Rightarrow 0$ – нижняя грань. Если b – нижняя грань, то $\frac{1}{n} \in A,\ \frac{1}{n} \geq b \Rightarrow 0 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} > b$
и $\sup A = 1$. 1 – верхняя грань, т.к. $\forall x \in A : 1 \geq x$
b – верхняя грань, $b \geq 1, 1 \in A$

Установим существование точных верхних (нижних) граней у ограниченных сверху (снизу) множеств.

Теорема 5. *Пусть A — непустое ограниченное сверху (снизу) множество. Тогда существует точная верхняя (нижняя) грань $\sup A$ ($\inf A$).*

Доказательство. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество из условия, а B — непустое (по условию) множество его верхних граней. Тогда A левее B и существует разделяющий A и B

элемент c. Он является верхней гранью для A и $c \le b$ для каждой верхней грани множества A(c – наименьшая из верхних граней). По определению $c = \sup A$.

Наличие inf доказывается аналогично или переходом к множеству $-A$. □

Отсюда получается полезное утверждение о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

5.2 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \le a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.

Аналогично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \le a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.

Доказательство. Докажем только первое утверждение. Второе доказывается аналогично или переходом к последовательности $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $M - \varepsilon < a_N$ (иначе $M - \varepsilon$ — верхняя грань, чего не может быть). В силу того, что последовательность неубывающая, при каждом $n > N$ выполнено

$$M - \varepsilon < a_N \le a_n \le M < M + \varepsilon.$$

Тем самым, по определению $M = \lim a_n$. □

В качестве примера см. п.1 билет 6.

6 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекурентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), a_1 = 2$, обоснование сходимости и оценка скорости сходимости. Число e (определение и обоснование корректности).

6.1 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекурентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0,\ a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0,\ a + b \ge 2\sqrt{ab}$
Заметим, что

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \ge \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому $a_n \ge \sqrt{2}$. Кроме того $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \le \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n$.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу и не возрастает, тогда по т. Вейерштрасса у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т.к. $a_n \ge \sqrt{2} > 0$, то и $a > 0$. Тогда, по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$, откуда $a = \sqrt{2}$.

Исследуем теперь скорость сходимости:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \le \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \le (a_n - \sqrt{2})^2.$$

Индуктивно получаем

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}| \le (a_n-\sqrt{2})^2 \le (a_{n-1}-\sqrt{2})^4 \le (a_{n-2}-\sqrt{2})^8 \le (a_1-\sqrt{2})^{2^n} = (2-\sqrt{2})^{2^n}.$$

Заметим, что $q := 2-\sqrt{2} < 1$, поэтому полученная скорость сходимость q^{2^n} быстрее экспоненциальной q^n (в смысле количества применений рекуррентной формулы для достижения заданной точности).

6.2 Число e

У последовательности $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ есть предел, который называют **числом** e.
Пусть $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. По биному Ньютона

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big).$$

Отсюда, во-первых, получаем, что

$$a_n \le 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \le 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 3,$$

где было использовано неравенство $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k \ge 2^{k-1}$ при $k \ge 2$. Во-вторых,

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) \le 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big)$$
$$\le 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big) = a_{n+1}.$$

Таким образом, последовательность a_n — неубывает и ограничена сверху, а значит имеет предел, который называют **числом** e.

7 Подпоследовательность и частичные пределы. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности, их связь с множеством частичных пределов этой последовательности. Критерий сходимости последовательности в терминах частичных пределов.

7.1 Определение подпоследовательности. Её предел(частичный предел последовательности).

Пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так же, пусть задана какая-то возрастаюшая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.
Тогда, говорят, что последовательность $b_k = a_{n_k}$ является **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Тогда **частичным пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.
То есть другими словами число $a \in \mathbb{R}$ называют **частичным пределом**, если a является пределом некоторой бесконечной подпоследовательности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

7.2 Предложение №1

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.

Докозательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и пусть $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - некоторая подпоследовательность.
Тогда по поределению предела $\forall(\epsilon > 0)\ \exists N(\epsilon) : \forall(n > N(\epsilon))\ |a_n - A| < \epsilon$.
Теперь рассмотрим индексы подпоследовательности. Т.к. $1 \leqslant n_1$ и $n_{k-1} < n_k$ по индукции получим, что $k \leqslant n_k$. Тогда заметим, что для всех $k > N$, получим, что $|a_{n_k} - A| < \epsilon$.

7.3 Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности.

Рассмотрим последоваетельность $M_n := \sup\limits_{k>n} a_k$ и $m_n := \inf\limits_{k>n} a_k$. Ясно, что посделовательность M_n - неубывает, а последовательность m_n - невозрастает. Поэтому для ограниченной последовательности существует:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} m_n - \textbf{нижний частичный предел}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} M_n - \textbf{верхний частичный предел}.$$

7.4 Теорема №1

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ – частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой другой предел принадлежит отрезку

$$[\varliminf_{n\to\infty} a_n, \varlimsup_{n\to\infty} a_n]$$

Доказательство. Покажем, что $M := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ – частичный предел. Для этого индуктивно построим последовательность, которая сходится к $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть индексы $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ уже построены. Тогда подберём такой номер $n_{k+1} > n_k$, что

$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq M_{n_k}.$$

Как подпоследовательность сходящейся последовательности $M_{n_k} \to M$, поэтому по теореме о сходимости зажатой последовательности (по теореме о двух полицейских и преступнике) получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$.

Аналогично проверяется и то, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ – частичный предел.

Пусть теперь a – частичный предел. Это означает, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leq a \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$..

7.5 Следствие из Теоремы 1

Теорема Больцано - во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.

7.6 Теорема №2

Ограниченная последовательность сходится тогда, и только тогда, когда множество её частичных пределов состоит из одного элемента.

Докозательство. То, что у сходящейся последовательности только один предел, уже доказано ранее.
Теперь предположим, что у ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ только один частичный предел. По доказаному в Теорема №1 в частности это означает, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = A$$

Тогда, $m_{n-1} \leqslant a_n \leqslant M_{n-1}$, и по теореме о сходимости зажатой последовательности, получаем что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

8 Теорема Больцано. Фундаментальная последовательность и критерий Коши. Расходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$, обоснование сходимости.

8.1 Теорема Больцано

(Следствие теоремы о связи верхнего и нижнего частичного предела с множеством частичных пределов. *Теорема 23*)
Во всекой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность.)

8.2 Фундаментальная последовательность и критерий Коши

Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна (или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждых $n, m > N(\varepsilon)$. То же самое утверждение можно переписать в кванторах $\forall - \exists$ следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Пример.

1) Последоввательность $a_n = \frac{1}{n}$ фундаментальная. Действительно

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\},$$

поэтому при $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ выполнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$

2) Последовательность $a_n = (-1)^n$ не фундаментальная. Действительно, если мы возьмем $\varepsilon = 1$, то, какой бы ни был номер $N(\varepsilon)$, для произвольного $n > N(\varepsilon)$ выполнено $|a_n - a_{n+1}| = 2 > 1$.

Критерий Коши. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сх-ся $\iff$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - посл. Коши

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $\varepsilon > 0$ По определению сходящейся последовательности найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, где $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда при $n, m > N$ выполнено

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_m + a - a| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

$\Longleftarrow$(План: 1. Ограничена 2. предел по т. Больцано 3. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$)

1. Заметим, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. $\varepsilon = 1$ $\exists N : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < 1$ (из условия). Отсюда $|a_n| = |a_n + a_{N+1} - a_{N+1}| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$, при $n > N$. Значит,
$$|a_n| < M = max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, ..., |a_N|\}.$$

2. У ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано есть хотя бы один частичный предел a. $\Rightarrow \exists\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \to a$

3. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists k_0 : k > k_0$ $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Кроме того, в силу фундаментальности найдется номер N, для которого $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $n, m > N$. Пусть k выбрано так, что $k > k_0$ и $n_k > N$, тогда при каждом $n > N$ выполнено, что
$$|a_n - a| = |a_n + a_{n_k} - a_{n_k} - a| < |a_n \underset{<\varepsilon}{-} a_{n_k}| + |a \underset{<\varepsilon}{-} a_{n_k}| < 2\varepsilon$$

□

8.3 Расходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Проверим отридцание фундаментальности

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall N : \exists n, \underset{n>m}{m} > N : |a_n - a_m| > \varepsilon$$

$|a_n - a_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + ... + \frac{1}{n} \geqslant \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$ Для $\varepsilon = \frac{1}{2}, n = 2m, m > N \Longrightarrow |a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow$ не выполнено условие Коши $\Longrightarrow$ последовательность расходится

8.4 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1+\frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$, обоснование сходимости

Заметим, что $a_n \geqslant 1$ и

$$|a_{n+1}-a_n| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_{n-1}-a_n|}{(1+a_n)(1+a_{n+1})} \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-1}-a_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_2-a_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{2}$$

Отсюда при $m > n$

$$|a_m-a_n| \leqslant |a_m-a_{m-1}|+...+|a_{n+1}-a_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Т.к. $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0 : \forall\varepsilon > 0\ \exists N : n > N\ \left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$. Тем самым, для последовательности $an_{n=1}^{\infty}$ выполнен критерий Коши, а значит существует $A = \lim_{n\to\infty} a_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+A}$ $A(A+1) = A+1+1 \iff A^2 = 2 \iff A = \sqrt{2}$ т.к. $a_n \geqslant 0$

9 Числовые ряды

9.1 Числовой ряд

Пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда числовым рядом с членами a_n называется выражение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

9.2 Переформулировка критерия Коши для числовых рядов

Ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N \to \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = |S_n - S_m| < \varepsilon$$

9.3 Необходимое условие сходимости числового ряда

Если числовой ряд сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$

Доказательство. Из критерия коши следует, что:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N+1 \to |a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

□

9.4 Абсолютная и условная сходимость рядов

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится

9.5 Сходимость абсолютно сходящегося ряда

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ тоже сходится

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует выполнение критерия Коши для этого ряда, то есть что:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N \rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

но так как $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| \geq \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right|$, то критерий Коши выполнен и для ряда без модулей. $\square$

9.6 Признак сравнения

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$ тогда если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
Если же $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

9.7 Признак Коши

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность, $a_n \geq 0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство. Заметим, что $a_2 + 2a_3 + ... + 2^{n-1}a_{2^n} \leq a_2 + a_3 + ... + a_{n^k} \leq 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^n a_{2^n}$, тогда из ограниченности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ следует ограниченность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и наоборот $\square$

9.8 Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$

Доказательство. При $p < 0$ слагаемое $\frac{1}{k^p}$ не стремится к нулю следовательно ряд расходится. При $p > 0$: по признаку Коши ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}} =$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2^{1-p})^k$, а это сумма геометрической прогрессии, которая сходится при $2^{1-p} < 1$, то есть при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ $\square$

10 Открытые и замкнутые множества на прямой, их свойства, связанные с теоретико-множественными операциями. Внутренние, предельные и граничные точки множеств. Четыре эквивалентных описания замкнутого множества.

10.1 Открытые и замкнутые множества на прямой, их свойства, связанные с теоретико-множественными операциями.

Определение 1.
ε-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
Определение 2.
Проколотая ε-окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $B'_\varepsilon(a) := B_\varepsilon \backslash \{a\}$.
Определение 3.
Множество $U \subset \mathbb{R}$ называется **открытым**, если для любой $a \in U$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon \subset U$.
Определение 4.
Множество $V \subset \mathbb{R}$ называется **замкнутым**, если его дополнение открыто, т.е. $\mathbb{R}\backslash V-$ открытое множество.
Пример.

