Вопрос 7

Определение подпоследовательности. Её предел(частичный предел последовательности).

Пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так же, пусть задана какая-то возрастаюшая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < ....$
Тогда, говорят, что последовательность $b_k = a_{n_k}$ является **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Тогда **частичным пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.
То есть другими словами число $a \in \mathbb{R}$ называют **частичным пределом**, если a является пределом некоторой бесконечной подпоследовательности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Предложение №1

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.

Докозательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и пусть $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - некоторая подпоследовательность.
Тогда по поределению предела $\forall(\epsilon > 0)\ \exists N(\epsilon) : \forall(n > N(\epsilon))\ |a_n - A| < \epsilon$.
Теперь рассмотрим индексы подпоследовательности. Т.к. $1 \leqslant n_1$ и $n_{k-1} < n_k$ по индукции получим, что $k \leqslant n_k$. Тогда заметим, что для всех $k > N$, получим, что $|a_{n_k} - A| < \epsilon$.

Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности.

Рассмотрим последоваетельность $M_n := \sup\limits_{k>n} a_k$ и $m_n := \inf\limits_{k>n} a_k$. Ясно, что поcделовательность M_n - невозрастает, а последовательность m_n - неубывает. Поэтому для ограниченной последовательности существует:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} m_n - \textbf{нижний частичный предел}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} M_n - \textbf{верхний частичный предел}.$$

Теорема №1

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ – частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой другой предел принадлежит отрезку

$$[\varliminf_{n\to\infty} a_n, \varlimsup_{n\to\infty} a_n]$$

Доказательство. Покажем, что $M := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ – частичный предел. Для этого индуктивно построим последовательность, которая сходится к $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть индексы $n_1 < n_2 < ... < n_k$ уже построены. Тогда подберём такой номер $n_{k+1} > n_k$, что

$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq M_{n_k}.$$

Как подпоследовательность сходящейся последовательности $M_{n_k} \to M$, поэтому по теореме о сходимости зажатой последовательности (по теореме о двух полицейских и преступнике) получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$.

Аналогично проверяется и то, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ – частичный предел.

Пусть теперь a – частичный предел. Это означает, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n.$.

Следствие из Теоремы 1

Теорема Больцано - во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.

Теорема №2

Ограниченная последовательность сходится тогда, и только тогда, когда множество её частичных пределов состоит из одного элемента.

Докозательство. То, что у сходящейся последовательности только один предел, уже доказано ранее.
Теперь предположим, что у ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ только один частичный предел. По доказаному в Теорема №1 в частности это означает, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = A$$

Тогда, $m_{n-1} \leqslant a_n \leqslant M_{n-1}$, и по теореме о сходимости зажатой последовательности, получаем что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$