

# 1 Folgen

## 1.1 Konvergenz

Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  **konvergiert** gegen  $a$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Wir schreiben dann:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

und nennen  $a$  den **Grenzwert/ Limes** der Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Existiert der Limes nicht, so heisst die Folge **divergent**. Zu bemerken ist:

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ konvergent} \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ beschränkt}$$

## 1.2 Monotone Konvergenz

Sei die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

Ist die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$$

## 1.3 Cauchy Kriterium

Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

## 1.4 Rechnen mit Limes

Seien die Folgen  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gilt:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (iii) Falls zusätzlich  $b_n \neq 0 \forall n \geq 1$  und  $b \neq 0$  gegeben ist, so gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$ .
- (iv) Falls es ein  $K \geq 1$  gibt mit  $a_n \leq b_n \forall n \geq K$ , dann folgt  $a \leq b$ .

## 1.5 Limes Superior/ Inferior

Sei eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt. Wir können dann zwei monotone Folgen  $(b_n)_{n \geq 1}$  und  $(c_n)_{n \geq 1}$  definieren, welche dann einen Grenzwert besitzen. Sei für jedes  $n \geq 1$ :

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \text{ und } c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$
$$b_n \leq b_{n+1}$$
$$c_{n+1} \leq c_n$$

Da also beide Folgen beschränkt sind und konvergieren, können wir aufgrund von Monotoner Konvergenz folgern:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Es gilt auch, dass  $(a_n)_{n \geq 1}$  genau dann konvergiert, falls  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt ist und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

## 1.6 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

## 1.7 Sandwichsatz für Folgen

Seien  $(a_n)_{n \geq 1}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  konvergente Folgen mit demselben Limes  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Ist  $K \in \mathbf{N}$  und  $(c_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit der Eigenschaft:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$$

so konvergiert auch  $(c_n)_{n \geq 1}$  gegen  $\alpha$ .

## 1.8 Limes Binom Trick

Gegeben die Summe zweier Wurzeln könnte man wie folgt vorgehen (Bsp.):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x+5) - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \right)$$

## 1.9 Limes Substitution Trick

Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Substituiere nun  $u = \frac{1}{x}$ :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

## 1.10 Limes Taylor Trick

Mithilfe der Reihenentwicklung von  $e^x$  und  $\sin(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}}{1 - n * \sin(\frac{1}{n})} = \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + \mathcal{O}(n^{-5}))} = 3$$

## 1.11 Typische Folgen

Es gibt folgende Typischen Folgen:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^b = 1 \quad b \in \mathbf{Z}$
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0 \quad a \in \mathbf{Z} \quad 0 \leq q < 1$
- (v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$
- (vi)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

## 1.12 Rekurrenz Beispiel

Die folgenden Schritte sollten bei der Auflösung einer Rekursiven Folge in betracht gezogen werden:

1. Zeige Monotonie (Durch Induktion)
2. Zeige Obere oder Untere Schranke (Evt. Induktion)
3. Verwende  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$  (Da für jede Teilfolge der gleiche Grenzwert gilt)

### 1.13 Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  falls für alle  $x \in \mathbf{D}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  gilt. Konkret:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{D} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_{x,\epsilon} \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

### 1.14 Gleichmässige Konvergenz

Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  konvergiert gleichmässig in  $\mathbf{D}$  gegen eine Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  falls für alle  $x \in \mathbf{D}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  gilt. Konkret:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbf{D} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

Weiter ist folgendes Kriterium äquivalent:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ so dass} \\ \forall n, m \geq N \quad \forall x \in \mathbf{D} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

Konvergiert eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 1}, f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  bestehend aus in  $\mathbf{D}$  stetigen Funktionen gleichmässig gegen die Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ , so ist  $f$  in  $\mathbf{D}$  **stetig**.

### 1.15 Grenzwerte von Funktionen

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{D}$ . Dann ist  $A \in \mathbf{R}$  der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$ , bezeichnet mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

falls  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  so dass

$$\forall x \in \mathbf{D} \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

### 1.16 Rechnen mit Limes Für Funktionen

Seien die Funktionen  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  konvergent mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ . Sei weiter  $x_0 \in \mathbf{R}$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{D}$ . Dann gilt:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(iii) Sei  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f \leq g$ . Dann folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren.