1. Всякий интервал (α, β) - открытое множество, т.к. для каждой точки $a \in (\alpha, \beta)$ множество $B_{\min\{\frac{a-\alpha}{2}, \frac{\beta-a}{2}\}} \subset (\alpha, \beta)$. А также вся числовая прямая, лучи $(-\infty, \alpha), (\beta, +\infty)$, пустое множество будут являться открытыми.

2. Отрезок $[\alpha, \beta]$, вся числовая прямая, лучи $(-\infty, \alpha], [\beta, +\infty)$, пустое множество будут замкнутыми. (Если попросят доказать что-то отсюда - скажите, что дополнение будет открытым множеством).

Свойства.
Объединение(1.1) любого набора и пересечение(1.2) конечного набора открытых множеств будет открытым множеством.
Пересечение(2.1) любого набора и объединение(2.2) конечного набора замкнутых множеств будет замкнутым множеством.

Доказательство.

1.1 Пусть $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, причём все $U_\alpha-$ открытые множества. Если $a \in U$, тогда найдётся такой индекс α, что $a \in U_\alpha$. По определению найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \subset U_\alpha$. Значит, по определению операции объединения, $B_\varepsilon(a) \subset U$. Т.е. $U-$ открытое множество.

1.2 Пусть $U = \bigcap\limits_{j=1}^{N} U_j$, причём все $U_j -$ открытые множества. Если $a \in U$, то для каждого $j \in \{1, ..., N\}$ найдётся такое число $\varepsilon_j > 0$, что $B_{\varepsilon_j}(a) \subset U_j$. Пусть $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N\} > 0$. Тогда $B_\varepsilon(a) \subset B_{\varepsilon_j}(a) \subset U_j$ при каждом $j \in \{1, ..., N\}$. Значит, $B_\varepsilon(a) \subset U$ и $U -$ открытое множество.

2.1 Пусть $V = \bigcap\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$, причём все $V_\alpha -$ замкнутые множества. По формулам де Моргана $\mathbb{R} \backslash V = \mathbb{R} \backslash \bigcap\limits_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (\mathbb{R} \backslash V_\alpha)$. По определению замкнутого множества, множества $U_\alpha = \mathbb{R} \backslash V_\alpha -$ открыты. По доказанному в 1.1 свойству открытых множеств, множество $\mathbb{R} \backslash V$ также открыто, а значит множество $V -$ замкнуто.

2.2 Пусть $V = \bigcup\limits_{j=1}^{N} V_j$, причём все $V_j -$ замкнутые множества. По формулам де Моргана $\mathbb{R} \backslash V = \mathbb{R} \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{N} V_j = \bigcap\limits_{j=1}^{N} (\mathbb{R} \backslash V_j)$. По определению замкнутого множества, множества $U_j := \mathbb{R} \backslash V_j -$ открыты. По уже доказанному свойству(1.2) открытых множеств, множество $\mathbb{R} \backslash V$ также открыто, а значит множество $V -$ замкнуто.

$\square$

10.2 Внутренние, предельные и граничные точки множеств.

Определение 5.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **внутренней** точкой множества M, если она входит в это множество M с некоторой своей окрестностью <u>полностью</u> (т.е. $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset M$).

Определение 6.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **предельной** точкой множества M, если каждая её проколотая окрестность имеет непустое пересечение с множеством M (т.е. $\forall \varepsilon > 0 : B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$).

Определение 7.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **граничной** точкой множества M, если каждая её окрестность имеет непустое пересечение как с множеством M, так и с его дополнением (т.е. $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$ и $B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \backslash M) \neq \emptyset$).

Пример.

Для множества $M = (0, 1] \cup \{3\}$ точки $0, \frac{1}{2}, 1$ будут предельными, а точки $-1, 3$ не будут. Точки $0, 1, 3$ будут граничными, а -1 и $\frac{1}{2}$ не будут. Точка $\frac{1}{2}$ будет внутренней, а точки $-1, 0, 1, 3$ не будут.

Замечание.

