Билет 1

Рациональные числа

Рациональные числа – это числа вида $\frac{p}{q}$, где p – целое число, q – натуральное число, причём два числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ считаются равными, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Все свойства натуральных, целых, рациональных чисел и операций над ними будем считать известными.

Десятичные дроби и вещественные числа

Каждое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, например: $\frac{1}{10} = 0.1, \frac{1}{7} = 0.(142857)$. Пусть $0.(9) = x$, тогда $10x = 9 + x$, значит, $0,(9) = 1$, поэтому десятичные записи с периодом 9 рассматривать не будем.

Множество **вещественных (действительных)** чисел отождествляется с множеством всех десятичных дробей вида $\pm a_0.a_1a_2\ldots$, где $a_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_j \in \{0,\ldots,9\}$, и записи, в которых с какого-то момента стоят одни девятки, запрещены. Число $\pm 0.00\ldots$ совпадает с числом 0 и называется нулём. Ненулевое число называется положительным, если в его записи стоит знак $+$ (который обычно опускается). Ненулевое число называется отрицательным, если в его записи стоит знак $-$. В вещественные числа естественным образом вложены рациональные.

На множестве вещественных чисел также определены операции сложения и умножения, для которых справедливы все их естественные свойства (множество вещественных чисел является полем).

На вещественных числах задано **отношение порядка** следующим образом: на положительных вещественных числах задан лексикографический порядок, т. е. $a_0.a_1a_2\ldots \le b_0.b_1b_2\ldots$ тогда и только тогда, когда $a_0.a_1a_2\ldots = b_0.b_1b_2\ldots$ или найдётся разряд k, для которого $a_0 = b_0, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ и $a_k < b_k$, который естественным образом переносится на отрицательные.

Для вещественных чисел определён модуль числа $|a|$, равный $-a$ при $a < 0$ и a при $a \ge 0$. Напомним, что для модуля выполнено **неравенство треугольника** $|a + b| \le |a| + |b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a| - |b|| \le |a + b|$.

Принцип полноты

Будем говорить, что множество чисел A лежит **левее** множества B, если для каждого $a \in A$ и каждого $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$. Например, если $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < 4\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 4\}$, то A левее B.

Если множество A левее множества B, то говорят, что число c **разделяет** множества A и B, если $a \leq c$ для каждого $a \in A$ и $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Например, число 4 разделяет множества A и B, заданные выше.

Будем говорить, что на множестве чисел выполнен **принцип полноты**, если для произвольных непустых подмножеств A левее B нашего множества найдётся разделяющий их элемент.

Теорема. *На множестве вещественных чисел выполняется принцип полноты.*

Пусть A и B – непустые множества чисел, причём A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B – только из неотрицательных, то нуль разделяет множества A и B.

Предположим, что в A есть положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (случай, когда в B есть отрицательное число, рассматривается аналогично). Построим число $c = c_0.c_1c_2\ldots$, разделяющее A и B.

Рассмотрим множество всех целых неотрицательных чисел, с которых начинаются элементы множества B (это множество состоит из целых неотрицательных чисел в силу того, что в B есть только положительные числа). Пусть b_0 – наименьшее из таких чисел и положим $c_0 = b_0$. Теперь рассмотрим все числа в множестве B, начинающиеся с c_0, и найдём у них наименьшую первую цифру после запятой. Пусть эта цифра b_1, тогда полагаем $c_1 = b_1$. Теперь рассмотрим все числа в множестве B, начинающиеся с $c_0.c_1$, и найдём у них наименьшую вторую цифру после запятой. Пусть эта цифра b_2, тогда полагаем $c_2 = b_2$. Аналогично ищутся остальные цифры числа c.

Таким образом построена бесконечная десятичная дробь $c_0.c_1c_2\ldots$. Заметим, что если бы у построенной десятичной записи с какого-то момента шли бы только девятки, то и в B было бы число, в записи которого с какого-то момента участвуют только девятки, но такие записи мы запретили.

Покажем, что построенное число разделяет множества A и B.

Во-первых, по построению $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Действительно, либо $b = c$ (тогда всё OK), либо $b \neq c$. Во втором случае пусть $b_0 =$

$c_0, \ldots, b_{k-1} = c_{k-1}$ и $b_k \neq c_k$. Тогда, по построению числа c, $c_k < b_k$ и $c < b$.

Покажем, что $a \leq c$ для каждого $a \in A$. Предположим, что $a > c$, т. е. $a \geq c$ и $a \neq c$. Тогда найдётся позиция k, для которой $a_0 = c_0, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}$ и $a_k > c_k$. Но по построению числа c есть такой $b \in B$, что $b_0 = c_0, \ldots b_k = c_k$, а значит $a > b$, что противоречит условию A левее B.