

# 1 Folgen

## 1.1 Konvergenz

Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  **konvergiert** gegen  $a$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Wir schreiben dann:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

und nennen  $a$  den **Grenzwert/ Limes** der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Existiert der Limes nicht, so heisst die Folge **divergent**. Zu bemerken ist:

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ konvergent} \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ beschränkt}$$

## 1.2 Monotone Konvergenz

Sei die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

## 1.3 Cauchy Kriterium

Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

## 1.4 Rechnen mit Limes

Seien die Folgen  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gilt:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(iii) \quad \text{Falls zusätzlich } b_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1 \text{ und } b \neq 0 \text{ gegeben ist, so gilt:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a / b.$$

$$(iv) \quad \text{Falls es ein } K \geq 1 \text{ gibt mit } a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K, \text{ dann folgt} \\ a \leq b.$$

## 1.5 Limes Superior/ Inferior

Sei eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt. Wir können dann zwei monotone Folgen  $(b_n)_{n \geq 1}$  und  $(c_n)_{n \geq 1}$  definieren, welche dann einen Grenzwert besitzen. Sei für jedes  $n \geq 1$ :

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \text{ und } c_n = \sup\{a_k : k \geq n\} \\ b_n \leq b_{n+1} \\ c_{n+1} \leq c_n$$

Da also beide Folgen beschränkt sind und konvergieren, können wir aufgrund von Monotoner Konvergenz folgern:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Es gilt auch, dass  $(a_n)_{n \geq 1}$  genau dann konvergiert, falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt ist und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

## 1.6 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Wenn  $a_n$  monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann konvergiert  $a_n$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$ . Wenn  $a_n$  monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann konvergiert  $a_n$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$ .

## 1.7 Sandwichsatz für Folgen

Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergente Folgen mit demselben Limes  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Ist  $K \in \mathbf{N}$  und  $(c_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit der Eigenschaft:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$$

so konvergiert auch  $(c_n)_{n \geq 1}$  gegen  $\alpha$ .

## 1.8 Limes Binom Trick

Gegeben die Summe zweier Wurzeln könnte man wie folgt vorgehen (Bsp.):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x+5) - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \right)$$

## 1.9 Limes Substitution Trick

Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - \cos(\frac{1}{x}))$$

Substituiere nun  $u = \frac{1}{x}$ :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

## 1.10 Limes Taylor Trick

Mithilfe der Reihenentwicklung von  $e^x$  und  $\sin(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}}{1 - n * \sin(\frac{1}{n})} = \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + \mathcal{O}(n^{-5}))} = 3$$

## 1.11 Rekurrenz Beispiel

Die folgenden Schritte sollten bei der Auflösung einer Rekursiven Folge in betracht gezogen werden:

1. Zeige Monotonie (Durch Induktion)
2. Zeige Obere oder Untere Schranke (Evt. Induktion)
3. Verwende  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$  (Da für jede Teilfolge der gleiche Grenzwert gilt)

## 1.12 Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  falls für alle  $x \in \mathbf{D}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  gilt. Konkret:

$$\forall x \in \mathbf{D} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{x,\epsilon} \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

## 1.13 Gleichmässige Konvergenz

Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  konvergiert gleichmässig in  $\mathbf{D}$  gegen eine Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  falls für alle  $x \in \mathbf{D}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  gilt. Konkret:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbf{D} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Weiter ist folgendes Kriterium äquivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n, m \geq N \quad \forall x \in \mathbf{D} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Konvergiert eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 1}, f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  bestehend aus in  $\mathbf{D}$  stetigen Funktionen gleichmässig gegen die Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ , so ist  $f$  in  $\mathbf{D}$  **stetig**.

**Beispiel:**  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_n(x) = \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}}$  Wie lautet der punktweise Limes der Funktionsfolge  $f_n$ ? Konvergiert  $f_n$  gleichmässig auf  $\mathbf{R}$ ?

**Punktweise Konvergenz:** Wir fixieren  $x \in \mathbf{R}$  und bilden den Limes für  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} = \sqrt{|x|} = f(x)$$

Die Funktionenfolge konvergiert somit punktweise gegen den punktwisen Grenzwert  $f(x) = \sqrt{|x|}$

**Gleichmässige Konvergenz:** Wir müssen zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$  gilt. Wir berechnen also zuerst den Ausdruck  $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|} \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \left( \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|} \right) \left( \frac{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}} \right) \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}} \right| \end{aligned}$$

Da  $|x|$  positiv ist, wird das Supremum von  $\left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}} \right|$  bei  $x = 0$  angenommen. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}} \right| \\ &= \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge  $f_n$  auf  $\mathbf{R}$  gleichmässig gegen  $f$ .

## 1.14 Grenzwerte von Funktionen

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{D}$ . Dann ist  $A \in \mathbf{R}$  der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$ , bezeichnet mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

falls  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  so dass

$$\forall x \in \mathbf{D} \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

## 1.15 Rechnen mit Limes Für Funktionen

Seien die Funktionen  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  konvergent mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ . Sei weiter  $x_0 \in \mathbf{R}$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{D}$ . Dann gilt:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(iii) Sei  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f \leq g$ . Dann folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren.