Точка a предельная для M тогда и только тогда, когда найдётся сходящаяся к a последовательность $a_n \in M \backslash \{a\}$.

Доказательство. Действительно, если a предельная, то для каждого n найдётся точка $a_n \in B'_{1/n}(a) \cap M$. Тогда $a_n \in M \backslash \{a\}$ и $a_n \to a$.

Наоборот (если есть сходящаяся к a последовательность, то $a-$ предельная точка для M), если $a_n \in M \backslash \{a\}$, то каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Таким образом, $a_{N+1} \in B'_\varepsilon(a) \cap M$. $\square$

10.3 Четыре эквивалентных описания замкнутого множества.

Теорема
Следующие утверждения равносильны.

1) V *- замкнутое множество;*

2) V *содержит все свои граничные точки;*

3) V *содержит все свои предельные точки*

4) *если* $a_n \in V$ *и* $a_n \to a$*, то* $a \in V$*.*

Доказательство.

$1) \Rightarrow 2)$ *(Если V - замкнутое множество, то оно содержит все свои граничные точки)*:
Пусть a граничная точка для V, для которой выполнено, что $a \notin V$, то $a \in \mathbb{R}\backslash V$ - открытое множество. Это значит, что найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\epsilon(a) \subset \mathbb{R}\backslash V$ (т.к. $\mathbb{R}\backslash V$ - открытое множество). Т.е. нашлась окрестность $B_\varepsilon(a)$, которая не пересекается с множеством V, а значит a не граничная точка.

$2) \Rightarrow 3)$ *(Если V содержит все свои граничные точки, то оно содежит и все свои предельные)*:
Пусть a предельная для V точка и предположим, что $a \notin V$. Значит a и не граничная точка (т.к. V содержит все свои граничные точки). Поэтому найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \cap V = \emptyset$. Таким образом, $B'_\varepsilon(a) \cap V = \emptyset$ и a не предельная для V.

$3) \Rightarrow 4)$ *(Если V содержит все свои предельные точки, то если $a_n \in V$ и $a_n \to a$, то $a \in V$)*:
Пусть $a_n \in V, a_n \to a$. Если $a \notin V$, то $a \neq a_n$ при каждом n. По замечанию выше $a-$ предельная точка для множества V, что противоречит тому, что V содержит все свои предельные точки.

$4) \Rightarrow 1)$ *(Если $a_n \in V$ и $a_n \to a$, то $a \in V$. А отсюда $V-$ замкнутое множество)*:
Пусть V - не замкнуто. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\backslash V$ - не открыто $\Rightarrow$ существует такое $a \in \mathbb{R}\backslash V : B_\varepsilon(a) \cap V \neq \emptyset$ и при этом $B_\varepsilon(a) \not\subset V$. Тогда пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists a_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap V \Rightarrow a_n \in V$ и $a_n \to a \Rightarrow a \in V$ (по условию). Получили противоречие, а значит V - замкнуто.

□

11 Компакты на $\mathbb{R}$: определение, 3 базовых свойства. Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка. Два эквивалентных описания компактных множеств на $\mathbb{R}$.

11.1 Определение.

Определение 6. Говорят, что набор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ образует **покрытие** множества $M \subset \mathbb{R}$, если $M \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ (также гооврят, что система $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является покрытием множества M).

Определение 7. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется **компактом** (или компактным множеством), если для каждого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества K открытыми множествами U_α существует конечный поднабор $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$ этих множеств все еще покрывающий K (т.е. $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$).

Кратко иногда это свойство формулируют так: Множество K — компакт, если из каждого покрытия этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

11.2 Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка.

