# 1 Folgen

## 1.1 Konvergenz

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ **konvergiert** gegen $a$ für $n \to \infty$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Wir schreiben dann:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \to a \; (n \to \infty)$$

und nennen $a$ den **Grendwert/ Limes** der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Existiert der Limes nicht, so heisst die Folge **divergent**. Zu bemerken ist:

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konvergent } \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ beschränkt}$$

## 1.2 Monotone Konvergenz

Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

## 1.3 Cauchy Kriterium

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \;\; \forall n, m \geq N$$

## 1.4 Rechnen mit Limes

Seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n$

(iii) Falls zusätzlich $b_n \neq 0 \; \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$ gegeben ist, so gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$.

(iv) Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \; \forall n \geq K$, dann folgt $a \leq b$.

## 1.5 Limes Superior/ Inferior

Sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Wir können dann zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren, welche dann einen Grenzwert besitzen. Sei für jedes $n \geq 1$:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \text{ und } c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$
$$b_n \leq b_{n+1}$$
$$c_{n+1} \leq c_n$$

Da also beide Folgen beschränkt sind und konvergieren, können wir aufgrund von Monotoner Konvergenz folgern:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Es gilt auch, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ genau dann konvergiert, falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

## 1.6 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

## 1.7 Sandwichsatz für Folgen

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit demselben Limes $\alpha \in \mathbf{R}$. Ist $K \in \mathbf{N}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$$

so konvergiert auch $(c_n)_{n\geq 1}$ gegen $\alpha$.

## 1.8 Limes Binom Trick

Gegeben die Summe zweier Wurzeln könnte man wie folgt vorgehen (Bsp.):

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+5)-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}\right)$$

## 1.9 Limes Substitution Trick

Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - cos(\frac{1}{x}))$$

Substitutiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-cos(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{sin(u)}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

## 1.10 Limes Taylor Trick

Mithilfe der Reihenentwicklung von $e^x$ und $sin(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}}{1 - n * sin(\frac{1}{n})} = \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + \mathcal{O}(n^{-5}))} = 3$$

## 1.11 Rekurrenz Beispiel

Die folgenden Schritte solten bei der Auflösung einer Rekursiven Folge in betracht gezogen werden:

1. Zeige Monotonie (Durch Induktion)

2. Zeige Obere oder Untere Schranke (Evt. Induktion)

3. Verwende $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ (Da für jede Teilfolge der gleiche Grenzwert gilt)

## 1.12 Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ falls für alle $x \in \mathbf{D}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt. Konkret:

$$\forall x \in \mathbf{D} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{x,\epsilon} \geq 1 \text{ so dass}$$
$$\forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

### 1.13 Gleichmässige Konvergenz

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gleichmässig in $\mathbf{D}$ gegen eine Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ falls für alle $x \in \mathbf{D}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt. Konkret:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \geq 1 \text{ so dass}$$
$$\forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbf{D} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Weiter ist folgenes Kriterium äquivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ so dass}$$
$$\forall n, m \geq N \quad \forall x \in \mathbf{D} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}, f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bestehend aus in $\mathbf{D}$ stetigen Funktionen gleichmässig gegen die Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, so ist $f$ in $\mathbf{D}$ **stetig**.

**Beispiel:** $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_n(x) = \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}}$ Wie lautet der punktweise Limes der Funktionsfolge $f_n$? Konvergiert $f_n$ gleichmässig auf $\mathbf{R}$?
**Punktweise Konvergenz:** Wir fixieren $x \in R$ und bilden den Limes für $n \to \infty$
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} = \sqrt{|x|} = f(x)$
Die Funktionenfolge konvergiert somit punktweise gegen den punktweisen Grenzwert $f(x) = \sqrt{|x|}$
**Gleichmässige Konvergenz:** Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt. Wir berechnen also zuerst den Ausdruck $sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x) - f(x)|$

$$sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x) - f(x)| = sup_{x\in\mathbf{R}}|\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|}|$$

$$= sup_{x\in\mathbf{R}}|(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|})\frac{(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|})}{(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|})}|$$

$$= sup_{x\in\mathbf{R}}|\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}}|$$

Da $|x|$ positiv ist, wird das Supremum von $|\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}}|$ bei $x = 0$ angenommen. Es gilt somit

$$sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x) - f(x)| = sup_{x\in\mathbf{R}}|\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{|x|}}|$$

$$= \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge $f_n$ auf $\mathbf{R}$ gleichmässig gegen $f$.

