1 Folgen

1.1 Konvergenz

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ **konvergiert** gegen a für $n \to \infty$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Wir schreiben dann:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ oder } a_n \to a \; (n \to \infty)$$

und nennen a den **Grendwert/ Limes** der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Existiert der Limes nicht, so heisst die Folge **divergent**. Zu bemerken ist:

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konvergent } \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ beschränkt}$$

1.2 Monotone Konvergenz

Sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

1.3 Cauchy Kriterium

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \;\; \forall n, m \geq N$$

1.4 Rechnen mit Limes

Seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n$

(iii) Falls zusätzlich $b_n \neq 0 \; \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$ gegeben ist, so gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$.

(iv) Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \; \forall n \geq K$, dann folgt $a \leq b$.

1.5 Limes Superior/ Inferior

Sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Wir können dann zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren, welche dann einen Grenzwert besitzen. Sei für jedes $n \geq 1$:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \text{ und } c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$
$$b_n \leq b_{n+1}$$
$$c_{n+1} \leq c_n$$

Da also beide Folgen beschränkt sind und konvergieren, können wir aufgrund von Monotoner Konvergenz folgern:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Es gilt auch, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ genau dann konvergiert, falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

1.6 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.
Wenn a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann konvergiert a_n mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : \; n \geq 1\}$.
Wenn a_n monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann konvergiert a_n mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : \; n \geq 1\}$.

1.7 Sandwichsatz für Folgen

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit demselben Limes $\alpha \in \mathbf{R}$. Ist $K \in \mathbf{N}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$$

so konvergiert auch $(c_n)_{n\geq 1}$ gegen α.

1.8 Limes Binom Trick

Gegeben die Summe zweier Wurzeln könnte man wie folgt vorgehen (Bsp.):

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+5)-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}\right)$$

1.9 Limes Substitution Trick

Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - cos(\frac{1}{x}))$$

Substitutiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-cos(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{sin(u)}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

1.10 Limes Taylor Trick

Mithilfe der Reihenentwicklung von e^x und $sin(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}}{1 - n * sin(\frac{1}{n})} = \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + \mathcal{O}(n^{-5}))} = 3$$

1.11 Strategie - Konvergenz von Folgen

1. Bei Brüchen: Grösste Potenz von n kürzen. Alle Brüche der Form $\frac{a}{n^a}$ streichen, da diese nach 0 gehen.
2. Bei Wurzeln in Summe im Nenner: Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner. (z.B. $(a+b)$ mit $(a-b)$ multiplizieren)
3. Bei rekursiven Folgen: Anwendung von Weierstrass zur monotonen Konvergenz
4. Einschliessungskriterium (Sandwich-Theorem) anwenden.
5. Mit bekannter Folge vergleichen.
6. Grenzwert durch einfaches Umformen ermitteln.
7. Limit per Definition der Konvergenz zeigen.
8. Anwendung des Cauchy-Kriteriums.
9. Suchen eines konvergenten Majorant.
10. Weinen und die Aufgabe überspringen.

1.12 Strategie - Divergenz von Folgen

1. Suchen einer divergenten Vergleichsfolge.
2. Alternierende Folgen: Zeige, dass Teilfolgen nicht gleich werden, also $\lim_{n\to\infty} a_{p_1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{p_2(n)}$ (mit z.B. gerade/ungerade als Teilfolgen).

1.13 Induktive Folgen (Induktionstrick)

1. Zeige monoton wachsend / fallend
2. Zeige beschränkt
3. Nutze Satz von Weierstrass, d.h. Folge muss gegen Grenzwert konvergieren
4. Verwende Induktionstrick:

Wenn die Folge konvergiert, hat jede Teilfolge den gleichen Grenzwert. Betrachte die Teilfolge $l(n) = n+1$ für $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}$:

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} d_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 3d_n - 2} = \sqrt{3d-2}$$

Forme um zu $d^2 = 3d - 2 \to d \in 1, 2$. Nun können wir $d = 2$ nehmen und die Beschränktheit mit $d = 2$ per Induktion zeigen.

1.14 Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ falls für alle $x\in\mathbf{D}$, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt. Konkret:

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbf{D}\quad \forall\epsilon>0\quad \exists N_{x,\epsilon}\geq 1 \text{ so dass}\\ &\forall n\geq N\quad |f_n(x)-f(x)|<\epsilon\end{aligned}$$

1.15 Gleichmässige Konvergenz

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gleichmässig in $\mathbf{D}$ gegen eine Funktion $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ falls für alle $x\in\mathbf{D}$, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt. Konkret:

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0\quad \exists N_{\epsilon}\geq 1 \text{ so dass}\\ &\forall n\geq N\quad \forall x\in\mathbf{D}\quad |f_n(x)-f(x)|<\epsilon\end{aligned}$$

Weiter ist folgenes Kriterium äquivalent:

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0\quad \exists N\geq 1 \text{ so dass}\\ &\forall n,m\geq N\quad \forall x\in\mathbf{D}\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon\end{aligned}$$

Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}, f_n:\mathbf{D}\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ bestehend aus in $\mathbf{D}$ stetigen Funktionen gleichmässig gegen die Funktion $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$, so ist f in $\mathbf{D}$ **stetig**.

Beispiel: $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_n(x)=\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}$ Wie lautet der punktweise Limes der Funktionsfolge f_n? Konvergiert f_n gleichmässig auf $\mathbf{R}$?

