

# Коллоквиум по курсу "Математический анализ", I курс, осенний семестр 2022

Группа БПМИ2211

25 октября 2022 г.

## 1 Рациональные и вещественные числа. Десятичные дроби. Принцип полноты, его выполнение для десятичных дробей.

### Рациональные числа

**Рациональные числа** – это числа вида  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  – целое число,  $q$  – натуральное число, причём два числа  $\frac{p_1}{q_1}$  и  $\frac{p_2}{q_2}$  считаются равными, если  $p_1q_2 = p_2q_1$ . Все свойства натуральных, целых, рациональных чисел и операций над ними будем считать известными.

### Десятичные дроби и вещественные числа

Каждое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, например:  $\frac{1}{10} = 0.1$ ,  $\frac{1}{7} = 0.(142857)$ . Пусть  $0.(9) = x$ , тогда  $10x = 9 + x$ , значит,  $0.(9) = 1$ , поэтому десятичные записи с периодом 9 рассматривать не будем.

Множество **вещественных (действительных)** чисел отождествляется с множеством всех десятичных дробей вида  $\pm a_0.a_1a_2\dots$ , где  $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $a_j \in \{0, \dots, 9\}$ , и записи, в которых с какого-то момента стоят одни девятки, запрещены. Число  $\pm 0.00\dots$  совпадает с числом 0 и называется нулём. Ненулевое число называется положительным, если в его записи стоит знак  $+$  (который обычно опускается). Ненулевое число называется отрицательным, если в его записи стоит знак  $-$ . В вещественные числа естественным образом вложены рациональные.

На множестве вещественных чисел также определены операции сложения и умножения, для которых справедливы все их естественные свойства (множество вещественных чисел является полем).

На вещественных числах задано **отношение порядка** следующим образом: на положительных вещественных числах задан лексикографический порядок, т. е.  $a_0.a_1a_2\dots \leq b_0.b_1b_2\dots$  тогда и только тогда, когда  $a_0.a_1a_2\dots = b_0.b_1b_2\dots$  или найдётся разряд  $k$ , для которого  $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$  и  $a_k < b_k$ , который естественным образом переносится на отрицательные.

Для вещественных чисел определён модуль числа  $|a|$ , равный  $-a$  при  $a < 0$  и  $a$  при  $a \geq 0$ . Напомним, что для модуля выполнено **неравенство треугольника**  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Из неравенства треугольника следует, что  $||a| - |b|| \leq |a + b|$ .

### Принцип полноты

Будем говорить, что множество чисел  $A$  лежит **левее** множества  $B$ , если для каждого  $a \in A$  и каждого  $b \in B$  выполняется неравенство  $a \leq b$ . Например, если  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < 4\}$ ,  $B = \{b \in \mathbb{Q} :$

$b > 4\}$ , то  $A$  левее  $B$ .

Если множество  $A$  левее множества  $B$ , то говорят, что число  $c$  **разделяет** множества  $A$  и  $B$ , если  $a \leq c$  для каждого  $a \in A$  и  $c \leq b$  для каждого  $b \in B$ . Например, число 4 разделяет множества  $A$  и  $B$ , заданные выше.

Будем говорить, что на множестве чисел выполнен **принцип полноты**, если для произвольных непустых подмножеств  $A$  левее  $B$  нашего множества найдётся разделяющий их элемент.

**Теорема.** На множестве вещественных чисел выполняется принцип полноты.

*Доказательство.* Пусть  $A$  и  $B$  – непустые множества чисел, причём  $A$  левее  $B$ . Если  $A$  состоит только из неположительных чисел, а  $B$  – только из неотрицательных, то нуль разделяет множества  $A$  и  $B$ .

Предположим, что в  $A$  есть положительный элемент, тогда  $B$  состоит только из положительных чисел (случай, когда в  $B$  есть отрицательное число, рассматривается аналогично). Построим число  $c = c_0.c_1c_2\dots$ , разделяющее  $A$  и  $B$ .

Рассмотрим множество всех целых неотрицательных чисел, с которых начинаются элементы множества  $B$  (это множество состоит из целых неотрицательных чисел в силу того, что в  $B$  есть только положительные числа). Пусть  $b_0$  – наименьшее из таких чисел и положим  $c_0 = b_0$ . Теперь рассмотрим все числа в множестве  $B$ , начинающиеся с  $c_0$ , и найдём у них наименьшую первую цифру после запятой. Пусть эта цифра  $b_1$ , тогда полагаем  $c_1 = b_1$ . Теперь рассмотрим все числа в множестве  $B$ , начинающиеся с  $c_0.c_1$ , и найдём у них наименьшую вторую цифру после запятой. Пусть эта цифра  $b_2$ , тогда полагаем  $c_2 = b_2$ . Аналогично ищутся остальные цифры числа  $c$ .

Таким образом построена бесконечная десятичная дробь  $c_0.c_1c_2\dots$ . Заметим, что если бы у построенной десятичной записи с какого-то момента шли бы только девятки, то и в  $B$  было бы число, в записи которого с какого-то момента участвуют только девятки, но такие записи мы запретили.

Покажем, что построенное число разделяет множества  $A$  и  $B$ .

Во-первых, по построению  $c \leq b$  для каждого  $b \in B$ . Действительно, либо  $b = c$  (тогда всё ОК), либо  $b \neq c$ . Во втором случае пусть  $b_0 = c_0, \dots, b_{k-1} = c_{k-1}$  и  $b_k \neq c_k$ . Тогда, по построению числа  $c$ ,  $c_k < b_k$  и  $c < b$ .

Покажем, что  $a \leq c$  для каждого  $a \in A$ . Предположим, что  $a > c$ , т. е.  $a \geq c$  и  $a \neq c$ . Тогда найдётся позиция  $k$ , для которой  $a_0 = c_0, \dots, a_{k-1} = c_{k-1}$  и  $a_k > c_k$ . Но по построению числа  $c$  есть такой  $b \in B$ , что  $b_0 = c_0, \dots, b_k = c_k$ , а значит  $a > b$ , что противоречит условию  $A$  левее  $B$ .  $\square$

## 2 Иррациональность числа $\sqrt{2}$ (т.е. положительного решения уравнения $x^2 = 2$ ), его существование в рамках вещественных чисел, как следствие принципа полноты.

