Вопрос 4

Переход к пределу в неравенствах

Утверждение 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *тогда* $\exists\, N\ \forall n > N : a_n \le b_n \Rightarrow a \le b$.

Доказательство. Предположим $a - b = \varepsilon_0 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists N_1,\ N_2 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}\ \forall\, n > N_1,\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}\ \forall\, n > N_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \epsilon_0 = a - b = a - a_n + a_n - b + b_n - b_n \le a - a_n + b_n - b < \varepsilon_0$ – противоречие. □

Лемма о зажатой последовательности

Лемма 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. *Тогда* $\exists N\ \forall n > N : a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. По определению $\forall \varepsilon\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N},\ N_2 \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon \forall n > N_1,\ |b - b_m| < \varepsilon \forall m > N_2 \Rightarrow \forall k > \max\{N, N_1, N_2\} : a - \varepsilon < a_k \le c_k \le b_k < a + \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ □

Вещественная прямая

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Множества $[a;\, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},\ (a;\, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ называются отрезком и интервалом соответственно.
Длина отрезка (интервала) – величина $b - a$.

Принцип вложенных отрезков

Теорема 1. *Всякая последовательность* $\{[a_n;\, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *вложенных отрезков (то есть таких, что* $[a_{n+1};\, b_{n+1}] \subset [a_n;\, b_n]$*) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, то есть* $b_n - a_n \to 0$*, то такая общая точка только одна.*

Доказательство. По условию $[a_{n+1};\, b_{n+1}] \subset [a_n;\, b_n]$, откуда $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$.
Пусть $n < m$, тогда $a_n \le a_m \le b_m \Rightarrow a_n < b_m$. При $n > m$ получим, что $a_n \le b_n \le b_m \Rightarrow a_n < b_m$.
Таким образом, $a_n < b_m\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$, тогда если $A := \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{b_m,\ m \in \mathbb{N}\}$, то A левее B.
Тогда по принципу полноты $\exists\, c \in \mathbb{R} :\ a_n \le c \le b_m\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$.
В частности, $a_n \le c \le b_n \Rightarrow c \in [a_n;\, b_n]$.

Пусть общих точек две: c и c'. Без ограничения общности, скажем, что $c < c'$.
Тогда, получим, что $a_n \le c \le c' \le b_n$ и $c' - c \le b_n - a_n$.
Но $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N(\varepsilon)\, |0 - b_n + a_n| < \varepsilon$.
Пусть $\varepsilon = c' - c$, тогда $|a_n - b_n| < c' - c \Rightarrow b_n - a_n < c' - c$ – противоречие. □

Геометрическая интерпретация вещественных чисел

Сопоставим десятичной дроби $0.a_1a_2...$ последовательность вложенных отрезков по следующему правилу.
Разделим отрезок $[0;\, 1]$ на 10 равных частей и выберем из получившихся частей $a_1 + 1$-ый по счету.
Проделываем ту же самую процедуру с выбранным отрезком и выбираем $a_2 + 1$-ый по счету. И так далее.
Получаем последовательность вложенных отрезков. Причем длина отрезка, получаемого на n-ом

шаге, равна $\frac{1}{10^n}$.
По теореме 1 существует единственная ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$) общая точка получившейся последовательности вложенных отрезков, которая совпадает с $0.a_1a_2$.

Анекдот

ПРЕПОД ПО МАТАНУ ДОСТАЁТ НА ЛЕКЦИИ ХУЙ, НАЧИНАЕТ ЕГО НАЯРИВАТЬ, ПРИГОВАРИВАЯ:
-ДЛЯ ЛЮБОГО ЭПСИЛОН, ДЛЯ ЛЮБОГО ЭПСИЛОН, — ОЗАЛУПЛИВАЕТ И СТУЧИТ ПО ПАРТЕ:
-БОЛЬШЕ НУЛЯ! ОЙ! БОЛЬШЕ НУЛЯ! — ОДИН ПАЦАН СПРАШИВАЕТ:
-А ПОЧЕМУ ВЫ ЗАЛУПОЙ ПО ПАРТЕ СТУЧИТЕ?
-ДЕЙСТВИТЕЛЬНО, ЭТО Я ПЕРЕПУТАЛ С КРИТЕРИЕМ КОШИ, СЕЙЧАС ПО ГЕЙНЕ БУДЕТ, — БЬЁТ ЯЙЦАМИ ПО ЛИЦУ СТУДЕНТАМ ЗА ПЕРВОЙ ПАРТОЙ И КРИЧИТ:
-ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ!