

1    **Konzepte**

**Ereignisraum**

Die Menge  $\Omega \neq \emptyset$  aller möglichen Ergebnisse des betrachteten Zufallsexperiments. Die Elemente  $\omega \in \Omega$  heissen Elementarereignisse.

**Potenzmenge**

Die Potenzmenge von  $\Omega$ , bezeichnet mit  $\mathcal{P}(\Omega)$  oder  $2^\Omega$  ist die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$ . Ein Prinzipielles Ereignis ist eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$ , also eine Kollektion von Elementarereignissen. Die Klasse aller beobachtbaren Ereignisse ist  $\mathcal{F}$ .

**$\sigma$ -Algebra**

Ein Mengensystem ist eine  $\sigma$ -Algebra falls

- (1)  $\Omega \in \mathcal{F}$
- (2) Für jedes  $A \in \mathcal{F}$  ist auch  $A^c \in \mathcal{F}$
- (3) Für jede Folge  $A_n, n \in \mathbb{N}$  mit  $A_n \in \mathcal{F}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch die Vereinigung  $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$

**Wahrscheinlichkeitsmass**

Eine Abbildung  $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\mathcal{P}[A] \geq 0$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$
- (2)  $\mathcal{P}[\Omega] = 1$
- (3) Für  $A_i \in \mathcal{F}$  paarweise disjunkt gilt  $\mathcal{P}[\bigcup_{i=1}^\infty A_i] = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}[A_i]$

Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

- $\mathcal{P}[A^c] = 1 - \mathcal{P}[A]$
- $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$
- Für  $A \subseteq B$  gilt  $\mathcal{P}[A] \leq \mathcal{P}[B]$
- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$

**Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume**

Impliziert:

- $\Omega$  ist endlich oder abzählbar unendlich
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

**Laplace Raum**

Ist  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  endlich mit  $|\Omega| = N$  und  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  sowie alle  $\omega_i$  gleich wahrscheinlich mit  $p_i = \frac{1}{n}$ , so heisst  $\Omega$  ein Laplace Raum und  $P$  die diskrete Gleichverteilung auf  $\Omega$ . Dann ist für  $A \subseteq \Omega$ :

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**Bedingte Wahrscheinlichkeit**

Seien  $A, B$  Ereignisse mit  $P[A] > 0$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter der Bedingung, dass  $A$  eintritt wird definiert durch:

$$\begin{aligned} P[B \mid A] &:= \frac{P[B \cap A]}{P[A]} \\ &= \frac{P[A \mid B] \cdot P[B]}{P[A]} \end{aligned}$$

**Multiplikationsregel**

Es gilt:

$$P[A \cap B] = P[A \mid B] \cdot P[B] = P[B \mid A] \cdot P[A]$$

**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**

Sei  $A_1, \dots, A_n$  eine Zerlegung von  $\Omega$  in paarweise disjunkte Ereignisse, d.h.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  und  $A_i \cap A_k = \emptyset \quad \forall i \neq k$ . Dann gilt:

$$P[B] = \sum_{i=1}^n P[B \mid A_i] \cdot P[A_i]$$

*Beweis.* Da  $B \subseteq \Omega \implies B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ . Weiter sind alle Mengen der Art  $(B \cap A_i)$  paarweise disjunkt, was bedeutet, dass  $(B \cap A_i)$  eine disjunkte Zerlegung von  $B$  bilden. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P[B] &= P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n P[B \cap A_i] = \sum_{i=1}^n P[B \mid A_i] \cdot P[A_i] \end{aligned}$$

**Satz von Bayes**

Sei  $A_1, \dots, A_n$  eine Zerlegung von  $\Omega$  mit  $P[A_i] > 0$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sei  $B$  ein Ereignis mit  $P[B > 0]$ . Dann gilt für jedes  $k$ :

$$P[A_k \mid B] = \frac{P[B \mid A_k] \cdot P[A_k]}{\sum_{i=1}^n P[B \mid A_i] \cdot P[A_i]}$$

*Beweis.* Verwende Definition Bedingte Wahrscheinlichkeit, im Zähler Multiplikationsregel und im Nenner Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

**Unabhängige Ereignisse (2)**

Zwei ereignisse heissen (stochastisch) Unabhängig, falls

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

Ist  $P[A] = 0$  oder  $P[B] = 0$ , so sind  $A, B$  immer unabhängig. Für  $P[A] \neq 0$  gilt:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P[A \mid B] = P[A]$$

**Unabhängige Ereignisse ( $\infty$ )**

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  heissen (stochastisch) unabhängig, wenn für jede endliche Teilfamilie der Produktformel gilt, d.h. für  $m \in \mathbb{N}$  und  $\{k_1, \dots, k_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ :

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n *A_{k_i}\right] = \prod_{i=1}^n P[A_{k_i}]$$

**Diskrete Zufallsvariable**

Eine reelwertige diskrete Zufallsvariable auf  $\Omega$  ist eine Funktion  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Mit  $\Omega$  ist natürlich auch  $\mathcal{W}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$  endlich oder abzählbar.

- Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist die Abbildung  $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ , definiert durch:

$$t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{\omega : X(\omega) \leq t\}]$$

- Die Gewichtsfunktion oder diskrete Dichte von  $X$  ist die Funktion  $p_X : \mathcal{W}(X) \mapsto [0, 1]$ , definiert durch:

$$p_X(x_k) := P[X = x_k] = P[\{\omega : X(\omega) = x_k\}]$$

Wobei gilt:

- $F_X(t) = P[X \leq t] = \sum_k \text{mit } x_k \leq t p_X(x_k)$
- Für jedes  $x_k \in \mathcal{W}(X)$  gilt  $0 \leq p_X(x_k) \leq 1$  und  $\sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = 1$
- $\mu_X(B) := P[X \in B] = \sum_{x_k \in B} p_X(x_k)$
- $\sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = P[X \in \mathcal{W}(X)] = 1$

**Indikatorfunktion**

Für jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  ist die Indikatorfunktion  $I_A$  von  $A$  definiert durch:

$$I_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \in A^c \end{cases}$$

**Erwartungswert**

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion  $p_X(x)$ , dann ist der Erwartungswert definiert durch:

$$E[X] := \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} x_k \cdot p_X(x_k)$$

und hat folgende Eigenschaften:

- Linearität:  $E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$
- Monotonie:  $X \leq Y \implies E[X] \leq E[Y]$
- Nimmt  $X$  nur Werte in  $\mathbb{N}$  an:

$$E[X] = \sum_{i=1}^\infty P[X \geq i]$$

Erwartungswert von Funktionen

Sei  $X$  eine Diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion  $p_X(x)$  und  $Y = g(X)$  für eine Funktion  $Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Dann gilt:

E[Y] = E[g(X)] = \sum\_{x\_k \in \mathcal{W}(X)} g(x\_k) \cdot p\_X(x\_k)

Varianz

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable. Ist  $E[X^2] < \infty$ , so heisst:

Var[X] := E[X - E[X]^2] = \sum\_{x\_k \in \mathcal{W}(X)} (x\_k - E[X])^2 \cdot p\_X(x\_k)

die Varianz von  $X$ . Es gilt weiter:

- $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$
- $Var[X - Y] = Var[X] + (-1)^2 \cdot Var[Y]$

Standardabweichung

\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}

Gemeinsame Verteilung

Seien  $X_1, \dots, X_n$  beliebige Zufallsvariablen. Die Gemeinsame Verteilungsfunktion von  $X_1, \dots, X_n$  ist die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ , definiert durch:

(x\_1, \dots, x\_n) \mapsto F(x\_1, \dots, x\_n) := P[X\_1 \le x\_1, \dots, X\_n \le x\_n] = \sum\_{y\_1 \le x\_1, \dots, y\_n \le x\_n} p(y\_1, \dots, y\_n)

Die Gemeinsame Gewichtsfunktion ist:

p(x\_1, \dots, x\_n) := P[X\_1 = x\_1, \dots, X\_n = x\_n]

Randverteilung

Haben  $X, Y$  die Gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$ , so ist die Funktion  $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ ,

x \mapsto F\_X(x) := P[X \le x, Y < \infty] = \lim\_{y \rightarrow \infty} F(x, y)

Sind  $X, Y$  diskrete Zufallsvariablen mit  $\mathcal{W}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$  und gemeinsamer Gewichtsfunktion  $p(x, y)$ , so ist die Gewichtsfunktion der Randverteilung von  $X$  gegeben durch:

x \mapsto p\_X(x) := \sum\_{y\_i \in \mathcal{W}(X)} P[X = x, Y = y\_i]

Unabhängige Zufallsvariablen

Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heissen Unabhängig, falls gilt (äquivalent):

F(x\_1, \dots, x\_n) = F\_{X\_1}(x\_1) \cdot \dots \cdot F\_{X\_n}(x\_n) p(x\_1, \dots, x\_n) = p\_{X\_1}(x\_1) \cdot \dots \cdot p\_{X\_n}(x\_n)

Unabhängige Ereignisse

Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  heissen Unabhängig, falls für beliebige Teilmengen  $B_i \subseteq \mathcal{W}(X_i) \quad i = 1, \dots, n$  gilt (äquivalent):

P[X\_1 \in B\_1, \dots, X\_n \in B\_n] = \prod\_{i=1}^n P[X\_i \in B\_i]

Funktionen von Zufallsvariablen

Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Unabhängige Zufallsvariablen und  $f_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  irgendwelche Funktionen. Sei weiter  $Y_i := f_i(X_i)$ . Dann sind die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  ebenfalls unabhängig.

Linearität des Erwartungswertes

Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten.  $E[X_1], \dots, E[X_n]$ . Sei  $Y = a + \sum_{i=1}^n b_i \cdot X_i$  mit Konstanten  $a, b_1, \dots, b_n$ . Dann gilt:

E[Y] = a + \sum\_{i=1}^n b\_i \cdot E[X\_i]

Kovarianz

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit endlichen Erwartungswerten. Dann ist die Kovarianz definiert als:

Cov(X, Y) := E[XY] - E[X]E[Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]

Wobei  $Cov(X, X) = Var[X]$ .

Korrelation

Die Korrelation von  $X, Y$  ist definiert durch

\rho(X, Y) := \begin{cases} \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} & \text{falls } \sigma(X) \cdot \sigma(Y) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}

und es gilt  $|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$  beziehungsweise  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .

Summenformel für Varianzen

Var\left[\sum\_{i=1}^n X\_i\right] = \sum\_{i=1}^n Var[X\_i] + 2 \cdot \sum\_{i < j} Cov(X\_i, X\_j)

ist aber  $Cov(X, Y) = 0$  ( $X, Y$  paarweise unkorreliert), so wird die Summe linear.

Produkte von Zufallsvariablen

Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten. Falls  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, so ist:

E\left[\prod\_{i=1}^n X\_i\right] = \prod\_{i=1}^n E[X\_i]

Dann sind auch  $X_1, \dots, X_n$  paarweise unkorreliert und:

Var\left[\sum\_{i=1}^n X\_i\right] = \sum\_{i=1}^n Var[X\_i]

da Unabhängig  $\implies$  paarweise Unabhängig  $\implies$  unkorreliert.

Bedingte Verteilung

Seien  $X, Y$  diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion  $p(x, y)$ . Die bedingte Gewichtsfunktion von  $X$ , gegeben dass  $Y = y$ , ist definiert durch:

p\_{X|Y}(x|y) := P[X = x | Y = y] \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{p(x, y)}{p\_Y(y)}

für  $p_Y(y) > 0$  und 0 sonst.

Kriterium für Unabhängigkeit

$X, Y$  sind genau dann unabhängig, wenn für alle  $y$  mit  $p_Y(y) > 0$  gilt:

p\_{X|Y}(x|y) = p\_X(x) \quad \forall x \in \mathcal{W}(X)

$n$  tief  $k$

\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}

Ableitung, Integration

Es gilt:

- **Summenregel**  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel**  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Quotientenregel**  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$  wenn  $g(x) \neq 0$
- **Kettenregel**  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- **Partielle Integration**  $\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$
- **Substitution**  $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$
- $a + c, b + c \in I : \int_a^b f(t + c) \, dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) \, dx$
- **Logarithmus**  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = \log(|f(x)|)$

Substitution Beispiel

$$\int \cos(x^2) 2x \, dx$$

$$\int \cos(u) du$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

2 Diskrete Verteilungen

Diskrete Gleichverteilung

Die diskrete Gleichverteilung auf einer endlichen Menge  $\mathcal{W} = \{x_1, \dots, x_n\}$  gehart zu einer Zufallsvariablen  $X$  mit Wertebereich  $\mathcal{W}$  und Gewichtsfunktion:

$$p_X(x_k) = P[X = x_k] = \frac{1}{N}$$

$$k \in \{1, \dots, N\}$$

Unabhängige 0-1-Experimente

Es sei  $A_i := \{\text{Erfolg beim } i\text{-ten Experiment}\}$  und:

- Die  $A_i$  sind unabhängig
- $P[A_i] = p$  für alle  $i$
- 

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i \\ 0 & \omega \notin A_i \end{cases}$$

Bernoulli-Verteilung

Ein einziges 0-1-Experiment mit  $\mathcal{W}(X) = \{0, 1\}$ . Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch  $p_X(1) = p$ , sowie  $p_X(0) = 1 - p$ . Man schreibt kurz  $X \sim Be(p)$ . Es gilt:

$$E[X] = 1 \cdot P[X = 1] + 0 \cdot P[X = 0] = p$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p \cdot (1 - p)$$

Binomialverteilung

Beschreibt die Anzahl der Erfolge bei  $n$  unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter  $p$ . Also ist die Zufallsvariable respektive Gewichtsfunktion:

$$X = \sum_{i=1}^n I_{A_i} = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

und man schreibt kurz  $X \sim Bin(n, p)$ . Es gilt weiter:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[Y_i] = n \cdot p$$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^n Var[Y_i] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Geometrische Verteilung

Bei einer unendlichen Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter  $p$  sein  $X$  die Wartezeit zum ersten Erfolg:

$$X = \inf\{i \in \mathbb{N} : A_i \text{ tritt ein}\}$$

$$p_X(k) = P[X = k] = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

wir schreiben  $X \sim Geom(p)$  und es gilt:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}$$

$$E[X \cdot (X - 1)] = \frac{2(1 - p)}{p^2}$$

$$Var[X] = \frac{1 - p}{p^2}$$

Negativbinomiale Verteilung

Bei einer unendlichen Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter  $p$  sein  $X$  die Wartezeit zum  $r$ -ten Erfolg ( $r \in \mathbb{N}$ ):

$$X = \inf\{k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^k I_{A_i} = r\}$$

$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{k-r}$$

wir schreiben  $X \sim NB(r, p)$  und es gilt:

$$E[X] = \sum_{i=1}^r E[X_i] = \frac{r}{p}$$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^r Var[X_i] = \frac{r \cdot (1 - p)}{p^2}$$

Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne seien  $n$  Gegenstände, davon  $r$  vom Typ 1 und  $n - r$  vom Typ 2. Man zieht ohne zurücklegen  $m$  der Gegenstände. Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt die Anzahl der Gegenstände vom Typ 1 in der Stichprobe. Der Wertebereich von  $X$  ist  $\mathcal{W}(X) = \{0, 1, \dots, \min(m, r)\}$  und:

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$$\text{für } k \in \mathcal{W}(X)$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n i \cdot p_X(i) = m \cdot \frac{r}{n}$$

$$\text{(Nicht im Skript)}$$

$$Var[X] = m \cdot \frac{r}{n} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{n - m}{n - 1}$$

$$\text{(Nicht im Skript)}$$

Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung mit Parameter  $\lambda \in (0, \infty)$  ist eine Verteilung auf der Menge  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  mit Gewichtsfunktion:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var[X] = \lambda$$

Ist eine Zufallsvariable  $X$  Poisson verteilt mit Parameter  $\lambda$  schreiben wir  $X \sim P(\lambda)$ .

