Пример 21. Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{2}{a_n}\big)$, $a_1 = 2$. Заметим, что

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому $a_n \geq \sqrt{2}$. Кроме того $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{2}{a_n}\big) \leq \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\big) = a_n$. По доказанной теореме у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т.к. $a_n \geq \sqrt{2} > 0$, то и $a > 0$. Тогда, по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}\big(a + \frac{2}{a}\big)$, откуда $a = \sqrt{2}$.

Исследуем теперь скорость сходимости:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \leq (a_n - \sqrt{2})^2.$$

Индуктивно получаем

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (a_n - \sqrt{2})^2 \leq (a_{n-1} - \sqrt{2})^4 \leq (a_{n-2} - \sqrt{2})^8 \leq (a_1 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} = (2 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}.$$

Заметим, что $q := 2 - \sqrt{2} < 1$, поэтому полученная скорость сходимость q^{2^n} быстрее экспоненциальной q^n (в смысле количества применений рекуррентной формулы для достижения заданной точности).

6. Число e.

Пусть $a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$. По биному Ньютона

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big).$$

Отсюда, во-первых, получаем, что

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 3,$$

где было использовано неравенство $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1}$ при $k \geq 2$. Во-вторых,

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big)$$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) = a_{n+1}.$$

Таким образом, последовательность a_n — неубывает и ограничена сверху, а значит имеет предел, который называют **числом** e.