Теорема 8 (Борель–Гейне–Лебег)**.** *Каждый отрезок является компактным множеством.*

Доказательство. Предположим, что есть такой отрезок $[a, b]$ и такое его покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ открытыми множествами, что никакой конечный поднабор этих множеств не покрывает $[a, b]$. Рассмотрим подотрезки $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не покрывает эту половинку (если бы для каждой из половинок был бы покрывающий ее конечный поднабор, то и весь отрезок бы покрывался объединением этих конечных поднаборов). Обозначим эту половинку $[a_1, b_1]$. Снова поделим отрезок пополам и рассмотрим подотрезки $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не покрывает эту половинку. Обозначим эту половинку $[a_2, b_2]$. Продолжая описанную процедуру индуктивно, строим последовательность вложенных отрезков $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ с тем свойством, что никакой конечный поднабор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не покрывает отрезок $[a_n, b_n]$.

Пусть $c \in \bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$. Т.к. $c \in [a, b]$, то для некоторого индекса α точка $c \in U_\alpha$. Т.к. U_α — открытое множество, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_\alpha$. Т.к. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, то $a_n \to c$ и $b_n \to c$ ($|c - a_n| \le |b_n - a_n|; |c - b_n| \le |b_n - a_n|$). Тогда для некоторого номера n_0 выполнено $a_{n_0} \in (c - \varepsilon, c]$ и $b_{n_0} \in [c, c+\varepsilon)$. Т.е. $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_\alpha$, что противоречит построению отрезков $[a_n, b_n]$. $\square$

Пример. $(0, 1)$ – не компакт.
$\left((0, 1 - \frac{1}{n})\right) = U_n$
$(0, 1) \subset \bigcup_{k=1}^\infty U_k$
$U_{k_1} \cup U_{k_2} \cup ... \cup U_{k_n} = \left(0, 1 - \frac{1}{max(k_1, k2, ..., k_n)}\right)$ (предъявили покрытие, для которого не существует конечный набор множеств, все еще покрывающий $(0, 1)$)

11.3 3 базовых свойства компактных множеств.

Лемма 9. *Пусть K — компакт. Тогда*
1) *K — ограниченное множество;*
2) *K — замкнутое множество;*
3) *замкнутое подмножество K также компактно.*

Доказательство. 1) Заметим, что $K \subset \bigcup_{n=1}^\infty (-n, n)$. Т.к. K — компакт, то у данного покрытия найдется конечное подпокрытие, т.е. $K \subset \bigcup_{j=1}^m (-n_j, n_j)$. Пусть $C := \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Тогда $K \subset (-C, C)$.

2) Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus K$. Тогда $K \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n$, где $U_n := (-\infty, a - \frac{1}{n}) \cup (a + \frac{1}{n}, +\infty)$. Выбрав конечное подпокрытие, получаем, что $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{n_j}$. Пусть $C := \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Тогда $K \subset (-\infty, a - \frac{1}{C}) \cup (a + \frac{1}{C}, +\infty)$ и $B_{1/C}(a) \subset \mathbb{R} \setminus K$.

3) Пусть $V \subset K$, V — замкнутое множество. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — покрытие множества V. Тогда набор, состоящий из множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\mathbb{R} \setminus V$ будет покрытием множества K открытыми множествами. В нем можно найти конечный поднабор $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$ и, возможно, $\mathbb{R} \setminus V$, покрывающий множество K. Тогда множество V заведомо покрывается набором $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$. $\square$

11.4 Два эквивалентных описания компактных множеств на $\mathbb{R}$.

Следствие 10. *Множество $K \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Компактные множества обязаны быть замкнутыми и ограниченными. Наоборот, если K ограниченное множество, то $K \subset [-C, C]$ для некоторого числа $C > 0$. Т.к. отрезок — компактное множество, а K — замкнутое множество, то K также будет компактным множеством по предыдущей лемме. □

Следствие 11. *Множество $K \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда из каждой последовательности элементов этого множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.*

Доказательство. Если множество K — компактно, то оно замкнуто и ограничено. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$. По теореме Больцано в данной последовательности найдется сходящаяся подпоследовательность $a_{n_k} \to a$. В силу замкнутости множества K получаем, что $a \in K$ (см. теорему 10.3).