### 1.14 Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{D}$. Dann ist $A \in \mathbf{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in \mathbf{D} \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

### 1.15 Rechnen mit Limes Für Funktionen

Seien die Funktionen $f, g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ konvergent mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Sei weiter $x_0 \in \mathbf{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{D}$. Dann gilt:

(i) $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to x_0}(f * g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x)$

(iii) Sei $f, g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren.

(iv) Seien $\mathbf{D}, \mathbf{E} \subset \mathbf{R}$ und $f : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x\to x_0} f(x)$$

existiert und $y_0 \in \mathbf{E}$. Falls $g : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ stetig in $y_0$ folgt:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

### 1.16 Sandwichsatz für Funktionen

Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und

$$\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$$

dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$$

### 1.17 Links- und Rechtsseitige Grenzwerte

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Wir nehmen an, dass $x_0$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{D} \cap ]x_0, +\infty[$ ist. Falls der Grenzwert der Eingeschränkten Funktionen $f$ im Bereich $\mathbf{D} \cap [x_0, +\infty[$ für $x \to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von $f$ bei $x_0$.
Der **linksseitige Grenzwert** ist analog definiert für den Bereich $\mathbf{D} \cap ]-\infty, x_0]$ für $x \to x_0$, falls er existiert. Es wird mit $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ bezeichnet.
Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0$ den Grenzwert $L$, so gilt:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

# 2 Reihen

### 2.1 Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\geq 1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert. In diesem Fall definieren wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

### 2.2 Monotone Konvergenz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \ \ \forall k \in \mathbf{N}$. Die Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Parialsummen $(S_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist.

### 2.3 Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist geau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

### 2.4 Rechnen mit Konvergenten Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbf{C}$. Dann gilt:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ ist konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k$ ist konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k = \alpha * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Konvergieren die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut, so gilt zusätzlich für das Cauchy Produkt:

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}*b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)*(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$

### 2.5 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Weiter sind **absolut konvergente Reihen auch konvergent** und es gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

### 2.6 Reihen Umordnung

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe $a'_n = a_{\phi(n)}$ (wobei $\phi$ bijektiv) und hat denselben Grenzwert.

### 2.7 Potenzreihe

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| < \rho$ (divergiert bei $|z| > \rho$), wobei

$$\rho := \begin{cases} +\infty & \text{Falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{Falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

**Ränder Prüfen!**

### 2.8 Nullfolgenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

### 2.9 Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren.}$$

### 2.10 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

### 2.11 Vergleichssatz

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

### 2.12 Integraltest

Sei $f(x)$ eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf $[k, \infty)$ und $f(n) = a_n$:

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

### 2.13 Leibniz Kriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

### 2.14 Gleichmässige Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in $\mathbf{D}$ falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert. Gilt weiter, dass $f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Folge stetiger Funktionen ist und eine Folge $C_n$ existiert, so dass

$$|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in \mathbf{D}$$

und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$ gleichmässig in $\mathbf{D}$ und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$$

ist eine in $\mathbf{D}$ stetige Funktion.

## 3 Stetigkeit

### 3.1 Stetigkeit einer Funktion in einem Punk

Sei $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{D}$. Die Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ ist in $x_0$ **stetig**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbf{D}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Hier noch eine äquivalente Definition: Falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgendes gilt:

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

ist die Funktion $f$ in $x_0$ stetig.

### 3.2 Stetigkeit einer Funktion

Die Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt $x \in \mathbf{D}$ stetig ist.

### 3.3 Gleichmässige Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ ist in $\mathbf{D}$ gleichmässig stetig falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0\ \forall x, y \in \mathbf{D} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

wobei Funktionen $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ welche in einem kompakten Invervall stetig sind im selben Intervall glm. stetig sind.

### 3.4 Rechnen mit Stetigkeit

Sei $x_0 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ und $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ beide in $x_0$ stetig:

(i) Dann sind $f + g$, $\lambda * f$, $f * g$ stetig in $x_0$

(ii) Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : \mathbf{D} \cap \{x \in \mathbf{D} : g(x_0) \neq 0\} \to \mathbf{R}$$
$$x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in $x_0$.

(iii) Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbf{R}$ stetig

(iv) Die Trigonometrischen Funktionen $sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und $cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sind stetig

(v) Die Exponentialfunktion $e^x$ ist auf ganz $\mathbf{R}$ stetig.

