

# 1 Wahrscheinlichkeiten

## 1.1 Ereignisraum

Die Menge  $\Omega \neq \emptyset$  aller möglichen Ergebnisse des betrachteten Zufallsexperiments. Die Elemente  $\omega \in \Omega$  heissen Elementarereignisse.

## 1.2 Potenzmenge

Die Potenzmenge von  $\Omega$ , bezeichnet mit  $\mathcal{P}(\Omega)$  oder  $2^\Omega$  ist die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$ . Ein Prinzipielles Ereignis ist eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$ , also eine Kollektion von Elementarereignissen. Die Klasse aller beobachtbaren Ereignisse ist  $\mathcal{F}$ .

### $\sigma$ -Algebra

Grundraum: Menge  $\Omega$ .  $\omega \in \Omega$  heisst Elementarereigniss.

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

## 1.3 Wahrscheinlichkeitsmass

Eine Abbildung  $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\mathcal{P}[A] \geq 0$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$
- (2)  $\mathcal{P}[\Omega] = 1$
- (3) Für  $A_i \in \mathcal{F}$  paarweise disjunkt gilt  $\mathcal{P}[\bigcup_{i=1}^\infty A_i] = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}[A_i]$

Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

- $\mathcal{P}[A^c] = 1 - \mathcal{P}[A]$
- $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$
- Für  $A \subseteq B$  gilt  $\mathcal{P}[A] \leq \mathcal{P}[B]$
- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$

## 1.4 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Impliziert:

- $\Omega$  ist endlich oder abzählbar unendlich
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

## 1.5 Laplace Raum

Ist  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  endlich mit  $|\Omega| = N$  und  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  sowie alle  $\omega_i$  gleich wahrscheinlich mit  $p_i = \frac{1}{N}$ , so heisst  $\Omega$  ein Laplace Raum und  $P$  die diskrete Gleichverteilung auf  $\Omega$ . Dann ist für  $A \subseteq \Omega$ :

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien  $A, B$  Ereignisse mit  $P[A] > 0$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter der Bedingung, dass  $A$  eintritt wird definiert durch:

$$\begin{aligned} P[B | A] &:= \frac{P[B \cap A]}{P[A]} \\ &= \frac{P[A, B]}{P[A]} \\ &= \frac{P[A | B] \cdot P[B]}{P[A]} \end{aligned}$$

### Multiplikationsregel

Es gilt:

$$P[A \cap B] = P[A | B] \cdot P[B] = P[B | A] \cdot P[A]$$

## 1.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei  $A_1, \dots, A_n$  eine Zerlegung von  $\Omega$  in paarweise disjunkte Ereignisse, d.h.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  und  $A_i \cap A_k = \emptyset \quad \forall i \neq k$ . Dann gilt:

$$P[B] = \sum_{i=1}^n P[B | A_i] \cdot P[A_i]$$

*Beweis.* Da  $B \subseteq \Omega \Rightarrow B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ . Weiter sind alle Mengen der Art  $(B \cap A_i)$  paarweise disjunkt, was bedeutet, dass  $(B \cap A_i)$  eine disjunkte Zerlegung von  $B$  bilden. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P[B] &= P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n P[B \cap A_i] = \sum_{i=1}^n P[B | A_i] \cdot P[A_i] \end{aligned}$$

## 1.7 Satz von Bayes

Sei  $A_1, \dots, A_n$  eine Zerlegung von  $\Omega$  mit  $P[A_i] > 0$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sei  $B$  ein Ereignis mit  $P[B] > 0$ . Dann gilt für jedes  $k$ :

$$P[A_k | B] = \frac{P[B | A_k] \cdot P[A_k]}{\sum_{i=1}^n P[B | A_i] \cdot P[A_i]}$$

*Beweis.* Verwende Definition Bedingte Wahrscheinlichkeit, im Zähler Multiplikationsregel und im Nenner Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

## 1.8 Unabhängige Ereignisse (2)

Zwei ereignisse heissen (stochastisch) Unabhängig, falls

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

Ist  $P[A] = 0$  oder  $P[B] = 0$ , so sind  $A, B$  immer unabhängig. Für  $P[A] \neq 0$  gilt:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P[A | B] = P[A]$$

## 1.9 Unabhängige Ereignisse ( $\infty$ )

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  heissen (stochastisch) unabhängig, wenn für jede endliche Teilfamilie der Produktformel gilt, d.h. für  $m \in \mathbb{N}$  und  $\{k_1, \dots, k_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ :

$$P\left[\bigcap_{i=1}^m A_{k_i}\right] = \prod_{i=1}^m P[A_{k_i}]$$

## 1.10 Diskrete Zufallsvariable

Eine reelwertige diskrete Zufallsvariable auf  $\Omega$  ist eine Funktion  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Mit  $\Omega$  ist natürlich auch  $\mathcal{W}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$  endlich oder abzählbar.

- Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist die Abbildung  $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ , definiert durch:

### Verteilungsfunktion von $X$

$$t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{\omega : X(\omega) \leq t\}]$$

- Die Gewichtsfunktion oder diskrete Dichte von  $X$  ist die Funktion  $p_X : \mathcal{W}(X) \mapsto [0, 1]$ , definiert durch:

$$p_X(x_k) := P[X = x_k] = P[\{\omega : X(\omega) = x_k\}]$$

Wobei gilt:

- $F_X(t) = P[X \leq t] = \sum_k \text{mit } x_k \leq t p_X(x_k)$
- Für jedes  $x_k \in \mathcal{W}(X)$  gilt  $0 \leq p_X(x_k) \leq 1$  und  $\sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = 1$
- $\mu_X(B) := P[X \in B] = \sum_{x_k \in B} p_X(x_k)$
- $\sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = P[X \in \mathcal{W}(X)] = 1$

## 1.11 Indikatorfunktion

Für jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  ist die Indikatorfunktion  $I_A$  von  $A$  definiert durch:

$$I_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \in A^c \end{cases}$$

## 1.12 Erwartungswert

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion  $p_X(x)$ , dann ist der Erwartungswert definiert durch:

$$E[X] := \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} x_k \cdot p_X(x_k)$$

und hat folgende Eigenschaften:

- Linearität:  $E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$
- Monotonie:  $X \leq Y \implies E[X] \leq E[Y]$
- Nimmt  $X$  nur Werte in  $\mathbb{N}$  an:

$$E[X] = \sum_{i=1}^\infty P[X \geq i]$$

## 1.13 Beispiel: Erwartungswert gemeinsame Dichte

Seien  $X$  und  $Y$  zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne  $E[XY]$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^2 \int_y^0 \frac{1}{2} xy \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{4} x^2 y \Big|_0^y = \frac{1}{4} y^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{16} \cdot 2^4 - \frac{1}{16} \cdot 0^4 = 1 \end{aligned}$$

1.14 Erwartungswert von Funktionen

Sei  $X$  eine Diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion  $p_X(x)$  und  $Y = g(X)$  für eine Funktion  $Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} g(x_k) \cdot p_X(x_k)$$

Varianz

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable. Ist  $E[X^2] < \infty$ , so heisst:

$$\begin{aligned} Var[X] &:= E[X - E[X]^2] \\ &= \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} x_k - E[X]^2 \cdot p_X(x_k) \end{aligned}$$

die Varianz von  $X$ . Es gilt weiter:

- $E[Z]^2 \leq E[Z^2]$
- $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$
- $Var[X - Y] = Var[X] + -1^2 \cdot Var[Y]$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

1.15 Standardabweichung

$$\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$$

1.16 Gemeinsame Verteilung

Seien  $X_1, \dots, X_n$  beliebige Zufallsvariablen. Die Gemeinsame Verteilungsfunktion von  $X_1, \dots, X_n$  ist die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ , definiert durch:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &\mapsto F(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] \\ &= \sum_{y_1 \leq x_1, \dots, y_n \leq x_n} p(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Die Gemeinsame Gewichtsfunktion ist:

$$p(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

1.17 Unabhängige Zufallsvariablen

Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heissen Unabhängig, falls gilt (äquivalent):

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \\ p(x_1, \dots, x_n) &= p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

1.18 Unabhängige Ereignisse

Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  heissen Unabhängig, falls für beliebige Teilmen- gen  $B_i \subseteq \mathcal{W}(X_i)$   $i = 1, \dots, n$  gilt (äquivalent):

$$P[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = \prod_{i=1}^n P[X_i \in B_i]$$

1.19 Funktionen von Zufallsvariablen

Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Unabhängige Zufallsvariablen und  $f_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  irgendwelche Funktionen. Sei weiter  $Y_i := f_i(X_i)$ . Dann sind die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  ebenfalls unabhängig.

