1 Компакты на $\mathbb{R}$: определение, 3 базовых свойства. Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка. Два эквивалентных описания компактных множеств на $\mathbb{R}$.

1.1 Определение.

Определение 1. Говорят, что набор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ образует **покрытие** множества $M \subset \mathbb{R}$, если $M \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ (также гооврят, что система $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является покрытием множества M).

Определение 2. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется **компактом** (или компактным множеством), если для каждого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ множества K открытыми множествами U_α существует конечный поднабор $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}\}$ этих множеств все еще покрывающий K (т.е. $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$).

Кратко иногда это свойство формулируют так: Множество K — компакт, если из каждого покрытия этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

1.2 Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка.

Теорема 3 (Борель–Гейне–Лебег)**.** *Каждый отрезок является компактным множеством.*

Доказательство. Предположим, что есть такой отрезок $[a, b]$ и такое его покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ окрытыми множествами, что никакой конечный поднабор этих множеств не покрывает $[a, b]$. Рассмотрим подотрезки $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не покрывает эту половинку (если бы для каждой из половинок был бы покрывающий ее конечный поднабор, то и весь отрезок бы покрывался объединением этих конечных поднаборов). Обозначим эту половинку $[a_1, b_1]$. Снова поделим отрезок пополам и рассмотрим подотрезки $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не покрывает эту половинку. Обозначим эту половинку $[a_2, b_2]$. Продолжая описанную процедуру индуктивно, строим последовательность вложенных отрезков $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ с тем свойством, что никакой конечный поднабор множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ не покрывает отрезок $[a_n, b_n]$.

Пусть $c \in \bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$. Т.к. $c \in [a, b]$, то для некоторого индекса α точка $c \in U_\alpha$. Т.к. U_α — открытое множество, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_\alpha$. Т.к. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, то $a_n \to c$ и $b_n \to c$. Тогда для некоторого номера n_0 выполнено $a_{n_0} \in (c - \varepsilon, c]$ и $b_{n_0} \in [c, c + \varepsilon)$. Т.е. $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_\alpha$, что противоречит построению отрезков $[a_n, b_n]$. $\square$

1.3 3 базовых свойства компактных множеств.

Лемма 4. *Пусть K — компакт. Тогда*
1) *K — ограниченное множество;*
2) *K — замкнутое множество;*
3) *замкнутое подмножество K также компактно.*

Доказательство. 1) Заметим, что $K \subset \bigcup_{n=1}^\infty (-n, n)$. Т.к. K — компакт, то у данного покрытия найдется конечное подпокрытие, т.е. $K \subset \bigcup_{j=1}^m (-n_j, n_j)$. Пусть $C := \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Тогда $K \subset (-C, C)$.

2) Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus K$. Тогда $K \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n$, где $U_n := (-\infty, a - \frac{1}{n}) \cup (a + \frac{1}{n}, +\infty)$. Выбрав конечное подпокрытие, получаем, что $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{n_j}$. Пусть $C := \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Тогда $K \subset (-\infty, a - \frac{1}{C}) \cup (a + \frac{1}{C}, +\infty)$ и $B_{1/C}(a) \subset \mathbb{R} \setminus K$.

3) Пусть $V \subset K$, V — замкнутое множество. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие множества V. Тогда набор, состоящий из множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\mathbb{R} \setminus V$ будет покрытием множества K открытыми множествами. В нем можно найти конечный поднабор $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$ и, возможно, $\mathbb{R} \setminus V$, покрывающий множество K. Тогда множество V заведомо покрывается набором $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$. □

1.4 Два эквивалентных описания компактных множеств на $\mathbb{R}$.

Следствие 5. *Множество $K \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Компактные множества обязаны быть замкнутыми и ограниченными. Наоборот, если K ограниченное множество, то $K \subset [-C, C]$ для некоторого числа $C > 0$. Т.к. отрезок — компактное множество, а K — замкнутое множество, то K также будет компактным множеством по предыдущей лемме. □

Следствие 6. *Множество $K \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда из каждой последовательности элементов этого множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.*

Доказательство. Если множество K — компактно, то оно замкнуто и ограничено. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$. По теореме Больцано в данной последовательности найдется сходящаяся подпоследовательность $a_{n_k} \to a$. В силу замкнутости множества K получаем, что $a \in K$.

Наоборот, пусть из каждой последовательности элементов множества K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Если бы множество K не являлось ограниченным, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ была бы точка $a_n \in K$, $|a_n| > n$. Из такой последовательности невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть теперь $a_n \in K$, $a_n \to a$. По условию, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность a_{n_k}, сходящуюся к точке множества K, т.е. $a_{n_k} \to b \in K$. В силу единственности предела и совпадения предела подпоследовательности с пределом всей последовательности получаем, что $a = b \in K$. □