(vi) Seien $P$, $Q$ polynomiale Funktionen auf $\mathbf{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \cdots, x_m$ die Nullstellen von $Q$. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbf{R} \setminus \{x_1, \cdots, x_m\} \to \mathbf{R}$$
$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

(vii) Seien $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{R}$ zwei Teilmengen, $f : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{D}_2$ und $g : \mathbf{D}_2 \to \mathbf{R}$ funktionen, sowie $x_0 \in \mathbf{D}_1$. Falls $f$ in $x_0$ und $g$ in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g(f(x)) : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{R}$ in $x_0$ stetig

(viii) Sei $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{D}$ und $f,\ g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ stetig in $x_0$. Dann sind $|f|$, $max(f,\ g)$ und $min(f,\ g)$ stetig in $x_0$.

### 3.5 Zwischenwertsatz

Sei $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ ein Intervall, $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ eine stetige funktion und $a, b \in \mathbf{I}$. Für jedes $y$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es (mindestens) ein $c$ zwischen $a$ und $b$ mit $f(c) = y$.
Es gibt folgende typischen Anwendungsszenarien:

(i) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Falls $f(a) * f(b) < 0$, dann $\exists c \in ]\,a, b\,[$ mit $f(c) = 0$ (also eine Nullstelle)

(ii) Sei $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und $n$ ungerade. Dann besitzt $P$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbf{R}$.

(iii) Jede $n \times n$ Matrix mit $\boldsymbol{n}$ **ungerade** mit Koeffizienten in $\mathbf{R}$ hat mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbf{R}$

### 3.6 Min-Max Satz

Sei $f : \mathbf{I} = [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall. Dann gibt es $u \in [a, b]$ und $v \in [a, b]$ mit:

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere ist $f$ beschränkt.

### 3.7 Satz der Umkehrabbildung

Sei $\mathbf{I}$ ein Intervall. Sei $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ stetig, **streng** monoton wachsend. Dann ist das Bild von $f(\mathbf{I}) =: J$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbf{J} \to \mathbf{I}$ ist stetig, streng monoton wachsend.

(i) Sei $n \geq 1$. Dann ist $f : [0, \infty[ \to [0, \infty[$ als $x \to x^n$ streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung $f^{-1} : [0, \infty[ \to [0, \infty[$ als $x \to \sqrt[n]{x}$

### 3.8 Stetigkeit gesplitteter Funktionen

Sind alle abschnitte einer gesplitteten Funktion stetig, müssen wir nur die Übergangstellen prüfen. Gilt an diesen Stellen $x_0$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

so ist die Funktion stetig.

# 4 Ableiten

### 4.1 Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ und $x_0 \in \mathbf{D}$ ein Häufungspunkt. Die Funktion $f$ heisst in $x_0$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet und heisst die **Ableitung** (oder das Differential) von $f$ an der Stelle $x_0$.

### 4.2 Differenzierbarkeit & Stetigkeit

$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

### 4.3 Rechenregeln der Ableitung

(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$

(iii) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ für $g(x_0) \neq 0$

(iv) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$

### 4.4 Aussagen der Ableitung

Sei $f : ]\,a, b\,[ \to \mathbf{R}$ und $x_0 \in ]\,a, b\,[$. Wir nehmen an, dass $f$ in $x_0$ differenzierbar ist.

(i) Falls $f'(x) > 0$ $\exists \delta > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ und $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$

(ii) Falls $f'(x) < 0$ $\exists \delta > 0$ mit $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ und $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$

(iii) Ist $f'(x) \geq (>)\ 0 \quad \forall x \in ]\,a, b\,[$ ist $f$ (strikt) monoton wachsend

(iv) Ist $f'(x) \leq (<)\ 0 \quad \forall x \in ]\,a, b\,[$ ist $f$ (strikt) monoton fallend

### 4.5 Umkehrsatz

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in \mathbf{D}$ ein Häufungspunkt. Wir nehmen an, dass $f$ in $x_0$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{E}$ und $f^{-1}$ in $y_0$ differenzierbar. Es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

### 4.6 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]\,a, b\,[$ differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens einen Punkt $\xi \in ]\,a, b\,[$ mit $f'(\xi) = 0$.

### 4.7 Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]\,a, b\,[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in ]\,a, b\,[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi) * (b - a)$

### 4.8 l'Hôpital

Seien $f, g : ]\,a, b\,[ \to \mathbf{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]\,a, b\,[$. Falls

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, dann folgt, dass

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei der Satz auch gilt wenn

(i) falls $b = +\infty$

(ii) falls $x \to a^+$

(iii) falls $\lambda = +\infty$

(iv) falls $\lim f = \lim g = \infty$

### 4.9 Konvexität

Sei $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ ein Intervall und $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ eine Funktion.