Punktweise Konvergenz: Wir fixieren $x\in R$ und bilden den Limes für $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}=\sqrt{|x|}=f(x)$$

Die Funktionenfolge konvergiert somit punktweise gegen den punktweisen Grenzwert $f(x)=\sqrt{|x|}$

Gleichmässige Konvergenz: Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|=0$ gilt. Wir berechnen also zuerst den Ausdruck $sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|$

$$sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|=sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{|x|}\right|$$

$$=sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\left(\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{|x|}\right)\left(\frac{\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{|x|}}\right)\right|$$

$$=sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{|x|}}\right|$$

Da $|x|$ positiv ist, wird das Supremum von $\left|\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{|x|}}\right|$ bei $x=0$ angenommen. Es gilt somit

$$sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|=sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{|x|+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{|x|}}\right|$$

$$=\frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge f_n auf $\mathbf{R}$ gleichmässig gegen f.

1.16 Grenzwerte von Funktionen

Sei $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{D}$. Dann ist $A\in\mathbf{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x\to x_0$, bezeichnet mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

falls $\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0$ so dass

$$\forall x\in\mathbf{D}\cap(]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{x_0\}):|f(x)-A|<\epsilon$$

1.17 Rechnen mit Limes Für Funktionen

Seien die Funktionen $f,g:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ konvergent mit $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$. Sei weiter $x_0\in\mathbf{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{D}$. Dann gilt:

(i) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to x_0}(f*g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)*\lim_{x\to x_0} g(x)$

(iii) Sei $f,g:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ mit $f\leq g$. Dann folgt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leq\lim_{x\to x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren.

(iv) Seien $\mathbf{D},\mathbf{E}\subset\mathbf{R}$ und $f:\mathbf{D}\to\mathbf{E}$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0:=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

existiert und $y_0\in\mathbf{E}$. Falls $g:\mathbf{E}\to\mathbf{R}$ stetig in y_0 folgt:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(y_0)$$

1.18 Sandwichsatz für Funktionen

Falls $g_1\leq f\leq g_2$ und

$$\lim_{x\to x_0} g_1(x)=\lim_{x\to x_0} g_2(x)$$

dann existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g_1(x)$$

1.19 Links- und Rechtsseitige Grenzwerte

Sei $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}$. Wir nehmen an, dass x_0 ein Häufungspunkt von $\mathbf{D}\cap\,]x_0,+\infty[$ ist. Falls der Grenzwert der Eingeschränkten Funktionen f im Bereich $\mathbf{D}\cap\,[x_0,+\infty[$ für $x\to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von f bei x_0.
Der **linksseitige Grenzwert** ist analog definiert für den Bereich $\mathbf{D}\cap\,]-\infty,x_0]$ für $x\to x_0$, falls er existiert. Es wird mit $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ bezeichnet.
Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert L, so gilt:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

2 Reihen

2.1 Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\geq 1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert. In diesem Fall definieren wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

2.2 Monotone Konvergenz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$. Die Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Parialsummen $(S_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist.

2.3 Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist geau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

2.4 Rechnen mit Konvergenten Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbf{C}$. Dann gilt:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ ist konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k$ ist konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k = \alpha * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Konvergieren die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut, so gilt zusätzlich für das Cauchy Produkt:

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} * b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i) * (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$

2.5 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Weiter sind **absolut konvergente Reihen auch konvergent** und es gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

2.6 Reihen Umordnung

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe $a'_n = a_{\phi(n)}$ (wobei ϕ bijektiv) und hat denselben Grenzwert.

2.7 Potenzreihe

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| < \rho$ (divergiert bei $|z| > \rho$), wobei

$$\rho := \begin{cases} +\infty & \text{Falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{Falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Ränder Prüfen!

2.8 Nullfolgenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

2.9 Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren.}$$

2.10 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

2.11 Vergleichssatz

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

2.12 Integraltest

Sei $f(x)$ eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf $[k, \infty)$ und $f(n) = a_n$:

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

2.13 Leibniz Kriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

2.14 Gleichmässige Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in $\mathbf{D}$ falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.
Gilt weiter, dass $f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Folge stetiger Funktionen ist und eine Folge C_n existiert, so dass

$$|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in \mathbf{D}$$

und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$ gleichmässig in $\mathbf{D}$ und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$$

ist eine in $\mathbf{D}$ stetige Funktion.

2.15 Strategie - Konvergenz von Reihen

1. Ist Reihe ein bekannter Typ? (Teleskopieren, Geometrische/Harmonische Reihe, Zetafunktion, ...)
2. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Wenn nein, divergent.
3. Quotientenkriterium & Wurzelkriterium anwenden
4. Vergleichssatz anwenden, Vergleichsreihen suchen
5. Leibnizkriterium anwenden
6. Integral-Test anwenden (Reihe zu Integral)

3 Stetigkeit

3.1 Stetigkeit einer Funktion in einem Punk

Sei $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{D}$. Die Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ ist in x_0 **stetig**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbf{D}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Hier noch eine äquivalente Definition: Falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgendes gilt:

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

ist die Funktion f in x_0 stetig.

3.2 Stetigkeit einer Funktion

Die Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt $x \in \mathbf{D}$ stetig ist.