### 2.1 Иррациональность числа $\sqrt{2}$ (т.е. положительного решения уравнения $x^2 = 2$ ).

Докажем, что рациональных решений уравнения  $x^2 = 2$  не существует. (от противного)

*Доказательство.* Предположим, что  $\frac{p}{q}$  – такое решение, где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  и дробь несократима, т.е. нет общ делителей. Тогда  $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 : 2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow p = 2p_1 \Rightarrow 2q^2 = 4p_1^2 \Leftrightarrow q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow q : 2 \Rightarrow p$  и  $q$  – чётные, а  $\frac{p}{q}$  – сократимая дробь  $\Rightarrow$  противоречие. Таким образом, доказали, что  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .  $\square$

## 2.2 Существование $\sqrt{2}$ в рамках вещественных чисел.

Объясним чем с точки зрения структуры множества чисел обусловлено такое “отсутствие”  $\sqrt{2}$ . Пусть  $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0, a^2 \leq 2\}$  и  $B = \{b \in \mathbb{R} : b > 0, b^2 \geq 2\}$ . Заметим, что множество  $A$  лежит левее множества  $B$ , так как  $0 < b^2 - a^2 = (b - a) \cdot (b + a)$  для каждого  $a \in A$  и  $b \in B$ , и  $a + b > 0$ . Если бы существовало число  $c$ , разделяющее  $A$  и  $B$ , то обязательно  $c^2 = 2$ .

Действительно, во-первых, заметим, что  $1 \leq c \leq 2$  т.к.  $1 \in A, 2 \in B$ .

Теперь, если  $c^2 < 2$ , то число  $c + \frac{2-c^2}{5} \in A$ , т.к.  $(c + \frac{2-c^2}{5})^2 = c^2 + 2c \cdot \frac{2-c^2}{5} + (\frac{2-c^2}{5})^2 \leq c^2 + 4 \cdot \frac{2-c^2}{5} + \frac{2-c^2}{5} \leq 2$ , но  $c + \frac{2-c^2}{5} > c \Rightarrow c$  не разделяет  $A$  и  $B$ .

Если  $c^2 > 2$ , то число  $c - \frac{c^2-2}{4} \in B$ , т.к.  $(c - \frac{c^2-2}{4})^2 \geq c^2 - 2c \cdot \frac{c^2-2}{4} \geq c^2 - 4 \cdot \frac{c^2-2}{4} = 2$ , но  $c - \frac{c^2-2}{4} < c \Rightarrow c$  не разделяет  $A$  и  $B$ .

Таким образом,  $c^2 = 2$ . (Так как  $c^2 = 2$ , где  $c$  разделяет  $A$  и  $B$ , то из принципа полноты для десятичных дробей следует, что число  $c$  существует.)

## 3 Предел последовательности, его основные свойства (единственность, арифметические свойства, ограниченность сходящейся последовательности, отделимость).

### 3.1 Предел последовательности

Если каждому числу  $n \in \mathbb{N}$  поставлено в соответствие некоторое число  $a_n$ , то говорим, что задана **числовая последовательность**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Говорят, что последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  **сходится** к числу  $a$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое натуральное число (номер)  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , что  $|a_n - a| < \varepsilon$  при каждом  $n > N(\varepsilon)$ . То же самое утверждение можно переписать в кванторах  $\forall - \exists$  следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N(\varepsilon) |a_n - a| < \varepsilon.$$

Используются обозначения:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  или  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Пример 1.** 1) Последовательность  $a_n = \frac{1}{n}$  сходится к числу  $a = 0$ . Действительно

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n},$$

поэтому при  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$  выполнено  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

2) Последовательность  $a_n = (-1)^n$  не имеет предела. Действительно, если  $a$  ее предел, то при достаточно больших  $n$   $|a - a_n| < 1/2$  и  $|a - a_{n+1}| < 1/2$ , а значит по неравенству треугольника  $2 = |a_n - a_{n+1}| < 1$ , что приводит к противоречию.

### 3.2 Основные свойства предела последовательности

Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется **ограниченной**, если существуют такие числа  $C, c \in \mathbb{R}$ , что  $c \leq a_n \leq C$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.2.1 Единственность предела

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , тогда  $a = b$ .

*Доказательство.* Действительно, если  $a \neq b$ , то  $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$ . Но по определению найдется номер  $N_1$ , для которого  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$  при  $n > N_1$  и найдется номер  $N_2$ , для которого  $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$  при  $n > N_2$ . Тогда при  $n > \max\{N_1, N_2\}$  выполнено

$$\varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0.$$

Противоречие. □

### 3.2.2 Арифметика предела

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Тогда

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ ;
- 3) если  $b \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Тогда найдется номер  $N_1$ , для которого  $|a_n - a| < \varepsilon$ , и найдется номер  $N_2$ , для которого  $|b_n - b| < \varepsilon$ .

- 1) Получаем, что при  $n > N = \max\{N_1, N_2\}$  выполнено

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| = |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

2) Замечаем, что  $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$ . Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется число  $M > 0$ , для которого  $|b_n| \leq M$ , поэтому при  $n > N = \max\{N_1, N_2\}$  выполнено  $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$ .

3) Достаточно проверить, что  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что по условию  $b \neq 0$ , поэтому найдется номер  $N_3 \in \mathbb{N}$ , для которого, при  $n > N_3$ , выполнено  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ . Тогда при  $n > \max\{N_2, N_3\}$  выполнено

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

□

### 3.2.3 Ограниченность сходящейся последовательности

Сходящаяся последовательность ограничена.

*Доказательство.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , то для некоторого  $N \in \mathbb{N}$  выполнено  $|a_n - a| < 1$  при  $n > N$ . Отсюда  $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$  при  $n > N$ . Значит,

$$|a_n| \leq M = \max\{1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_N|\},$$

т.е.  $-M = c \leq a_n \leq C = M$ . □

### 3.2.4 Лемма об отделимости

Если  $a_n \rightarrow a$  и  $a \neq 0$ , то найдется номер  $N \in \mathbb{N}$ , для которого  $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$  при  $n > N$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 : N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$

Возьмем  $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 : \exists N \forall n > N : |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$

$$|a_n| = |a_n + a - a| \geq |a| - |a_n - a| > \frac{|a|}{2}$$

□

## 4 Переход к пределу в неравенствах. Принцип вложенных отрезков и геометрическая интерпретация вещественных чисел, вещественная прямая.

### 4.1 Переход к пределу в неравенствах

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , тогда  $\exists N \forall n > N : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$ .