(i) $f$ ist **(streng) konvex** auf $\mathbf{I}$ falls für alle $x \leq y$, $x, y \in \mathbf{I}$ und $\lambda \in [\,0, 1\,]$ $(\lambda \in ]\,0, 1\,[)$

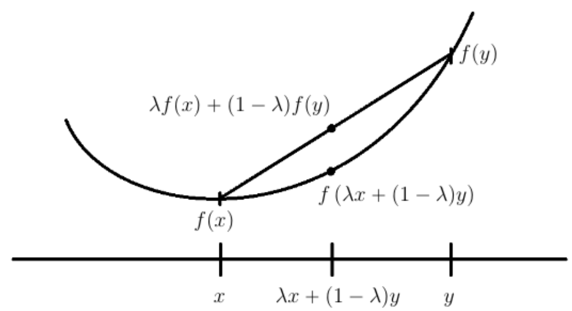
$$f(\lambda * x + (1-\lambda) * y) \leq\ (<)\ \lambda * f(x) + (1-\lambda) * f(y)$$

gilt.

(ii) $f$ ist **(streng) konkav** auf $\mathbf{I}$ falls für alle $x \leq y$, $x, y \in \mathbf{I}$ und $\lambda \in [\,0, 1\,]$ $(\lambda \in ]\,0, 1\,[)$

$$f(\lambda * x + (1-\lambda) * y) \geq\ (>)\ \lambda * f(x) + (1-\lambda) * f(y)$$

gilt.




Wobei wir folgende Bemerkungen machen können:

(i) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex

(ii) $f$ ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in $\mathbf{I}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x_0}$$

gilt.

(iii) Sei $f : ]\,a, b\,[ \to \mathbf{R}$ in $]\,a, b\,[$ differenzierbar. Die Funktion $f$ ist genau dann (streng) konvex, falls $f'$ (streng) monoton wachsend ist. (z.B.: $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) > 0)$)

### 4.10 Höhere Ableitungen

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ differenzierbar.

(i) Für $n \geq 2$ ist $f$ $n$-mal differenzierbar in $\mathbf{D}$ falls $f^{(n-1)}$ in $\mathbf{D}$ differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die $n$-te Ableitung von $f$. Wobei zu beachten ist, dass: $n$-mal differenzierbar $\Rightarrow$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar.

(ii) Die Funktion $f$ ist $n$-mal **stetig Differenzierbar**, falls sie $n$-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ stetig ist. Wir definieren weiter die Menge

$$C^n(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \to \mathbf{R} \mid f \text{ } n\text{-mal stetig diff'bar}\}$$

(iii) Die Funktion $f$ ist in $\mathbf{D}$ **glatt** falls sie $\forall n \geq 1$ $n$-mal differenzierbar ist.

$$C^\infty(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \to \mathbf{R} \mid f \text{ glatt}\}$$

### 4.11 Rechenregeln höherer Ableitungen

Seien $f, g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ $n$-mal differenzierbar:

(i) $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

(ii) $(f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} * g^{(n-k)}$

(iii) $\frac{f}{g}$ ist $n$-mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{D}$

(iv) $(g \circ f)$ ist $n$-mal differenzierbar

(v) $e^x$, $sin(x)$ und $cos(x)$ sind glatte Funktionen

(vi) Alle Polynome sind glatte Funktion

### 4.12 Taylor Approximation

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in ]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} * (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x-a)^{n+1}$$

Man bemerke: der letzte Term $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x-a)^{n+1}$ wird meist zur Fehlerabschätzung innerhalb eines Bereichs von $a$ verwendet. Als Beispiel betrachte man $p(x) = x^3 + x + 1$ an der Stelle $a = 1$. Hier ist die Taylor Approximation

$$T_3 = 3 + 4(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = p(x)$$

und der Fehler für $\xi \in ]0, 2[$

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!} * (x-1)^4 \leq \frac{0}{(4)!} * (1)^4 = 0$$

Ein weiteres Beispiel: Approximiere $\sqrt{9.2}$ mit einen Taylor Polynom zweiten Grades.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2} * x^{-0.5} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4} * x^{-1.5} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8} * x^{-2.5} \\
T_2 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) + f''(x_0) * (x - x_0)^2 \\
R &= \frac{f'''(\xi)}{3!} * (x - x_0)^3 \text{ für } \xi \in (9, 9.2) \\
&\Rightarrow x_0 = 9, \xi = 9
\end{aligned}$$

### 4.13 Sattelpunkt/ Horiz. Wendepunkt

Ein Graphenpunkt wo $f'(x_0) = 0$, $x_0$ aber kein Extrema ist.