1.20 Linearität des Erwartungswertes

Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Er- wartungswerten.  $E[X_1], \dots, E[X_n]$ . Sei  $Y = a + \sum_{i=1}^n b_i \cdot X_i$  mit Konstanten  $a, b_1, \dots, b_n$ . Dann gilt:

$$E[Y] = a + \sum_{i=1}^n b_i \cdot E[X_i]$$

1.21 Kovarianz

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit endlichen Erwartungswerten. Dann ist die Kovarianz definiert als:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &:= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \end{aligned}$$

Wobei  $Cov(X, X) = Var[X]$ .

1.22 Korrelation

Die Korrelation von  $X, Y$  ist definiert durch

$$\rho(X, Y) := \begin{cases} \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} & \text{falls } \sigma(X) \cdot \sigma(Y) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und es gilt  $|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$  beziehungsweise  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .

1.23 Summenformel für Varianzen

$$Var \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] + 2 \cdot \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j)$$

ist aber  $Cov(X, Y) = 0$  ( $X, Y$  paarweise unkorreliert), so wird die Summe linear.

1.24 Produkte von Zufallsvariablen

Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Er- wartungswerten. Falls  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, so ist:

$$E \left[ \prod_{i=1}^n X_i \right] = \prod_{i=1}^n E[X_i]$$

Dann sind auch  $X_1, \dots, X_n$  paarweise unkorreliert und:

$$Var \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$$

da Unabhängig  $\implies$  paarweise Unabhängig  $\implies$  unkorreliert.

1.25 Bedingte Verteilung

Seien  $X, Y$  diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunk- tion  $p(x, y)$ . Die bedingte Gewichtsfunktion von  $X$ , gegeben dass  $Y = y$ , ist definiert durch:

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &:= P[X = x | Y = y] \\ \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

für  $p_Y(y) > 0$  und 0 sonst.

1.26 Kriterium für Unabhängigkeit

$X, Y$  sind genau dann unabhängig, wenn für alle  $y$  mit  $p_Y(y) > 0$  gilt:

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) \quad \forall x \in \mathcal{W}(X)$$

1.27  $n$  tief  $k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

2 Wichtige diskrete Verteilungen

2.1 Diskrete Gleichverteilung

Die diskrete Gleichverteilung auf einer endlichen Menge  $\mathcal{W} = \{x_1, \dots, x_n\}$  gehört zu einer Zufallsvariablen  $X$  mit Wertebereich  $\mathcal{W}$  und Gewichtsfunktion:

$$p_X(x_k) = P[X = x_k] = \frac{1}{N} \quad k \in \{1, \dots, N\}$$

2.2 Unabhängige 0-1-Experimente

Es sei  $A_i := \{\text{Erfolg beim } i\text{-ten Experiment}\}$  und:

- Die  $A_i$  sind unabhängig
- $P[A_i] = p$  für alle  $i$
- 

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i \\ 0 & \omega \notin A_i \end{cases}$$

Bernoulli-Verteilung

Ein einziges 0-1-Experiment mit  $\mathcal{W}(X) = \{0, 1\}$ . Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch  $p_X(1) = p$ , sowie  $p_X(0) = 1 - p$ . Man schreibt kurz  $X \sim Be(p)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \cdot P[X = 1] + 0 \cdot P[X = 0] = p \\ Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = p \cdot (1 - p) \\ E[X^2] &= p \end{aligned}$$

Binomial Verteilung

Beschreibt die Anzahl der Erfolge bei  $n$  unabhängigen 0-1- Experimenten mit Erfolgsparameter  $p$ . Also ist die Zufallsvari- able respektive Gewichtsfunktion:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n I_{A_i} = \sum_{i=1}^n Y_i \\ p_X(k) &= P[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

und man schreibt kurz  $X \sim Bin(n, p)$ . Es gilt weiter:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^n E[Y_i] = n \cdot p \\ Var[X] &= \sum_{i=1}^n Var[Y_i] = n \cdot p \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

## Geometrische Verteilung

Bei einer unendlichen Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter  $p$  sein  $X$  die Wartezeit zum ersten Erfolg:

$$X = \inf\{i \in \mathbb{N} : A_i \text{ tritt ein}\}$$

$$p_X(k) = P[X = k] = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$P[X \geq k] = (1-p)^{k-1}$$

wir schreiben  $X \sim \text{Geom}(p)$  und es gilt:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$E[X \cdot (X-1)] = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

### 2.3 Beispiel: Gedächtnislosigkeit Geometrische Verteilung

$$\exists q \in (0, 1) : Z \sim \text{Geom}(q) \Leftrightarrow$$

$$P[Z > n] = P[Z > n+k | Z > k], \quad n, k \geq 1.$$

“ $\Rightarrow$ ”: Let  $Z \sim \text{Geom}(q)$ , where  $q \in [0, 1]$ . Then, we have  $P[Z > k] = (1-q)^k$  for  $k \in \mathbb{N}$ , and thus for all  $k, n \in \mathbb{N}$ ,

$$P[Z > n+k | Z > k] = P[Z > n+k, Z > k]$$

$$= P[Z > k] = P[Z > n+k]$$

$$= (1-q)^{n+k} \cdot (1-q)^k$$

$$= (1-q)^n = P[Z > n]$$

“ $\Leftarrow$ ”: Now, assume  $P[Z > n+k | Z > k] = P[Z > n]$  for  $n, k \in \mathbb{N}$ . Then,

$$P[Z > n] = P[Z > n+k | Z > k] = P[Z > n+k, Z > k]$$

$$= P[Z > k] = P[Z > n+k]$$

$$= (1-q)^{n+k} \cdot (1-q)^k = (1-q)^n = P[Z > n].$$

Define  $f(n) = P[Z > n]$ . It follows that  $f(n)f(k) = f(n+k)$  for all  $n, k \in \mathbb{N}$ . Due to  $f(n+1) = f(n)f(1)$ , by iteration, we immediately get  $f(n) = a^n$  with  $a = f(1)$ , and thus

$$P[Z = n] = P[Z > n-1] - P[Z > n]$$

$$= f(n-1) - f(n) = (1-a)a^{n-1}$$

Finally,  $a = f(1) = P[Z > 1] \in [0, 1]$ , which implies  $q = 1-a \in [0, 1]$ , and consequently  $Z \sim \text{Geom}(q)$ .

## Negativbinomiale Verteilung

Bei einer unendlichen Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter  $p$  sein  $X$  die Wartezeit zum  $r$ -ten Erfolg ( $r \in \mathbb{N}$ ):

$$X = \inf\{k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^k I_{A_i} = r\}$$

$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$$

wir schreiben  $X \sim \text{NB}(r, p)$  und es gilt:

$$E[X] = \sum_{i=1}^r E[X_i] = \frac{r}{p}$$

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^r \text{Var}[X_i] = \frac{r \cdot (1-p)}{p^2}$$

## Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne seien  $n$  Gegenstände, davon  $r$  vom Typ 1 und  $n-r$  vom Typ 2. Man zieht ohne zurücklegen  $m$  der Gegenstände. Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt die Anzahl der Gegenstände vom Typ 1 in der Stichprobe. Der Wertebereich von  $X$  ist  $\mathcal{W}(X) = \{0, 1, \dots, \min(m, r)\}$  und:

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}} \quad \text{für } k \in \mathcal{W}(X)$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n i \cdot p_X(i) = m \cdot \frac{r}{n} \quad (\text{Nicht im Skript})$$

$$\text{Var}[X] = m \cdot \frac{r}{n} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{n-m}{n-1} \quad (\text{Nicht im Skript})$$

## Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung mit Parameter  $\lambda \in (0, \infty)$  ist eine Verteilung auf der Menge  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  mit Gewichtsfunktion:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$$