3 Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Sein  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Also  $\Omega$  ein Grundraum,  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  die beobachtbaren Ereignisse und  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmass auf  $\mathcal{F}$ . Eine (reelwertige) Zufallsvariable auf  $\Omega$  ist eine messbare Funktion  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Das bedeutet, dass die Menge  $\{X \leq t\} = \{\omega : X(\omega) \leq t\}$  für jedes  $t$  ein beobachtbares Ereigniss sein muss.

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist die Abbildung  $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ :

$$t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{\omega : X(\omega) \leq t\}]$$

und hat die Eigenschaften:

- $F_X$  ist wachsend und rechtsstetig. Das bedeutet, dass  $F_X(s) \leq F_X(t)$  für  $s \leq t$  gilt und  $F_X(u) \rightarrow F_X(t)$  für  $u \rightarrow t$  mit  $u > t$
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

Dichtefunktion

Das Analogon der Gewichtsfunktion im Diskreten Fall. Eine Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F_X(t) = P[X \leq t]$  heisst (absolut) stetig mit Dichte (funktion)  $f_X : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ , falls gilt:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) \, ds$$

$$\text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und hat die Eigenschaften:

- $f_X \geq 0$  und  $f_X = 0$  ausserhalb von  $\mathcal{W}(X)$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \, ds = 1$ ; das folgt aus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung auf dem Intervall  $[a, b]$  ist ein Modell für die Zufällige Wahl eines Punktes in  $[a, b]$ . Die zugehörige Zufallsvariable  $X$  hat den Wertebereich  $\mathcal{W}(X) = [a, b]$ , sowie

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{für } t > b. \end{cases}$$

wir schreiben kurz  $X \sim U(a, b)$ .

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda > 0$  ist das stetige Analogon der Geometrischen Verteilung. Die zugehörige Zufallsvariable  $X$  hat  $\mathcal{W}(X) = [0, \infty)$ , Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) \, ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

wir schreiben kurz  $X \sim Exp(\lambda)$ . Weiter ist die Funktion Gedächtnislos, dh.  $P[X > t + s \mid X > s] = P[X > t]$ .

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalverteilung

Die Normalverteilung hat zwei Parameter:  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma^2 > 0$ . Die zugehörige Zufallsvariable  $X$  hat den Wertebereich  $\mathcal{W}(X) = \mathbb{R}$  und die Dichtefunktion:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

welche symmetrisch um  $\mu$  ist. Wir schreiben kurz:  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Standard Normalverteilung

Wichtige Normalverteilung mit  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Weder für die zugehörige Dichte  $\varphi(t)$  noch Verteilungsfunktion  $\Phi(t)$  gibt es geschlossene Ausdrücke, aber das Integral

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(s) \, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}s^2} \, ds$$

ist tabelliert. Ist  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , so ist  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , also:

$$F_X(t) = P[X \leq t] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

deshalb genügt es  $\Phi$  zu tabellieren.

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Normalapproximation

Wenn  $S_n \sim Bin(n, p)$  dann

$$S_n \sim_{approx} N(np, np(1-p))$$

Erwartungswert

Ist  $X$  stetig mit Dichte  $f_X(x)$ , so ist der Erwartungswert:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx$$

sofern das Integral absolut konvergiert. Ist das Integral nicht absolut konvergent, so existiert der Erwartungswert nicht.

Erwartungswert einer Funktion

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $Y = g(X)$  eine weitere Zufallsvariable. Ist  $X$  stetig mit Dichte  $f_X$ , so ist

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, dx$$

Momente & Absolute Momente

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $p \in \mathbb{R}^+$ . Wir definieren:

- $p$ -te absolute Moment von  $X$ :  $M_p := E[|X|^p]$
- falls  $M_n < \infty$  für ein  $n$ , dann ist das  $n$ -te (rohe) Moment von  $X$  durch  $m_n := E[X^n]$  definiert.
- Das  $n$ -te zentralisierte Moment von  $X$  ist durch  $\mu_n := E[(X - E[X])^n]$  definiert.

Es gilt weiter, dass  $M_n < \infty$  für  $n \in \mathbb{N} \implies |m_n| \leq M_n$ .

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_X(x) \, dx$$

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) \, dx$$

$$p \leq q \wedge M_q < \infty \implies M_p < \infty$$

Gemeinsame Verteilung/Dichte

Die Gemeinsame Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ist die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$  mit:

$$F(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) \, dt_n \dots t_1$$

dann heisst  $f(x_1, \dots, x_n)$  die gemeinsame Dichte, welche folgende Eigenschaften hat:

- $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  und  $= 0$  ausserhalb von  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_n)$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) \, dt_n \dots t_1 = 1$
- $P[(X_1, \dots, X_n) \in A] = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in A} f(t_1, \dots, t_n) \, dt_n \dots t_1$  für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Randverteilung

Haben  $X, Y$  die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$ , dann ist:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y < \infty] = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy$$

Unabhängigkeit

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heissen unabhängig, falls gilt (äquivalent):

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$$

für alle  $x_1, \dots, x_n$ .

Bedingte Verteilungen

Es gilt:

$$f_{X_1 \mid X_2}(x_1 \mid x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \\ P[Y > t \mid Y < a] = \frac{P[t < Y < a]}{P[Y < a]} \\ E[X_1 \mid X_2] = \int x_1 \cdot f_{x_1 \mid x_2}(x_1 \mid x_2) \, dx_1$$

Summen von Zufallsvariablen

Sei  $Z = X + Y$  eine Zufallsvariable mit:

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[X + Y \leq z] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) \, dy \, dx \\ f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) \, dy$$

Transformationen

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilung und Dichte. Sei  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  eine messbare Funktion. Betrachte nun  $Y = g(X)$ , wir suchen Verteilung und Dichte von  $Y$ :

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[g(X) \leq t] = \int_{A_g} f_X(s) \, ds \\ A_g := \{s \in \mathbb{R} \mid g(s) \leq t\}$$

Wobei man die Dichte durch ableiten der Verteilung erhält.