### 4.14 Wendepunkt

Ein Wendepunkt ist ein Graphenpunkt wo der Drehsinn der Tangente sich ändert (In einem Wendepunkt gilt: $f''(x_0) = 0$)

### 4.15 Spezielle Punkte bestimmen

Sei $n \geq 0$, $a < x_0 < b$ und $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ in $]a, b[$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$

(i) Falls $n$ gerade ist und $x_0$ eine lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

(ii) Falls $n$ ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ so ist $x_0$ eine strikte lokale Minimalstelle

(iii) Falls $n$ ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ so ist $x_0$ eine strikte lokale Maximalstelle

Ist $x_0$ jedoch keine Extremalstelle ($(i)$ von oben nicht erfüllt) bleiben zwei Optionen:

(i) $f'(x_0) = 0 \wedge x_0$ keine Extremalstelle $\Rightarrow x_0$ ist ein Sattelpunkt

(ii) $f''(x_0) = 0 \wedge x_0$ keine Extremalstelle $\Rightarrow x_0$ ist ein Wendepunkt

### 4.16 Integrale Ableiten

Hier ein Beispiel für die Ableitung eines Integrals:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\int_2^{x^2} e^{-t^2} dt \\
h(x) &= e^{-t^2} \\
\Rightarrow f(x) &= -H(x^2) + H(2) \\
\Rightarrow f'(x) &= -h(x^2)2x = -e^{-x^4}2x
\end{aligned}$$

# 5 Integrieren

### 5.1 Partition

Eine Zerlegung eines Intervalls $I = [a, b]$. Ist eine endliche Teilmenge $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\} \subset I$ wobei $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und $\{a, b\} \subset P$
Man bemerke: eine Partition $P'$ ist eine verfeinerung von $P$ falls $P \subset P'$

### 5.2 Feinheit einer Partition

Die **Feinheit** der Partition ist definiert durch $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$

### 5.3 Riehmannsche Summe

Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen Punkten. Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \delta_i$$

nennt man eine **Riehmannsche Summe** der Partition $P$ und den Zwischenpunkten $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$

### 5.4 Unter-/ Obersumme

Wir definieren die Untersumme

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (\inf_{x \in I_i} f(x)) * \delta_i$$

und die Obersumme

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x \in I_i} f(x)) * \delta_i$$

### 5.5 Eigenschaften der Unter-/ Obersumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion, sowie $P, Q \in P(I)$.

(i) $P \subset Q \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$

(ii) $\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} S(f, Q)$

### 5.6 (Riehmann) Integrierbar

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt. Wir definieren zuerst $s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$ sowie analog $S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$.
Gilt

$$s(f) = S(f)$$

so ist die $f$ Riehmann-Integrierbar und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.
Weiter sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)dx$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$

(iii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass für jede Partition $P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1, \cdots, \xi_n$ Zwischenpunkten $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k: \quad |A - S(f, P, \xi)| < \epsilon$

(iv) Der Grenzwert $\lim_{\delta(P)\to 0} S(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)dx$ existiert

## 5.7 Integrierbarkeit schnell zeigen

Es gilt weiter für $f, g : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbf{R}$:

(i) $f$ stetig $\Rightarrow f$ Integrierbar

(ii) $f$ ist monoton $\Rightarrow f$ ist integrierbar

(iii) $f + g$, $\lambda * f$, $f * g$, $|f|$, $max(f, g)$, $min(f, g)$ sind integrierbar sowie auch $\frac{f}{g}$ falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a,\, b]$

(iv) Jedes Polynom auf $[a,\, b]$ ist integrierbar, auch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ falls $Q(x)$ keine Nullstelle besitzt.

## 5.8 Majoranten Kriterium

(i) Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ auf $[a, \infty[$ integrierbar ist, so ist $f$ auf $[a, \infty[$ integrierbar.