(iv) Seien  $\mathbf{D}, \mathbf{E} \subset \mathbf{R}$  und  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$  eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existiert und  $y_0 \in \mathbf{E}$ . Falls  $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig in  $y_0$  folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

## 1.16 Sandwichsatz für Funktionen

Falls  $g_1 \leq f \leq g_2$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$$

dann existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$$

## 1.17 Links- und Rechtsseitige Grenzwerte

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Wir nehmen an, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{D} \cap ]x_0, +\infty[$  ist. Falls der Grenzwert der Eingeschränkten Funktionen  $f$  im Bereich  $\mathbf{D} \cap [x_0, +\infty[$  für  $x \rightarrow x_0$  existiert, wird er mit  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von  $f$  bei  $x_0$ .

Der **linksseitige Grenzwert** ist analog definiert für den Bereich  $\mathbf{D} \cap ]-\infty, x_0]$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls er existiert. Es wird mit  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  bezeichnet.

Besitzt die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  den Grenzwert  $L$ , so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

## 2 Reihen

### 2.1 Konvergenz

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen  $(S_n)_{n \geq 1} = \sum_{k=1}^n a_k$  konvergiert. In diesem Fall definieren wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

### 2.2 Monotone Konvergenz

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ . Die Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen  $(S_n)_{n \geq 1}$  nach oben beschränkt ist.

### 2.3 Cauchy Kriterium

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

### 2.4 Rechnen mit Konvergenten Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent, sowie  $\alpha \in \mathbf{C}$ . Dann gilt:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \text{ ist konvergent und } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k \text{ ist konvergent und } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k = \alpha * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Konvergieren die Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut, so gilt zusätzlich für das Cauchy Produkt:

$$(iii) \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n a_{n-j} * b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i) * (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

### 2.5 Absolute Konvergenz

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heisst **absolut konvergent**, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Weiter sind **absolut konvergente Reihen auch konvergent** und es gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

### 2.6 Reihen Umordnung

Konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe  $a'_n = a_{\phi(n)}$  (wobei  $\phi$  bijektiv) und hat denselben Grenzwert.

### 2.7 Potenzreihe

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbf{C}$  mit  $|z| < \rho$  (divergiert bei  $|z| > \rho$ ), wobei

$$\rho := \begin{cases} +\infty & \text{Falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{Falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

**Ränder Prüfen!**

### 2.8 Nullfolgekriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

### 2.9 Wurzelkriterium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren.}$$

### 2.10 Quotientenkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit  $a_n \neq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

### 2.11 Vergleichssatz

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

### 2.12 Integraltest

Sei  $f(x)$  eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf  $[k, \infty)$  und  $f(n) = a_n$ :

$$\int_k^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x) dx \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

### 2.13 Leibniz Kriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend mit  $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:  $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

### 2.14 Gleichmässige Konvergenz

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmässig in  $\mathbf{D}$  falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Gilt weiter, dass  $f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  eine Folge stetiger Funktionen ist und eine Folge  $C_n$  existiert, so dass

$$|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in \mathbf{D}$$

und dass  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$  konvergiert, dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$  gleichmässig in  $\mathbf{D}$  und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$$

ist eine in  $\mathbf{D}$  stetige Funktion.

### 3 Stetigkeit

#### 3.1 Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt

Sei  $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{D}$ . Die Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  ist in  $x_0$  **stetig**, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in \mathbf{D}$  gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Hier noch eine äquivalente Definition: Falls für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  folgendes gilt:

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

ist die Funktion  $f$  in  $x_0$  stetig.

#### 3.2 Stetigkeit einer Funktion

Die Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt  $x \in \mathbf{D}$  stetig ist.

#### 3.3 Gleichmässige Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  ist in  $\mathbf{D}$  gleichmässig stetig falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 \forall x, y \in \mathbf{D} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

wobei Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  welche in einem kompakten Intervall stetig sind im selben Intervall glm. stetig sind.

**Beispiel:** Ist die Funktion gleichmässig stetig?

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{x}$$

Wir fixieren ein  $\epsilon > 0$ . Wir suchen  $\delta > 0$ , sodass für alle  $x, y \in \mathbf{D}$  mit  $|x - y| < \delta$  Folgendes gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Die Schwierigkeit bei den Aufgaben, wo nach der gleichmässigen Stetigkeit gefragt wird, ist es, ein  $\delta$  zu finden, das unabhängig von  $x, y$  ist. Wie kann man in solchen Situationen vorgehen? Man vernichtet, den Term  $f(x) - f(y)$  durch einen Ausdruck der Form  $C|x - y|$  abzuschätzen. In diesem spezifischen Fall, benutzen wir folgende Abschätzung:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x - y} \stackrel{!}{<} \epsilon \Rightarrow |x - y| < \epsilon^2 =: \delta$$

#### 3.4 Rechnen mit Stetigkeit

Sei  $x_0 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  und  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  beide in  $x_0$  stetig:

(i) Dann sind  $f + g$ ,  $\lambda * f$ ,  $f * g$  stetig in  $x_0$

(ii) Falls  $g(x_0) \neq 0$  dann ist

$$\frac{f}{g} : \mathbf{D} \cap \{x \in \mathbf{D} : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in  $x_0$ .

(iii) Polynomiale Funktionen sind auf ganz  $\mathbf{R}$  stetig

(iv) Die Trigonometrischen Funktionen  $\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  und  $\cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sind stetig

(v) Die Exponentialfunktion  $e^x$  ist auf ganz  $\mathbf{R}$  stetig.