*Доказательство.* Предположим  $a - b = \varepsilon_0 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists N_1, N_2 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2} \forall n > N_1, |b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2} \forall n > N_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 = a - b = a - a_n + a_n - b + b_n - b_n \leq a - a_n + b_n - b < \varepsilon_0 - \text{противоречие.}$$

□

### 4.2 Лемма о зажатой последовательности

**Лемма 2.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . Тогда  $\exists N \forall n > N : a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

*Доказательство.* По определению  $\forall \varepsilon \exists N_1 \in \mathbb{N}, N_2 \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon \forall n > N_1, |b - b_m| < \varepsilon \forall m > N_2 \Rightarrow \forall k > \max\{N, N_1, N_2\} : a - \varepsilon < a_k \leq c_k \leq b_k < a + \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

□

### 4.3 Вещественная прямая

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ . Множества  $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,  $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  называются отрезком и интервалом соответственно.

Длина отрезка (интервала) – величина  $b - a$ .

### 4.4 Принцип вложенных отрезков

**Теорема 3.** Всякая последовательность  $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  вложенных отрезков (то есть таких, что  $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ ) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, то есть  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , то такая общая точка только одна.

*Доказательство.* По условию  $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ , откуда  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ .

Пусть  $n < m$ , тогда  $a_n \leq a_m \leq b_m \Rightarrow a_n < b_m$ . При  $n > m$  получим, что  $a_n \leq b_n \leq b_m \Rightarrow a_n < b_m$ .

Таким образом,  $a_n < b_m \forall n, m \in \mathbb{N}$ , тогда если  $A := \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B := \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$ , то  $A$  левее  $B$ .

Тогда по принципу полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m \forall n, m \in \mathbb{N}$ .

В частности,  $a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in [a_n; b_n]$ .

Пусть общих точек две:  $c$  и  $c'$ . Без ограничения общности, скажем, что  $c < c'$ .

Тогда, получим, что  $a_n \leq c \leq c' \leq b_n$  и  $c' - c \leq b_n - a_n$ .

Но  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) |0 - b_n + a_n| < \varepsilon$ .

Пусть  $\varepsilon = c' - c$ , тогда  $|a_n - b_n| < c' - c \Rightarrow b_n - a_n < c' - c$  — противоречие.  $\square$

## 4.5 Геометрическая интерпретация вещественных чисел

Сопоставим десятичной дроби  $0.a_1a_2\dots$  последовательность вложенных отрезков по следующему правилу.

Разделим отрезок  $[0; 1]$  на 10 равных частей и выберем из получившихся частей  $a_1 + 1$ -ый по счету. Пропускаем ту же самую процедуру с выбранным отрезком и выбираем  $a_2 + 1$ -ый по счету. И так далее.

Получаем последовательность вложенных отрезков. Причем длина отрезка, получаемого на  $n$ -ом шаге, равна  $\frac{1}{10^n}$ .

По теореме 1 существует единственная  $(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0)$  общая точка получившейся последовательности вложенных отрезков, которая совпадает с  $0.a_1a_2$ .

## 5 Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.

### 5.1 Точные верхние и нижние грани, их существование у ограниченных множеств.

Пусть  $A$  — непустое подмножество вещественных чисел.

Число  $b$  называется **верхней гранью** множества  $A$ , если  $a \leq b$  для каждого числа  $a \in A$ . Если есть хотя бы одна верхняя грань, то множество называют **ограниченным сверху**. Наименьшая из верхних граней множества  $A$  называется **точной верхней гранью** множества  $A$  и обозначается  $\sup A$  (супремум).

Число  $b$  называется **нижней гранью** множества  $A$ , если  $b \leq a$  для каждого числа  $a \in A$ . Если есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называют **ограниченным снизу**. Наибольшая из нижних граней множества  $A$  называется **точной нижней гранью** множества  $A$  и обозначается  $\inf A$  (инфимум).

Ограниченное и сверху и снизу множество называется **ограниченным**.

**Пример 4.** Пусть  $A = (0, 1]$ . Тогда  $\inf A = 0$

$\forall x \in A : x \geq 0 \Rightarrow 0$  — нижняя грань. Если  $b$  — нижняя грань, то  $\frac{1}{n} \in A$ ,  $\frac{1}{n} \geq b \Rightarrow 0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} > b$  и  $\sup A = 1$ . 1 — верхняя грань, т.к.  $\forall x \in A : 1 \geq x$

$b$  — верхняя грань,  $b \geq 1, 1 \in A$

Установим существование точных верхних (нижних) граней у ограниченных сверху (снизу) множеств.

**Теорема 5.** Пусть  $A$  — непустое ограниченное сверху (снизу) множество. Тогда существует точная верхняя (нижняя) грань  $\sup A$  ( $\inf A$ ).

*Доказательство.* Пусть  $A$  — непустое ограниченное сверху множество из условия, а  $B$  — непустое (по условию) множество его верхних граней. Тогда  $A$  левее  $B$  и существует разделяющий  $A$  и  $B$

элемент  $c$ . Он является верхней гранью для  $A$  и  $c \leq b$  для каждой верхней грани множества  $A$  ( $c$  — наименьшая из верхних граней). По определению  $c = \sup A$ .

Наличие  $\inf$  доказывается аналогично или переходом к множеству  $-A$ .  $\square$

Отсюда получается полезное утверждение о сходимости монотонной ограниченной последовательности.

## 5.2 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Пусть последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  не убывает ( $a_n \leq a_{n+1}$ ) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.

Аналогично, пусть последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  не возрастает ( $a_{n+1} \leq a_n$ ) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.

*Доказательство.* Докажем только первое утверждение. Второе доказывается аналогично или переходом к последовательности  $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Пусть  $M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N \in \mathbb{N}$ , для которого  $M - \varepsilon < a_N$  (иначе  $M - \varepsilon$  — верхняя грань, чего не может быть). В силу того, что последовательность неубывающая, при каждом  $n > N$  выполнено

$$M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon.$$

Тем самым, по определению  $M = \lim a_n$ .  $\square$

В качестве примера см. п.1 билет 6.

## 6 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ , $a_1 = 2$ , обоснование сходимости и оценка скорости сходимости. Число $e$ (определение и обоснование корректности).

### 6.1 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Заметим, что

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому  $a_n \geq \sqrt{2}$ . Кроме того  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) = a_n$ .

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена снизу и не возрастает, тогда по т. Вейерштрасса у последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  существует предел  $a$ . Т.к.  $a_n \geq \sqrt{2} > 0$ , то и  $a > 0$ . Тогда, по арифметике предела получаем  $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ , откуда  $a = \sqrt{2}$ .