3.3 Gleichmässige Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ ist in $\mathbf{D}$ gleichmässig stetig falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\epsilon > 0 \; \forall x, y \in \mathbf{D} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

wobei Funktionen $f : [a,\, b] \to \mathbf{R}$ welche in einem kompakten Intervall stetig sind im selben Intervall glm. stetig sind.
Beispiel: Ist die Funktion gleichmässig stetig?

$$f : [0, \infty) \to \mathbf{R}, x \to \sqrt{x}$$

Wir fixieren ein $\epsilon > 0$. Wir suchen $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ Folgendes gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Die Schwierigkeit bei den Aufgaben, wo nach der gleichmässigen Stetigkeit gefragt wird, ist es, ein δ zu finden, das unabhängig von x, y ist. Wie kann man in solchen Situationen vorgehen? Man vernucht, den Term $f(x) - f(y)$ durch einen Ausdruck der Form $C|x - y|$ abzuschätzen. In diesem spezifischen Fall, benutzen wir folgende Abschätzung:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| <= \sqrt{x - y} \overset{!}{<} \epsilon \to |x - y| < \epsilon^2 =: \delta$$

3.4 Rechnen mit Stetigkeit

Sei $x_0 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ und $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ beide in x_0 stetig:

(i) Dann sind $f + g$, $\lambda * f$, $f * g$ stetig in x_0

(ii) Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : \mathbf{D} \cap \{x \in \mathbf{D} : g(x_0) \neq 0\} \to \mathbf{R}$$
$$x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

(iii) Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbf{R}$ stetig

(iv) Die Trigonometrischen Funktionen $sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und $cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sind stetig

(v) Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbf{R}$ stetig.

(vi) Seien P, Q polynomiale Funktionen auf $\mathbf{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \cdots, x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbf{R} \setminus \{x_1, \cdots, x_m\} \to \mathbf{R}$$
$$x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

(vii) Seien $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{R}$ zwei Teilmengen, $f : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{D}_2$ und $g : \mathbf{D}_2 \to \mathbf{R}$ funktionen, sowie $x_0 \in \mathbf{D}_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g(f(x)) : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{R}$ in x_0 stetig

(viii) Sei $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{D}$ und $f,\ g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ stetig in x_0. Dann sind $|f|$, $max(f,\ g)$ und $min(f,\ g)$ stetig in x_0.

3.5 Zwischenwertsatz

Sei $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ ein Intervall, $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ eine stetige funktion und $a, b \in \mathbf{I}$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es (mindestens) ein c zwischen a und b mit $f(c) = y$.
Es gibt folgende typischen Anwendungsszenarien:

(i) Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Falls $f(a) * f(b) < 0$, dann $\exists c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$ (also eine Nullstelle)

(ii) Sei $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbf{R}$.

3.6 Min-Max Satz

Sei $f : \mathbf{I} = [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall. Dann gibt es $u \in [a, b]$ und $v \in [a, b]$ mit:

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere ist f beschränkt.

3.7 Satz der Umkehrabbildung

Sei $\mathbf{I}$ ein Intervall. Sei $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ stetig, **streng** monoton wachsend. Dann ist das Bild von $f(\mathbf{I}) =: J$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbf{J} \to \mathbf{I}$ ist stetig, streng monoton wachsend.

(i) Sei $n \geq 1$. Dann ist $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ als $x \to x^n$ streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ als $x \to \sqrt[n]{x}$

3.8 Stetigkeit gesplitteter Funktionen

Sind alle abschnitte einer gesplitteten Funktion stetig, müssen wir nur die Übergangstellen prüfen. Gilt an diesen Stellen x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

so ist die Funktion stetig.

4 Ableiten

4.1 Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ und $x_0 \in \mathbf{D}$ ein Häufungspunkt. Die Funktion f heisst in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet und heisst die **Ableitung** (oder das Differential) von f an der Stelle x_0.

4.2 Differenzierbarkeit & Stetigkeit

$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

4.3 Rechenregeln der Ableitung

(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$

(iii) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ für $g(x_0) \neq 0$

(iv) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$

4.4 Aussagen der Ableitung

1. f besitzt ein lokales Minimum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ oder falls das Vorzeichen von f' um x_0 von $-$ zu $+$ wechselt.

2. f besitzt ein lokales Maximum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ oder falls das Vorzeichen von f' um x_0 von $+$ zu $-$ wechselt.

3. f besitzt ein lokales Extremum in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

4. f besitzt einen Sattelpunkt in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

5. f besitzt einen Wendepunkt in x_0, wenn $f''(x_0) = 0$.

6. f ist in x_0 konvex, wenn $f''(x_0) \geq 0$.

7. f ist in x_0 konkav, wenn $f''(x_0) \leq 0$.

4.5 Umkehrsatz

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in \mathbf{D}$ ein Häufungspunkt. Wir nehmen an, dass f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von $\mathbf{E}$ und f^{-1} in y_0 differenzierbar. Es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.6 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]\,a, b\,[$ differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens einen Punkt $\xi \in]\,a, b\,[$ mit $f'(\xi) = 0$.

4.7 Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]\,a, b\,[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]\,a, b\,[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi) * (b - a)$

4.8 l'Hôpital

Seien $f, g :]\,a, b\,[\to \mathbf{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]\,a, b\,[$. Falls

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, dann folgt, dass

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei der Satz auch gilt wenn

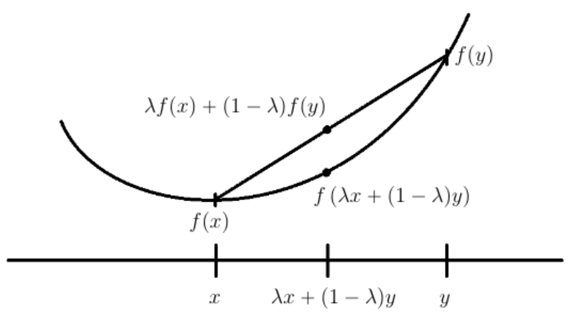
(i) falls $b = +\infty$

(ii) falls $x \to a^+$

(iii) falls $\lambda = +\infty$

(iv) falls $\lim f = \lim g = \infty$

4.9 Konvexität



(i) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex

(ii) f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in $\mathbf{I}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x_0}$$

4.10 Höhere Ableitungen

Sei $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ differenzierbar.