(vi) Seien  $P$ ,  $Q$  polynomiale Funktionen auf  $\mathbf{R}$  mit  $Q \neq 0$ . Seien  $x_1, \dots, x_m$  die Nullstellen von  $Q$ . Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbf{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

(vii) Seien  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{R}$  zwei Teilmengen,  $f : \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{D}_2$  und  $g : \mathbf{D}_2 \rightarrow \mathbf{R}$  Funktionen, sowie  $x_0 \in \mathbf{D}_1$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig sind, so ist  $g(f(x)) : \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{R}$  in  $x_0$  stetig

(viii) Sei  $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{D}$  und  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig in  $x_0$ . Dann sind  $|f|$ ,  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  stetig in  $x_0$ .

#### 3.5 Zwischenwertsatz

Sei  $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$  ein Intervall,  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion und  $a, b \in \mathbf{I}$ . Für jedes  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es (mindestens) ein  $c$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(c) = y$ .

Es gibt folgende typischen Anwendungsszenarien:

(i) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Falls  $f(a) * f(b) < 0$ , dann  $\exists c \in ]a, b[$  mit  $f(c) = 0$  (also eine Nullstelle)

(ii) Sei  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  ein Polynom mit  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade. Dann besitzt  $P$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbf{R}$ .

#### 3.6 Min-Max Satz

Sei  $f : \mathbf{I} = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig auf einem kompakten Intervall. Dann gibt es  $u \in [a, b]$  und  $v \in [a, b]$  mit:

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

#### 3.7 Satz der Umkehrabbildung

Sei  $\mathbf{I}$  ein Intervall. Sei  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig, **streng** monoton wachsend. Dann ist das Bild von  $f(\mathbf{I}) =: J$  ein Intervall und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbf{I}$  ist stetig, streng monoton wachsend.

(i) Sei  $n \geq 1$ . Dann ist  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  als  $x \rightarrow x^n$  streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung  $f^{-1} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  als  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

#### 3.8 Stetigkeit gesplitteter Funktionen

Sind alle abschnitte einer gesplitteten Funktion stetig, müssen wir nur die Übergangstellen prüfen. Gilt an diesen Stellen  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

so ist die Funktion stetig.

## 4 Ableiten

### 4.1 Differenzierbarkeit

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  und  $x_0 \in \mathbf{D}$  ein Häufungspunkt. Die Funktion  $f$  heisst in  $x_0$  differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet und heisst die **Ableitung** (oder das Differential) von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

### 4.2 Differenzierbarkeit & Stetigkeit

$f$  differenzierbar in  $x_0 \Rightarrow f$  stetig in  $x_0$

### 4.3 Rechenregeln der Ableitung

- (i)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (ii)  $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$
- (iii)  $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$  für  $g(x_0) \neq 0$
- (iv)  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$

### 4.4 Aussagen der Ableitung

1.  $f$  besitzt ein lokales Minimum in  $x_0$ , wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$  oder falls das Vorzeichen von  $f'$  um  $x_0$  von  $-$  zu  $+$  wechselt.
2.  $f$  besitzt ein lokales Maximum in  $x_0$ , wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$  oder falls das Vorzeichen von  $f'$  um  $x_0$  von  $+$  zu  $-$  wechselt.
3.  $f$  besitzt ein lokales Extremum in  $x_0$ , wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \neq 0$ .
4.  $f$  besitzt einen Sattelpunkt in  $x_0$ , wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) = 0$ .
5.  $f$  besitzt einen Wendepunkt in  $x_0$ , wenn  $f''(x_0) = 0$ .
6.  $f$  ist in  $x_0$  konvex, wenn  $f''(x_0) \geq 0$ .
7.  $f$  ist in  $x_0$  konkav, wenn  $f''(x_0) \leq 0$ .

### 4.5 Umkehrsatz

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$  eine bijektive Funktion,  $x_0 \in \mathbf{D}$  ein Häufungspunkt. Wir nehmen an, dass  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist und  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $y_0 := f(x_0)$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{E}$  und  $f^{-1}$  in  $y_0$  differenzierbar. Es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### 4.6 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$ , dann gibt es mindestens einen Punkt  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

### 4.7 Mittelwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(b) - f(a) = f'(\xi) * (b - a)$

### 4.8 l'Hôpital

Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ . Falls

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

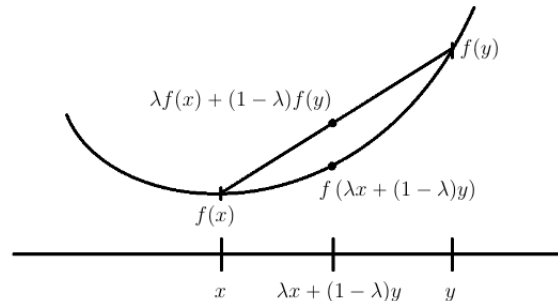
existiert, dann folgt, dass

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei der Satz auch gilt wenn

- (i) falls  $b = +\infty$
- (ii) falls  $x \rightarrow a^+$
- (iii) falls  $\lambda = +\infty$
- (iv) falls  $\lim f = \lim g = \infty$

### 4.9 Konvexität



- (i) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex
- (ii)  $f$  ist genau dann konvex, falls für alle  $x_0 < x < x_1$  in  $\mathbf{I}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x_0}$$

### 4.10 Höhere Ableitungen

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar.