Исследуем теперь скорость сходимости:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \leq (a_n - \sqrt{2})^2.$$

Индуктивно получаем

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (a_n - \sqrt{2})^2 \leq (a_{n-1} - \sqrt{2})^4 \leq (a_{n-2} - \sqrt{2})^8 \leq (a_1 - \sqrt{2})^{2^n} = (2 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

Заметим, что  $q := 2 - \sqrt{2} < 1$ , поэтому полученная скорость сходимости  $q^{2^n}$  быстрее экспоненциальной  $q^n$  (в смысле количества применений рекуррентной формулы для достижения заданной точности).

## 6.2 Число $e$

У последовательности  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  есть предел, который называют **числом  $e$** .

Пусть  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . По биному Ньютона

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Отсюда, во-первых, получаем, что

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 3,$$

где было использовано неравенство  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geq 2^{k-1}$  при  $k \geq 2$ . Во-вторых,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность  $a_n$  — неубывает и ограничена сверху, а значит имеет предел, который называют **числом  $e$** .

## 7 Подпоследовательность и частичные пределы. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности, их связь с множеством частичных пределов этой последовательности. Критерий сходимости последовательности в терминах частичных пределов.

### 7.1 Определение подпоследовательности. Её предел (частичный предел последовательности).

Пусть дана последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Так же, пусть задана какая-то возрастающая последовательность натуральных чисел  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ .

Тогда, говорят, что последовательность  $b_k = a_{n_k}$  является **подпоследовательностью** последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .



Тогда **частичным пределом** последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  называют число  $a \in \mathbb{R}$  такое, что  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ , для некоторой подпоследовательности  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ .

То есть другими словами число  $a \in \mathbb{R}$  называют **частичным пределом**, если  $a$  является пределом некоторой бесконечной подпоследовательности последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

## 7.2 Предложение №1

Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.

Доказательство. Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  и пусть

$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  - некоторая подпоследовательность.

Тогда по определению предела  $\forall(\epsilon > 0) \exists N(\epsilon) : \forall(n > N(\epsilon)) |a_n - A| < \epsilon$ .

Теперь рассмотрим индексы подпоследовательности. Т.к.  $1 \leq n_1$  и  $n_{k-1} < n_k$  по индукции получим, что  $k \leq n_k$ . Тогда заметим, что для всех  $k > N$ , получим, что  $|a_{n_k} - A| < \epsilon$ .

## 7.3 Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности.

Рассмотрим последовательность  $M_n := \sup_{k \geq n} a_k$  и  $m_n := \inf_{k \geq n} a_k$ . Ясно, что последовательность  $M_n$  - невозрастает, а последовательность  $m_n$  - неубывает. Поэтому для ограниченной последовательности существует:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} m_n - \text{нижний частичный предел}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n - \text{верхний частичный предел.}$$

## 7.4 Теорема №1

*Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - ограниченная последовательность. Тогда  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  - частичные пределы последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  и любой другой предел принадлежит отрезку*

$$[\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n]$$

Доказательство. Покажем, что  $M := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  - частичный предел. Для этого индуктивно построим последовательность, которая сходится к  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Пусть  $n_1 = 1$ . Пусть индексы  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  уже построены. Тогда подберём такой номер  $n_{k+1} > n_k$ , что

$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq M_{n_k}.$$

Как подпоследовательность сходящейся последовательности  $M_{n_k} \rightarrow M$ , поэтому по теореме о сходимости зажатой последовательности (по теореме о двух полицейских и преступнике) получаем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$ .

Аналогично проверяется и то, что  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  - частичный предел.

Пусть теперь  $a$  – частичный предел. Это означает, что  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$  для некоторой подпоследовательности  $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда  $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$ . По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

## 7.5 Следствие из Теоремы 1

Теорема Больцано - во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.

## 7.6 Теорема №2

*Ограниченная последовательность сходится тогда, и только тогда, когда множество её частичных пределов состоит из одного элемента.*

*Доказательство.* То, что у сходящейся последовательности только один предел, уже доказано ранее.

Теперь предположим, что у ограниченной последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  только один частичный предел. По доказанному в Теореме №1 в частности это означает, что

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

Тогда,  $m_{n-1} \leq a_n \leq M_{n-1}$ , и по теореме о сходимости зажатой последовательности, получаем что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

## 8 Теорема Больцано. Фундаментальная последовательность и критерий Коши. Расходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$ , $a_1 = 1$ , обоснование сходимости.

### 8.1 Теорема Больцано

(Следствие теоремы о связи верхнего и нижнего частичного предела с множеством частичных пределов. *Теорема 23*)

Во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность. ( $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  – ограниченная  $\Rightarrow \exists$  сходящаяся подпоследовательность.)

### 8.2 Фундаментальная последовательность и критерий Коши

Говорят, что последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна (или является последовательностью Коши), если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое натуральное число (номер)  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , что  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  при каждом  $n, m > N(\varepsilon)$ . То же самое утверждение можно переписать в кванторах  $\forall - \exists$  следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$$

**Пример.**

1) Последовательность  $a_n = \frac{1}{n}$  фундаментальная. Действительно

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\},$$

поэтому при  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$  выполнено  $|a_n - a_m| < \varepsilon$

2) Последовательность  $a_n = (-1)^n$  не фундаментальная. Действительно, если мы возьмем  $\varepsilon = 1$ , то, какой бы ни был номер  $N(\varepsilon)$ , для произвольного  $n > N(\varepsilon)$  выполнено  $|a_n - a_{n+1}| = 2 > 1$ .

**Критерий Коши.**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - сх-ся  $\iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - посл. Коши

*Доказательство.*  $\implies$  Пусть  $\varepsilon > 0$  По определению сходящейся последовательности найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  при  $n > N$ , где  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Тогда при  $n, m > N$  выполнено

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_m + a - a| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  (План: 1. Ограничена 2. предел по т. Больцано 3.  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ )

1. Заметим, что последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена.  $\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < 1$  (из условия). Отсюда  $|a_n| = |a_n + a_{N+1} - a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$ , при  $n > N$ . Значит,

$$|a_n| < M = \max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, \dots, |a_N|\}.$$

2. У ограниченной последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  по теореме Больцано есть хотя бы один частичный предел  $a$ .  $\Rightarrow \exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \rightarrow a$

3.  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ . Кроме того, в силу фундаментальности найдется номер  $N$ , для которого  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  при  $n, m > N$ . Пусть  $k$  выбрано так, что  $k > k_0$  и  $n_k > N$ , тогда при каждом  $n > N$  выполнено, что

$$|a_n - a| = |a_n + a_{n_k} - a_{n_k} - a| < \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

