№3.

Предел последовательности:

<u>Опр.</u> Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана <u>числовая последовательность</u> $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

<u>Опр.</u> Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in N$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N(\varepsilon)$.

Если переписать в кванторах:

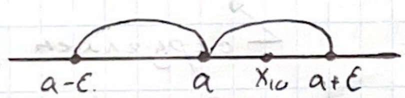
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N(\varepsilon) \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

<u>Объяснение.</u> (Всю эту муть предложил Коши).

Рассмотрим некоторую точку (а) и её произвольную ε окрестность:

! Значение $\varepsilon > 0$ всегда.

Мы вправе выбрать его самостоятельно.



Предположим что в этой окрестности находится множество членов (не обязательно все) некоторой последовательности x_n. Предположим что x_{10} попал в окрестность: Тогда расстояние между точками a и x_{10}: $x_{10} - a < \varepsilon$ и чтобы избежать отрицательного $|x_{10} - a| < \varepsilon$. Число a будет называться $\lim x_n$, если для любой его окрестности ($\forall \varepsilon > 0$) (заранее выбранной) существует натуральный номер ($\exists N \in N$) такой, что все члены последовательности с бÓльшими номерами ($\forall n > N$) окажутся внутри окрестности.

(★ Иными словами какое бы малое ε мы бы не взяли рано или поздно "бесконечный хвост" послед. полностью окажется в этой окрестности.)

Пример.

Доказать что $\lim \frac{1}{n+3} = 0$.

Решение.

Рассмотрим произвольную ε-окрестность $a=0$.

Проверим найдётся ли номер $\exists N(\varepsilon) \in N$ - такой, что все члены с бОльшими номерами $(\forall n > N(\varepsilon))$ окажутся внутри этой окрестности:

$|x_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+3} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+3}\right| < \varepsilon$ Чтобы показать существование искомого номера $N(\varepsilon)$ выразим n через ε.

! $\frac{1}{n+3} \geq 0 \Rightarrow$ можем убрать модуль, и $\varepsilon \geq 0$

$\frac{1}{\varepsilon} < n+3 \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 3 \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3\right]$

округляем дробную часть (т.к. $n \in N$).

Опр. Единственность предела:

Док-во: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow a = b$.

Если $a \neq b \Rightarrow |a-b| = \varepsilon_0 > 0$ Но по опр:

Найдётся номер N_1 для которого

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ и $\exists N_2 : |a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2 \Rightarrow$ при $n > \max(N_1, N_2)$:

$\varepsilon_0 = |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b|$

$< \varepsilon_0$ - противоречие

Арифметические свойства предела.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

3) Если $b \neq 0$, $b_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

<u>Доказательство.</u>

1) Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдётся номер $N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$ и $\exists N_2 : |b_n - b| < \varepsilon$.

При $n > N = \max(N_1, N_2)$:

$|\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n - (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)| = |\alpha \cdot (a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq$

$\leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$

2) Заметим, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab|$

$\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$ Т.к. сходящ. послед. ограничена, то $\exists M > 0 : |b_n| \leq M \Rightarrow$ при $n > N =$

$= \max(N_1, N_2)$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$

3) Достаточно проверить что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$.

По условию $b \neq 0 \Rightarrow \exists N_3 \in \mathbb{N}$, : при $n > N_3$ выпол.

$|b_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow$ при $n > \max(N_2, N_3)$ выполнено:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon$$

Ограниченность сходящейся последовательности:

<u>Док-во</u>. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq$

$\leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N \Rightarrow |a_n| \leq M = \max(1 + |a|, |a_1|, \ldots$

т.е. $-M = c \leq a_n \leq C = M$

Отделимость.

Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдётся номер $N \in \mathbb{N}$:

$|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.

Док-во. взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в опр. сходимости к $a \Rightarrow$

$N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N \Rightarrow$ выполнено

$|a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно

утв.