- (i) Für  $n \geq 2$  ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $\mathbf{D}$  falls  $f^{(n-1)}$  in  $\mathbf{D}$  differenzierbar ist. Dann ist  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$  und nennt sich die  $n$ -te Ableitung von  $f$ . Wobei zu beachten ist, dass:  $n$ -mal differenzierbar  $\Rightarrow (n-1)$ -mal stetig differenzierbar.
- (ii) Die Funktion  $f$  ist  $n$ -mal **stetig Differenzierbar**, falls sie  $n$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(n)}$  stetig ist. Wir definieren weiter die Menge

$$C^n(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ } n\text{-mal stetig diff'bar}\}$$

- (iii) Die Funktion  $f$  ist in  $\mathbf{D}$  **glatt** falls sie  $\forall n \geq 1$   $n$ -mal differenzierbar ist.

$$C^\infty(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ glatt}\}$$

### 4.11 Rechenregeln höherer Ableitungen

Seien  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$   $n$ -mal differenzierbar:

$$(i) \quad (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(ii) \quad (f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} * g^{(n-k)}$$

$$(iii) \quad \frac{f}{g} \text{ ist } n\text{-mal differenzierbar falls } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{D}$$

$$(iv) \quad (g \circ f) \text{ ist } n\text{-mal differenzierbar}$$

$$(v) \quad e^x, \sin(x) \text{ und } \cos(x) \text{ sind glatte Funktionen}$$

$$(vi) \quad \text{Alle Polynome sind glatte Funktionen}$$

#### 4.12 Taylor Approximation

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Für jedes  $a < x \leq b$  gibt es  $\xi \in ]a, x[$  mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} * (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x-a)^{n+1}$$

Man bemerke: der letzte Term  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x-a)^{n+1}$  wird meist zur Fehlerabschätzung innerhalb eines Bereichs von  $a$  verwendet. Als Beispiel betrachte man  $p(x) = x^3 + x + 1$  an der Stelle  $a = 1$ . Hier ist die Taylor Approximation

$$T_3 = 3 + 4(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = p(x)$$

und der Fehler für  $\xi \in ]0, 2[$

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!} * (x-1)^4 \leq \frac{0}{(4)!} * (1)^4 = 0$$

Ein weiteres Beispiel: Approximiere  $\sqrt{9.2}$  mit einen Taylor Polynom zweiten Grades.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} * x^{-0.5}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} * x^{-1.5}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} * x^{-2.5}$$

$$T_2 f(x) = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} * (x - x_0)^2$$

$$R = \frac{f'''(\xi)}{3!} * (x - x_0)^3 \text{ für } \xi \in (9, 9.2)$$

$$\Rightarrow x_0 = 9, \xi = 9$$

#### 4.13 Spezielle Punkte bestimmen

Sei  $n \geq 0$ ,  $a < x_0 < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme:  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$

- (i) Falls  $n$  gerade ist und  $x_0$  eine lokale Extremalstelle, folgt  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
- (ii) Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$  so ist  $x_0$  eine strikte lokale Minimalstelle
- (iii) Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  so ist  $x_0$  eine strikte lokale Maximalstelle

Ist  $x_0$  jedoch keine Extremalstelle ((i) von oben nicht erfüllt) bleiben zwei Optionen:

- (i)  $f'(x_0) = 0 \wedge x_0$  keine Extremalstelle  $\Rightarrow x_0$  ist ein Sattelpunkt
- (ii)  $f''(x_0) = 0 \wedge x_0$  keine Extremalstelle  $\Rightarrow x_0$  ist ein Wendepunkt

#### 4.14 Integrale Ableiten

Hier ein Beispiel für die Ableitung eines Integrals:

$$f(x) = - \int_2^{x^2} e^{-t^2} dt$$

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -H(x^2) + H(2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -h(x^2)2x = -e^{-x^4}2x$$

## 5 Integrieren

### 5.1 Partition

Eine Zerlegung eines Intervalls  $I = [a, b]$ . Ist eine endliche Teilmenge  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \subset I$  wobei  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  und  $\{a, b\} \subset P$

Man bemerke: eine Partition  $P'$  ist eine Verfeinerung von  $P$  falls  $P \subset P'$

### 5.2 Feinheit einer Partition

Die **Feinheit** der Partition ist definiert durch  $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

### 5.3 Riemannsche Summe

Sei  $\xi_i \in I_i$  zwischen Punkten. Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) * (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) * \delta_i$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Partition  $P$  und den Zwischenpunkten  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

### 5.4 Unter-/ Obersumme

Wir definieren die Untersumme

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^n \left( \inf_{x \in I_i} f(x) \right) * \delta_i$$

und die Obersumme

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n \left( \sup_{x \in I_i} f(x) \right) * \delta_i$$

### 5.5 Eigenschaften der Unter-/ Obersumme

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine beschränkte Funktion, sowie  $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ .

$$(i) \quad P \subset Q \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$$

$$(ii) \quad \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} S(f, Q)$$

### 5.6 (Riemann) Integrierbar

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt. Wir definieren zuerst  $s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$  sowie analog  $S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$ . Gilt

$$s(f) = S(f)$$

so ist die  $f$  Riemann-Integrierbar und wird mit  $\int_a^b f(x) dx$  bezeichnet.