(iv) Seien  $\mathbf{D}, \mathbf{E} \subset \mathbf{R}$  und  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$  eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existiert und  $y_0 \in \mathbf{E}$ . Falls  $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig in  $y_0$  folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

### 1.17 Sandwichsatz für Funktionen

Falls  $g_1 \leq f \leq g_2$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$$

dann existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$$

### 1.18 Links- und Rechtsseitige Grenzwerte

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Wir nehmen an, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{D} \cap ]x_0, +\infty[$  ist. Falls der Grenzwert der Eingeschränkten Funktionen  $f$  im Bereich  $\mathbf{D} \cap [x_0, +\infty[$  für  $x \rightarrow x_0$  existiert, wird er mit  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von  $f$  bei  $x_0$ .

Der **linksseitige Grenzwert** ist analog definiert für den Bereich  $\mathbf{D} \cap ]-\infty, x_0]$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls er existiert. Es wird mit  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  bezeichnet.

Besitzt die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  den Grenzwert  $L$ , so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

## 2 Reihen

### 2.1 Konvergenz

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen  $(S_n)_{n \geq 1} = \sum_{k=1}^n a_k$  konvergiert. In diesem

Fall definieren wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

### 2.2 Monotone Konvergenz

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ . Die Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen  $(S_n)_{n \geq 1}$  nach oben beschränkt ist.

### 2.3 Cauchy Kriterium

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

### 2.4 Rechnen mit Konvergenten Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent, sowie  $\alpha \in \mathbf{C}$ . Dann gilt:

- (i)  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  ist konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
- (ii)  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k$  ist konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha * a_k = \alpha * \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Konvergieren die Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut, so gilt zusätzlich für das Cauchy Produkt:

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n a_{n-j} * b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i) * (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

### 2.5 Absolute Konvergenz

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heisst **absolut konvergent**, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Weiter sind **absolut konvergente Reihen auch konvergent** und es gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

## 2.6 Reihen Umordnung

Konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe  $a'_n = a_{\phi(n)}$  (wobei  $\phi$  bijektiv) und hat denselben Grenzwert.

## 2.7 Typische Reihen

- (i) Geometrische Reihe:  $\sum_{k=0}^{\infty} a * q^k = \frac{a}{1-q}$  für  $|q| < 1$  konvergent, sonst divergent
- (ii) Riemann Zeta Funktion:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  konvergiert für  $s > 1$ , sonst divergent
- (iii) Teleskopsumme:  $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$
- (iv) Alternierende Harmonische Reihe:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$
- (v)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$  ist divergent, vergleich mit  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
- (vi)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$  ist konvergent, vergleich mit  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$

## 2.8 Potenzreihe

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbf{C}$  mit  $|z| < \rho$  (divergiert bei  $|z| > \rho$ ), wobei

$$\rho := \begin{cases} +\infty & \text{Falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{Falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

**Ränder Prüfen!**

## 2.9 Nullfolgenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

## 2.10 Wurzelkriterium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren.}$$

## 2.11 Quotientenkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge mit  $a_n \neq 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

## 2.12 Vergleichssatz

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit:

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

## 2.13 Integraltest

Sei  $f(x)$  eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf  $[k, \infty)$  und  $f(n) = a_n$ :

$$\int_k^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x) dx \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

## 2.14 Leibniz Kriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend mit  $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:  $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

## 2.15 Gleichmäßige Konvergenz

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmäßig in  $\mathbf{D}$  falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Gilt weiter, dass  $f_n : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  eine Folge stetiger Funktionen ist und eine Folge  $C_n$  existiert, so dass

$$|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in \mathbf{D}$$

und dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert, dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$  gleichmäßig in  $\mathbf{D}$  und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$$

ist eine in  $\mathbf{D}$  stetige Funktion.

# 3 Stetigkeit

## 3.1 Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt

Sei  $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{D}$ . Die Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  ist in  $x_0$  **stetig**, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in \mathbf{D}$  gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Hier noch eine äquivalente Definition: Falls für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  folgendes gilt:

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

ist die Funktion  $f$  in  $x_0$  stetig.

## 3.2 Stetigkeit einer Funktion

Die Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt  $x \in \mathbf{D}$  stetig ist.

### 3.3 Gleichmässige Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  ist in  $\mathbf{D}$  gleichmässig stetig falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 \forall x, y \in \mathbf{D} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

wobei Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  welche in einem kompakten Intervall stetig sind im selben Intervall glm. stetig sind.

### 3.4 Rechnen mit Stetigkeit

Sei  $x_0 \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  und  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  beide in  $x_0$  stetig:

(i) Dann sind  $f + g$ ,  $\lambda * f$ ,  $f * g$  stetig in  $x_0$

(ii) Falls  $g(x_0) \neq 0$  dann ist

$$\frac{f}{g} : \mathbf{D} \cap \{x \in \mathbf{D} : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in  $x_0$ .