Anwendung von Transformationen

Sei  $F$  eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit Umkehrfunktion  $F^{-1}$ . Ist  $X \sim \mathcal{U}(0,1)$  und  $Y = F^{-1}(X)$ , so hat  $Y$  gerade die Verteilungsfunktion  $F$ :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P[Y \leq t] = P[F^{-1}(X) \leq t] \\ &= P[X \leq F(t)] = F(t) \end{aligned}$$

Markov Ungleichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und ferner  $g : \mathcal{W}(X) \mapsto [0, \infty)$  eine wachsende Funktion. Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  mit  $g(c) > 0$  gilt dann:

$$P[X \geq c] \leq \frac{E[g(X)]}{g(c)}$$

Chebyshev-Ungleichung

Sei  $Y$  eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Für jedes  $b > 0$  gilt dann:

$$P[|Y - E[Y]| \geq b] \leq \frac{Var[Y]}{b^2}$$

Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert  $E[X_i] = \mu$  und die gleiche Varianz  $Var[X_i] = \sigma^2$  haben. Sei

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dann konvergiert  $\overline{X}_n$  für  $n \rightarrow \infty$  in Wahrscheinlichkeit/stochastisch gegen  $\mu = E[X_i]$ , d.h.:

$$P\left[|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

(Statt unabhängig genügt auch  $Cov(X_i, X_k) = 0$  für  $i \neq k$ )

Starkes Gesetz der grossen Zahlen

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle dieselbe Verteilung haben, und ihr Erwartungswert  $\mu = E[X_i]$  sei endlich. Für:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

gilt dann

$$\overline{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \qquad \text{P-fast sicher}$$

d.h.:

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \overline{X}_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu\right\}\right] = 1$$

i.i.d. / u.i.v.

Independent identically distributed

Zentraler Grenzwertsatz

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit  $E[X_i] = \mu$  und  $Var[X_i] = \sigma^2$ . Für die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  gilt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right] = \Phi(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion von  $\mathcal{N}(0,1)$  ist.

4 Tabellen

4.1 Ableitungen

<b>F(x)</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
$(x-1)e^x$	$xe^x$	$(x+1)e^x$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	$a^{kx}$	$ka^{kx} \ln(a)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\frac{\sin(x)^2}{2}$	$\sin(x) \cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
$\tan(x) - x$	$\tan(x)^2$	$2 \sec(x)^2 \tan(x)$
$-\cot(x) - x$	$\cot(x)^2$	$-2 \cot(x) \csc(x)^2$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
$-\ln \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln \sin(x) $	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln x  - 1)$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x  - 1)$	$\log_a x $	$\frac{1}{\ln(a)x}$

<b>F(x)</b>	<b>f(x)</b>
$\arcsin(x)/\arccos(x)$	$\frac{1/-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$f(x)^{g(x)}$	$e^{g(x) \ln(f(x))}$
$f(x) = \cos(\alpha)$	$f(x)^n = \sin(x + n \frac{\pi}{2})$
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$
$\ln(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\ln(\tan(\frac{x}{2}))$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{\cos(x)}$
<b>f(x)</b>	<b>F(x)</b>
$\int f'(x)f(x) \, dx$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$\ln f(x) $
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n \, dx$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n \, dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} \, dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} \, dx$	$\frac{1}{ap} \ln ax^p+b $
$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $
$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$	$\frac{x}{2} f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x+f(x))$

Momenterzeugende Funktion

Die Momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariable  $X$  ist:

M\_X(t) := E[e^{t \cdot X}] \qquad \text{f\u00fcr } t \in \mathbb{R}

Grosse Summenabweichung

Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. Zufallsvariablen, f\u00fcr welche die Momenterzeugende Funktion  $M_X(t)$  f\u00fcr alle  $t \in \mathbb{R}$  endlich ist. F\u00fcr jedes  $b \in \mathbb{R}$  gilt dann:

P[S\_n \geq b] \leq \exp\left(\inf\_{t \in \mathbb{R}} (n \cdot \log M\_X(t) - t \cdot b)\right)

Chernoff Schranken

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabh\u00e4ngig mit  $X_i \sim Be(p)$  und  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Sei  $\mu_n := E[S_n] = \sum_{i=1}^n p_i$  und  $\delta > 0$ . Dann gilt:

P[S\_n \geq (1 + \delta) \cdot \mu\_n] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu\_n}

5 Sch\u00e4tzer

Sch\u00e4tzer

Wir suchen ein Modell f\u00fcr eine Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  und haben einen Parameterraum  $\vartheta \subseteq \Theta$  und f\u00fcr jedes  $\vartheta$  einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P_\vartheta)$ . Wir m\u00f6chten nun die Parameter  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$  bestimmen. Ein Sch\u00e4tzer  $T_j$  f\u00fcr einen Parameter  $\vartheta_j$  ist eine Zufallsvariable der Form  $T_j := t_j(X_1, \dots, X_n)$  f\u00fcr eine Sch\u00e4tzfunktion  $t_j$ .