(ii) Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$

(iii) Sei $f : [1, \infty[ \to [0, \infty[$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergent und in diesem Fall gilt: $0 \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)dx \leq f(1)$

## 5.9 Rechenregeln für Integrale

Es gelten folgene Rechenregeln:

(i) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ für $a < b < c$ mit $f : [a,\, c] \to \mathbf{R}$ und auf $[a,\, b]$ sowie $[b,\, c]$ integrierbar

(ii) $\int_a^b (\alpha * f_1(x) + \beta * f_2(x))dx = \alpha * \int_a^b f_1(x)dx + \beta * \int_a^b f_2(x)dx$ für $f_1,\ f_2 : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ beschränkt Integrierbar mit endpunkten $a, b$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

## 5.10 Abschätzungen von Integralen

Es gibt folgende Absätzungen:

(i) Seien $f, g : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,\, b]$. Dann folgt $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(ii) Falls $f : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt und integrierbar folgt $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(iii) $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)} * \sqrt{\int_a^b g^2(x)}$

## 5.11 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f, g : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ wobei $f$ stetig und $g$ beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,\, b]$ ist. Dann gibt es $c \in [a,\, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) * g(x)dx = f(c) * \int_a^b g(x)dx$$

und falls $g \equiv 1$ erhalten wir

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) * (b - a)$$

## 5.12 Stammfunktion

Sei $a < b$, $f : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ heisst **Stammfunktion** von $f$ falls $F$ stetig differenzierbar in $[a,\, b]$ ist und $F' = f$ in $[a,\, b]$ gilt.

## 5.13 Fundamentalsatz der Analysis

Sei $f : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion $F$ von $f$, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$$

## 5.14 Partielle Integration

Seien $a < b$ reele Zahlen und $f, g : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) * g(x)dx$$

beziehungsweise für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x)dx$$

- Polynome ableiten, wiederholende Fuktionen $(sin(x), cos(x), e^x)$ integrieren
- manchmal mit 1 multiplizieren

## 5.15 Methode der Substitution

Die Methode der Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. Sei $a < b$, $\phi : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,\, b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_a^b f(\phi(t)) * \phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

wobei für unbestimmte Integrale gilt:

$$\int f(\phi(t)) * \phi'(t)dt + C = \int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)}$$

Hier ein Beispiel:

$$\int 2x * cos(x^2)dx \Rightarrow u = x^2, \frac{du}{dx} = 2x, dx = \frac{du}{2x}$$
$$= \int 2x * cos(u) * \frac{du}{2x} = \int cos(u)du = sin(x^2) + C$$

## 5.16 Integration konvergenter Reihen

Sei $f_n : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ konvergiert. Dann ist $f$ beschränkt, integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Es gilt weiter: Sei $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine Folge beschränkter und integrierbarer Funktionen so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$$

Es gilt weiter: Sei $f(x) := \sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$ $f$ auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in ]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

### 5.17 Uneigentliche Integrale

Sei $f : [a, \infty[ \to \mathbf{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Wir definieren

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

falls existent und sagen dass $f$ auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.
Analog: Sei $f$ eine Funktion auf jedem Intervall $[a+\epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$ beschränkt und integrierbar. $f : ]a, b] \to \mathbf{R}$ ist integrierbar falls der Folgende Grenzwert existiert, welchen wir als

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$$

definieren. (Gilt auch symmetrisch für $[a, b-\epsilon]$ $\forall \epsilon > 0$) Wobei wir anmerken, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

### 5.18 Partialbruchzerlegung

Seien $P, Q$ Polynome mit $grad(P) < grad(Q)$ und $Q$ mit der Produktzerlegung $Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i}$. Dann gibt es $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ reelle Zahlen mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

Bei einer Partialbruchzerlegung geht man folgendermassen vor:

(i) Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Falls $grad(P) \geq grad(Q)$ wenden wir Polynomdivision an.

(ii) $Q$ lässt sich nun als $Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i}$ zerlegen. Das sind die Komplexen und reelen Nullstellen mit ihrer vielfachheit.

(iii) Wir bilden nun die "hässliche" Summe von oben

(iv) Wir bestimmen mithilfe von Koeffizientenvergleich (Nennerpolynom Multiplizieren) die unbekannten $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$.

Hier ein einfaches Beispiel:

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$\Rightarrow$ Löse $5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$

$\Rightarrow$ Setze $x = -2,\ 1$

Mit mehreren Linearen Faktoren:

$$\frac{-2x^2+x+8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow$ Löse $-2x^2+x+8 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$

Ohne reelle Nullstellen:

$$\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$\Rightarrow$ Löse $2x^2-3x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$

$\Rightarrow$ Setze $x = 0,\ 1,\ 2$

### 5.19 Unbestimmte Integral

Das Unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktionen und sozusagen fast alles von oben gilt. $+C$ ist **sehr** wichtig.