(iii) Polynomiale Funktionen sind auf ganz  $\mathbf{R}$  stetig

(iv) Die Trigonometrischen Funktionen  $\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  und  $\cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sind stetig

(v) Die Exponentialfunktion  $e^x$  ist auf ganz  $\mathbf{R}$  stetig.

(vi) Seien  $P$ ,  $Q$  polynomiale Funktionen auf  $\mathbf{R}$  mit  $Q \neq 0$ . Seien  $x_1, \dots, x_m$  die Nullstellen von  $Q$ . Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbf{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbf{R}$$
$$x \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

(vii) Seien  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{R}$  zwei Teilmengen,  $f : \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{D}_2$  und  $g : \mathbf{D}_2 \rightarrow \mathbf{R}$  funktionen, sowie  $x_0 \in \mathbf{D}_1$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig sind, so ist  $g(f(x)) : \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{R}$  in  $x_0$  stetig

(viii) Sei  $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in \mathbf{D}$  und  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig in  $x_0$ . Dann sind  $|f|$ ,  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  stetig in  $x_0$ .

### 3.5 Zwischenwertsatz

Sei  $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$  ein Intervall,  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion und  $a, b \in \mathbf{I}$ . Für jedes  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es (mindestens) ein  $c$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(c) = y$ .

Es gibt folgende typischen Anwendungsszenarien:

(i) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Falls  $f(a) * f(b) < 0$ , dann  $\exists c \in ]a, b[$  mit  $f(c) = 0$  (also eine Nullstelle)

(ii) Sei  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  ein Polynom mit  $a_n \neq 0$  und  $n$  ungerade. Dann besitzt  $P$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbf{R}$ .

(iii) Jede  $n \times n$  Matrix mit  **$n$  ungerade** mit Koeffizienten in  $\mathbf{R}$  hat mindestens einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbf{R}$

### 3.6 Min-Max Satz

Sei  $f : \mathbf{I} = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig auf einem kompakten Intervall. Dann gibt es  $u \in [a, b]$  und  $v \in [a, b]$  mit:

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

### 3.7 Satz der Umkehrabbildung

Sei  $\mathbf{I}$  ein Intervall. Sei  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$  stetig, **streng** monoton wachsend. Dann ist das Bild von  $f(\mathbf{I}) =: J$  ein Intervall und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbf{I}$  ist stetig, streng monoton wachsend.

(i) Sei  $n \geq 1$ . Dann ist  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  als  $x \rightarrow x^n$  streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung  $f^{-1} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  als  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

### 3.8 Stetigkeit gesplitteter Funktionen

Sind alle abschnitte einer gesplitteten Funktion stetig, müssen wir nur die Übergangstellen prüfen. Gilt an diesen Stellen  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

so ist die Funktion stetig.

## 4 Ableiten

### 4.1 Differenzierbarkeit

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  und  $x_0 \in \mathbf{D}$  ein Häufungspunkt. Die Funktion  $f$  heisst in  $x_0$  differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet und heisst die **Ableitung** (oder das Differential) von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

### 4.2 Differenzierbarkeit & Stetigkeit

$f$  differenzierbar in  $x_0 \Rightarrow f$  stetig in  $x_0$

### 4.3 Rechenregeln der Ableitung

(i)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii)  $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$

(iii)  $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$  für  $g(x_0) \neq 0$

(iv)  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) * f'(x_0)$

### 4.4 Aussagen der Ableitung

Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  und  $x_0 \in ]a, b[$ . Wir nehmen an, dass  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist.

(i) Falls  $f'(x) > 0 \exists \delta > 0$  mit  $f(x) > f(x_0) \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$  und  $f(x) < f(x_0) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$

(ii) Falls  $f'(x) < 0 \exists \delta > 0$  mit  $f(x) < f(x_0) \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$  und  $f(x) > f(x_0) \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$

(iii) Ist  $f'(x) \geq (>) 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  ist  $f$  (strikt) monoton wachsend

(iv) Ist  $f'(x) \leq (<) 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  ist  $f$  (strikt) monoton fallend

#### 4.5 Umkehrsatz

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$  eine bijektive Funktion,  $x_0 \in \mathbf{D}$  ein Häufungspunkt. Wir nehmen an, dass  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist und  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $y_0 := f(x_0)$  ein Häufungspunkt von  $\mathbf{E}$  und  $f^{-1}$  in  $y_0$  differenzierbar. Es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

#### 4.6 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$ , dann gibt es mindestens einen Punkt  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

#### 4.7 Mittelwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(b) - f(a) = f'(\xi) * (b - a)$

#### 4.8 l'Hôpital

Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ . Falls

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, dann folgt, dass

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei der Satz auch gilt wenn

(i) falls  $b = +\infty$

(ii) falls  $x \rightarrow a^+$

(iii) falls  $\lambda = +\infty$

(iv) falls  $\lim f = \lim g = \infty$

#### 4.9 Konvexität

Sei  $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$  ein Intervall und  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$  eine Funktion.