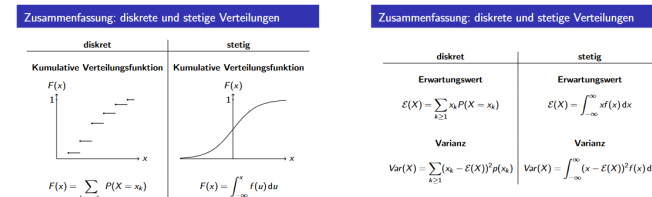
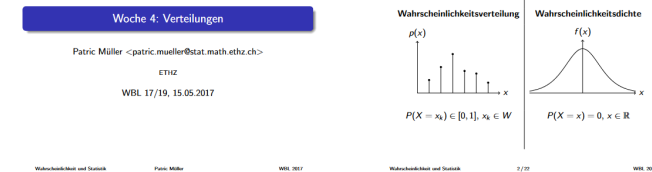
$$\text{Var}[X] = \lambda$$

$$\text{Bin}(n, p) \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ mit } \lambda = n \cdot p$$

Ist eine Zufallsvariable  $X$  Poisson verteilt mit Parameter  $\lambda$  schreiben wir  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

### 2.4 Zufallsvariable

$P[X = x] = 0$  für stetige Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeit einer einzigen Variable gleich 0



Sein  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Also  $\Omega$  ein Grundraum,  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  die beobachtbaren Ereignisse und  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmass auf  $\mathcal{F}$ . Eine (reelwertige) Zufallsvariable auf  $\Omega$  ist eine messbare Funktion  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Das bedeutet, dass die Menge  $\{X \leq t\} = \{\omega : X(\omega) \leq t\}$  für jedes  $t$  ein beobachtbares Ereignis sein muss.

### 2.5 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist die Abbildung  $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ :

#### Verteilungsfunktion

$$t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{\omega : X(\omega) \leq t\}]$$

und hat die Eigenschaften:

- $F_X$  ist wachsend und rechtsstetig. Das bedeutet, dass  $F_X(s) \leq F_X(t)$  für  $s \leq t$  gilt und  $F_X(u) \rightarrow F_X(t)$  für  $u \rightarrow t$  mit  $u > t$
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

### 2.6 Beispiel: Verteilungsfunktion

Um zu verhindern, dass ein Gerät infolge eines defekten Halbleiters längere Zeit ausfällt, werden zwei identische, parallel geschaltete Halbleiter zu einem Bauteil zusammengefasst. Eine Kontrolllampe leuchtet auf, wenn einer der beiden Halbleiter ausgefallen ist. Wir nehmen an, dass die Lebensdauern der Halbleiter unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 60 Tage sind. Wie ist die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet, verteilt?

Seien  $H_1$  und  $H_2$  die Lebensdauern der entsprechenden Halbleiter. Nach Voraussetzung sind  $H_1$  und  $H_2$  i.i.d. und  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt mit  $\lambda = \frac{1}{60}$ . Sei  $T$  die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet; also ist  $T = \min\{H_1, H_2\}$ . Die Verteilungsfunktion von  $T$  ist gegeben durch

$$F_T(t) = P[T \leq t] = P[\min\{H_1, H_2\} \leq t]$$

$$= 1 - P[\min\{H_1, H_2\} > t] = 1 - P[H_1 > t, H_2 > t]$$

$$= 1 - P[H_1 > t]P[H_2 > t]$$

$$= (1 - \exp(-2\lambda t))\mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)$$

d.h.  $T$  ist wieder exponentialverteilt mit Parameter  $2\lambda = \frac{1}{30}$ .

### 2.7 Dichtefunktion

Das Analogon der Gewichtsfunktion im Diskreten Fall. Eine Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F_X(t) = P[X \leq t]$  heisst (ab-

solot) stetig mit Dichte (funktion)  $f_X : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ , falls gilt:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) dx \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und hat die Eigenschaften:

- $f_X \geq 0$  und  $f_X = 0$  ausserhalb von  $\mathcal{W}(X)$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds = 1$ ; das folgt aus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

### 3 Wichtige stetige Verteilungen

#### Gleichverteilung

Die Gleichverteilung auf dem Intervall  $[a, b]$  ist ein Modell für die Zufällige Wahl eines Punktes in  $[a, b]$ . Die zugehörige Zufallsvariable  $X$  hat den Wertebereich  $\mathcal{W}(X) = [a, b]$ , sowie

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{für } t > b. \end{cases}$$

wir schreiben kurz  $X \sim U(a, b)$ .

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

#### Exponential Verteilung

Die Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda > 0$  ist das stetige Analogon der Geometrischen Verteilung. Die zugehörige Zufallsvariable  $X$  hat  $\mathcal{W}(X) = [0, \infty)$ , Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

wir schreiben kurz  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Weiter ist die Funktion Gedächtnislos, dh.  $P[X > t+s \mid X > s] = P[X > t]$ .

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

#### Normal Verteilung

Die Normalverteilung hat zwei Parameter:  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma^2 > 0$ . Die zugehörige Zufallsvariable  $X$  hat den Wertebereich  $\mathcal{W}(X) = \mathbb{R}$  und die Dichtefunktion:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

welche symmetrisch um  $\mu$  ist. Wir schreiben kurz:  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

$$E[X] = \mu \quad \text{Var}[X] = \sigma^2$$

Wenn  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  dann  $X^2 \sim \mathbb{N}(1, 2)$

#### 3.1 Standard Normalverteilung

Wichtige Normalverteilung mit  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Weder für die zugehörige Dichte  $\varphi(t)$  noch Verteilungsfunktion  $\Phi(t)$  gibt es geschlossene Ausdrücke, aber das Integral

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

ist tabelliert. Ist  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , so ist

##### Normalverteilung

$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , also:

$$F_X(t) = P[X \leq t] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

deshalb genügt es  $\Phi$  zu tabellieren.

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

#### 3.2 Normalapproximation

Wenn  $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$  dann

$$S_n \sim_{\text{approx}} N(np, np(1-p))$$

##### Erwartungswert

Ist  $X$  stetig mit Dichte  $f_X(x)$ , so ist der Erwartungswert:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

sofern das Integral absolut konvergiert. Ist das Integral nicht absolut konvergent, so existiert der Erwartungswert nicht.

##### Erwartungswert einer Funktion

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $Y = g(X)$  eine weitere Zufallsvariable. Ist  $X$  stetig mit Dichte  $f_X$ , so ist

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

#### 3.3 Gemeinsame Verteilung/Dichte

Die Gemeinsame Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ist die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$  mit:

$$F(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots t_1$$

dann heisst  $f(x_1, \dots, x_n)$  die gemeinsame Dichte, welche folgende Eigenschaften hat:

- $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  und  $= 0$  ausserhalb von  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_n)$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots t_1 = 1$
- $P[(X_1, \dots, X_n) \in A] = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in A} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots t_1$  für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

#### 3.4 Randverteilung

Haben  $X, Y$  die Gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$ , so ist die Funktion  $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ ,

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y < \infty] = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Sind  $X, Y$  diskrete Zufallsvariablen mit  $\mathcal{W}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$  und gemeinsamer Gewichtsfunktion  $p(x, y)$ , so ist die Gewichtsfunktion der Randverteilung von  $X$  gegeben durch:

$$x \mapsto p_X(x) := \sum_{y_i \in \mathcal{W}(Y)} P[X = x, Y = y_i]$$

#### 3.5 Beispiel: Dichtefunktion berechnen

Seien  $X$  und  $Y$  zwei unabhängige Zufallsvariablen, beide exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Definiere

$$U := \frac{X}{X+Y} \text{ und } V := X+Y$$

Seien  $f_U$  und  $f_V$  die zu  $U$  und  $V$  gehörigen Dichtefunktionen. Berechne die Dichtefunktion  $f_U$  und Verteilungsfunktion  $F_U$

$$P[U \leq u] = f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dy$$

$$= \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left( \int_0^{\infty} 1_{\frac{x}{x+y} \leq u} e^{-\lambda y} dy \right) dx$$

$$= \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left( \int_0^{\infty} 1_{x(u-1-1) \leq y} e^{-\lambda y} dy \right) dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left( \int_{x(u-1-1)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-\lambda x(u-1-1)} dx$$

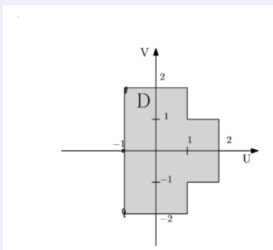
$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u^{-1}x} dx$$

$$= u$$

### 3.6 Beispiel: Randverteilung, gemeinsame Dichte

Man wählt zufällig einen Punkt  $P = (U, V)$  in dem Gebiet  $D$ . Die gemeinsame Dichte von  $(U, V)$

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} c & \text{falls } (u, v) \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



- bestimme Konstante  $c$
- bestimme Randverteilungsfunktion von  $U$  und Randdichtefunktion  $f_U(u)$ .
- Sind  $U$  und  $V$  unabhängig?

$$D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq a \leq 1 \text{ and } -2 \leq b \leq 2\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq a \leq 2 \text{ and } -1 \leq b \leq 1\}$$

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} 1/10 & \text{if } (u, v) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- For  $u < -1$ ,  $F_U(u) = P(U \leq u) = 0$ . For  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $F_U(u) = P(U \leq u) =$

$$\int_u^{-1} \int_{-2}^2 \frac{1}{10} \mathbf{1}_D(u, v) dv ds = \frac{4(u+1)}{10}$$

For  $1 \leq u \leq 2$ ,  $F_U(u) = P(U \leq u) =$

$$\int_1^{-1} \int_{-2}^2 \frac{1}{10} \mathbf{1}_D(u, v) dv ds + \int_u^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{10} \mathbf{1}_D(u, v) dv ds = \frac{8}{10} + \frac{2(u-1)}{10}$$

and  $F_U(u) = 1$  for  $u > 2$ .

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{4}{10} & \text{if } -1 \leq u \leq 1 \\ \frac{2}{10} & \text{if } 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du =$$

$$\frac{1}{2} (2[v \in [-2, 2]] + [v \in [-1, 1]])$$

- If  $U$  and  $V$  are independent, then for all  $u$  and  $v$ :

$$f_U(u) \cdot f_V(v) = f_{U,V}(u, v)$$

However, we have  $f_{U,V}(2, 2) = 0$  and  $f_U(2) \cdot f_V(2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \neq 0$ . Therefore,  $U$  and  $V$  are not independent.

### 3.7 Unabhängigkeit

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen unabhängig, falls gilt (äquivalent):

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

für alle  $x_1, \dots, x_n$ .

### 3.8 Bedingte Verteilungen

Es gilt:

$$f_{X_1 | X_2}(x_1 | x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \\ P[Y > t | Y < a] = \frac{P[t < Y < a]}{P[Y < a]} \\ E[X_1 | X_2] = \int x_1 \cdot f_{x_1 | x_2}(x_1 | x_2) dx_1$$

### 3.9 Summen von Zufallsvariablen

Sei  $Z = X + Y$  eine Zufallsvariable mit:

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[X + Y \leq z] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy dx \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$$

### 3.10 Transformationen

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilung und Dichte. Sei  $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  eine messbare Funktion. Betrachte nun  $Y = g(X)$ , wir suchen Verteilung und Dichte von  $Y$ :

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[g(X) \leq t] = \int_{A_g} f_X(s) ds \\ A_g := \{s \in \mathbb{R} | g(s) \leq t\}$$

Wobei man die Dichte durch ableiten der Verteilung erhält.

### 3.11 Anwendung von Transformationen

Sei  $F$  eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit Umkehrfunktion  $F^{-1}$ . Ist  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und  $Y = F^{-1}(X)$ , so hat  $Y$  gerade die Verteilungsfunktion  $F$ :

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[F^{-1}(X) \leq t] \\ = P[X \leq F(t)] = F(t)$$

Mit der Substitution

$$\phi(X) = Y \\ X = \phi^{-1}(y) \\ f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y)) |\det J_{\phi^{-1}}(y)|$$

### 3.12 Beispiel: Transformation

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Dichte  $f_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und sei  $Y = e^X$ . Was ist die Dichte  $f_Y(y)$ ,  $y > 0$  der Zufallsvariable  $Y$ ?

$$Y = e^X \\ X = \ln Y \\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \\ f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y}$$

## 4 Ungleichungen

### Markov Ungleichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und ferner  $g: \mathcal{W}(X) \mapsto [0, \infty)$  eine wachsende Funktion. Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  mit  $g(c) > 0$  gilt dann:

$$P[X \geq c] \leq \frac{E[g(X)]}{g(c)}$$

### Chebyshev-Ungleichung

Sei  $Y$  eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Für jedes  $b > 0$  gilt dann:

$$P[|Y - E[Y]| \geq b] \leq \frac{Var[Y]}{b^2}$$

### Chernoff Schranken

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig mit  $X_i \sim Be(p)$  und  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . Sei  $\mu_n := E[X] = \sum_{i=1}^n p_i$  und  $\delta > 0$ . Dann gilt: Suppose  $0 < \delta$ , then

$$P(X \geq (1 + \delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2 \mu}{2 + \delta}},$$

and

$$P(X \leq (1 - \delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2 \mu}{2}}.$$

### 4.1 Grosse Summenabweichung

Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. Zufallsvariablen, für welche die Momenterzeugende Funktion  $M_X(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  endlich ist. Für jedes  $b \in \mathbb{R}$  gilt dann:

$$P[S_n \geq b] \leq \exp \left( \inf_{t \in \mathbb{R}} (n \cdot \log M_X(t) - t \cdot b) \right)$$



#### 4.2 Beispiel: Chernoff Schranke

Suppose you toss a fair coin 200 times. How likely is it that you see at least 120 heads? The Chernoff bound says

$$P(X \geq 120) = P(X \geq (1 + \frac{20}{100}) \cdot 100) \leq e^{-\frac{1}{5^2} \cdot \frac{100}{2 + \frac{1}{5}} \cdot 100} = e^{-\frac{20}{6}} = 0.0356$$

#### 4.3 Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert  $E[X_i] = \mu$  und die gleiche Varianz  $Var[X_i] = \sigma^2$  haben. Sei

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dann konvergiert  $\bar{X}_n$  für  $n \rightarrow \infty$  in Wahrscheinlichkeit/ stochastisch gegen  $\mu = E[X_i]$ , d.h.:

$$P[|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

(Statt unabhängig genügt auch  $Cov(X_i, X_k) = 0$  für  $i \neq k$ )

#### 4.4 Starkes Gesetz der grossen Zahlen

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle dieselbe Verteilung haben, und ihr Erwartungswert  $\mu = E[X_i]$  sei endlich. Für:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

gilt dann

$$\bar{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \quad \text{P-fasticher}$$

d.h.:

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \bar{X}_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu\right\}\right] = 1$$

#### Zentraler Grenzwertsatz

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit  $E[X_i] = \mu$  und  $Var[X_i] = \sigma^2$ . Für die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  gilt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[y \leq \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right] = \Phi(x) - \Phi(y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$  ist.  $S_n = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

### 5 Schätzer

#### 5.1 Schätzer

Wir suchen ein Modell für eine Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  und haben einen Parameteraum  $\vartheta \subseteq \Theta$  und für jedes  $\vartheta$  einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P_\vartheta)$ . Wir möchten nun die Parameter  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$  bestimmen. Ein Schätzer  $T_j$  für einen Parameter  $\vartheta_j$  ist eine Zufallsvariable der Form  $T_j := t_j(X_1, \dots, X_n)$  für eine Schätzfunktion  $t_j$ .

#### Schätzwert

Verschiedene  $T_{ML}$

<b>bern</b> ( $\theta$ )	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
<b>bin</b> ( $k, \theta$ )	$\frac{1}{k} \bar{X}_n = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n X_i$
<b>P</b> ( $\theta$ )	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
<b>geom</b> ( $\theta$ )	$n / \sum_{i=1}^n X_i$
<b>U</b> ( $[a, b]$ )	$\max\{X_1, \dots, X_n\}$
<b>exp</b> ( $\theta$ )	$\frac{1}{\bar{X}_n} = n / \sum_{i=1}^n X_i$
<b>N</b> ( $\mu, \sigma^2$ )	$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \hat{\sigma}^2 = S^2$

Ein Schätzwert ist das Ergebnis einer konkreten Berechnung, eine Zahl. Sie entsteht durch das Einsetzen konkreter Daten in einen Schätzer:  $T_j(\omega) = t_j(x_1, \dots, x_n)$  und liefert damit einen Wert für genau einen Parameter.