Наоборот, пусть из каждой последовательности элементов множества K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Если бы множество K не являлось ограниченным, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ была бы точка $a_n \in K$, $|a_n| > n$. Из такой последовательности невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть теперь $a_n \in K$, $a_n \to a$. По условию, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность a_{n_k}, сходящуюся к точке множества K, т.е. $a_{n_k} \to b \in K$. В силу единственности предела и совпадения предела подпоследовательности с пределом всей последовательности получаем, что $a = b \in K$. □

12 Определения предела функции (по множеству) по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Свойства предела функции (единственность, линейность, предел произведения и отношения, предел и неравенства, ограниченность, отделимость, предел композиции). Замечательные пределы.

12.1 Предел функции по Коши

Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset R$ и a - предельная для D точка, тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff$$
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x) - A| < \epsilon$$

12.2 Предел функции по Гейне

Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset R$ и a - предельная для D точка, тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff$$
$$\forall \{x_n\} \in D \backslash \{a\} : \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

12.3 Эквивалентность двух определений

От Коши к Гейне:
Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ в смысле коши, тогда рассмотрим последовательность точек $x_n \in D\backslash\{a\}$: $x_n \to a$, по определению предела по коши

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x) - A| < \epsilon$$

последовательность $x_n \to a$, то есть

$$\exists N : \forall n > N \to x_n \in \beta_\delta(a)$$

при $n > N$ $x_n \in D \backslash \{a\} \cap \beta_\delta(a)$, то есть при $n > N$ выполняется $|f(x_n) - A| < \epsilon$, что и означает, что A - предел функции по гейне

От Гейне к Коши:

Пусть число A не является пределом функции f в точке a в смысле коши, тогда это означает, что

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta \in D \cap \beta'_\delta(a) : |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon$$

по определению по гейне: для последовательности точек $x_{1/n} \in D \backslash \{a\}$ (то есть берем $\delta = 1/n$) выполняется, что $\{x_{1/n}\} \to a$ но заметим, что $|f(x_{1/n}) - A| \geq \epsilon$, тогда A не является пределом f в смысле гейне

12.4 Свойства

Пусть функции f, g, h определены на некотором множестве $D \subset R$ и пусть a - предельная для D точка, тогда выполнены следующие свойства:

• Единственность:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} f(x) = B \Rightarrow A = B$$

• Линейность:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B \Rightarrow \\ \lim_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B \\ \forall \alpha, \beta \in R \end{gathered}$$

• Предел произведения:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

• Предел частного:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B \neq 0, \forall x \in D \to g(x) \neq 0 \Rightarrow \\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \end{gathered}$$

• Предел и неравенства: (входит ли сюда лемма о милиционерах или нет? Жду ответ Музы)

$$\begin{gathered} \exists \delta > 0 : \; \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to f(x) \leq g(x), \\ \lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B \Rightarrow \\ \mathrm{A} \leq B \end{gathered}$$

• Ограниченность:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0, C > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x)| \leq C$$

• Отделимость:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \to |f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

Все свойства кроме отделимости и ограниченности следуют из аналогичных свойств для предела последовательности и определения через Гейне (так написано в учебнике).
• Доказательство ограниченности: найдется такое $\delta > 0 : |f(x) - A| < 1$ при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$, таким образом при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ выполнено $|f(x)| < 1 + |A|$
• Доказательство отделимости: найдется такое $\delta > 0 : |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$, таким образом при $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ будет выполнено

$$|A| - |f(x)| \leq |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

• Предел композиции:
Пусть $f : D \to E, g : E \to R, a-$ предельная точка множества D, b - предельная точка множества E, $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) = c$ и есть такая проколотая окрестность $\beta'_\delta(a)$ точки a, что $f(x) \neq b$ для каждой точки $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$. Тогда $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$
Доказательство:
Пусть $x_n \to a, x_n \in D$. $x_n \neq a$. Т.к. $f(x) \neq b$ для каждой точки $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$, то найдется такой номер N, что $f(x_n) \neq b$ при $n > N_0$. Поэтому последовательность $f(x_{N+1}), f(x_{N+2}), ...$ состоит из элементов множества E, ни один из этих элементов не совпадает с b и эта последовательность сходится к b. Поэтому последовательность $g(f(x_{N+1})), g(f(x_{N+2})), ...$ сходится к c. Значит и вся последовательность $\{g(f(x_n))\}$ сходится к c