Weiter sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(i) \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ ist integrierbar mit } A := \int_a^b f(x) dx$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

$$(iii) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ so dass für jede Partition } P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } \delta(P) < \delta \text{ und } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ Zwischenpunkten } x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k : |A - S(f, P, \xi)| < \epsilon$$

$$(iv) \quad \text{Der Grenzwert } \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = \int_a^b f(x) dx \text{ existiert}$$

### 5.7 Integrierbarkeit schnell zeigen

Es gilt weiter für  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt, integrierbar und  $\lambda \in \mathbf{R}$ :

$$(i) \quad f \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ Integrierbar}$$

$$(ii) \quad f \text{ ist monoton} \Rightarrow f \text{ ist integrierbar}$$

$$(iii) \quad f + g, \lambda * f, f * g, |f|, \max(f, g), \min(f, g) \text{ sind integrierbar sowie auch } \frac{f}{g} \text{ falls } |g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$(iv) \quad \text{Jedes Polynom auf } [a, b] \text{ ist integrierbar, auch } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ falls } Q(x) \text{ keine Nullstelle besitzt.}$$

### 5.8 Majoranten Kriterium

$$(i) \quad \text{Falls } |f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a \text{ und } g(x) \text{ auf } [a, \infty[ \text{ integrierbar ist, so ist } f \text{ auf } [a, \infty[ \text{ integrierbar.}$$

$$(ii) \quad \text{Falls } 0 \leq g(x) \leq f(x) \text{ und } \int_a^\infty g(x) dx \text{ divergiert, so divergiert auch } \int_a^\infty f(x) dx$$

$$(iii) \quad \text{Sei } f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ \text{ monoton fallend. Dann konvergiert } \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ genau dann, wenn } \int_1^\infty f(x) dx \text{ konvergent und in diesem Fall gilt: } 0 \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x) dx \leq f(1)$$

### 5.9 Rechenregeln für Integrale

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$(i) \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \text{ für } a < b < c \text{ mit } f : [a, c] \rightarrow \mathbf{R} \text{ und auf } [a, b] \text{ sowie } [b, c] \text{ integrierbar}$$

$$(ii) \quad \int_a^b (\alpha * f_1(x) + \beta * f_2(x)) dx = \alpha * \int_a^b f_1(x) dx + \beta * \int_a^b f_2(x) dx \text{ für } f_1, f_2 : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ beschränkt Integrierbar mit Endpunkten } a, b \text{ sowie } \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

### 5.10 Abschätzungen von Integralen

Es gibt folgende Absätzungen:

$$(i) \quad \text{Seien } f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ beschränkt und integrierbar und } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]. \text{ Dann folgt } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(ii) \quad \text{Falls } f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ beschränkt und integrierbar folgt } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$(iii) \quad \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} * \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

### 5.11 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  wobei  $f$  stetig und  $g$  beschränkt integrierbar mit  $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  ist. Dann gibt es  $c \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) * g(x) dx = f(c) * \int_a^b g(x) dx$$

und falls  $g \equiv 1$  erhalten wir

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) * (b - a)$$

### 5.12 Stammfunktion

Sei  $a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  heisst **Stammfunktion** von  $f$  falls  $F$  stetig differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$  gilt.

### 5.13 Fundamentalsatz der Analysis

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### 5.14 Partielle Integration

Seien  $a < b$  reelle Zahlen und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) * g'(x) dx = f(x) * g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) * g(x) dx$$

beziehungsweise für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) * g'(x) dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) dx$$

- Polynome ableiten, wiederholende Funktionen ( $\sin(x), \cos(x), e^x$ ) integrieren

- manchmal mit 1 multiplizieren

### 5.15 Methode der Substitution

Die Methode der Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. Sei  $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar und  $I \subset \mathbf{R}$  ein Intervall mit  $\phi([a, b]) \subset I$  und  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_a^b f(\phi(t)) * \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$$

wobei für unbestimmte Integrale gilt:

$$\int f(\phi(t)) * \phi'(t) dt + C = \int f(x) dx \Big|_{x=\phi(t)}$$

Hier ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \int 2x * \cos(x^2) dx &\Rightarrow u = x^2, \frac{du}{dx} = 2x, dx = \frac{du}{2x} \\ &= \int 2x * \cos(u) * \frac{du}{2x} = \int \cos(u) du = \sin(x^2) + C \end{aligned}$$

## 5.16 Integration konvergenter Reihen

Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  beschränkt, integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Es gilt weiter: Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine Folge beschränkter und integrierbarer Funktionen so dass  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  auf  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$$

Es gilt weiter: Sei  $f(x) := \sum c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist für jedes  $0 \leq r < \rho$   $f$  auf  $[-r, r]$  integrierbar und es gilt  $\forall x \in ]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

## 5.17 Uneigentliche Integrale

Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$  für alle  $b > a$ . Wir definieren

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

falls existent und sagen dass  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar ist.