# 6 Sonstiges

### 6.1 Rewrite Function

$h(x) = max f(x), g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$

### 6.2 Proof of "Null-Reihe"

Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsumme $(s_n)n \in \mathbb{N}$ mit: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ konvergiert, das heisst, es existiert ein Granzwert $s$, sodass $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ Durch Umstellung der Reihe und mit den Rechenregeln für Grenzwerte gild dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$

### 6.3 Injektiv/ Surjektiv

Injektiv: $\forall a, b \in X,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
*$f$ ist injektiv Beweis: wenn Ableitung > 0: dann streng monton wachsend auf ganz* $\mathbf{R}$ *und somit injektiv*
Surjektiv: $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ *$f$ ist surjektiv Beweis: anhand von Zwischenwertsatz beweisen*

### 6.4 Suprenum

Sei $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ und $A$ nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von $A$. Es gibt also ein $c \in \mathbf{R}$ so dass:

1. $\forall a \in A \quad a \leq c$
2. Falls $\forall a \in A \quad a \leq x$ ist $c \leq x$

Man bezeichnet $c := \sup A$

### 6.5 Infimum

Analog zum Suprenum die grösste untere Schranke.

### 6.6 Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

### 6.7 Bernoulli Ungleichung

$$\forall x \in \mathbf{R} \geq -1 \text{ und } n \in \mathbf{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

## 6.8 Exponentialfunktion

Für ein $z \in \mathbf{C}$ berechnet man die Exponentialfunktion wie folgt:

$$exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

und es gilt:

$$exp(z) = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$$

Die reelle Exponentialfunktion $exp : \mathbf{R} \to ]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.
Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

(i) $exp(x + y) = exp(x) * exp(y)$

(ii) $x^a := exp(a * ln(x))$

(iii) $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

(iv) $exp(iz) = cos(z) + i * sin(z) \quad \forall z \in \mathbf{C}$

(v) $exp(i * \frac{\pi}{2}) = i$

(vi) $exp(i\pi) = -1$ und $exp(2\pi i) = 1$

(vii) Für $a > 0$ ist $]0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ als $x \to x^a$ eine streng monoton wachsende stetige Bijektion

Merke: $e^x$ entspricht $exp(x)$.

## 6.9 Natürliche Logaritmus

Der natürliche Logaritmus wir als $ln : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ bezeichnet und ist eine streng monoton wachsende stetige funktion. Es gilt auch, dass

(i) $ln(1) = 0$

(ii) $ln(e) = 1$

(iii) $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$

(iv) $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$

(v) $ln(x^a) = a * ln(x)$

(vi) $x^a * x^b = x^{a+b}$

(vii) $(x^a)^b = x^{a*b}$

(viii) $ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$

## 6.10 Faktorisierungs Lemma

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \dots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

## 6.11 Sinus Abschätzung

Es gilt $|\sin(x)| \leq |x|$ mit folgendem Beweis:

$$f(x) = x - \sin(x), x \geq 0$$
$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

Weil $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ für $x > 0$. Dann $|\sin(x)| \leq |x|$ einfach.

## 6.12 Polynomiale Funktion

Eine **Polynomiale Funktion** $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist eine Funktion der Form $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ wobei $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$. Falls $a_n \neq 0$, ist $n$ der Grad von $P$.

## 6.13 Kompaktes Intervall

EIn Intervall $\subset \mathbf{R}$ ist kompakt, wenn es von der Form $\mathbf{I} = [a, b]$, $a \leq b$ ist.

## 6.14 Funktionenfolge

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung:

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^{\mathbf{D}} = \{f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}\}$$
$$n \to f_n$$

wobei $f_n : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ eine Funktion ist. Für jedes $x \in \mathbf{D}$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n \geq 1}$ reeller Zahlen.

## 6.15 Trigonometrische Funktionen

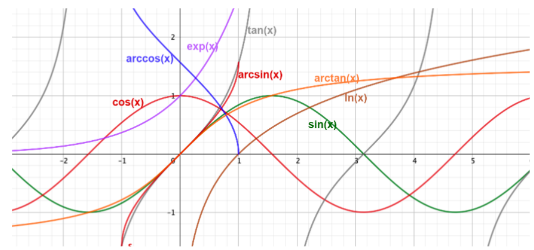
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$
$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$

Sind alle stetig

(i) $cos(z) = cos(-z)$

(ii) $sin(-z) = -sin(z)$

(iii) $cos^2(z) + sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbf{C}$




## 6.16 Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbf{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge $\mathbf{D}$, falls $\forall \delta > 0 \quad (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$

## 6.17 Lokales Extremum

Eine Funktion $f$ besitzt ein lokales Extremum in $x_0$ falls es entweder ein lokales Minimum oder lokales Maximum von $f$ ist.