#### 5.2 Eigenschaften von Schätzern

Sei  $T$  ein Schätzer.

- $T$  ist erwartungstreu, falls  $E_\vartheta[T] = \vartheta$  gilt.  $T$  schätzt im Mittel also richtig.
- Bias :=  $E_\vartheta[T] - \vartheta$ . Ein erwartungstreuer Schätzer hat also keinen Bias.
- Mittlere Quadratische Schätzfehler  $MSE_\vartheta[T] := E_\vartheta[(T - \vartheta)^2]$ .
- Eine Folge  $T^{(n)}$  von Schätzern heisst konsistent für  $\vartheta$ , falls  $T^{(n)}$  für  $n \rightarrow \infty$  in  $P_\vartheta$ -Wahrscheinlichkeit gegen  $\vartheta$  konvergiert, d.h. für jedes  $\vartheta \in \Theta$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta\left[|T^{(n)} - \vartheta| > \varepsilon\right] = 0$$

#### 5.3 Beispiel: Erwartungstreuer Schätzer

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $X_i \sim \mathcal{U}([0 - 1, \theta])$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  wobei  $\theta \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten den Schätzer

$$T_1^{(n)} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}$$

Sind Schätzer erwartungstreu?

Sei  $\theta \in \mathbb{R}$  fixiert. Aus der Gleichverteilung folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[T(n)_1] &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[X_i]\right) + \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{E}_\theta[X_1] + \frac{1}{2} = \theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \theta \end{aligned}$$

Somit folgt, dass der Schätzer  $T(n)_1$  erwartungstreu ist.

#### 5.4 Maximum-Likelihood Methode

(Analog im diskreten Fall.) In einem Modell  $P_\vartheta$  sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  stetig mit einer gemeinsamen Dichtefunktion  $f(x_1, \dots, x_n, \vartheta)$ . Oft sind die  $X_i$  i.i.d. und man erhält:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, \vartheta) &= P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\ &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i, \vartheta) \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass die Daten die wir erhalten haben sehr Wahrscheinlich sind und versuchen nun folgende Likelihood funktion zu Maximieren durch Anpassungen an  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta) &:= f(x_1, \dots, x_n; \vartheta) \\ \log L(x_1, \dots, x_n; \vartheta) &:= \log f(x_1, \dots, x_n; \vartheta) \end{aligned}$$

letzteres kann bei Produkt zu Summe umwandlung hilfreich sein.

#### 5.5 Beispiel: Maximum Likelihood-Funktion

Sei  $\Theta = [0, 1]$ . Wir betrachten die Modellfamilie  $P_{\theta \in \Theta}$ , wobei  $X_1, \dots, X_n$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  unabhängig und identisch verteilt sind mit  $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ . Was ist die Likelihood-Funktion  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  für  $x_1, \dots, x_n \in \{1, 2, \dots\}$ ?

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \theta) &= (P_\theta)[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta[X_i = x_i] \\ &= \theta^n \cdot (1 - \theta)^{x_1 + \dots + x_n - n} \end{aligned}$$

Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer  $T_{ML}$  für  $\theta$ ?

$$n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \dots + x_n - n) \cdot \log(1 - \theta)$$

Wir setzen nun die Ableitung der log-Likelihood-Funktion nach  $\theta$  gleich 0 und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\theta} - \frac{x_1 + \dots + x_n - n}{1 - \theta} &= 0 \\ \iff n - n\theta &= (x_1 + \dots + x_n) \cdot \theta - n\theta \\ \iff \theta &= \frac{n}{x_1 + \dots + x_n} \\ &= \frac{n}{X_1 + \dots + X_n} \end{aligned}$$

#### 5.6 Empirisches Moment

Für  $k \in \{1, \dots, m\}$  sei das  $k$ -te Moment empirische Moment oder Stichprobenmoment  $\hat{m}_k$  der Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\hat{m}_k(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

Sei  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit unbekannten Parametern  $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ . Damit berechnen wir mit der log max likelihood funktion Ableitungen setzen diese zu 0 und bekommen:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$$

möchten wir aber noch, dass der Schätzer erwartungstreu wird, so wählen wir für  $T_2 = S^2$ :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

## 5.7 Normalverteilte Stichproben

Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt:

- $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  und  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

- $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right) \sim \chi^2_{n-1}$

- $\bar{X}_n$  und  $S^2$  sind unabhängig

- $\frac{\bar{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{n-1}{\sigma^2} S^2}} \sim t_{n-1}$

## 6 Statistik

### 6.1 $\chi^2$ -Verteilung

Die  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden (bez.  $\chi_n^2$ ) gehört zu einer stetigen Zufallsvariable  $Y$  mit Dichtefunktion:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

wobei dies ein Spezialfall der  $Ga(\alpha, \lambda)$  Verteilung ist mit  $\alpha = \frac{n}{2}$  und  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ , so ist die Summe  $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$ .

### 6.2 $t$ -Verteilung

Die  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden gehört zu einer stetigen Zufallsvariable  $Z$  mit Dichtefunktion

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{für } z \in \mathbb{R}$$

für  $n = 1$  ist das eine Cauchy Verteilung und für  $n \rightarrow \infty$  erhält man  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Sind  $X, Y$  unabhängig und  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $Y \sim \chi_n^2$ , so ist der Quotient:

$$Z := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}} \sim t_n, \text{ also } t\text{-Verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden}$$

## 7 Tests

### 7.1 Hypothesen

Es gibt:

- Hypothese  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$
- Alternative  $H_A : \vartheta \in \Theta_A$

Man verwirft die Hypothese genau dann, wenn der realisierte Wert im Verwerfungsbereich  $K$  liegt.

### 7.2 Fehler

Es gibt folgende Fehler:

- 1. Art: Hypothese wird zu unrecht abgelehnt.  $P_\vartheta[T \in K]$  für  $\vartheta \in \Theta_0$
- 2. Art: Hypothese wird zu unrecht nicht verworfen.  $P_\vartheta[T \notin K]$  für  $\vartheta \in \Theta_A$

Meisst kann man nicht beides minimieren, also geht man wie folgt vor:

- Man wählt ein **Signifikanzniveau**  $\alpha \in (0, 1)$  und kontrolliert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art durch

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} P_\vartheta[T \in K] \leq \alpha$$

- Man versucht die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art  $P_\vartheta[T \notin K]$  für  $\vartheta \in \Theta_A$  zu minimieren. Dazu maximiert man die **Macht des Tests**:

$$\beta : \Theta_A \mapsto [0, 1] \quad \vartheta \mapsto \beta(\vartheta) := P_\vartheta[T \in K]$$

Somit ist es schwieriger eine Hypothese zu verwerfen als zu behalten. In einem Test **verwendet man deshalb immer als Hypothese die Negation der eigentlich gewünschten Aussage**.

### 7.3 Beispiel:

**Was passiert, wenn das Signifikanzniveau  $\alpha$  kleiner wird?** Kleineres Signifikanzniveau ( $\alpha$ )

- Engerer Verwerfungsbereich
- Weniger extreme Teststatistikwerte für Ablehnung der Nullhypothese erforderlich
- Strengerer Test
- Höhere Anforderungen an statistische Signifikanz
- Geringere Wahrscheinlichkeit, Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen
- Höhere Wahrscheinlichkeit für Fehler vom Typ II (falsche Akzeptanz der Nullhypothese, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist)
- Macht wird reduziert

### 7.4 Beispiel: Hypothesen-Test

Wir haben eine Münze mit einer Seite rot und der anderen Seite blau gefärbt, und wir vermuten, dass die Münze gezinkt ist und eher auf der blauen Seite landet.

1. **Modell:** Unter  $P_p$  sind die  $X_i$  i.i.d.,  $\sim \text{Ber}(p), i = 1, \dots, 10, p$  unbekannt

2. **Nullhypothese:**  $H_0 : p = p_0 = 0.5$

3. **Alternativhypothese:**  $H_A : p = p_A > p_0$ .