(i) Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in $\mathbf{D}$ falls $f^{(n-1)}$ in $\mathbf{D}$ differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f. Wobei zu beachten ist, dass: n-mal differenzierbar $\Rightarrow$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar.

(ii) Die Funktion f ist n-mal **stetig Differenzierbar**, falls sie n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ stetig ist. Wir definieren weiter die Menge

$$C^n(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \to \mathbf{R} \mid f \text{ } n\text{-mal stetig diff'bar}\}$$

(iii) Die Funktion f ist in $\mathbf{D}$ **glatt** falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist.

$$C^\infty(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \to \mathbf{R} \mid f \text{ glatt}\}$$

4.11 Rechenregeln höherer Ableitungen

Seien $f, g : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ n-mal differenzierbar:

(i) $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

(ii) $(f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} * g^{(n-k)}$

(iii) $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{D}$

(iv) $(g \circ f)$ ist n-mal differenzierbar

(v) e^x, $sin(x)$ und $cos(x)$ sind glatte Funktionen

(vi) Alle Polynome sind glatte Funktion

4.12 Taylor Approximation

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n + 1)$-mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} * (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} * (x - a)^{n+1}$$

Man bemerke: der letzte Term $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x - a)^{n+1}$ wird meist zur Fehlerabschätzung innerhalb eines Bereichs von a verwendet. Als Beispiel betrachte man $p(x) = x^3 + x + 1$ an der Stelle $a = 1$. Hier ist die Taylor Approximation

$$T_3 = 3 + 4(x - 1) + \frac{6}{2!}(x - 1)^2 + \frac{6}{3!}(x - 1)^3 = p(x)$$

und der Fehler für $\xi \in]0, 2[$

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!} * (x - 1)^4 \leq \frac{0}{(4)!} * (1)^4 = 0$$

Ein weiteres Beispiel: Approximiere $\sqrt{9.2}$ mit einen Taylor Polynom zweiten Grades.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2} * x^{-0.5} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4} * x^{-1.5} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8} * x^{-2.5} \\
T_2 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) + f''(x_0) * (x - x_0)^2 \\
R &= \frac{f'''(\xi)}{3!} * (x - x_0)^3 \text{ für } \xi \in (9, 9.2) \\
&\Rightarrow x_0 = 9, \xi = 9
\end{aligned}$$

4.13 Spezielle Punkte bestimmen

Sei $n \geq 0$, $a < x_0 < b$ und $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ in $]a, b[$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$

(i) Falls n gerade ist und x_0 eine lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

(ii) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle

(iii) Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ so ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle

Ist x_0 jedoch keine Extremalstelle ((i) von oben nicht erfüllt) bleiben zwei Optionen:

(i) $f'(x_0) = 0 \wedge x_0$ keine Extremalstelle $\Rightarrow x_0$ ist ein Sattelpunkt

(ii) $f''(x_0) = 0 \wedge x_0$ keine Extremalstelle $\Rightarrow x_0$ ist ein Wendepunkt

4.14 Integrale Ableiten

Hier ein Beispiel für die Ableitung eines Integrals:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\int_2^{x^2} e^{-t^2} dt \\
h(x) &= e^{-t^2} \\
\Rightarrow f(x) &= -H(x^2) + H(2) \\
\Rightarrow f'(x) &= -h(x^2)2x = -e^{-x^4}2x
\end{aligned}$$

5 Integrieren

5.1 Partition

Eine Zerlegung eines Intervalls $I = [a, b]$. Ist eine endliche Teilmenge $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\} \subset I$ wobei $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und $\{a, b\} \subset P$
Man bemerke: eine Partition P' ist eine verfeinerung von P falls $P \subset P'$

5.2 Feinheit einer Partition

Die **Feinheit** der Partition ist definiert durch $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$

5.3 Riehmannsche Summe

Sei $\xi_i \in I_i$ zwischen Punkten. Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \delta_i$$

nennt man eine **Riehmannsche Summe** der Partition P und den Zwischenpunkten $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$

5.4 Unter-/ Obersumme

Wir definieren die Untersumme

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (\inf_{x \in I_i} f(x)) * \delta_i$$

und die Obersumme

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x \in I_i} f(x)) * \delta_i$$

5.5 Eigenschaften der Unter-/ Obersumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Funktion, sowie $P, Q \in P(I)$.

(i) $P \subset Q \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$

(ii) $\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} S(f, Q)$

5.6 (Riehmann) Integrierbar

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt. Wir definieren zuerst $s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$ sowie analog $S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$.
Gilt

$$s(f) = S(f)$$

so ist die f Riehmann-Integrierbar und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.
Weiter sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)dx$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I)$ mit $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$

(iii) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass für jede Partition $P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1, \cdots, \xi_n$ Zwischenpunkten $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$: $|A - S(f, P, \xi)| < \epsilon$

(iv) Der Grenzwert $\lim_{\delta(P) \to 0} S(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)dx$ existiert

5.7 Integrierbarkeit schnell zeigen

Es gilt weiter für $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbf{R}$:

(i) f stetig $\Rightarrow f$ Integrierbar

(ii) f ist monoton $\Rightarrow f$ ist integrierbar

(iii) $f + g$, $\lambda * f$, $f * g$, $|f|$, $max(f, g)$, $min(f, g)$ sind integrierbar sowie auch $\frac{f}{g}$ falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$

(iv) Jedes Polynom auf $[a, b]$ ist integrierbar, auch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ falls $Q(x)$ keine Nullstelle besitzt.