Analog: Sei  $f$  eine Funktion auf jedem Intervall  $[a + \epsilon, b]$   $\forall \epsilon > 0$  beschränkt und integrierbar.  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ist integrierbar falls der Folgende Grenzwert existiert, welchen wir als

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx$$

definieren. (Gilt auch symmetrisch für  $[a, b - \epsilon]$   $\forall \epsilon > 0$ ) Wobei wir anmerken, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

## 5.18 Partialbruchzerlegung

Seien  $P, Q$  Polynome mit  $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$  und  $Q$  mit der Produktzerlegung  $Q(x) = \prod_{j=1}^l ((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m_j} \prod_{i=1}^k (x - \gamma_i)^{n_i}$ . Dann gibt es  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  reelle Zahlen mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x - \gamma_i)^j}$$

Bei einer Partialbruchzerlegung geht man folgendermassen vor:

- (i) Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Falls  $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$  wenden wir Polynomdivision an.
- (ii)  $Q$  lässt sich nun als  $Q(x) = \prod_{j=1}^l ((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m_j} \prod_{i=1}^k (x - \gamma_i)^{n_i}$  zerlegen. Das sind die komplexen und reellen Nullstellen mit ihrer Vielfachheit.
- (iii) Wir bilden nun die "hässliche" Summe von oben
- (iv) Wir bestimmen mithilfe von Koeffizientenvergleich (Nennerpolynom Multiplizieren) die unbekannten  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ .

Hier ein einfaches Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{5x+1}{x^2+x-2} &= \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ \Rightarrow \text{Löse } 5x+1 &= A(x+2) + B(x-1) \\ \Rightarrow \text{Setze } x &= -2, 1 \end{aligned}$$

Mit mehreren Linearen Faktoren:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2+x+8}{x(x-2)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\ \Rightarrow \text{Löse } -2x^2+x+8 &= A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \end{aligned}$$

Ohne reelle Nullstellen:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \Rightarrow \text{Löse } 2x^2-3x+3 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \\ \Rightarrow \text{Setze } x &= 0, 1, 2 \end{aligned}$$

## 5.19 Unbestimmte Integral

Das Unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktionen und sozusagen fast alles von oben gilt.  $+C$  ist **sehr** wichtig.



## 6 Sonstiges

### 6.1 Rewrite Function

$$h(x) = \max f(x), g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$$

### 6.2 Stirling Formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, n \rightarrow \infty$$

### 6.3 Proof of "Null-Reihe"

Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsumme  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit:  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$  konvergiert, das heisst, es existiert ein Grenzwert  $s$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Durch Umstellung der Reihe und mit den Rechenregeln für Grenzwerte gilt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$ .

### 6.4 Injektiv/ Surjektiv

Injektiv:  $\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

*f ist injektiv Beweis: wenn Ableitung  $> 0$ : dann streng monoton wachsend auf ganz  $\mathbf{R}$  und somit injektiv*

Surjektiv:  $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$  *f ist surjektiv Beweis: anhand von Zwischenwertsatz beweisen*

### 6.5 Supremum

Sei  $A \subseteq \mathbf{R}, A \neq \emptyset$  und  $A$  nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von  $A$ . Es gibt also ein  $c \in \mathbf{R}$  so dass:

$$1. \forall a \in A \quad a \leq c$$

$$2. \text{ Falls } \forall a \in A \quad a \leq x \text{ ist } c \leq x$$

Man bezeichnet  $c := \sup A$

### 6.6 Infimum

Analog zum Supremum die grösste untere Schranke.

### 6.7 Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

### 6.8 Bernoulli Ungleichung

$$\forall x \in \mathbf{R} \geq -1 \text{ und } n \in \mathbf{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$

### 6.9 Exponentialfunktion

Für ein  $z \in \mathbf{C}$  berechnet man die Exponentialfunktion wie folgt:

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

und es gilt:

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Die reelle Exponentialfunktion  $\exp : \mathbf{R} \rightarrow ]0, \infty[$  ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

$$(i) \exp(x+y) = \exp(x) * \exp(y)$$

$$(ii) x^a := \exp(a * \ln(x))$$

$$(iii) x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$(iv) \exp(iz) = \cos(z) + i * \sin(z) \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$(v) \exp(i * \frac{\pi}{2}) = i$$

$$(vi) \exp(i\pi) = -1 \text{ und } \exp(2\pi i) = 1$$

$$(vii) \text{ Für } a > 0 \text{ ist } ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[ \text{ als } x \rightarrow x^a \text{ eine streng monoton wachsende stetige Bijektion}$$

Merke:  $e^x$  entspricht  $\exp(x)$ .

### 6.10 Natürliche Logarithmus

Der natürliche Logarithmus wird als  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  bezeichnet und ist eine streng monoton wachsende stetige Funktion. Es gilt auch, dass

$$(i) \ln(1) = 0$$

$$(ii) \ln(e) = 1$$

$$(iii) \ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(iv) \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$(v) \ln(x^a) = a * \ln(x)$$

$$(vi) x^a * x^b = x^{a+b}$$

$$(vii) (x^a)^b = x^{a*b}$$

$$(viii) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

### 6.11 Faktorisierungs Lemma

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \dots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

### 6.12 Sinus Abschätzung

Es gilt  $|\sin(x)| \leq |x|$  mit folgendem Beweis:

$$f(x) = x - \sin(x), x \geq 0$$

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

Weil  $f(0) = 0, f(x) \geq 0$  für  $x > 0$ . Dann  $|\sin(x)| \leq |x|$  einfach.