4. **Teststatistik:**  $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$ , denn

$$\begin{aligned} R(x_1, \dots, x_{10}; \lambda_0, \lambda_A) &= L(x_1, \dots, x_{10}; \lambda_0) L(x_1, \dots, x_{10}; \lambda_A) \\ &= \frac{p_0^T (1-p_0)^{10-T}}{p_A^T (1-p_A)^{10-T}} \\ &= \left( \frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)} \right)^T \left( \frac{1-p_0}{1-p_A} \right)^{10} \end{aligned}$$

Da  $\frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)} < 1$  wird  $R(x_1, \dots, x_{10}; p_0, p_A)$  klein, genau dann, wenn  $\sum_{i=1}^{10} x_i$  groß ist. Wir wählen als Teststatistik also  $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$ .

5. **Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$ :**  $T \sim \text{Bin}(10, 1/2)$ .

6. **Verwerfungsbereich:** Der kritische Bereich "Quotient klein" hat die äquivalente Form "Summe groß", also ist der Verwerfungsbereich von der Form  $K = (k, \infty)$ . Um das Signifikanzniveau einzuhalten, muss gelten

$$P_{p_0}[T \in K] = P_{p_0}[T > k] \leq 1\% \Rightarrow P_{p_0}[T \leq k] \geq 99\%.$$

Deshalb haben wir als Verwerfungsbereich  $K = (9, \infty)$ .

7. **Beobachteter Wert der Testst.:**  $t = T(\omega) = 8$ .

8. **Testentscheid:** Da 8 nicht im Verwerfungsbereich liegt, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

### 7.5 Hypothesis testing

1. **Left-sided or left-tailed test:** If  $H_0 : p = p_0$  is tested against the alternative  $H_1 : p < p_0$ , the region of rejection has the form  $\{0, 1, \dots, k\}$ . The critical value  $k$  is the largest value such that  $P(X \leq k) \leq \alpha$ .

2. **Right-sided or right-tailed test:** If  $H_0 : p = p_0$  is tested against the alternative  $H_1 : p > p_0$ , the region of rejection has the form  $\{k, k+1, \dots, n\}$ . The critical value  $k$  is the smallest value such that  $P(X \geq k) \leq \alpha$ .

3. **Two-sided or two-tailed test:** If  $H_0 : p = p_0$  is tested against the alternative  $H_1 : p \neq p_0$ , the region of rejection has the form  $K = \{0, 1, \dots, k_1\} \cup \{k_2, k_2+1, \dots, n\}$ . The critical values  $k_1$  and  $k_2$  are determined as the smallest and largest value, respectively, such that  $P(X \leq k_1) \leq \frac{\alpha}{2}$  and  $P(X \geq k_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ .

### 7.6 Likelihood Quotient

Sei  $L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)$  die Likelihood Funktion und  $\vartheta_0 \in \Theta_0$  sowie  $\vartheta_A \in \Theta_A$ . Dann definieren wir:

$$R(x_1, \dots, x_n; \vartheta_0, \vartheta_A) = \frac{L(x_1, \dots, x_n; \vartheta_A)}{L(x_1, \dots, x_n; \vartheta_0)}$$

je grösser der Quotient, desto wahrscheinlicher die Alternative. Es gibt auch:

$$R(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta_A} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}$$

$$\tilde{R}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta_A \cup \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}$$

Wähle Konstante  $c_0$  für  $K_0 = (c_0, \infty)$  mithilfe von Signifikanzniveau.

### 7.7 Neyman-Pearson Lemma

Sei  $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$  und  $\Theta_A = \{\vartheta_A\}$ . Wie oben sei  $T = R(X_1, \dots, X_n; \vartheta_0, \vartheta_A)$  und  $K := (c, \infty)$ , sowie  $\alpha^* := P_{\vartheta_0}[T \in K] = P_{\vartheta_0}[T > c]$ . Der Likelihood Quotienten Test mit Teststatistik  $T$  und kritischem Bereich  $K$  ist dann in folgendem Sinn optimal: Jeder andere Test mit Signifikanzniveau  $\alpha \leq \alpha^*$  hat eine kleinere Macht (bez. Grössere WS Fehler 2. Art).

### 7.8 definition

$p$ -Wert (Nach Wikipedia) Der  $p$ -Wert ist die Wahrscheinlichkeit ein mindestens so extremes Testergebnis zu erhalten, wenn die Nullhypothese gelten würde:

$$p(x) = P[X \leq x \mid H_0] \text{ oder } P[X \geq x \mid H_0]$$

$$p(x) = 2 \cdot \min\{P[X \leq x \mid H_0], P[X \geq x \mid H_0]\}$$

### z-Test

**Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei bekannter Varianz.** Hier sind  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$ . Wir möchten die Hypothese  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  testen. Mögliche Alternativen  $H_A$  sind  $\vartheta > \vartheta_0$ ,  $\vartheta < \vartheta_0$  (einseitig) oder  $\vartheta \neq \vartheta_0$  (zweiseitig). Die Teststatistik ist:

$$T = \frac{\bar{X} - \vartheta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{unter } P_{\vartheta_0}$$

Und die Verwerfungsbereich:

$$\begin{array}{ll} \vartheta < \vartheta_0 & (-\infty, z_\alpha) \\ \vartheta > \vartheta_0 & (z_{1-\alpha}, \infty) \\ \vartheta \neq \vartheta_0 & (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \end{array}$$

Wobei die  $z$  Werte in der Tabelle nachgeschaut werden können und es gilt  $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ .

### 7.9 Beispiel Fehler 1. Art berechnen

Sei  $\Theta = [0, 1]$  und seien  $X_1, \dots, X_6$  unabhängig, identisch verteilt unter  $P_\theta$  mit  $X_i \sim \text{Ber}(\theta)$ . Wir betrachten die Nullhypothese  $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$  und die Alternativhypothese  $H_A : \theta = \frac{1}{3}$ . Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art für den Test  $(T, K)$  mit  $T = \sum_{i=1}^6 X_i$  und  $K = (-\infty, 0]$ ? Die Teststatistik  $T$  ist die Summe der beobachteten Werte der  $X_i$ :

$$\begin{aligned} P(T \in K) &= P[T \leq 0] = P[T = 0] \\ &= P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot \dots \cdot P(X_6 = 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

### 7.10 Beispiel Fehler 2. Art berechnen

Nehme an: einseitiger  $z$ -Test,  $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ,  $\mu_0 = 70$ .

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_A : \mu < \mu_0$$

Kritischer Bereich mit 5% niveau:  $K = (-\infty, -1.645)$ . Wir nehmen an, dass  $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} P_{\mu_A}[T \notin K] &= P_{\mu_A}[T > -1.645] \\ &= P_{\mu_A}\left[\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.645\right] \\ &= P_{\mu_A}\left[\frac{\bar{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] \\ &= 1 - P_{\mu_A}\left[\frac{\bar{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma - \sqrt{n}} - 1.645\right) \\ \text{Weil } &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

### t-Test

**Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei unbekannter Varianz.** Hier sind  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  unter  $P_{\vec{\vartheta}}$ , wobei  $\vec{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$ . Wir wollen die Hypothese  $\mu = \mu_0$  testen. Die Teststatistik ist:

$$T := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{unter } P_{\vartheta_0}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Und die Verwerfungsbereiche:

$$\begin{array}{lll} c_< = t_{n-1, \alpha} & (-\infty, c_<) & \mu < \mu_0 \\ c_> = t_{n-1, 1-\alpha} & (c_>, \infty) & \mu > \mu_0 \\ c_\neq = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} & (-\infty, c_<) \cup (c_>, \infty) & \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

Wobei gilt  $t_{m, \alpha} = -t_{m, 1-\alpha}$ .

### 7.11 Gepaarter Zweiprobe-Test

Hier sind  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$  unter  $P_\vartheta$ . Insbesondere ist  $m = n$  und die Varianz beider Stichproben dieselbe. Differenzen  $Z_i := X_i - Y_i$  sind unter  $P_\vartheta$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, 2\sigma^2)$ . Dann analog  $z$  und  $t$ -Test. (Setzt natürliche Paarung von Daten voraus!)

### 7.12 Ungepaarter Zweiprobe-Test

Hier sind unter  $P_\vartheta$  die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_1, \dots, Y_m$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ , wobei die Varianz in beiden Fällen dieselbe ist.

- Bei bekannter Varianz:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0 \quad (\text{z.B. } \mu_0 = 0)$$

$$T = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Die kritischen Werte für den Verwerfungsbereich sind wie oben geeignete Quantile der  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung, je nach Alternative. Das ist der ungepaarte Zweistichproben- $z$ -Test.