- (i)  $f$  ist **(streng) konvex** auf  $\mathbf{I}$  falls für alle  $x \leq y$ ,  $x, y \in \mathbf{I}$  und  $\lambda \in [0, 1]$  ( $\lambda \in ]0, 1[$ )

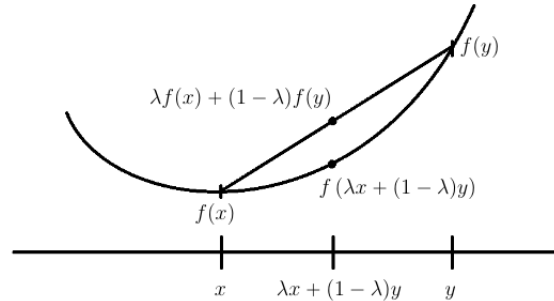
$$f(\lambda * x + (1 - \lambda) * y) \leq (<) \lambda * f(x) + (1 - \lambda) * f(y)$$

gilt.

- (ii)  $f$  ist **(streng) konkav** auf  $\mathbf{I}$  falls für alle  $x \leq y$ ,  $x, y \in \mathbf{I}$  und  $\lambda \in [0, 1]$  ( $\lambda \in ]0, 1[$ )

$$f(\lambda * x + (1 - \lambda) * y) \geq (>) \lambda * f(x) + (1 - \lambda) * f(y)$$

gilt.



Wobei wir folgende Bemerkungen machen können:

- (i) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex  
(ii)  $f$  ist genau dann konvex, falls für alle  $x_0 < x < x_1$  in  $\mathbf{I}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x_0}$$

gilt.

- (iii) Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  in  $]a, b[$  differenzierbar. Die Funktion  $f$  ist genau dann (streng) konvex, falls  $f'$  (streng) monoton wachsend ist. (z.B.:  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) > 0$ ))

#### 4.10 Höhere Ableitungen

Sei  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar.

- (i) Für  $n \geq 2$  ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $\mathbf{D}$  falls  $f^{(n-1)}$  in  $\mathbf{D}$  differenzierbar ist. Dann ist  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$  und nennt sich die  $n$ -te Ableitung von  $f$ . Wobei zu beachten ist, dass:  $n$ -mal differenzierbar  $\Rightarrow (n-1)$ -mal stetig differenzierbar.

- (ii) Die Funktion  $f$  ist  $n$ -mal **stetig Differenzierbar**, falls sie  $n$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(n)}$  stetig ist. Wir definieren weiter die Menge

$$C^n(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ } n\text{-mal stetig diff'bar}\}$$

- (iii) Die Funktion  $f$  ist in  $\mathbf{D}$  **glatt** falls sie  $\forall n \geq 1$   $n$ -mal differenzierbar ist.

$$C^\infty(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ glatt}\}$$

#### 4.11 Rechenregeln höherer Ableitungen

Seien  $f, g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$   $n$ -mal differenzierbar:

$$(i) \quad (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(ii) \quad (f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} * g^{(n-k)}$$

- (iii)  $\frac{f}{g}$  ist  $n$ -mal differenzierbar falls  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbf{D}$

- (iv)  $(g \circ f)$  ist  $n$ -mal differenzierbar

- (v)  $e^x$ ,  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind glatte Funktionen

- (vi) Alle Polynome sind glatte Funktion

#### 4.12 Taylor Approximation

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Für jedes  $a < x \leq b$  gibt es  $\xi \in ]a, x[$  mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} * (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x - a)^{n+1}$$

Man bemerke: der letzte Term  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x - a)^{n+1}$  wird meist zur Fehlerabschätzung innerhalb eines Bereichs von  $a$  verwendet. Als Beispiel betrachte man  $p(x) =$

$x^3 + x + 1$  an der Stelle  $a = 1$ . Hier ist die Taylor Approximation

$$T_3 = 3 + 4(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = p(x)$$

und der Fehler für  $\xi \in ]0, 2[$

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!} * (x-1)^4 \leq \frac{0}{(4)!} * (1)^4 = 0$$

Ein weiteres Beispiel: Approximiere  $\sqrt{9.2}$  mit einem Taylor Polynom zweiten Grades.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} * x^{-0.5}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} * x^{-1.5}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} * x^{-2.5}$$

$$T_2 f(x) = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} * (x - x_0)^2$$

$$R = \frac{f'''(\xi)}{3!} * (x - x_0)^3 \text{ für } \xi \in (9, 9.2)$$

$$\Rightarrow x_0 = 9, \xi = 9$$

#### 4.13 Sattelpunkt/ Horiz. Wendepunkt

Ein Graphenpunkt wo  $f'(x_0) = 0$ ,  $x_0$  aber kein Extrema ist.

