Доказательство. Докажем только первое утверждение. Второе доказывается аналогично или переходом к последовательности $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $M = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $M - \varepsilon < a_N$ (иначе $M - \varepsilon$ — верхняя грань, чего не может быть). В силу того, что последовательность неубывающая, при каждом $n > N$ выполнено

$$M - \varepsilon < a_N \le a_n \le M < M + \varepsilon.$$

Тем самым, по определению $M = \lim a_n$. □

Пример 21. Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{2}{a_n}\big)$, $a_1 = 2$. Заметим, что

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \ge \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому $a_n \ge \sqrt{2}$. Кроме того $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{2}{a_n}\big) \le \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\big) = a_n$. По доказанной теореме у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т.к. $a_n \ge \sqrt{2} > 0$, то и $a > 0$. Тогда, по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}\big(a + \frac{2}{a}\big)$, откуда $a = \sqrt{2}$.

Исследуем теперь скорость сходимости:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \le \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \le (a_n - \sqrt{2})^2.$$

Индуктивно получаем

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \le (a_n - \sqrt{2})^2 \le (a_{n-1} - \sqrt{2})^4 \le (a_{n-2} - \sqrt{2})^8 \le (a_1 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} = (2 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}.$$

Заметим, что $q := 2 - \sqrt{2} < 1$, поэтому полученная скорость сходимость q^{2^n} быстрее экспоненциальной q^n (в смысле количества применений рекуррентной формулы для достижения заданной точности).

5. Точные верхняя и нижняя грани. Теорема Вейерштрасса.

Определение 17. Пусть A — непустое подмножество вещественных чисел.

Число b называется **верхней гранью** множества A, если $a \leq b$ для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна верхняя грань, то множество называют **ограниченным сверху**. Наименьшая из верхних граней множества A называется **точной верхней гранью** множества A и обозначается $\sup A$ (супремум).

Число b называется **нижней гранью** множества A, если $b \leq a$ для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называют **ограниченным снизу**. Наибольшая из нижних граней множества A называется **точной нижней гранью** множества A и обозначается $\inf A$ (инфимум).

Ограниченное и сверху и снизу множество называется **ограниченным**.

Пример 18. Пусть $A = (0, 1)$. Тогда $\inf A = 0$ и $\sup A = 1$. Действительно, 0 — нижняя грань, а 1 — верхняя грань. Кроме того, если b — какая-то нижняя грань, то $b \leq \frac{1}{n}$, а значит и $b \leq 0$ (по теореме о переходе к пределу в неравенстве).

Аналогично проверяется, что для каждой верхней грани b выполнено $1 \leq b$.

Установим существование точных верхних (нижних) граней у ограниченных сверху (снизу) множеств.

Теорема 19. *Пусть A — непустое ограниченное сверху (снизу) множество. Тогда существует точная верхняя (нижняя) грань* $\sup A$ *(*$\inf A$*).*

Доказательство. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество из условия, а B — непустое (по условию) множество его верхних граней. Тогда A левее B и существует разделяющий A и B элемент c. Он является верхней гранью для A и $c \leq b$ для каждой верхней грани множества A. По определению $c = \sup A$.

Наличие inf доказывается аналогично или переходом к множеству $-A$. □

Отсюда получается полезное утверждение о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

Теорема 20 (Вейерштрасс)**.** *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.*

Аналогично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.

Задание

Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \{\frac{3}{n}\}$ имеет предел и найти его.

Решение

Данная последовательность ограничена снизу нулем, так как для любого натурального $n, x_n = \frac{3}{n} > 0$.

$$x_n - x_{n+1} = \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = \frac{3n+3-3n}{n(n+1)} = \frac{3}{n(n+1)}$$

Далее исследуем заданную последовательность на монотонность, для этого рассмотрим разность соседних её членов:

$$\frac{3}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

Оценим полученную разность: для любого натурального n

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = \left[\frac{3}{\infty}\right] = 0$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывающая, тогда по теореме Вейерштрасса, она имеет предел. Найдем его:

Ответ

Последовательность $\{x_n\} = \{\frac{3}{n}\}$ сходится и ее предел равен нулю.

Задание

Исследовать на сходимость последовательность $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$, если $a_1=2$.

Решение

Предположим, что предел данной последовательности существует, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a, \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{6+a}$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, приходим к уравнению относительно a:

$$a=\sqrt{6+a}$$

Решая его, получим

$$a^2-a-6=0 \Rightarrow (a-3)(a+2)=0 \Rightarrow a_1=3, a_2=-2$$

Значение $a_2=-2$ не подходит, так как предел неотрицательных чисел не может быть отрицательным числом. Следовательно, если предел заданной последовательности существует, то он равен 3.

Докажем существование предела. Для этого, по теореме Вейерштрасса, последовательность должна быть монотонной и ограниченной. Рассмотрим разность

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\sqrt{6+a_n}=\frac{(a_n-\sqrt{6+a_n})\cdot(a_n+\sqrt{6+a_n})}{a_n+\sqrt{6+a_n}}=$$

$$=\frac{a_n^2-a_n-6}{a_n+\sqrt{6+a_n}}=\frac{(a_n-3)(a_n+2)}{a_n+\sqrt{6+a_n}}$$

Знаменатель последней дроби положительный для любого значения $n\in N$, а числитель отрицателен при $0\le a_n<3$. Таким образом, для $0\le a_n<3, a_n-a_{n+1}<0 \Rightarrow a_n<a_{n+1}$ и заданная последовательность является монотонно возрастающей. **Получается, что последовательность является возрастающей только до третьего члена?**

Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность была ограниченной, необходимо, чтобы она была ограничена сверху. Докажем, что $a_n<3$, для любого $n\in N$. Доказательство проведем методом математической индукции.

1 шаг. Проверим, выполнение неравенство при $n=1$. Действительно,

$$a_1=2<3$$

2 шаг. Предположим, что для $n=k$ неравенство выполняется: $a_k<3$.

3 шаг. Проверим выполнение неравенства для $n=k+1$:

$$a_{k+1}=\sqrt{6+a_k}<\sqrt{6+3}=3 \Rightarrow a_{k+1}<3$$

Следовательно, доказано, что неравенство $a_n<3$ выполняется для любого $n\in N$. И по теореме Вейерштрасса заданная последовательность сходится.

Ответ

Последовательность $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$, $a_1=2$ является сходящейся.