5.8 Majoranten Kriterium

(i) Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ auf $[a, \infty[$ integrierbar ist, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar.

(ii) Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$

(iii) Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergent und in diesem Fall gilt: $0 \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)dx \leq f(1)$

5.9 Rechenregeln für Integrale

Es gelten folgene Rechenregeln:

(i) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ für $a < b < c$ mit $f : [a, c] \to \mathbf{R}$ und auf $[a, b]$ sowie $[b, c]$ integrierbar

(ii) $\int_a^b (\alpha * f_1(x) + \beta * f_2(x))dx = \alpha * \int_a^b f_1(x)dx + \beta * \int_a^b f_2(x)dx$ für $f_1, f_2 : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ beschränkt Integrierbar mit endpunkten a, b sowie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

5.10 Abschätzungen von Integralen

Es gibt folgende Absätzungen:

(i) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Dann folgt $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(ii) Falls $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ beschränkt und integrierbar folgt $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

(iii) $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)} * \sqrt{\int_a^b g^2(x)}$

5.11 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ wobei f stetig und g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ist. Dann gibt es $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) * g(x)dx = f(c) * \int_a^b g(x)dx$$

und falls $g \equiv 1$ erhalten wir

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) * (b - a)$$

5.12 Stammfunktion

Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ heisst **Stammfunktion** von f falls F stetig differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

5.13 Fundamentalsatz der Analysis

Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$$

5.14 Partielle Integration

Seien $a < b$ reele Zahlen und $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) * g(x)dx$$

beziehungsweise für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x)dx$$

- Polynome ableiten, wiederholende Fuktionen $(sin(x), cos(x), e^x)$ integrieren
- manchmal mit 1 multiplizieren

5.15 Methode der Substitution

Die Methode der Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. Sei $a < b$, $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar und $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_a^b f(\phi(t)) * \phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

wobei für unbestimmte Integrale gilt:

$$\int f(\phi(t)) * \phi'(t)dt + C = \int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)}$$

Hier ein Beispiel:

$$\int 2x * cos(x^2)dx \Rightarrow u = x^2, \frac{du}{dx} = 2x, dx = \frac{du}{2x}$$
$$= \int 2x * cos(u) * \frac{du}{2x} = \int cos(u)du = sin(x^2) + C$$

5.16 Integration konvergenter Reihen

Sei $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt, integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Es gilt weiter: Sei $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ eine Folge beschränkter und integrierbarer Funktionen so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$$

Es gilt weiter: Sei $f(x) := \sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$ f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

5.17 Uneigentliche Integrale

Sei $f : [a, \infty[\to \mathbf{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Wir definieren

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

falls existent und sagen dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.
Analog: Sei f eine Funktion auf jedem Intervall $[a + \epsilon, b] \quad \forall \epsilon > 0$ beschränkt und integrierbar. $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ ist integrierbar falls der Folgende Grenzwert existiert, welchen wir als

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$$

definieren. (Gilt auch symmetrisch für $[a, b - \epsilon] \quad \forall \epsilon > 0$) Wobei wir anmerken, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

5.18 Partialbruchzerlegung

Seien P, Q Polynome mit $grad(P) < grad(Q)$ und Q mit der Produktzerlegung $Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i}$. Dann gibt es A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} reelle Zahlen mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

Bei einer Partialbruchzerlegung geht man folgendermassen vor:

(i) Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Falls $grad(P) \geq grad(Q)$ wenden wir Polynomdivision an.

(ii) Q lässt sich nun als $Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i}$ zerlegen. Das sind die Komplexen und reelen Nullstellen mit ihrer vielfachheit.

(iii) Wir bilden nun die "hässliche" Summe von oben

(iv) Wir bestimmen mithilfe von Koeffizientenvergleich (Nennerpolynom Multiplizieren) die unbekannten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.

Hier ein einfaches Beispiel:

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$
$$\Rightarrow \text{ Löse } 5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$\Rightarrow \text{ Setze } x = -2,\ 1$$

Mit mehreren Linearen Faktoren:

$$\frac{-2x^2+x+8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$
$$\Rightarrow \text{ Löse } -2x^2+x+8 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

Ohne reelle Nullstellen:

$$\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \text{ Löse } 2x^2-3x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$
$$\Rightarrow \text{ Setze } x = 0,\ 1,\ 2$$

5.19 Unbestimmte Integral

Das Unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktionen und sozusagen fast alles von oben gilt. $+C$ ist **sehr** wichtig.

6 Sonstiges

6.1 Rewrite Function

$h(x) = max f(x), g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$

6.2 Stirling Formula

$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n, n \to \infty$

6.3 Proof of "Null-Reihe"

Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsumme $(s_n)n \in \mathbb{N}$ mit: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ konvergiert, das heisst, es existiert ein Granzwert s, sodass $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ Durch Umstellung der Reihe und mit den Rechenregeln für Grenzwerte gild dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$

6.4 Injektiv/ Surjektiv

Injektiv: $\forall a, b \in X,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
f ist injektiv Beweis: wenn Ableitung > 0: dann streng monton wachsend auf ganz $\mathbf{R}$ *und somit injektiv*
Surjektiv: $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ *f ist surjektiv Beweis: anhand von Zwischenwertsatz beweisen*

6.5 Suprenum

Sei $A \subseteq \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ und A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A. Es gibt also ein $c \in \mathbf{R}$ so dass:

1. $\forall a \in A \quad a \leq c$
2. Falls $\forall a \in A \quad a \leq x$ ist $c \leq x$

Man bezeichnet $c := \sup A$

6.6 Infimum

Analog zum Suprenum die grösste untere Schranke.