Sch\u00e4tzwert

Ein Sch\u00e4tzwert ist das Ergebnis einer konkreten Berechnung, eine Zahl. Sie entsteht durch das Einsetzen konkreter Daten in einen Sch\u00e4tzer:  $T_j(\omega) = t_j(x_1, \dots, x_n)$  und liefert damit einen Wert f\u00fcr genau einen Parameter.

Eigenschaften von Sch\u00e4tzern

Sei  $T$  ein Sch\u00e4tzer.

- $T$  ist erwartungstreu, falls  $E_\vartheta[T] = \vartheta$  gilt.  $T$  sch\u00e4tzt im Mittel also richtig.
- Bias :=  $E_\vartheta[T] - \vartheta$ . Ein erwartungstreuer Sch\u00e4tzer hat also keinen Bias.
- Mittlere Quadratische Sch\u00e4tzfehler  $MSE_\vartheta[T] := E_\vartheta[(T - \vartheta)^2]$ .
- Eine Folge  $T^{(n)}$  von Sch\u00e4tzern heisst konsistent f\u00fcr  $\vartheta$ , falls  $T^{(n)}$  f\u00fcr  $n \rightarrow \infty$  in  $P_\vartheta$ -Wahrscheinlichkeit gegen  $\vartheta$  konvergiert, d.h. f\u00fcr jedes  $\vartheta \in \Theta$  gilt:

\lim\_{n \rightarrow \infty} P\_\vartheta \left[ \left| T^{(n)} - \vartheta \right| > \varepsilon \right] = 0

Maximum-Likelihood Methode

(Analog im diskreten Fall.) In einem Modell  $P_\vartheta$  sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  stetig mit einer gemeinsamen Dichtefunktion  $f(x_1, \dots, x_n, \vartheta)$ . Oft sind die  $X_i$  i.i.d. und man erh\u00e4lt:

f(x\_1, \dots, x\_n, \vartheta) = P[X\_1 = x\_1, \dots, X\_n = x\_n] = \prod\_{i=1}^n f\_X(x\_i, \vartheta)

Wir nehmen nun an, dass die Daten die wir erhalten haben sehr Wahrscheinlich sind und versuchen nun folgende Likelihood funktion zu Maximieren durch Anpassungen an  $\vartheta$ :

L(x\_1, \dots, x\_n; \vartheta) := f(x\_1, \dots, x\_n; \vartheta) \log L(x\_1, \dots, x\_n; \vartheta) := \log f(x\_1, \dots, x\_n; \vartheta)

letzteres kann bei Produkt zu Summe umwandlung hilfreich sein.

Sei  $\Theta = [0, 1]$ . Wir betrachten die Modellfamilie  $P_{\theta \in \Theta}$ , wobei  $X_1, \dots, X_n$  unter  $\mathbb{P}_\theta$  unabh\u00e4ngig und identisch verteilt sind mit  $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$ . Was ist die Likelihood-Funktion  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  f\u00fcr  $x_1, \dots, x_n \in \{1, 2, \dots\}$ ?

L(x\_1, \dots, x\_n; \theta) = (P\_\theta)[X\_1 = x\_1, \dots, X\_n = x\_n] = \prod\_{i=1}^n \mathbb{P}\_\theta[X\_i = x\_i] = \theta^n \cdot (1 - \theta)^{x\_1 + \dots + x\_n - n}

Was ist der Maximum-Likelihood-Sch\u00e4tzer  $T_{ML}$  f\u00fcr  $\theta$ ?

n \cdot \log(\theta) + (x\_1 + \dots + x\_n - n) \cdot \log(1 - \theta)

Wir setzen nun die Ableitung der log-Likelihood-Funktion nach  $\theta$  gleich 0 und erhalten:

\frac{n}{\theta} - \frac{x\_1 + \dots + x\_n - n}{1 - \theta} = 0 \iff n - n\theta = (x\_1 + \dots + x\_n) \cdot \theta - n\theta \iff \theta = \frac{n}{x\_1 + \dots + x\_n} = \frac{n}{X\_1 + \dots + X\_n}

Empirisches Moment

F\u00fcr  $k \in \{1, \dots, m\}$  sei das  $k$ -te Moment empirische Moment oder Stichprobenmoment  $\hat{m}_k$  der Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$ :

\hat{m}\_k(x\_1, \dots, x\_n) := \frac{1}{n} \sum\_{i=1}^n x\_i^k

Momentenmethode

Der Momentenmethode liegt zugrunde, dass die Momente einer Zufallsvariable bzw. einer Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Stichprobenmomente gesch\u00e4tzt werden k\u00f6nnen. Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine Stichprobe und  $\Theta$  der Parameterraum. F\u00fcr jeden Parameter  $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) \in \Theta$  sei  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. unter dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P_\vartheta)$ . Methode:

1. F\u00fcr gegebene Realisierungen  $x_1, \dots, x_n$  bestimme f\u00fcr jedes  $k \in \{1, \dots, m\}$  das  $k$ -te empirische Moment
  2. Stelle ein Gleichungssystem f\u00fcr die Unbekannten Parameter  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$  auf, in dem das  $k$ -te empirische Moment dem  $k$ -ten Moment gleichgesetzt wird, also:
- \hat{m}\_k(x\_1, \dots, x\_n) = g\_k(\vartheta\_1, \dots, \vartheta\_m) \qquad k \in \{1, \dots, m\}
3. Existiert eine Eindeutige L\u00f6sung so wird das unsere Sch\u00e4tzung f\u00fcr  $\vartheta$ .