□

### 8.3 Расходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Проверим отрицание фундаментальности

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N : \exists n, m > N : |a_n - a_m| > \varepsilon$$

$|a_n - a_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$  Для  $\varepsilon = \frac{1}{2}, n = 2m, m > N \implies |a_n - a_m| \leq \frac{1}{2} \implies$  не выполнено условие Коши  $\implies$  последовательность расходится

## 8.4 Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью рекуррентной формулы $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$ , $a_1 = 1$ , обоснование сходимости

Заметим, что  $a_n \geq 1$  и

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_n|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{1}{4} |a_{n-1} - a_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (a_2 - a_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{2}$$

Отсюда при  $m > n$

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} \left( \left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Т.к.  $\left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0 : \forall \varepsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$ . Тем самым, для последовательности  $a_n$  выполнен критерий Коши, а значит существует  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+A}$   
 $A(A+1) = A+1+1 \iff A^2 = 2 \iff A = \sqrt{2}$  т.к.  $a_n \geq 0$

## 9 Числовые ряды

### 9.1 Числовой ряд

Пусть дана последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , тогда числовым рядом с членами  $a_n$  называется выражение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

### 9.2 Переформулировка критерия Коши для числовых рядов

Ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N \rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |S_n - S_m| < \varepsilon$$

### 9.3 Необходимое условие сходимости числового ряда

Если числовой ряд сходится, то  $a_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$

*Доказательство.* Из критерия Коши следует, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N + 1 \rightarrow |a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

□

### 9.4 Абсолютная и условная сходимость рядов

Говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится абсолютно, если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится условно, если он сходится, а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  расходится

## 9.5 Сходимость абсолютно сходящегося ряда

Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  сходится, то и  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  тоже сходится

*Доказательство.* Из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  следует выполнение критерия Коши для этого ряда, то есть что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m > N \rightarrow \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon$$

но так как  $\sum_{k=m+1}^n |a_k| \geq \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right|$ , то критерий Коши выполнен и для ряда без модулей.  $\square$

## 9.6 Признак сравнения

Пусть  $0 \leq a_n \leq b_n$  тогда если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  сходится, то и  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится.

Если же  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  расходится, то и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  расходится.

## 9.7 Признак Коши

Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - невозрастающая последовательность,  $a_n \geq 0$ . Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится тогда и только

тогда, когда сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

*Доказательство.* Заметим, что  $a_2 + 2a_3 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n} \leq a_2 + a_3 + \dots + a_{n^k} \leq 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$ , тогда из ограниченности частичных сумм ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  следует ограниченность частичных сумм

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и наоборот  $\square$

## 9.8 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$

*Доказательство.* При  $p < 0$  слагаемое  $\frac{1}{k^p}$  не стремится к нулю следовательно ряд расходится.

При  $p > 0$ : по признаку Коши ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}} =$

$\sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$ , а это сумма геометрической прогрессии, которая сходится при  $2^{1-p} < 1$ , то есть при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$  □

## 10 Открытые и замкнутые множества на прямой, их свойства, связанные с теоретико-множественными операциями. Внутренние, предельные и граничные точки множеств. Четыре эквивалентных описания замкнутого множества.

### 10.1 Открытые и замкнутые множества на прямой, их свойства, связанные с теоретико-множественными операциями.

#### Определение 1.

$\varepsilon$ -окрестность точки  $a \in \mathbb{R}$  называется множество  $B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

#### Определение 2.

Проколота  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a \in \mathbb{R}$  называется множество  $B'_\varepsilon(a) := B_\varepsilon \setminus \{a\}$ .

#### Определение 3.

Множество  $U \subset \mathbb{R}$  называется **открытым**, если для любой  $a \in U$  найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $B_\varepsilon \subset U$ .

#### Определение 4.

Множество  $V \subset \mathbb{R}$  называется **замкнутым**, если его дополнение открыто, т.е.  $\mathbb{R} \setminus V$  — открытое множество.

#### Пример.

1. Всякий интервал  $(\alpha, \beta)$  — открытое множество, т.к. для каждой точки  $a \in (\alpha, \beta)$  множество  $B_{\min\{\frac{a-\alpha}{2}, \frac{\beta-a}{2}\}} \subset (\alpha, \beta)$ . А также вся числовая прямая, лучи  $(-\infty, \alpha)$ ,  $(\beta, +\infty)$ , пустое множество будут являться открытыми.
2. Отрезок  $[\alpha, \beta]$ , вся числовая прямая, лучи  $(-\infty, \alpha]$ ,  $[\beta, +\infty)$ , пустое множество будут замкнутыми. (Если попросят доказать что-то отсюда — скажите, что дополнение будет открытым множеством).

#### Свойства.

*Объединение(1.1) любого набора и пересечение(1.2) конечного набора открытых множеств будет открытым множеством.*

*Пересечение(2.1) любого набора и объединение(2.2) конечного набора замкнутых множеств будет замкнутым множеством.*

#### Доказательство.

- 1.1 Пусть  $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ , причём все  $U_\alpha$  — открытые множества. Если  $a \in U$ , тогда найдётся такой индекс  $\alpha$ , что  $a \in U_\alpha$ . По определению найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $B_\varepsilon(a) \subset U_\alpha$ . Значит, по определению операции объединения,  $B_\varepsilon(a) \subset U$ . Т.е.  $U$  — открытое множество.

1.2 Пусть  $U = \bigcap_{j=1}^N U_j$ , причём все  $U_j$  — открытые множества. Если  $a \in U$ , то для каждого  $j \in \{1, \dots, N\}$  найдётся такое число  $\varepsilon_j > 0$ , что  $B_{\varepsilon_j}(a) \subset U_j$ . Пусть  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\} > 0$ . Тогда  $B_\varepsilon(a) \subset B_{\varepsilon_j}(a) \subset U_j$  при каждом  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Значит,  $B_\varepsilon(a) \subset U$  и  $U$  — открытое множество.

2.1 Пусть  $V = \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ , причём все  $V_\alpha$  — замкнутые множества. По формулам де Моргана  $\mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (\mathbb{R} \setminus V_\alpha)$ . По определению замкнутого множества, множества  $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus V_\alpha$  — открыты. По доказанному в 1.1 свойству открытых множеств, множество  $\mathbb{R} \setminus V$  также открыто, а значит множество  $V$  — замкнуто.