6.7 Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

6.8 Bernoulli Ungleichung

$$\forall x \in \mathbf{R} \geq -1 \text{ und } n \in \mathbf{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

6.9 Exponentialfunktion

$$exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$$

Die reelle Exponentialfunktion $exp : \mathbf{R} \to]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.
Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

(i) $exp(x + y) = exp(x) * exp(y)$

(ii) $x^a := exp(a * ln(x))$

(iii) $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

(iv) $exp(iz) = cos(z) + i * sin(z) \quad \forall z \in \mathbf{C}$

(v) $exp(i * \frac{\pi}{2}) = i$

(vi) $exp(i\pi) = -1$ und $exp(2\pi i) = 1$

(vii) Für $a > 0$ ist $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ als $x \to x^a$ eine streng monoton wachsende stetige Bijektion

Merke: e^x entspricht $exp(x)$.

6.10 Natürliche Logaritmus

Der natürliche Logaritmus wir als $ln :]0, \infty[\to \mathbf{R}$ bezeichnet und ist eine streng monoton wachsende stetige funktion. Es gilt auch, dass

(i) $ln(1) = 0$

(ii) $ln(e) = 1$

(iii) $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$

(iv) $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$

(v) $ln(x^a) = a * ln(x)$

(vi) $x^a * x^b = x^{a+b}$

(vii) $(x^a)^b = x^{a*b}$

(viii) $ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$

6.11 Faktorisierungs Lemma

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

6.12 Sinus Abschätzung

Es gilt $|\sin(x)| \leq |x|$ mit folgendem Beweis:

$$f(x) = x - \sin(x), x \geq 0$$
$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

Weil $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ für $x > 0$. Dann $|\sin(x)| \leq |x|$ einfach.

6.13 Polynomiale Funktion

Eine **Polynomiale Funktion** $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist eine Funktion der Form $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ wobei $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$. Falls $a_n \neq 0$, ist n der Grad von P.

6.14 Kompaktes Intervall

EIn Intervall $\subset \mathbf{R}$ ist kompakt, wenn es von der Form $\mathbf{I} = [a, b]$, $a \leq b$ ist.

6.15 Funktionenfolge

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung:

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^{\mathbf{D}} = \{f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}\}$$
$$n \to f_n$$

wobei $f_n : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ eine Funktion ist. Für jedes $x \in \mathbf{D}$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n\geq 1}$ reeller Zahlen.

6.16 Trigonometrische Funktionen

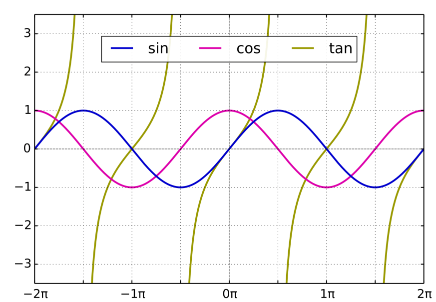
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad r = \infty$$

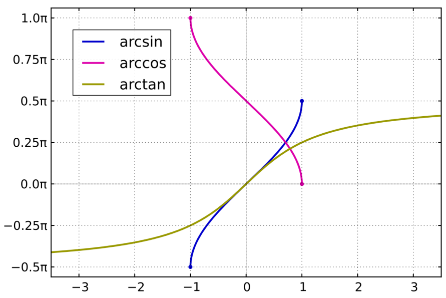
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad r = \infty$$

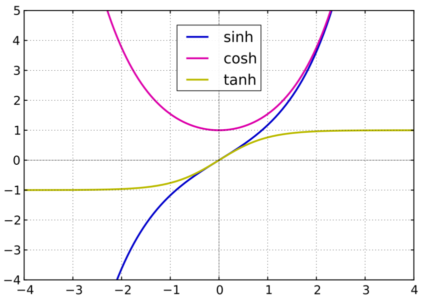
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad r = \infty$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad r = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$







(i) $cos(z) = cos(-z)$

(ii) $sin(-z) = -sin(z)$

(iii) $cos^2(z) + sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbf{C}$

6.17 Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbf{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge $\mathbf{D}$, falls $\forall \delta > 0 \quad (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$

6.18 Lokales Extremum

Eine Funktion f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder lokales Maximum von f ist.

6.19 Lokales Minimum

Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbf{D}$$

6.20 Lokales Maximum

Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbf{D}$$

6.21 Kritische Stelle

Eine **kritische Stelle** einer Funktion ist ein x_0 an der $f'(x_0)$ null oder undefiniert ist. Kurze Notiz am Rande, ein stationärer Punkt ist:
$x \in \mathbf{R}$ mit $f'(x) = 0$

6.22 Hyperbol Funktionen

(i) $cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \to [1, \infty]$

(ii) $sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

(iii) $tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

und es gilt $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$

6.23 Funktionen Verknüpfung

$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$

7 Trigonometrie

7.1 Regeln

7.1.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

7.1.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

7.1.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.1.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.1.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

7.1.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.1.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.1.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

