Билет номер 3:

Предел последовательности:

Опр. Если каждому числу n ∈ N поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

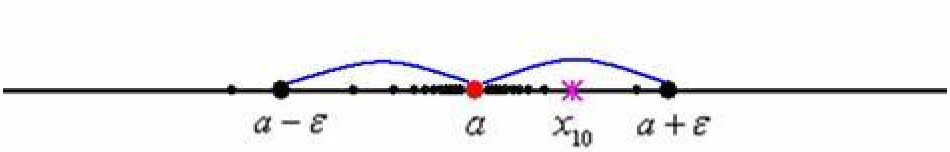
Опр. Говорят. что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число(номер) $N_{(\varepsilon)} \in \mathrm{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_{(\varepsilon)}$

Если переписать в кванторах:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{(\varepsilon)} \in \mathrm{N}: \ \forall n > N_{(\varepsilon)} \ |a_n - a| < \varepsilon$

Объяснение. (Всю эту муть предложил Коши)

Рассмотрим некоторую точку(a) и её произвольную ε окрестность:



! Значение $\varepsilon > 0$ всегда, Мы вправе выбрать его самостоятельно.

Предположим что в этой окрестностности находится множество членов(не обязательно все) некоторой последовательности x_n. Предположим что x_{10} попал в окресность: Тогда расстояние между точками a и x_{10}: $x_{10} - a < \varepsilon$ и чтобы избежать отрицательного расстояния $|x_{10} - a| < \varepsilon$

Число a будет называться пределом последовательности x_n, если для любой его окрестности($\forall \varepsilon > 0$)(заранее выбранной) существует натуральный номер($\exists N_{(\varepsilon)} \in \mathrm{N}$) такой что все члены последовательности с бОльшими номерами ($\forall n > N_{(\varepsilon)}$) окажутся внутри окрестности.

!!! Иными словами: какое бы малое ε мы бы не взяли рано или поздно “бесконечный хвост” последовательности полностью окажется в этой окрестности!!!

Пример.

Доказать что $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+3}\right) = 0$

Решение:

Рассмотрим произвольную ε окрестность точки $a = 0$. Проверим найдётся ли номер($\exists N_{(\varepsilon)} \in \mathrm{N}$) - такой что все члены с бОльшими номерами($\forall n > N_{(\varepsilon)}$) окажутся внутри этой окрестности:

$|x_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+3} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+3}\right| < \varepsilon$

Чтобы показать существование искомого номера $N_{(\varepsilon)}$ выразим n через ε

! $\frac{1}{n+3} > 0$ => можем убрать модуль

$\frac{1}{\varepsilon} < n + 3 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 3 \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3\right]$ (скобки так как внутри может получиться дробь)

Единственность предела

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = b \Rightarrow a = b$

Если $a \neq b \Rightarrow |a - b| = \varepsilon_0 > 0$. *Но по определению*:

Найдётся номер N_1 *для которого* $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ *и* $\exists N_2$: $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

при $n > N_2 \Rightarrow$ *при* $n > max(N_1 N_2)$:

$\varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0$. - противоречие

Арифметические свойства предела

Теорема 14 (арифметика предела). *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;
3) *если* $b \neq 0$, $b_n \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$.

1) Получаем, что при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| = |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

2) Замечаем, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется число $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$.

3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in \mathbb{N}$, для которого, при $n > N_3$, выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $n > \max\{N_2, N_3\}$ выполнено

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

Ограниченность сходящейся последовательности

Предложение 12. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N$. Отсюда $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит,

$$|a_n| \leq M = \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_N|\},$$

т.е. $-M = c \leq a_n \leq C = M$. □

Отделимость

Лемма 13 (об отделимости). *Если* $a_n \to a$ *и* $a \neq 0$, *то найдется номер* $N \in \mathbb{N}$, *для которого* $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ *при* $n > N$.

Доказательство. Действительно, взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в определении сходимости последовательности к числу a, получаем номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N$. Тогда, при $n > N$, выполнено $|a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно доказываемому утверждению. $\square$