Коллоквиум по курсу "Математический анализ", I курс, осенний семестр 2022

Группа БПМИ2211

24 октября 2022 г.

1 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекурентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big), a_1 = 2$, обоснование сходимости и оценка скорости сходимости. Число e (определение и обоснование корректности).

1.1 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекурентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big)$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,\ a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,\ a + b \geq 2\sqrt{ab}$
Заметим, что

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому $a_n \geq \sqrt{2}$. Кроме того $a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\Big) = a_n$.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу и не возрастает, тогда по т. Вейерштрасса у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т.к. $a_n \geq \sqrt{2} > 0$, то и $a > 0$. Тогда, по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{2}{a}\Big)$, откуда $a = \sqrt{2}$.

Исследуем теперь скорость сходимости:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \leq (a_n - \sqrt{2})^2.$$

Индуктивно получаем

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (a_n - \sqrt{2})^2 \leq (a_{n-1} - \sqrt{2})^4 \leq (a_{n-2} - \sqrt{2})^8 \leq (a_1 - \sqrt{2})^{2^n} = (2 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

Заметим, что $q := 2 - \sqrt{2} < 1$, поэтому полученная скорость сходимость q^{2^n} быстрее экспоненциальной q^n (в смысле количества применений рекуррентной формулы для достижения заданной точности).

1.2 Число e

У последовательности $a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ есть предел, который называют **числом** e.
Пусть $a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$. По биному Ньютона

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big).$$

Отсюда, во-первых, получаем, что

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 3,$$

где было использовано неравенство $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1}$ при $k \geq 2$. Во-вторых,

$$\begin{aligned} a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность a_n — неубывает и ограничена сверху, а значит имеет предел, который называют **числом** e.