Коллокиум по курсу "Математический анализ", I курс, осенний семестр 2022

Группа БПМИ2211

23 октября 2022 г.

1 Теорема Больцано. Фундаментальная последовательность и критерий Коши. Расходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$, обоснование сходимости.

1.1 Теорема Больцано

(Следствие теоремы о связи верхнего и нижнего частичного предела с множеством частичных пределов. *Теорема 23*)
Во всекой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность. ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность.)

1.2 Фундаментальная последовательность и критерий Коши

Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна (или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждых $n, m > N(\varepsilon)$. То же самое утверждение можно переписать в кванторах $\forall - \exists$ следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon) \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Пример.

1) Последовввательность $a_n = \frac{1}{n}$ фундаментальная. Действительно

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leqslant max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\},$$

поэтому при $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ выполнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$

2) Последовательность $a_n = (-1)^n$ не фундаментальная. Действительно, если мы возьмем $\varepsilon = 1$, то, какой бы ни был номер $N(\varepsilon)$, для произвольного $n > N(\varepsilon)$ выполнено $|a_n - a_{n+1}| = 2 > 1$.

Критерий Коши. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сх-ся $\iff$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - посл. Коши

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $\varepsilon > 0$ По определению сходящейся последовательности найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, где $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда при $n, m > N$ выполнено

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_m + a - a| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

$\Longleftarrow$(План: 1. Ограничена 2. предел по т. Больцано 3. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$)

1. Заметим, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. $\varepsilon = 1$ $\exists N : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < 1$ (из условия). Отсюда $|a_n| = |a_n + a_{N+1} - a_{N+1}| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$, при $n > N$. Значит,
$$|a_n| < M = max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, ..., |a_N|\}.$$

2. У ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано есть хотя бы один частичный предел a. $\Rightarrow \exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \to a$

3. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 : k > k_0$ $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Кроме того, в силу фундаментальности найдется номер N, для которого $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $n, m > N$. Пусть k выбрано так, что $k > k_0$ и $n_k > N$, тогда при каждом $n > N$ выполнено, что
$$|a_n - a| = |a_n + a_{n_k} - a_{n_k} - a| < |a_n \underset{<\varepsilon}{-} a_{n_k}| + |a \underset{<\varepsilon}{-} a_{n_k}| < 2\varepsilon$$

□

1.3 Расходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Проверим отрицание фундаментальности

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N : \exists \underset{n>m}{n, m} > N : |a_n - a_m| > \varepsilon$$

$|a_n - a_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + ... + \frac{1}{n} \geqslant \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$ Для $\varepsilon = \frac{1}{2}, n = 2m, m > N \Longrightarrow |a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow$ не выполнено условие Коши $\Longrightarrow$ последовательность расходится

1.4 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$, обоснование сходимости

Заметим, что $a_n \geqslant 1$ и

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_{n-1} - a_n|}{(1+a_n)(1+a_{n+1})} \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-1} - a_n| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_2 - a_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{2}$$

Отсюда при $m > n$

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a_{m-1}| + ... + |a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

Т.к. $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : n > N\ \left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$. Тем самым, для последовательности $an_{n=1}^{\infty}$ выполнен критерий Коши, а значит существует $A = \lim_{n\to\infty} a_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+A}$ $A(A+1) = A + 1 + 1 \iff A^2 = 2 \iff A = \sqrt{2}$ т.к. $a_n \geqslant 0$