## 6.18 Lokales Minimum

Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Minimum in $x_0$ falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbf{D}$$

### 6.19 Lokales Maximum

Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in $x_0$ falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbf{D}$$

### 6.20 Kritische Stelle

Eine **kritische Stelle** einer Funktion ist ein $x_0$ an der $f'(x_0)$ null oder undefiniert ist.

### 6.21 Hyperbol Funktionen

(i) $cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \to [1, \infty]$

(ii) $sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

(iii) $tanh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

und es gilt $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$

### 6.22 Funktionen Verknüpfung

$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$

### 6.23 Sin/Cos Werte

| $\alpha$ | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 270° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | N/A | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | N/A |

| | $-\alpha$ | $90° -\alpha$ | $90° +\alpha$ | $180° -\alpha$ | $180° +\alpha$ | $k*360° -\alpha$ | $k*360° +\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $-\sin\alpha$ | cos | cos | sin | $-$ sin | $-$ sin | sin |
| cos | cos | sin | $-$ sin | $-$ cos | $-$ cos | cos | cos |
| tan | $-$ tan | cot | $-$ cot | $-$ tan | tan | $-$ tan | tan |

# 7 Trigonometrie

## 7.1 Regeln

#### 7.1.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

#### 7.1.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

#### 7.1.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

#### 7.1.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)$

#### 7.1.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

#### 7.1.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

#### 7.1.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

#### 7.1.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

#### 7.1.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

#### 7.1.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

# 8 Tabellen

## 8.1 Grenzwerte

Wichtige Tabellen stehen hier

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ | $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ |
| $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ | $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ |
| $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$ | $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ |
| $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ | $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ |
| $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ | $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ |
| $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$ | $\lim_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ |
| $\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ | $\lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$ |
| $\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$ | $\lim_{x\to\infty} (\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$, $\forall a > 0$ | $\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0$, $\forall 0 \leq q < 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$ | $\lim_{x\to 0} x \log x = 0$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$ | $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ |
| $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ | $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$ |
| $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$ | $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$ |

## 8.2 Ableitungen

Kurze Notiz am Rande, ein stationärer Punkt ist: $x \in \mathbf{R}$ mit $f'(x) = 0$

| $\mathbf{F(x)}$ | $\mathbf{f(x)}$ | $\mathbf{f'(x)}$ |
|---|---|---|
| $\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$ | $\frac{1}{x^a}$ | $\frac{a}{x^{a+1}}$ |
| $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ | $x^a \ (a \neq -1)$ | $a \cdot x^{a-1}$ |
| $\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$ | $a^{kx}$ | $ka^{kx}\ln(a)$ |
| $\ln\|x\|$ | $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{2}{3}x^{3/2}$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $-\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$ | $\sin^2(x)$ | $2\sin(x)\cos(x)$ |
| $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$ | $\cos^2(x)$ | $-2\sin(x)\cos(x)$ |
| $-\ln\|\cos(x)\|$ | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$<br>$1+\tan^2(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\log(\cosh(x))$ | $\tanh(x)$ | $\frac{1}{\cosh^2(x)}$ |
| $\ln\|\sin(x)\|$ | $\cot(x)$ | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$ |
| $\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$ | $e^{cx}$ | $c \cdot e^{cx}$ |
| $x(\ln\|x\| - 1)$ | $\ln\|x\|$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$ | $\frac{\ln(x)}{x}$ | $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ |
| $\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\| - 1)$ | $\log_a\|x\|$ | $\frac{1}{\ln(a)x}$ |

## 8.3 Weitere Ableitungen

| $\mathbf{F(x)}$ | $\mathbf{f(x)}$ |
|---|---|
| $\arcsin(x)/\arccos(x)$ | $\frac{1/-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $x^x \ (x > 0)$ | $x^x \cdot (1 + \ln x)$ |
| $f(x)^{g(x)}$ | $e^{g(x)ln(f(x))}$ |
| $f(x) = cos(\alpha)$ | $f(x)^n = sin(x + n\frac{\pi}{2})$ |
| $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ | $f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$ |

## 8.4 Integrale

| $\mathbf{f(x)}$ | $\mathbf{F(x)}$ |
|---|---|
| $\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{2}(f(x))^2$ |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$ | $\ln\|f(x)\|$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ | $\sqrt{\pi}$ |
| $\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$ |
| $\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$ | $\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$ |
| $\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$ | $\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$ |
| $\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{ap}\ln\|ax^p+b\|$ |
| $\int \frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$ | $\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\|cx+d\|$ |
| $\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ |
| $\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$ |
| $\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$ | $\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$ |