- Bei unbekannter Varianz:

$$S_X^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

$$S_Y^2 := \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y}_m)^2$$

$$S^2 := \frac{1}{m+n-2} ((n-1) \cdot S_X^2 + (m-1) \cdot S_Y^2)$$

$$T = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

unter jedem  $P_\vartheta$ . Dieser Test heisst ungepaarter Zweistichproben- $t$ -Test.

### 7.13 Konfidenzbereich

Ein Konfidenzbereich für  $\vartheta$  zu Daten  $x_1, \dots, x_n$  ist eine Menge  $C(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Theta$ . Damit ist  $C(X_1, \dots, X_n)$  eine zufällige Teilmenge von  $\Theta$ . Dieses  $C$  heisst Konfidenzbereich zum Niveau  $1 - \alpha$ , falls für alle  $\vartheta \in \Theta$  gilt:

$$P_\vartheta[\vartheta \in C(X_1, \dots, X_n)] \geq 1 - \alpha$$

$$KI_{Z\text{-wert}} = \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$KI_{T\text{-wert}} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$  = Mittelwert  
 $s$  = Standardabweichung  
 $n$  = Stichprobengrösse  
 $z$  = Z-Wert

### 7.14 Beispiel: Konfidenzbereich

Machen wir den Ansatz:

$$C(X_1, \dots, X_n) = [\bar{X}_n - \dots, \bar{X}_n + \dots]$$

so wollen wir erreichen, dass gilt:

$$1 - \alpha \leq P_\vartheta[\vartheta \in C(X_1, \dots, X_n)]$$

$$= P_\vartheta[\mu \in [\bar{X}_n - \dots, \bar{X}_n + \dots]] = P_\vartheta[|\bar{X}_n - \mu| \leq \dots]$$

Nach Satz 7.1 ist für jedes  $\vartheta \in \Theta$ :

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{unter } P_\vartheta$$

$$1 - \alpha \leq P_\vartheta\left[\left|\frac{\bar{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\dots}{S/\sqrt{n}}\right]$$

also erhalten wir das Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha$ :

$$C(X_1, \dots, X_n) = \left[\bar{X}_n - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$



8 Multiple Choice

Seien  $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$  paarweise unabhängige Ereignisse. Welche Aussage ist korrekt?

- ☒ Die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  sind nicht zwangsläufig unabhängig.
- ☐ Die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  sind zwangsläufig unabhängig.

Seien  $A, B$  zwei Ereignisse.  $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$  gilt, falls:

- ☐  $A, B$  unabhängig sind.
- ☒  $A, B$  disjunkt sind.
- ☐  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ist.

Seien  $A, B, C$  Ereignisse. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Falls  $A, B$  sowie  $A, C$  unabhängig sind, so sind auch  $A, B \cap C$  unabhängig.
- ☐ Falls  $A, B$  sowie  $B, C$  unabhängig sind, so sind auch  $A, C$  unabhängig.
- ☒ Falls  $A, B$  und  $C$  unabhängig sind, so sind auch  $A, B \cap C$  unabhängig.

Seien  $X, Y$  reelle Zufallsvariablen. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

- ☐  $\text{Var}[X] \geq 0$
- ☒  $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$
- ☐  $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$

Für stetige Zufallsvariablen gilt immer:

- ☒ Die Verteilungsfunktion ist stetig.
- ☐ Die Dichtefunktion ist stetig.
- ☐ Weder noch.

Für die Dichte ist eine gleichverteilte Zufallsvariable ein Gegenbeispiel. Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte  $f_{X,Y}$ . Welche Aussage ist korrekt?

- ☒  $X, Y$  sind immer stetig.
- ☐ Die Zufallsvariablen sind nicht notwendigerweise stetig.

Sei  $Z = (X, Y)$  eine  $\mathbb{R}^2$ -wertige Zufallsvariable mit Dichte:

$$f_Z(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

Welche Aussage ist korrekt?

- ☐  $X$  und  $Y$  sind korreliert und nicht unabhängig.
- ☐  $X$  und  $Y$  sind unkorreliert und nicht unabhängig.
- ☒  $X$  und  $Y$  sind unkorreliert und unabhängig.

Sei  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte  $f_X$  und Verteilungsfunktion  $F_X$ . Welche der Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- ☐  $F_X$  ist stetig.
- ☒  $F_X$  ist strikt monoton wachsend.
- ☐  $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$  für  $-\infty < a \leq b < \infty$ .

Seien  $(X_i)_{i=1}^n$  uiv. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F_{X_i} = F$ . Was ist die Verteilungsfunktion von  $M = \max(X_1, \dots, X_n)$ ?

- ☒  $F_M(a) = F(a)^n$
- ☐  $F_M(a) = 1 - F(a)^n$
- ☐  $F_M(a) = (1 - F(a))^n$

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $F_X$ . Was gilt für  $a < b$ ?

- ☐  $P[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$
- ☒  $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$
- ☐  $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

Sei  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , welche der Aussagen ist korrekt?

- ☐  $P[X > 5] = 1 - P[X < 5]$
- ☒  $P[X \leq 1 | X \geq 1] = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$
- ☐  $2X \sim \text{Poisson}(2\lambda)$

Sei  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , was ist  $E[X^2]$ ?

- ☐  $\lambda$
- ☐  $\frac{1}{\lambda^2}$
- ☒  $\lambda \cdot (\lambda + 1)$
- ☐  $\lambda^2$

Es gilt  $P[X > t + s | X > s] = P[X > t]$  für alle  $t, s \geq 0$ , falls

- ☐  $X \sim U([a, b])$
- ☐  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- ☒  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  (Gedächtnislosigkeit)

Seien  $X, Y$  unabhängig und log-normalverteilt, d.h.  $\ln X, \ln Y$  sind normalverteilt. Welche Aussage ist korrekt?

- ☒  $XY$  ist log-normalverteilt.
- ☐  $XY$  ist normalverteilt.
- ☐  $e^{X+Y}$  ist normalverteilt.

Sei  $X \sim N(0, 1)$  und  $Y \sim U[0, 1]$  ZV mit  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . Welche Aussage ist korrekt?

- ☐  $X, Y$  unabhängig sind.
- ☒  $E[XY] = 0$
- ☐ Keine der beiden anderen Aussagen ist wahr.

Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  uiv.  $\sim N(0, 1)$ . Sei  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann gilt:

- ☐  $\bar{X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$  in Wahrscheinlichkeit.
- ☐  $\bar{X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$  P-fastsicher.
- ☒ Im Allgemeinen sind 1. und 2. falsch.

Falls zu einem gegebenen Test die Hypothese auf dem 2.5

- ☒ Wird sie auch auf dem 5
- ☐ Wird sie auch auf dem 1
- ☐ Im Allgemeinen kann nicht behauptet werden, dass sie auf einem höheren oder tieferen Niveau auch abgelehnt wird.

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte  $f_{X,Y}$ . Welche Aussage ist korrekt?

- ☐ Die ZV  $X, Y$  sind nicht notwendigerweise stetig, dies hängt von  $f_{X,Y}$  ab.
- ☒ Die ZV  $X, Y$  sind immer stetig.

Wir betrachten die gemeinsame Verteilung von zwei diskreten Zufallsvariablen  $X, Y$ . Welche Aussagen sind korrekt?

- ☐ Aus den einzelnen Gewichsfunktionen kann man immer die gemeinsame Gewichsfunktion berechnen.
- ☐ Aus den einzelnen Gewichsfunktionen und  $\text{Cov}(X, Y)$  kann man immer die gemeinsame Gewichsfunktion berechnen.
- ☒ Aus der gemeinsamen Gewichsfunktion kann man immer die einzelnen Gewichsfunktionen berechnen.

Seien  $(X_i)_{i=1}^n$  uiv.  $\sim N(0, 1)$ . Welche Aussagen sind korrekt?

- ☒  $X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2$
- ☒  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)^2 \sim \chi_n^2$
- ☐  $(X_1 + \dots + X_n)^2 \sim \chi_n^2$
- ☒  $X_1^2 + X_2^2 \sim \text{Exp}(1/2)$

Wenn das Signifikanzniveau  $\alpha$  eines Tests kleiner wird, dann:

- ☐ Wird der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese größer.
- ☐ Wird die Macht des Tests größer.
- ☒ Wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art größer.

