**БИЛЕТ 11. Компакты на R: определение, 3 базовых свойства. Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка. Два эквивалентных описания компактных множеств на R.**

(Tg: @nakhaeva)

*Опр. 52.* Говорят, что набор множеств образует **покрытие** множества , если *(тут должно быть под U, а не справа)*(также говорят, что система является покрытием множества M).

*Опр.* *53.* Множество называется **компактом** (или компактным множеством), если для каждого покрытия множества К открытыми множествами существует конечный поднабор этих множеств, все еще покрывающий К (т.е. ).

Короче говоря, множество К – компакт, если из каждого покрытия этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

*Теорема Бореля-Гейне-Лебега о компактности отрезка (теорема 54):* Каждый отрезок является компактным множеством.

*Доказательство:* Предположим, что есть такой отрезок [a, b] и такое его покрытие открытыми множествами, что никакой конечный поднабор этих множеств не покрывает [a, b]. Рассмотрим подотрезки [a, ] и []. Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств не покрывает эту половинку (потому что если бы для каждой из половинок существовал бы покрывающий ее конечный поднабор, то и весь отрезок бы покрывался объединением этих конечных поднаборов). Обозначим эту половинку за []. Снова поделим отрезок пополам и рассмотрим подотрезки [, ] и []. Для какой-то из этих половинок никакой конечный поднабор множеств не покрывает эту половинку. Обозначим эту половинку за []. Продолжая данную процедуру индуктивно, строим последовательность вложенных отрезков с тем свойством, что никакой конечный поднабор множеств не покрывает отрезок .

Пусть . Т.к. , то для некоторого индекса точка . Т.к. – открытое множество, то найдется такое число , что . Т.к. , то и . Тогда для некоторого номера выполнено и . Т.е. , что противоречит построению отрезков .

*Лемма 55:* Пусть К – компакт, тогда:

1. К – ограниченное множество;
2. К – замкнутое множество;
3. Замкнутое множество К также компактно.

*Доказательство:*

1. Заметим, что . Т.к. К – компакт, то у данного покрытия найдется конечное подпокрытие, т.е. . Пусть . Тогда .
2. Пусть . Тогда , где Выбрав конечное подпокрытие, получаем, что . Пусть . Тогда и .
3. Пусть – замкнутое множество. Пусть – покрытие множества V. Тогда набор, состоящий из множеств и будет покрытием множества К открытыми множествами. В нем можно найти конечный поднабор и, возможно, , покрывающий множество К. тогда множество V заведомо покрывается набором .

*Следствие 56:* Множество компактно тогда и только тогда, когда оно ограниченно и замкнуто.

*Доказательство:* Компактные множества обязаны быть замкнутыми и ограниченными. Наоборот, если К – oграниченное множество, то для некоторого числа . Т.к. отрезок – компактное множество (теорема 54), а К – замкнутое множество, то К также будет компактным множеством (по предыдущей лемме).

*Следствие 57:* Множество компактно тогда и только тогда, когда из каждой последовательности элементов этого множества можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.

*Доказательство:* Если множество К – компактно, то оно замкнуто и ограничено. Пусть . По теореме Больцано (билет 7 или 8) в данной последовательности найдется сходящаяся подпоследовательность . В силу замкнутости множества К получаем, что .

Наоборот, пусть из каждой последовательности множества К можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Если бы множество К не являлось ограниченным, то для каждого была бы точка . Из такой последовательности невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть теперь . По условию, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность , сходящуюся к точке множества К, т.е. . В силу единственности предела и совпадения предела подпоследовательности с пределом всей последовательности получаем, что .