7.1.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

7.1.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \forall z \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$
- $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $\arcsin(x) = \sin(x)\cos(x)$
- $\cos(\arccos(x)) = x$
- $\sin(\arccos(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan(x)^2}}$
- $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(x)^2}}$

8 Exercises

8.1 Multiple Choice

- The composition of continuous functions is continuous
- Falls $g(x) = f(x)^2$ differenzierbar ist, dann ist f nicht unbedingt differenzierbar
- $cos(x)$ gerade, $sin(x)$ ungerade $\rightarrow$ hilfreich wenn Integral von $\int_{-y}^{y}$. Bei ungeraden kürzt sich es weg, bei geraden kann man $2\int_0^y$
- Stetigkeitspunkte: Zuerst Schnittpunkte finden, dann zeigen, dass Punkt x_0 stetig ist
- $f, g : [0,1] \rightarrow [0,1]$.
  - Falls f, g injektiv, dann $f \circ g$ injektiv
  - Falls f, g surjektiv, $f \circ g$ nicht unbedingt surjektiv
  - $f \circ g \neq g \circ f$
- f, g Funktionen
  - $f \circ g$ stetig f, g nicht unbedingt stetig
  - Nicht für jede Folge mit Grenzwert x gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$
- $x^x = e^{x \log(x)}$
- falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, $c_n)(-1)^n a_n$ konvergiert gegen 0
- $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig, integrierbare Funktion, $a_n = \int_0^1 f(x^2)dx$, Falls f monoton wachsend ist, so ist a_k nicht unbedingt monoton wachsend.
- f_k Folge von dfferenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Sei f eine Funktion auf $[0,1]$ definiert. f_k konvergiert gleichmässig zu f für $k \rightarrow \infty$. f ist beschränkt
  - f_k sind alle differenzierbar und daher stetig
  - f ist auch stetig, weil f_k zu f gleichmässig konvergiert
  - beschränkt, weil es stetig auf kompakten Intervall definierte Funktion ist
  - Nicht stetige Funktionen, auch wenn sie nur auf $[0,1]$ definiert sind, können unbeschränkt sein
- $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktion
  - f hat Taylorreihe bei $x_0 = 0$
  - Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0 aber nicht notwendigerweise > 0
  - Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist dieser gleich der Taylorreihe
  - dort, wo die Taylorreihe konvertiert, stellt sie nicht unbedingt die Funktion dar
- Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe
  - Falls $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \geq 1$ so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon \forall n \geq N$ dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}$ nicht unbedingt konvergent (Gegenbeispiel: $\frac{1}{n}$)
  - Falls $\sum_{k=1}^{\infty}$ konvergiert, so folgt $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \geq 1$ so dass $\sum_{k=n}^{n+100} |a_k| < \epsilon \forall n \geq N$
- Sei $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty[$ so dass $lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$
  - es exisitiert eine Folge (x_n) mit $lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und ein ϵ so dass $|f(x_n)| > \epsilon, n \exists \mathbf{N}$
  - For alle $x \exists \mathbf{R}$ gilt $f(x) > 0$
  - $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sodass $0 < |x| < \delta \rightarrow f(x) > \epsilon$ STIMMT NICHT
  - Für jede Folge (x_n) mit $lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 0$ STIMMT NICHT
- Seien $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ Funktionen, so dass $g \circ f : X \rightarrow Z$ eine Bijektion ist: f ist injektiv, g ist surjektiv
- differenzierbar $\rightarrow$ stetig $\rightarrow$ integrierbar
- Sei $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion. Sei $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}, n \geq 1$ So dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[a,b]$ gleichmässig gegen f konvergiert
  - Sei $x_0 \in]a,b[$ Falls f_n für alle $n \geq 1 in x_0$ differenzierbar ist, so ist f nicht unbedingt diferenzierbar. (Im Allgemeinen braucht die Grenzfunktion nicht einmal differenzierbar zu sein, und wenn sie es ist, muss ihre Ableitung keineswegs geich dem Grenzwert der Ableitung der Folge sein.
- $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ stetig und nicht konstant
  - Das Bild $f([0,1]) \subset [0,1]$ ist ein abgeschossenes Intervall. D.h. es gibt $a, b \in [0,1]$ mit $a < b$, so dass $f([0,1]) = [a,b]$
- $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ stetig bei $x_0 = 0$, mit $f(x_0) > 0$
  - Es existiert $\epsilon, \delta > 0$ so dass $f(x) > \epsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt
- $a < b, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ beschränkt und $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ beschränkt mit $f(a) < f(b)$
  - Falls f stetig ist, gibt es $x_0 \in [a,b]$, so dass $\int_a^b xf(x)dx = \frac{f(x_0)}{2}(b^2 - a^2)$
- Sei f eine ungerade Funktion dann ist $f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade
- Sei ϕ eine Abbildung einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $b_n = a_{\phi(n)}$
  - Wenn die Reihe absolut konvergiert und ϕ injektiv ist, dann ist die Reihe mit b_n auch konvergent (Wenn nicht absolut konvergent, dann kann man jeden möglichen Wert bekommen, Surjektiv funktioniert nicht, Annahme $a_n = \frac{1}{n^2}$)

Ex. Sei $f : [0, \ln(2)] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es $\eta \in [0, \ln(2)]$, $f(\eta) = \frac{1}{e^2 - e} \int_0^{\ln(2)} e^{e^x} e^x f(x)dx$ gibt.
Nach dem Min-Max Satz hat f ein Maximum b und ein Minimum a, so dass $f[0, \ln(2)] \rightarrow [f(a), f(b)]$. Daher gilt:
$f(a) \int_0^{\ln(2)} e^{e^x} e^x dx \leq \int_0^{\ln(2)} e^{e^x} e^x f(x)dx \leq f(b) \int_0^{\ln(2)} e^{e^x} e^x dx$. Nun rechnen wir $\int_0^{\ln(2)} e^{e^x} e^x dx = e^2 - e$ aus. Wenn wir den Zwischenwertsatz anwenden, erhalten wir somit es existiert ein $\eta \in [0, \ln(2)]$, so dass $f(a) \leq f(\eta) = \frac{1}{e^2 - e} \int_0^{\ln(2)} e^{e^x} e^x f(x)dx \leq f(b)$.