Momentensch\u00e4tzer

Der Vektor  $\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_m)$  heisst Momentensch\u00e4tzer des Parameters  $\vartheta$ .

Beispiel: Normalverteilte Stichprobe

Sei  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit unbekannten Parametern  $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ . Damit berechnen wir mit der log max likelihood funktion Ableitungen setzen diese zu 0 und bekommen:

T\_1 = \frac{1}{n} \sum\_{i=1}^n X\_i = \overline{X}\_n T\_2 = \frac{1}{n} \sum\_{i=1}^n X\_i^2 - \overline{X}\_n^2

m\u00f6chten wir aber noch, dass der Sch\u00e4tzer erwartungstreu wird, so w\u00e4hlen wir f\u00fcr  $T_2 = S^2$ :

S^2 = \frac{1}{n-1} \sum\_{i=1}^n (X\_i - \overline{X}\_n)^2

Normalverteilte Stichproben

Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt:

- $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  und  $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2\right) \sim \chi_{n-1}^2$
- $\overline{X}_n$  und  $S^2$  sind unabh\u00e4ngig
- $\frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S/\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{n-1}{\sigma^2} S^2}} \sim t_{n-1}$

6 Statistik

Hypothesen

- Die Nullhypothese  $H_0$  wird verworfen, falls  $T(\omega) \in K$ .
- Die Alternativhypothese  $H_1$  wird verworfen, falls  $T(\omega) \in K$ .
- $T$  ist eine Zufallsvariable

$\chi^2$ -Verteilung

Die  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden (bez.  $\chi_n^2$ ) gehört zu einer stetigen Zufallsvariable  $Y$  mit Dichtefunktion:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

wobei dies ein Spezialfall der  $Ga(\alpha, \lambda)$  Verteilung ist mit  $\alpha = \frac{n}{2}$  und  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ , so ist die Summe  $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$ .

t-Verteilung

Die  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden gehört zu einer stetigen Zufallsvariable  $Z$  mit Dichtefunktion

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{für } z \in \mathbb{R}$$

für  $n = 1$  ist das eine Cauchy Verteilung und für  $n \rightarrow \infty$  erhält man  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Sind  $X, Y$  unabhängig und  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $Y \sim \chi_n^2$ , so ist der Quotient:

$$Z := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}} \sim t_n, \text{ also } t\text{-Verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden}$$

Hypothesen

Es gibt:

- Hypothese  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$
- Alternative  $H_A : \vartheta \in \Theta_A$

Man verwirft die Hypothese genau dann, wenn der realisierte Wert im Verwerfungsbereich  $K$  liegt.

Fehler

Es gibt folgende Fehler:

- 1. Art: Hypothese wird zu unrecht abgelehnt.  $P_\vartheta[T \in K]$  für  $\vartheta \in \Theta_0$
- 2. Art: Hypothese wird zu unrecht nicht verworfen.  $P_\vartheta[T \notin K]$  für  $\vartheta \in \Theta_A$

Meisst kann man nicht beides minimieren, also geht man wie folgt vor:

1. Man wählt ein **Signifikanzniveau**  $\alpha \in (0, 1)$  und kontrolliert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art durch

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} P_\vartheta[T \in K] \leq \alpha$$

2. Man versucht die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art  $P_\vartheta[T \notin K]$  für  $\vartheta \in \Theta_A$  zu minimieren. Dazu maximiert man die **Macht des Tests**:

$$\beta : \Theta_A \mapsto [0, 1] \quad \vartheta \mapsto \beta(\vartheta) := P_\vartheta[T \in K]$$

Somit ist es schwieriger eine Hypothese zu verwerfen als zu behalten. In einem Test **verwendet man deshalb immer als Hypothese die Negation der eigentlich gewünschten Aussage**.

Likelihood Quotient

Sei  $L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)$  die Likelihood Funktion und  $\vartheta_0 \in \Theta_0$  sowie  $\vartheta_A \in \Theta_A$ . Dann definieren wir:

$$R(x_1, \dots, x_n; \vartheta_0, \vartheta_A) = \frac{L(x_1, \dots, x_n; \vartheta_A)}{L(x_1, \dots, x_n; \vartheta_0)}$$

je grösser der Quotient, desto wahrscheinlicher die Alternative. Es gibt auch:

$$R(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta_A} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}$$
$$\tilde{R}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta_A \cup \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \vartheta)}$$

Wähle Konstante  $c_0$  für  $K_0 = (c_0, \infty)$  mithilfe von Signifikanzniveau.

Neyman-Pearson Lemma

Sei  $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$  und  $\Theta_A = \{\vartheta_A\}$ . Wie oben sei  $T = R(X_1, \dots, X_n; \vartheta_0, \vartheta_A)$  und  $K := (c, \infty)$ , sowie  $\alpha^* := P_{\vartheta_0}[T \in K] = P_{\vartheta_0}[T > c]$ . Der Likelihood Quotienten Test mit Teststatistik  $T$  und kritischem Bereich  $K$  ist dann in folgendem Sinn optimal: Jeder andere Test mit Signifikanzniveau  $\alpha \leq \alpha^*$  hat eine kleinere Macht (bez. Grössere WS Fehler 2. Art).