Aufgabe: Um die Anzahl Fische  $N$  in einem See zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor: Zuerst werden 500 Fische gefangen und markiert. Danach werden wieder 200 Fische gefangen und die Anzahl  $X$  der markierten Fische gezählt.

- $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ , wie groß ist  $n$ ? Wie groß ist  $\theta$ , wenn die Gesamtzahl der Fische  $N = 2000$  ist?  
 $n = 200$ , da wir 200 Fische herausziehen.  $\theta = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4}$ .
- Die Beobachtung gibt einen Wert für  $X$  von 40. Gib eine Schätzung für  $\theta$  und eine Schätzung für  $N$  ab.  
Wir schätzen  $\theta$  mit  $T = \frac{X}{n}$ , der realisierte Schätzwert ist also  $\hat{\theta} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ . Wenn wir nun  $\theta = \frac{500}{N}$  nach  $N$  auflösen, erhalten wir  $N = 2500$ .

- Bestimme ein approximatives Konfidenzintervall für  $\theta$  mit  $\alpha = 0.05$ .

$$T = X - n\theta, \sqrt{n\theta(1-\theta)} \approx \sqrt{n}\theta.$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt daher

$$P_\theta \left[ -1.96 \leq \frac{T}{\sqrt{n}\theta} \leq 1.96 \right] \geq 0.95.$$

Unter Verwendung von  $\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$  ergibt sich ein approximatives Vertrauensintervall für  $\theta$  von:

$$\left[ T - 1.96 \frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{2n}}, T + 1.96 \frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{2n}} \right] = [0.13, 0.27].$$

9 Diskrete Verteilungen

Verteilung	Parameter	$E[X]$	$Var(X)$	$p_X(t)$	$F_X(t)$
Gleichverteilung	$n$ : Anzahl Ereignisse $x_i$ : Ereignisse	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} (\sum_{i=1}^n x_i)^2$	$\frac{1}{n}$	$\frac{[kx_0 \leq 0]}{n}$
Bernoulli	$p$ : ErfolgsWK	$p$	$p \cdot (1-p)$	$p^t (1-p)^{1-t}$	$1-p$ für $0 \leq t < 1$
Binomial	$p$ : ErfolgsWK $n$ : Anzahl Versuche	$np$	$np(1-p)$	$\binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$	$\sum_{k=0}^t \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Geometrisch	$p$ : ErfolgsWK $t$ : Anzahl Versuche	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p(1-p)^{t-1}$	$1 - (1-p)^t$
Negativ Binomial	$r > 0$ : Erfolge bis Abbruch $p$ : ErfolgsWK $t$ : Misserfolge	$\frac{r}{1-p}$	$\frac{rp}{(1-p)^2}$	$\binom{t+r-1}{r} (1-p)^r p^t$	$F_{\text{Binomial}}(t; n=t+r, p)$
Hypergeometrisch	$N$ : Anzahl aller Elemente $M$ : Anzahl möglicher Erfolge $n \leq N$ : Anzahl Elemente in der Stichprobe	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \frac{N-M}{N-1}$	$\frac{\binom{M}{t} \binom{N-M}{n-t}}{\binom{N}{n}}$	$\sum_{k=0}^t \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
Poisson	$\lambda$ : Erwartungswert und Varianz	$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$	$p$

10 Stetige Verteilungen

Verteilung	Parameter	$E[X]$	$Var(X)$	$f_X(t)$	$F_X(t)$
Gleichverteilung	$[a, b]$ : Intervall	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{t-a}{b-a}$
Exponentialverteilung	$\lambda$ : $\frac{1}{E[X]}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
Normalverteilung	$\mu$ : Mittelwert $\sigma^2$ : Varianz	$\mu$	$\sigma^2$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < t < \infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$
$\chi^2$ -Verteilung	$n$ : Freiheitsgrad	$n$	$2n$	$\frac{1}{2^n \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$ $t > 0$	$\text{Gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$
Gamma-Verteilung	$\alpha, \lambda$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$ $t > 0, \alpha, \lambda > 0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, \lambda t)$
t-Verteilung	$n$ : Freiheitsgrad	0 für $n > 1$ sonst undef.	$\begin{cases} \frac{n-2}{n-4} & n > 2 \\ \infty & 1 < n \leq 2 \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$	$\text{oof}$

11 Tabellen

11.1 Ableitung, Integration

Es gilt:

- Summenregel**  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel**  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel**  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$  wenn  $g(x) \neq 0$
- Kettenregel**  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- Partielle Integration**  $\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$
- Substitution**  $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$
- $a + c, b + c \in I: \int_a^b f(t + c) \, dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) \, dx$
- Logarithmus**  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = \log(|f(x)|)$

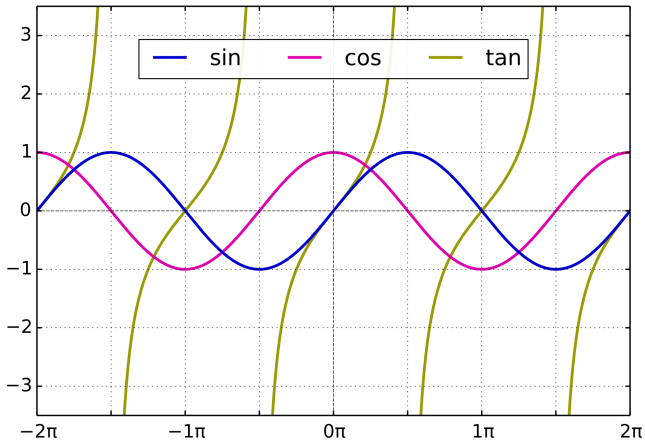
11.2 Beispiel: Substitution

$$\int \cos(x^2) 2x \, dx \qquad u = x^2$$
$$\int \cos(u) du \qquad \frac{du}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

11.3 Ableitungen

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$(x-1)e^x$	$xe^x$	$(x+1)e^x$
$\frac{x-a+1}{x-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{-a+1}{x^a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{a+1}{a+1}$	$a^{kx}$	$ka^{kx} \ln(a)$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x $	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{2}{3} x^{3/2}$	$\frac{\sin(x)}{2}$	$\cos(x)$
$-\cos(x)$	$\frac{\sin(x)^2}{2}$	$\sin(x) \cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
	$\tan(x)^2$	$2 \sec(x)^2 \tan(x)$
	$\cot(x)^2$	$-2 \cot(x) \csc(x)^2$
	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
	$\sinh(x)$	$1 + \tan^2(x)$
	$\tanh(x)$	$\cosh(x)$
	$\cot(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
	$e^{cx}$	$\frac{\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}$
	$\ln x $	$c \cdot e^{cx}$
	$\frac{\ln x }{x}$	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
	$\log_a x $	$\frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$

$F(x)$	$f(x)$
$\arcsin(x) / \arccos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$f(x)g(x)$	$e^{g(x) \ln(f(x))}$
$f(x) = \cos(\alpha)$	$f(x)^n = \sin(x + n \frac{\pi}{2})$
$f(x) = \frac{1}{a+b}$	$f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$
$\ln(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\ln(\tan(\frac{x}{2}))$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{\cos(x)}$
$f(x)$	$F(x)$
$\int f'(x) f(x) \, dx$	$\frac{1}{2} (f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$\ln f(x) $
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n \, dx$	$\frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n \, dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} \, dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} \, dx$	$\frac{1}{ap} \ln ax^p+b $
$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $
$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$	$\frac{x}{2} f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x+f(x))$



12 Sonstiges

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n! = n \cdot \frac{k=0}{(n-k)!k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{for } |q| < 1$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{for } q \neq 1$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Koordinatentransformationen in  $\mathbb{R}^2$

Polarkoordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dx dy = r dr d\varphi$
$y = r \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	

Elliptische Koordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = ra \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dx dy = a b r dr d\varphi$
$y = rb \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	

Koordinatentransformationen in  $\mathbb{R}^3$

Zylinderkoordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dx dy dz = r dr d\varphi dz$
$y = r \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	
$z = z$	$-\infty < z < \infty$	

Kugelkoordinaten		
Definition	Maximaler Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \sin \theta \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$
$y = r \sin \theta \sin \varphi$	$0 \leq \theta \leq \pi$	
$z = r \cos \theta$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	