### 6.13 Polynomiale Funktion

Eine **Polynomiale Funktion**  $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ist eine Funktion der Form  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  wobei  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ . Falls  $a_n \neq 0$ , ist  $n$  der Grad von  $P$ .

### 6.14 Kompaktes Intervall

Ein Intervall  $\subset \mathbf{R}$  ist kompakt, wenn es von der Form  $\mathbf{I} = [a, b]$ ,  $a \leq b$  ist.

### 6.15 Funktionenfolge

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung:

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{D}} = \{f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}\} \\ n \rightarrow f_n$$

wobei  $f_n : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  eine Funktion ist. Für jedes  $x \in \mathbf{D}$  erhält man eine Folge  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  reeller Zahlen.

### 6.16 Trigonometrische Funktionen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

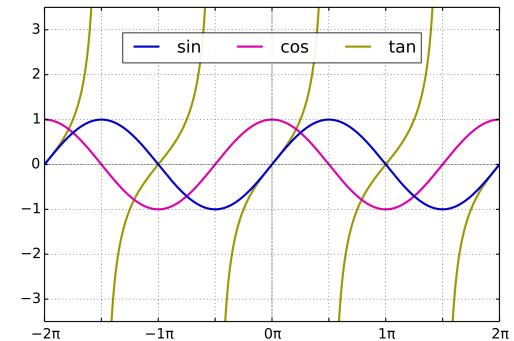
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$

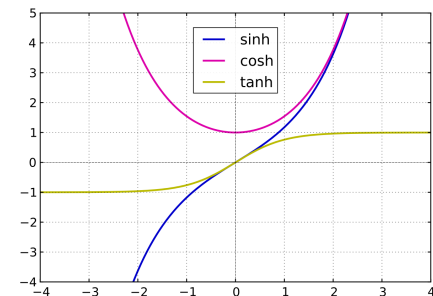
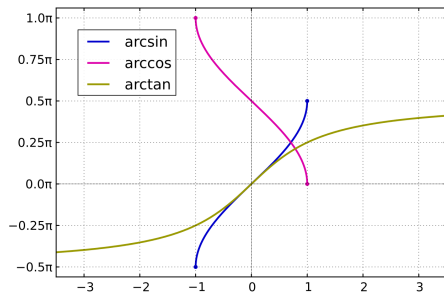
$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$





- (i)  $\cos(z) = \cos(-z)$
- (ii)  $\sin(-z) = -\sin(z)$
- (iii)  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

## 6.17 Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbf{R}$  ist ein **Häufungspunkt** der Menge  $\mathbf{D}$ , falls  $\forall \delta > 0 \quad (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$

## 6.18 Lokales Extremum

Eine Funktion  $f$  besitzt ein lokales Extremum in  $x_0$  falls es entweder ein lokales Minimum oder lokales Maximum von  $f$  ist.

## 6.19 Lokales Minimum

Die Funktion  $f$  besitzt ein lokales Minimum in  $x_0$  falls es  $\delta > 0$  gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbf{D}$$

## 6.20 Lokales Maximum

Die Funktion  $f$  besitzt ein lokales Maximum in  $x_0$  falls es  $\delta > 0$  gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbf{D}$$

## 6.21 Kritische Stelle

Eine **kritische Stelle** einer Funktion ist ein  $x_0$  an der  $f'(x_0)$  null oder undefiniert ist.

## 6.22 Hyperbol Funktionen

- (i)  $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \rightarrow [1, \infty]$
- (ii)  $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
- (iii)  $\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$

und es gilt  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

## 6.23 Funktionen Verknüpfung

$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

# 7 Trigonometrie

## 7.1 Regeln

### 7.1.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

### 7.1.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

### 7.1.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

### 7.1.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)$

### 7.1.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

### 7.1.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

### 7.1.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

### 7.1.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha) \sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

### 7.1.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

### 7.1.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  und  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \forall x \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$
- $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $\arcsin(x) = \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(\arccos(x)) = x$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan(x)^2}}$
- $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(x)^2}}$
- $\sin(z) := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(z) := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