p-Wert

(Nach Wikipedia) Der  $p$ -Wert ist die Wahrscheinlichkeit ein mindestens so extremes Testergebnis zu erhalten, wenn die Nullhypothese gelten würde:

$$p(x) = P[X \leq x \mid H_0] \text{ oder } P[X \geq x \mid H_0]$$
$$p(x) = 2 \cdot \min\{P[X \leq x \mid H_0], P[X \geq x \mid H_0]\}$$

z-Test

Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei bekannter Varianz. Hier sind  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$ . Wir möchten die Hypothese  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  testen. Mögliche Alternativen  $H_A$  sind  $\vartheta > \vartheta_0$ ,  $\vartheta < \vartheta_0$  (einseitig) oder  $\vartheta \neq \vartheta_0$  (zweiseitig). Die Teststatistik ist:

$$T = \frac{\bar{X} - \vartheta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{unter } P_{\vartheta_0}$$

Und die Verwerfungsbereiche:

$$\begin{aligned} \vartheta < \vartheta_0 & \quad (-\infty, z_\alpha) \\ \vartheta > \vartheta_0 & \quad (z_{1-\alpha}, \infty) \\ \vartheta \neq \vartheta_0 & \quad (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \end{aligned}$$

Wobei die  $z$  Werte in der Tabelle nachgeschaut werden können und es gilt  $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ .

Beispiel Fehler 2. Art Berechnen

Nehme an: einseitiger  $z$ -Test,  $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ,  $\mu_0 = 70$ .

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_A : \mu < \mu_0$$

Kritischer Bereich mit 5% niveau:  $K = (-\infty, -1.645)$ . Wir nehmen an, dass  $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} P_{\mu_A}[T \notin K] &= P_{\mu_A}[T > -1.645] \\ &= P_{\mu_A}\left[\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.645\right] \\ &= P_{\mu_A}\left[\frac{\bar{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] \\ &= 1 - P_{\mu_A}\left[\frac{\bar{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma - \sqrt{n}} - 1.645\right) \quad \text{Weil } \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

t-Test

Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei unbekannter Varianz. Hier sind  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  unter  $P_{\vec{\vartheta}}$ , wobei  $\vec{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$ . Wir wollen die Hypothese  $\mu = \mu_0$  testen. Die Teststatistik ist:

$$T := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{unter } P_{\vartheta_0}$$
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Und die Verwerfungsbereiche:

$$\begin{aligned} c_< = t_{n-1, \alpha} & \quad (-\infty, c_<) & \mu < \mu_0 \\ c_> = t_{n-1, 1-\alpha} & \quad (c_>, \infty) & \mu > \mu_0 \\ c_\neq = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} & \quad (-\infty, c_<) \cup (c_>, \infty) & \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Wobei gilt  $t_{m, \alpha} = -t_{m, 1-\alpha}$ .

Gepaarter Zweiprobe-Test

Hier sind  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$  unter  $P_\vartheta$ . Insbesondere ist  $m = n$  und die Varianz beider Stichproben dieselbe. Differenzen  $Z_i := X_i - Y_i$  sind unter  $P_\vartheta$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, 2\sigma^2)$ . Dann analog  $z$  und  $t$ -Test. (Setzt natürliche Paarung von Daten voraus!)

Ungepaarter Zweiprobe-Test

Hier sind unter  $P_\vartheta$  die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_1, \dots, Y_m$  i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ , wobei die Varianz in beiden Fällen dieselbe ist.

- Bei bekannter Varianz:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0 \quad (z.B. \mu_0 = 0)$$
$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Die kritischen Werte für den Verwerfungsbereich sind wie oben geeignete Quantile der  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung, je nach Alternative. Das ist der ungepaarte Zweistichproben- $z$ -Test.

- Bei unbekannter Varianz:

$$S_X^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$
$$S_Y^2 := \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \overline{Y}_m)^2$$
$$S^2 := \frac{1}{m+n-2} ((n-1) \cdot S_X^2 + (m-1) \cdot S_Y^2)$$
$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

unter jedem  $P_\vartheta$ . Dieser Test heisst ungepaarter Zweistichproben- $t$ -Test.

Konfidenzbereich

Ein Konfidenzbereich für  $\vartheta$  zu Daten  $x_1, \dots, x_n$  ist eine Menge  $C(x_1, \dots, x_n) \subseteq \Theta$ . Damit ist  $C(X_1, \dots, X_n)$  eine zufällige Teilmenge von  $\Theta$ . Dieses  $C$  heisst Konfidenzbereich zum Niveau  $1 - \alpha$ , falls für alle  $\vartheta \in \Theta$  gilt:

$$P_\vartheta[\vartheta \in C(X_1, \dots, X_n)] \geq 1 - \alpha$$

Beispiel Konfidenzbereich

Machen wir den Ansatz:

$$C(X_1, \dots, X_n) = [\overline{X}_n - \dots, \overline{X}_n + \dots]$$

so wollen wir erreichen, dass gilt:

$$1 - \alpha \leq P_\vartheta[\vartheta \in C(X_1, \dots, X_n)]$$
$$= P_\vartheta[\mu \in [\overline{X}_n - \dots, \overline{X}_n + \dots]] = P_\vartheta[|\overline{X}_n - \mu| \leq \dots]$$

Nach Satz 7.1 ist für jedes  $\vartheta \in \Theta$ :

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{unter } P_\vartheta$$
$$1 - \alpha \leq P_\vartheta \left[ \left| \frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} \right| \leq \frac{\dots}{S/\sqrt{n}} \right]$$

also erhalten wir das Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha$ :

$$C(X_1, \dots, X_n) = \left[ \overline{X}_n - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$