12.5 Замечательные пределы

• Первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Доказательство: для $x \in (0, \pi/2)$ рассмотрим два треугольника и площадь сектора, сравним их и получим (сначала треугольник внутри круга, потом сектор, потом треугольники со стороной по касательной к кругу)

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \leq \tfrac{x}{2} \leq \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

откуда, в силу четности при $x \in (-\pi/2, \pi/2), x \neq 0$ выполнено

$$\cos x \leq \tfrac{\sin x}{x} \leq 1$$

Утверждение теперь следует из теоремы о зажатой функции, т.к. $\lim_{x\to y} \cos x = \cos y$
Действительно, $|\cos x - \cos y| = 2|\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})| \leq 2|\sin(\frac{x-y}{2})| \leq |x - y|$

• Второй замечательный предел: $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
Доказательство: рассмотрим функции $f(x) := (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]}, g(x) := (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1}$, тогда $f(x) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq g(x)$, кроме того, т.к. $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e$, то и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = e$. Утверждение теперь следует из теореме о пределе зажатой функции.

13 Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовани односторонних пределов монотонной ограниченной функции.

13.1 Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 65 (Критерий Коши). Пусть f: D→ R и a предельная точка D. Предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждых $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Доказательство. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной точки $x \in B'_\delta(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - A| < \epsilon/2$. Тогда для произвольных точек $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \epsilon$.

Предположим, что выполнено условие Коши. Тогда для произвольной последовательности точек $x_n \in D\setminus$ {a}, $x_n \to a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной, а значит сходится. Пусть $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$. Если есть другая последовательность точек $y_n \in D\setminus\{a\}, y_n \to a$, то рассмотрим новую последовательность $z_{2k1} = x_k, z_{2k} = y_k$, т.е. эта последовательность вида $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots \subset D\setminus\{a\}$. Эта последовательность также сходится к a, поэтому последовательность образов $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots$ снова оказывается фундаментальной, а потому сходится. В силу того, что предел подпоследовательности сходящейся последовательности совпадает с пределом всей последовательности, получаем, что $\lim_{x\to\infty} f(y_n) = A$. Таким образом, доказано существование предела по Гейне.

13.2 Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовани односторонних пределов монотонной ограниченной функции.

Пусть $D_a^+ := D \cap (a, +\infty)$ и $D_a^- := D \cap (-\infty, a)$
Определение 66. Пусть точка a предельная для множества D_a^+ и существует предел функции f по множеству D_a^+ в точке a. Этот предел называют пределом справа функции f в точке a и обозначают $\lim_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично определяется предел слева, который обозначают $\lim_{x\to a-0} f(x)$.

Теорема 67 (Вейерштрасс). Пусть f не убывает и ограничена на множестве D, a - предельная точка множества D_a^-. Тогда существует предел слева

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = sup\{f(x) : x \in D_a^-\}$$

Пусть f не убывает и ограничена на множестве D, a предельная точка множества D_a^+.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = inf\{f(x) : x \in D_a^+\}$$

Аналогичные утверждения с заменой inf на sup справедливы и для невозрастающей функции.
Доказательство. Пусть M $= sup\{f(x) : x \in D_a^-$. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такая точка $x_0 \in D_a^-$, что $M - \epsilon < f(x_0)$. Т.к. f не убывает на D_a^-, то для каждого $x \in (x_0, a) \cap D'_a$ выполнено $M - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M < M + \epsilon$. Тогда, взяв $\delta := a - x_0$ получаем, что для каждого $x \in B'_\delta(a) \cap D_a^-$ выполнено $|f(x) - M| < \epsilon$.