2.2 Пусть  $V = \bigcup_{j=1}^N V_j$ , причём все  $V_j$  — замкнутые множества. По формулам де Моргана  $\mathbb{R} \setminus V = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^N V_j = \bigcap_{j=1}^N (\mathbb{R} \setminus V_j)$ . По определению замкнутого множества, множества  $U_j := \mathbb{R} \setminus V_j$  — открыты. По уже доказанному свойству (1.2) открытых множеств, множество  $\mathbb{R} \setminus V$  также открыто, а значит множество  $V$  — замкнуто.

□

## 10.2 Внутренние, предельные и граничные точки множеств.

### Определение 5.

Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется **внутренней** точкой множества  $M$ , если она входит в это множество  $M$  с некоторой своей окрестностью полностью (т.е.  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset M$ ).

### Определение 6.

Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется **предельной** точкой множества  $M$ , если каждая её проколота окрестность имеет непустое пересечение с множеством  $M$  (т.е.  $\forall \varepsilon > 0 : B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$ ).

### Определение 7.

Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется **граничной** точкой множества  $M$ , если каждая её окрестность имеет непустое пересечение как с множеством  $M$ , так и с его дополнением (т.е.  $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$  и  $B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \emptyset$ ).

### Пример.

Для множества  $M = (0, 1] \cup \{3\}$  точки  $0, \frac{1}{2}, 1$  будут предельными, а точки  $-1, 3$  не будут. Точки  $0, 1, 3$  будут граничными, а  $-1$  и  $\frac{1}{2}$  не будут. Точка  $\frac{1}{2}$  будет внутренней, а точки  $-1, 0, 1, 3$  не будут.

### Замечание.

Точка  $a$  предельная для  $M$  тогда и только тогда, когда найдётся сходящаяся к  $a$  последовательность  $a_n \in M \setminus \{a\}$ .

*Доказательство.* Действительно, если  $a$  предельная, то для каждого  $n$  найдётся точка  $a_n \in B'_{1/n}(a) \cap M$ . Тогда  $a_n \in M \setminus \{a\}$  и  $a_n \rightarrow a$ .

Наоборот (если есть сходящаяся к  $a$  последовательность, то  $a$  — предельная точка для  $M$ ), если  $a_n \in M \setminus \{a\}$ , то каждого  $\varepsilon > 0$  найдётся такой номер  $N$ , что  $|a_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$ . Таким образом,  $a_{N+1} \in B'_\varepsilon(a) \cap M$ . □

### 10.3 Четыре эквивалентных описания замкнутого множества.

#### Теорема

Следующие утверждения равносильны.

- 1)  $V$  - замкнутое множество;
- 2)  $V$  содержит все свои граничные точки;
- 3)  $V$  содержит все свои предельные точки
- 4) если  $a_n \in V$  и  $a_n \rightarrow a$ , то  $a \in V$ .

Доказательство.

- 1)  $\Rightarrow$  2) (Если  $V$  - замкнутое множество, то оно содержит все свои граничные точки):

Пусть  $a$  граничная точка для  $V$ , для которой выполнено, что  $a \notin V$ , то  $a \in \mathbb{R} \setminus V$  - открытое множество. Это значит, что найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R} \setminus V$  (т.к.  $\mathbb{R} \setminus V$  - открытое множество). Т.е. нашлась окрестность  $B_\varepsilon(a)$ , которая не пересекается с множеством  $V$ , а значит  $a$  не граничная точка.

- 2)  $\Rightarrow$  3) (Если  $V$  содержит все свои граничные точки, то оно содержит и все свои предельные):

Пусть  $a$  предельная для  $V$  точка и предположим, что  $a \notin V$ . Значит  $a$  и не граничная точка (т.к.  $V$  содержит все свои граничные точки). Поэтому найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $B_\varepsilon(a) \cap V = \emptyset$ . Таким образом,  $B'_\varepsilon(a) \cap V = \emptyset$  и  $a$  не предельная для  $V$ .

- 3)  $\Rightarrow$  4) (Если  $V$  содержит все свои предельные точки, то если  $a_n \in V$  и  $a_n \rightarrow a$ , то  $a \in V$ ):

Пусть  $a_n \in V, a_n \rightarrow a$ . Если  $a \notin V$ , то  $a \neq a_n$  при каждом  $n$ . По замечанию выше  $a$  - предельная точка для множества  $V$ , что противоречит тому, что  $V$  содержит все свои предельные точки.

- 4)  $\Rightarrow$  1) (Если  $a_n \in V$  и  $a_n \rightarrow a$ , то  $a \in V$ . А отсюда  $V$  - замкнутое множество):

Пусть  $V$  - не замкнуто.  $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus V$  - не открыто  $\Rightarrow$  существует такое  $a \in \mathbb{R} \setminus V : B_\varepsilon(a) \cap V \neq \emptyset$  и при этом  $B_\varepsilon(a) \not\subset V$ . Тогда пусть  $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists a_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap V \Rightarrow a_n \in V$  и  $a_n \rightarrow a \Rightarrow a \in V$  (по условию). Получили противоречие, а значит  $V$  - замкнуто.

□

## 11 Компакты на $\mathbb{R}$ : определение, 3 базовых свойства. Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка. Два эквивалентных описания компактных множеств на $\mathbb{R}$ .

### 11.1 Определение.

**Определение 6.** Говорят, что набор множеств  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  образует **покрытие** множества  $M \subset \mathbb{R}$ , если  $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  (также говорят, что система  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  является покрытием множества  $M$ ).

**Определение 7.** Множество  $K \subset \mathbb{R}$  называется **компактом** (или компактным множеством), если для каждого покрытия  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  множества  $K$  открытыми множествами  $U_\alpha$  существует конечный поднабор  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$  этих множеств все еще покрывающий  $K$  (т.е.  $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$ ).

Кратко иногда это свойство формулируют так: Множество  $K$  — компакт, если из каждого покрытия этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.



## 11.2 Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка.

**Теорема 8** (Борель-Гейне-Лебег). *Каждый отрезок является компактным множеством.*

*Доказательство.* Предположим, что есть такой отрезок  $[a, b]$  и такое его покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  открытыми множествами, что никакой конечный поднабор этих множеств не покрывает  $[a, b]$ . Рассмотрим подотрезки  $[a, \frac{a+b}{2}]$  и  $[\frac{a+b}{2}, b]$ . Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  не покрывает эту половинку (если бы для каждой из половинок был бы покрывающий ее конечный поднабор, то и весь отрезок бы покрывался объединением этих конечных поднаборов). Обозначим эту половинку  $[a_1, b_1]$ . Снова поделим отрезок пополам и рассмотрим подотрезки  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$  и  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ . Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  не покрывает эту половинку. Обозначим эту половинку  $[a_2, b_2]$ . Продолжая описанную процедуру индуктивно, строим последовательность вложенных отрезков  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  с тем свойством, что никакой конечный поднабор множеств  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  не покрывает отрезок  $[a_n, b_n]$ .