Ex. Sei $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{nx}{(n^2x^2+1)^2}$. Zeige, dass $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergiert die Funktion gleichmässig? Gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$?
Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Die Konvergenz ist nicht gleichmässig, da $\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x)| \geq \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$, denn $\int_0^1 f_n(x)dx = -\frac{1}{2n} \frac{1}{n^2x^2+1}|_0^1 \rightarrow 0$.

Ex. Sei f differenzierbare mit $f(x_0) \neq 0$ für mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $f(x+y) = f(x)f(y)$. Zeige $f(0) = 1$.
Sei $b := f(x_0)$, so dass $b \neq 0$. Dann gilt $bf(0) = f(x_0)f(0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) = b$, also ist $f(0) = \frac{bf(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1$.

Ex. Sei $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ mit $f(0) = 0$. Zeige, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.
Es reicht eine Folge (y_n) zu finden, die gegen 0 strebt sodass $\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n}$ nicht konvergiert. Dafür wählen wir $y_n = \frac{2}{\pi n}$. Es gilt $\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n} = \pm 1$. Da $y_n \rightarrow 0$, haben wir gezeigt, dass f nicht differenzierbar ist.

Ex. Berechne für alle $m \in \mathbb{N}^*$ den Wert des Integrals $\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)dx$.
Für $m = 1$ und $m = 2$ haben wir:
$\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = 1, \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$. Für $m \geq 3$ gilt:
$\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)dx = (m+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{(m-2)}(x) \sin^2(x)dx = (m+1)(\int_0^{\pi/2} \cos^{(m-2)}(x)dx - \int_0^{\pi/2} \cos^m(x)dx) = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \cos^{(m-2)}(x)dx$.

Ex. Zeige, dass für jedes $c \in R$ die Funktion $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty, c]$ nach t integrierbar ist.
Es genügt zu zeigen, dass $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty, -1]$ integrierbar ist, da die Funktion auf $]-1, c]$ für all $c > -1$ integrierbar ist. Um dies zu zeigen verwenden wir folgende obere Schranke der Funktion: $\exp(-t^2) < \exp(t)$. Somit ist
$\int_{-\infty}^{-1} \exp(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \exp(t)dt = \lim_{a\to-\infty}(e^{-1} - e^a) = e^{-1}$.

Ex. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{t}{k^2})$ für jedes t existiert.
Wir nehmen $N \in \mathbb{N}, \frac{|t|}{N^2} < 1$. Da
$\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{t}{k^2}) = \prod_{k=1}^{N}(1 + \frac{t}{k^2}) \prod_{k=N+1}^{n}(1 + \frac{t}{k^2})$ gilt, reich es wenn wir zeigen, dass
$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N+1}^{n}(1 + \frac{t}{k^2}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{t}{(k+N)^2}) = a_n$ existiert.
Falls $t \geq 0$ ist die Folge (a_n) steigend, sonst ist sie fallend. Weiter ist sie monoton, deswegen existiert ein Grenzwert, wenn sie beschränkt ist. Es folgt $0 \leq a_n \leq \prod_{k=1}^{n}(e^{\frac{t}{k^2}}) \leq e^{|t|(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})} < \infty$. Weshalb der Grenzwert existiert.

9 Tabellen

9.1 Grenzwerte

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$	$\sum_{i=1}^{\infty} z^i = \frac{1-z^{i+1}}{1-z}$

Die Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ konvergiert wenn $|q| < 1$. Dies gilt auch bei $n \to \infty$.

Die Harmonische Reihe: Die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Die alternierende harmonische Reihe ist jedoch konvergent.

Die Zeta Funktion: Die Riemann-Zeta Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to\infty} (\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$, $\forall a > 0$	$\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0$, $\forall 0 \leq q < 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x\to 0} x \log x = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

9.2 Ableitungen

F(x)	**f(x)**	**f′(x)**
$(x-1)e^x$	xe^x	$(x+1)e^x$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)} a^{kx}$	a^{kx}	$ka^{kx}\ln(a)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\frac{\sin(x)^2}{2}$	$\sin(x)\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\tan(x) - x$	$\tan(x)^2$	$2\sec(x)^2\tan(x)$
$-\cot(x) - x$	$\cot(x)^2$	$-2\cot(x)\csc(x)^2$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1+\tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

F(x)	**f(x)**
$\arcsin(x)/\arccos(x)$	$\frac{1/-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$f(x)^{g(x)}$	$e^{g(x)ln(f(x))}$
$f(x) = cos(\alpha)$	$f(x)^n = sin(x + n\frac{\pi}{2})$
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$
$\ln(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\ln(\tan(\frac{x}{2}))$	$\frac{1}{\sin(x))}$
$\ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{cos(x)}$

f(x)	**F(x)**
$\int f'(x)f(x)\ dx$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n\ dx$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\ dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ dx$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\ dx$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\ dx$	$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$