Билет №2

﻿﻿Иррациональность числа (т.е. положительного решения уравнения x2 = 2), его существование в рамках вещественных чисел, как следствие принципа полноты.

1. Докажем, что рациональных решений уравнения x2 = 2 не существует. (от противного)

Предположим, что – такое решение, где p Z, q N и дробь несократима, т.е. нет общ делителей

Тогда 2 = 2q2 = p2  2q2 = 4p12 q2 = 2p12 q2 (p и q - четн) – сократимая дробь противор

(p22 p2, т.е. p=2p1)

Таким образом, доказали, что Q

1. Объясним чем с точки зрения структуры множества чисел обусловлено такое “отсутствие” .

Пусть A = { a: a 0, a2 2} и B = { b: b 0, b2 2}. Заметим, что множество A лежит левее множества B, так как 0 b2 – a2 = (b-a)(b+a) для каждых a A и b B, и a + b 0. Если бы существовало число c, разделяющее A и B, то обязательно c2 = 2.

Действительно, во-первых, заметим, что 1 2 т.к. 1 A , 2 B.

Теперь, если с2 2, то число c + A, т.к.

2 = c2 + 2c + 2 c2 + 4 + 2, но c + с c не разделяет A и B.

Если с2 2, то число c - B, т.к.

2 c2 - 2c c2 - 4 = 2, но c - с c не разделяет A и B.

Таким образом, c2 = 2. (Так как c2 = 2, где c разделяет A и B, то из принципа полноты для десятичных дробей следует, что число c существует.)

1. Теорема: На множестве вещественных чисел выполняется принцип полноты.

Будем говорить, что множество A лежит левее множества чисел B, если a b для каждого a A и b B.

Если множество A лежит левее множества B, то говорят, что число c разделяет множества A и B, если

a c для каждого a A и c b для каждого b B.

Доказательство:

Пусть A и B – непустые множества чисел (причем A левее B). Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неотрицательных, то 0 разделяет A и B. Пусть в A есть положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел ( сл, когда в B есть отр число рассматр аналогично). Построим число c=c0.c1c2….., разделяющее A и B.

Рассмотрим множество всех натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B (множ сост из натур чисел, т.к. в B есть только полож числа). Пусть b0 – наименьший из таких чисел и положим c0 = b0. Теперь рассмотрим все числа в множестве B, начинающихся с c0, и найдем у них наименьшую первую цифру после запятой. Пусть эта цифра b1, тогда полагаем c1 = b1. Теперь рассмотрим все числа в множестве B, начинающихся с c0.c1, и найдем у них наименьшую вторую цифру после запятой. Пусть эта цифра b2, тогда полагаем c2 = b2. И т.д.

Таким образом, построена бесконечная десятичная дробь c0.c1c2…

(Заметим, что если бы у построенной десятичной записи с какого-то момента шли бы только 9, то и в B было бы число, в записи которого с какого-то момента шли бы только 9, но такие записи мы запретили, так как если 0,(9) = x, то выполнено 10x = 9 + x, откуда x = 1)

Покажем, что построенное число разделяет множества A и B.

Во-первых, по построению c b для каждого b B. Действительно, либо b = c (все ОК), либо b c. Во втором случае пусть b0 = c0, ……, bk-1 = ck-1 и bk ck. Тогда, по построению числа c, ck < bk  c < b.

Покажем, что a c для каждого a A. Предположим, что a c, т.е. a c и a c. Тогда найдется позиция k, для которой a0 = c0, ……, ak-1 = ck-1 и ak ck. Но по построению числа c есть такой b B, что

b0 = c0, ……, bk = ck a b, что противоречит условию A левее B.