Пусть  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . Т.к.  $c \in [a, b]$ , то для некоторого индекса  $\alpha$  точка  $c \in U_\alpha$ . Т.к.  $U_\alpha$  — открытое множество, то найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_\alpha$ . Т.к.  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ , то  $a_n \rightarrow c$  и  $b_n \rightarrow c$  ( $|c - a_n| \leq |b_n - a_n|$ ;  $|c - b_n| \leq |b_n - a_n|$ ). Тогда для некоторого номера  $n_0$  выполнено  $a_{n_0} \in (c - \varepsilon, c]$  и  $b_{n_0} \in [c, c + \varepsilon)$ . Т.е.  $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_\alpha$ , что противоречит построению отрезков  $[a_n, b_n]$ .  $\square$

**Пример.**  $(0, 1)$  — не компакт.

$$((0, 1 - \frac{1}{n})) = U_n$$

$$(0, 1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

$U_{k_1} \cup U_{k_2} \cup \dots \cup U_{k_n} = (0, 1 - \frac{1}{\max(k_1, k_2, \dots, k_n)})$  (предъявили покрытие, для которого не существует конечный набор множеств, все еще покрывающий  $(0, 1)$ )

## 11.3 3 базовых свойства компактных множеств.

**Лемма 9.** Пусть  $K$  — компакт. Тогда

- 1)  $K$  — ограниченное множество;
- 2)  $K$  — замкнутое множество;
- 3) замкнутое подмножество  $K$  также компактно.

*Доказательство.* 1) Заметим, что  $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ . Т.к.  $K$  — компакт, то у данного покрытия найдется конечное подпокрытие, т.е.  $K \subset \bigcup_{j=1}^m (-n_j, n_j)$ . Пусть  $C := \max\{n_1, \dots, n_m\}$ . Тогда  $K \subset (-C, C)$ .

2) Пусть  $a \in \mathbb{R} \setminus K$ . Тогда  $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ , где  $U_n := (-\infty, a - \frac{1}{n}) \cup (a + \frac{1}{n}, +\infty)$ . Выбрав конечное подпокрытие, получаем, что  $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{n_j}$ . Пусть  $C := \max\{n_1, \dots, n_m\}$ . Тогда  $K \subset (-\infty, a - \frac{1}{C}) \cup (a + \frac{1}{C}, +\infty)$  и  $B_{1/C}(a) \subset \mathbb{R} \setminus K$ .

3) Пусть  $V \subset K$ ,  $V$  — замкнутое множество. Пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — покрытие множества  $V$ . Тогда набор, состоящий из множеств  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  и  $\mathbb{R} \setminus V$  будет покрытием множества  $K$  открытыми множествами. В нем можно найти конечный поднабор  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$  и, возможно,  $\mathbb{R} \setminus V$ , покрывающий множество  $K$ . Тогда множество  $V$  заведомо покрывается набором  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$ .  $\square$

## 11.4 Два эквивалентных описания компактных множеств на $\mathbb{R}$ .

**Следствие 10.** Множество  $K \subset \mathbb{R}$  компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

*Доказательство.* Компактные множества обязаны быть замкнутыми и ограниченными. Наоборот, если  $K$  ограниченное множество, то  $K \subset [-C, C]$  для некоторого числа  $C > 0$ . Т.к. отрезок — компактное множество, а  $K$  — замкнутое множество, то  $K$  также будет компактным множеством по предыдущей лемме.  $\square$

**Следствие 11.** Множество  $K \subset \mathbb{R}$  компактно тогда и только тогда, когда из каждой последовательности элементов этого множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.

*Доказательство.* Если множество  $K$  — компактно, то оно замкнуто и ограничено. Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ . По теореме Больцано в данной последовательности найдется сходящаяся подпоследовательность  $a_{n_k} \rightarrow a$ . В силу замкнутости множества  $K$  получаем, что  $a \in K$  (см. теорему 10.3).

Наоборот, пусть из каждой последовательности элементов множества  $K$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Если бы множество  $K$  не являлось ограниченным, то для каждого  $n \in \mathbb{N}$  была бы точка  $a_n \in K$ ,  $|a_n| > n$ . Из такой последовательности невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть теперь  $a_n \in K$ ,  $a_n \rightarrow a$ . По условию, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность  $a_{n_k}$ , сходящуюся к точке множества  $K$ , т.е.  $a_{n_k} \rightarrow b \in K$ . В силу единственности предела и совпадения предела подпоследовательности с пределом всей последовательности получаем, что  $a = b \in K$ .  $\square$

## 12 Определения предела функции (по множеству) по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Свойства предела функции (единственность, линейность, предел произведения и отношения, предел и неравенства, ограниченность, отделимость, предел композиции). Замечательные пределы.

### 12.1 Предел функции по Коши

Пусть функция  $f$  определена на некотором множестве  $D \subset \mathbb{R}$  и  $a$  — предельная для  $D$  точка, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

### 12.2 Предел функции по Гейне

Пусть функция  $f$  определена на некотором множестве  $D \subset \mathbb{R}$  и  $a$  — предельная для  $D$  точка, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \{x_n\} \in D \setminus \{a\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

### 12.3 Эквивалентность двух определений

От Коши к Гейне:

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  в смысле Коши, тогда рассмотрим последовательность точек  $x_n \in D \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a$ , по определению предела по Коши

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

последовательность  $x_n \rightarrow a$ , то есть

$$\exists N : \forall n > N \rightarrow x_n \in \beta_\delta(a)$$

при  $n > N$   $x_n \in D \setminus \{a\} \cap \beta_\delta(a)$ , то есть при  $n > N$  выполняется  $|f(x_n) - A| < \epsilon$ , что и означает, что  $A$  - предел функции по Гейне

От Гейне к Коши:

Пусть число  $A$  не является пределом функции  $f$  в точке  $a$  в смысле Коши, тогда это означает, что

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D \cap \beta'_\delta(a) : |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon$$

по определению по Гейне: для последовательности точек  $x_{1/n} \in D \setminus \{a\}$  (то есть берем  $\delta = 1/n$ ) выполняется, что  $\{x_{1/n}\} \rightarrow a$  но заметим, что  $|f(x_{1/n}) - A| \geq \epsilon$ , тогда  $A$  не является пределом  $f$  в смысле Гейне

