Коллоквиум по курсу "Математический анализ", I курс, осенний семестр 2022

Группа БПМИ2211

24 октября 2022 г.

1 Предел последовательности, его основные свойства (единственность, арифметические свойства, ограниченность сходящейся последовательности, отделимость).

1.1 Предел последовательности

Если каждому числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана **числовая последовательность** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится** к числу a, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N(\varepsilon)$. То же самое утверждение можно переписать в кванторах $\forall - \exists$ следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \colon \forall n > N(\varepsilon) \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Используются обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пример 1. 1) *Последоввательность $a_n = \frac{1}{n}$ сходится к числу $a = 0$. Действительно*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n},$$

поэтому при $N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

2) *Последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела. Действительно, если a ее предел, то при достаточно больших n $|a - a_n| < 1/2$ и $|a - a_{n+1}| < 1/2$, а значит по неравенству треугольника $2 = |a_n - a_{n+1}| < 1$, что приводит к противоречию.*

1.2 Основные свойства предела последовательности

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **ограниченной**, если существуют такие числа $C, c \in \mathbb{R}$, что $c \leq a_n \leq C$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

1.2.1 Единственность предела

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, тогда $a = b$.

Доказательство. Действительно, если $a \neq b$, то $|a-b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1, для которго $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2, для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$ выполено

$$\varepsilon_0 = |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0.$$

Противоречие. □

1.2.2 Арифметика предела

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда
1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;
3) если $b \neq 0$, $b_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$.

1) Получаем, что при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| = |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

2) Замечаем, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется число $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$.

3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in \mathbb{N}$, для которого, при $n > N_3$, выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $n > \max\{N_2, N_3\}$ выполнено

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

□

1.2.3 Ограниченность сходящейся последовательности

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N$. Отсюда $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит,

$$|a_n| \leq M = \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_N|\},$$

т.е. $-M = c \leq a_n \leq C = M$. □

1.2.4 Лемма об отделимости

Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 : N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$
Возьмем $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 : \exists N \ \forall n > N : |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$
$|a_n| = |a_n + a - a| \geq |a| - |a_n - a| > \frac{|a|}{2}$ □