## 8 Exercises

### 8.1 Multiple Choice

- The composition of continuous functions is continuous
- Falls  $g(x) = f(x)^2$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  nicht unbedingt differenzierbar
- $\cos(x)$  gerade,  $\sin(x)$  ungerade  $\rightarrow$  hilfreich wenn Integral von  $\int_{-y}^y$ . Bei ungeraden kürzt sich es weg, bei geraden kann man  $2 \int_0^y$
- Stetigkeitspunkte: Zuerst Schnittpunkte finden, dann zeigen, dass Punkt  $x_0$  stetig ist
- $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .
  - Falls  $f, g$  injektiv, dann  $f \circ g$  injektiv
  - Falls  $f, g$  surjektiv,  $f \circ g$  nicht unbedingt surjektiv
  - $f \circ g \neq g \circ f$
- $f, g$  Funktionen
  - $f \circ g$  stetig  $f, g$  nicht unbedingt stetig
  - Nicht für jede Folge mit Grenzwert  $x$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$
- $x^x = e^{x \log(x)}$
- falls  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert,  $c_n(-1)^n a_n$  konvergiert gegen 0
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig, integrierbare Funktion,  $a_n = \int_0^1 f(x^2) dx$ , Falls  $f$  monoton wachsend ist, so ist  $a_k$  nicht unbedingt monoton wachsend.
- $f_k$  Folge von differenzierbaren Funktionen auf  $[0, 1]$ . Sei  $f$  eine Funktion auf  $[0, 1]$  definiert.  $f_k$  konvergiert gleichmäßig zu  $f$  für  $k \rightarrow \infty$ .  $f$  ist beschränkt
  - $f_k$  sind alle differenzierbar und daher stetig
  - $f$  ist auch stetig, weil  $f_k$  zu  $f$  gleichmäßig konvergiert
  - beschränkt, weil es stetig auf kompakten Intervall definierte Funktion ist
  - **Nicht stetige Funktionen, auch wenn sie nur auf  $[0, 1]$  definiert sind, können unbeschränkt sein**
- $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  beliebig oft stetig differenzierbare Funktion
  - $f$  hat Taylorreihe bei  $x_0 = 0$
  - Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist  $\geq 0$  aber nicht notwendigerweise  $> 0$
  - Wenn  $f$  durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist dieser gleich der Taylorreihe
  - **dort, wo die Taylorreihe konvertiert, stellt sie nicht unbedingt die Funktion dar**

- Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe
  - Falls  $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$  so dass  $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon \forall n \geq N$  dann ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty}$  nicht unbedingt konvergent (Gegenbeispiel:  $\frac{1}{n}$ )
  - Falls  $\sum_{k=1}^{\infty}$  konvergiert, so folgt  $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$  so dass  $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon \forall n \geq N$
- Sei  $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty[$  so dass  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ 
  - es existiert eine Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  und ein  $\epsilon$  so dass  $|f(x_n)| > \epsilon, n \in \mathbf{N}$
  - For alle  $x \in \mathbf{R}$  gilt  $f(x) > 0$
  - $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  sodass  $0 < |x| < \delta \rightarrow f(x) > \epsilon$  STIMMT NICHT
  - Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 0$  STIMMT NICHT
- Seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  Funktionen, so dass  $g \circ f : X \rightarrow Z$  eine Bijektion ist:  $f$  ist injektiv,  $g$  ist surjektiv
- differenzierbar  $\rightarrow$  stetig  $\rightarrow$  integrierbar
- Sei  $a, b \in \mathbf{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine Funktion. Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, n \geq 1$  So dass die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 1}$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert
  - Sei  $x_0 \in ]a, b[$  Falls  $f_n$  für alle  $n \geq 1$  in  $x_0$  differenzierbar ist, so ist  $f$  nicht unbedingt differenzierbar. (Im Allgemeinen braucht die Grenzfunktion nicht einmal differenzierbar zu sein, und wenn sie es ist, muss ihre Ableitung keineswegs gleich dem Grenzwert der Ableitung der Folge sein.)
- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig und nicht konstant
  - Das Bild  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$  ist ein abgeschlossenes Intervall. D.h. es gibt  $a, b \in [0, 1]$  mit  $a < b$ , so dass  $f([0, 1]) = [a, b]$
- $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig bei  $x_0 = 0$ , mit  $f(x_0) > 0$ 
  - Es existiert  $\epsilon, \delta > 0$  so dass  $f(x) > \epsilon$  für alle  $x \in (-\delta, \delta)$  gilt
- $a < b, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt mit  $f(a) < f(b)$ 
  - Falls  $f$  stetig ist, gibt es  $x_0 \in [a, b]$ , so dass  $\int_a^b x f(x) dx = \frac{f(x_0)}{2} (b^2 - a^2)$
- Sei  $f$  eine ungerade Funktion dann ist  $f^{(i)}(0) = 0$  für  $i$  gerade
- Sei  $\phi$  eine Abbildung einer Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $b_n = a_{\phi(n)}$ 
  - Wenn die Reihe absolut konvergiert und  $\phi$  injektiv ist, dann ist die Reihe mit  $b_n$  auch konvergent (Wenn nicht absolut konvergent, dann kann man jeden möglichen Wert bekommen, Surjektiv funktioniert nicht, Annahme  $a_n = \frac{1}{n^2}$ )

9 Tabellen

9.1 Grenzwerte

Wichtige Tabellen stehen hier

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a), \forall a > 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \leq q < 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2^x} = 0$

9.2 Ableitungen

Kurze Notiz am Rande, ein stationärer Punkt ist:  
 $x \in \mathbf{R}$  mit  $f'(x) = 0$

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	$a^{kx}$	$ka^{kx} \ln(a)$
$\ln  x $	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
$-\ln  \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln  \sin(x) $	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln  x  - 1)$	$\ln  x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln  x  - 1)$	$\log_a  x $	$\frac{1}{\ln(a)x}$

9.3 Weitere Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\arcsin(x) / \arccos(x)$	$\frac{1/-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$f(x)^{g(x)}$	$e^{g(x) \ln(f(x))}$
$f(x) = \cos(\alpha)$	$f(x)^n = \sin(x + n \frac{\pi}{2})$
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$

9.4 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x) \, dx$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$\ln  f(x) $
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n \, dx$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n \, dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} \, dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} \, dx$	$\frac{1}{ap} \ln  ax^p+b $
$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln  cx+d $
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $
$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$	$\frac{x}{2} f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x+f(x))$