## 12.4 Свойства

Пусть функции  $f, g, h$  определены на некотором множестве  $D \subset R$  и пусть  $a$  - предельная для  $D$  точка, тогда выполнены следующие свойства:

- Единственность:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \Rightarrow A = B$$

- Линейность:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B &\Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha A + \beta B \\ \forall \alpha, \beta \in R & \end{aligned}$$

- Предел произведения:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

- Предел частного:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0, \forall x \in D \rightarrow g(x) \neq 0 &\Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A}{B} \end{aligned}$$

- Предел и неравенства: (входит ли сюда лемма о милиционерах или нет? Жду ответ Музы)

$$\begin{aligned} \exists \epsilon > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \rightarrow f(x) \leq g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B &\Rightarrow \\ A &\leq B \end{aligned}$$

- Ограниченность:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0, C > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \rightarrow |f(x)| \leq C$$

- Отделимость:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \beta'_\delta(a) \rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

Все свойства кроме отделимости и ограниченности следуют из аналогичных свойств для предела последовательности и определения через Гейне (так написано в учебнике).

- Доказательство ограниченности: найдется такое  $\delta > 0 : |f(x) - A| < 1$  при  $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ , таким образом при  $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$  выполнено  $|f(x)| < 1 + |A|$
- Доказательство отделимости: найдется такое  $\delta > 0 : |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$  при  $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ , таким образом при  $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$  будет выполнено

$$|A| - |f(x)| \leq |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

- Предел композиции:

Пусть  $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow R, a$  — предельная точка множества  $D, b$  — предельная точка множества  $E, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$  и есть такая проколота окрестность  $\beta'_\delta(a)$  точки  $a$ , что  $f(x) \neq b$  для каждой точки  $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

Доказательство:

Пусть  $x_n \rightarrow a, x_n \in D, x_n \neq a$ . Т.к.  $f(x) \neq b$  для каждой точки  $x \in D \cap \beta'_\delta(a)$ , то найдется такой номер  $N$ , что  $f(x_n) \neq b$  при  $n > N_0$ . Поэтому последовательность  $f(x_{N+1}), f(x_{N+2}), \dots$  состоит из элементов множества  $E$ , ни один из этих элементов не совпадает с  $b$  и эта последовательность сходится к  $b$ . Поэтому последовательность  $g(f(x_{N+1})), g(f(x_{N+2})), \dots$  сходится к  $c$ . Значит и вся последовательность  $\{g(f(x_n))\}$  сходится к  $c$

## 12.5 Замечательные пределы

- Первый замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство: для  $x \in (0, \pi/2)$  рассмотрим два треугольника и площадь сектора, сравним их и получим (сначала треугольник внутри круга, потом сектор, потом треугольники со стороной по касательной к кругу)

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

откуда, в силу четности при  $x \in (-\pi/2, \pi/2), x \neq 0$  выполнено

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Утверждение теперь следует из теоремы о зажатой функции, т.к.  $\lim_{x \rightarrow y} \cos x = \cos y$

Действительно,  $|\cos x - \cos y| = 2 \left| \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \left( \frac{x-y}{2} \right) \right| \leq |x - y|$

- Второй замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство: рассмотрим функции  $f(x) := \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}, g(x) := \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$ , тогда

$f(x) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq g(x)$ , кроме того, т.к.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ , то и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$ . Утверждение теперь следует из теореме о пределе зажатой функции.

## 13 Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовании односторонних пределов монотонной ограниченной функции.

### 13.1 Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 65 (Критерий Коши). Пусть  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  и  $a$  предельная точка  $D$ . Предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существует тогда и только тогда, когда для каждого  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любых  $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$  выполнено  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

Доказательство. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то для каждого  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для произвольной точки  $x \in B'_\delta(a) \cap D$  выполнено  $|f(x) - A| < \epsilon/2$ . Тогда для произвольных точек  $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$  выполнено  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \epsilon$ .

Предположим, что выполнено условие Коши. Тогда для произвольной последовательности точек  $x_n \in D \setminus \{a\}$ ,  $x_n \rightarrow a$ , последовательность  $\{f(x_n)\}$  является фундаментальной, а значит сходится. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Если есть другая последовательность точек  $y_n \in D \setminus \{a\}$ ,  $y_n \rightarrow a$ , то рассмотрим новую последовательность  $z_{2k+1} = x_k, z_{2k} = y_k$ , т.е. эта последовательность вида  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots \subset D \setminus \{a\}$ . Эта последовательность также сходится к  $a$ , поэтому последовательность образов  $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots$  снова оказывается фундаментальной, а потому сходится. В силу того, что предел подпоследовательности сходящейся последовательности совпадает с пределом всей последовательности, получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = A$ . Таким образом, доказано существование предела по Гейне.

### 13.2 Односторонние пределы и теорема Вейерштрасса о существовании односторонних пределов монотонной ограниченной функции.

Пусть  $D_a^+ := D \cap (a, +\infty)$  и  $D_a^- := D \cap (-\infty, a)$

Определение 66. Пусть точка  $a$  предельная для множества  $D_a^+$  и существует предел функции  $f$  по множеству  $D_a^+$  в точке  $a$ . Этот предел называют пределом справа функции  $f$  в точке  $a$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ . Аналогично определяется предел слева, который обозначают  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ .

Теорема 67 (Вейерштрасс). Пусть  $f$  не убывает и ограничена на множестве  $D$ ,  $a$  - предельная точка множества  $D_a^-$ . Тогда существует предел слева

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D_a^-\}$$

Пусть  $f$  не убывает и ограничена на множестве  $D$ ,  $a$  предельная точка множества  $D_a^+$ .

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D_a^+\}$$

Аналогичные утверждения с заменой  $\inf$  на  $\sup$  справедливы и для невозрастающей функции.

Доказательство. Пусть  $M = \sup\{f(x) : x \in D_a^-\}$ . Тогда для каждого  $\epsilon > 0$  найдется такая точка  $x_0 \in D_a^-$ , что  $M - \epsilon < f(x_0)$ . Т.к.  $f$  не убывает на  $D_a^-$ , то для каждого  $x \in (x_0, a) \cap D_a^-$  выполнено  $M - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M < M + \epsilon$ . Тогда, взяв  $\delta := a - x_0$  получаем, что для каждого  $x \in B'_\delta(a) \cap D_a^-$  выполнено  $|f(x) - M| < \epsilon$ .