#### 4.14 Wendepunkt

Ein Wendepunkt ist ein Graphenpunkt wo der Drehsinn der Tangente sich ändert (In einem Wendepunkt gilt:  $f''(x_0) = 0$ )

#### 4.15 Spezielle Punkte bestimmen

Sei  $n \geq 0$ ,  $a < x_0 < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme:  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$

- (i) Falls  $n$  gerade ist und  $x_0$  eine lokale Extremalstelle, folgt  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

- (ii) Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$  so ist  $x_0$  eine strikte lokale Minimalstelle

- (iii) Falls  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  so ist  $x_0$  eine strikte lokale Maximalstelle

Ist  $x_0$  jedoch keine Extremalstelle ((i) von oben nicht erfüllt) bleiben zwei Optionen:

- (i)  $f'(x_0) = 0 \wedge x_0$  keine Extremalstelle  $\Rightarrow x_0$  ist ein Sattelpunkt
- (ii)  $f''(x_0) = 0 \wedge x_0$  keine Extremalstelle  $\Rightarrow x_0$  ist ein Wendepunkt

#### 4.16 Integrale Ableiten

Hier ein Beispiel für die Ableitung eines Integrals:

$$\begin{aligned} f(x) &= - \int_2^{x^2} e^{-t^2} dt \\ h(x) &= e^{-x^2} \\ \Rightarrow f(x) &= -H(x^2) + H(2) \\ \Rightarrow f'(x) &= -h(x^2)2x = -e^{-x^4}2x \end{aligned}$$

## 5 Integrieren

### 5.1 Partition

Eine Zerlegung eines Intervalls  $I = [a, b]$ . Ist eine endliche Teilmenge  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \subset I$  wobei  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  und  $\{a, b\} \subset P$

Man bemerke: eine Partition  $P'$  ist eine Verfeinerung von  $P$  falls  $P \subset P'$

### 5.2 Feinheit einer Partition

Die **Feinheit** der Partition ist definiert durch  $\delta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

### 5.3 Riemannsche Summe

Sei  $\xi_i \in I_i$  zwischen Punkten. Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) * (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) * \delta_i$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Partition  $P$  und den Zwischenpunkten  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

### 5.4 Unter-/ Obersumme

Wir definieren die Untersumme

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^n (\inf_{x \in I_i} f(x)) * \delta_i$$

und die Obersumme

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n (\sup_{x \in I_i} f(x)) * \delta_i$$

### 5.5 Eigenschaften der Unter-/ Obersumme

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine beschränkte Funktion, sowie  $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ .

$$(i) \quad P \subset Q \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$$

$$(ii) \quad \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}(I)} S(f, Q)$$

### 5.6 (Riemann) Integrierbar

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt. Wir definieren zuerst  $s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$  sowie analog  $S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$ .

Gilt

$$s(f) = S(f)$$

so ist die  $f$  Riemann-Integrierbar und wird mit  $\int_a^b f(x) dx$  bezeichnet.

Weiter sind folgende Aussagen äquivalent:

$$(i) \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \text{ ist integrierbar mit } A := \int_a^b f(x) dx$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

$$(iii) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ so dass für jede Partition } P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } \delta(P) < \delta \text{ und } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ Zwischenpunkten } x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k : |A - S(f, P, \xi)| < \epsilon$$

$$(iv) \quad \text{Der Grenzwert } \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(f, P, \xi) = \int_a^b f(x) dx \text{ existiert}$$

## 5.7 Integrierbarkeit schnell zeigen

Es gilt weiter für  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt, integrierbar und  $\lambda \in \mathbf{R}$ :

- (i)  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  integrierbar
- (ii)  $f$  ist monoton  $\Rightarrow f$  ist integrierbar
- (iii)  $f + g, \lambda * f, f * g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$  sind integrierbar sowie auch  $\frac{f}{g}$  falls  $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- (iv) Jedes Polynom auf  $[a, b]$  ist integrierbar, auch  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  falls  $Q(x)$  keine Nullstelle besitzt.

## 5.8 Majoranten Kriterium

- (i) Falls  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$  und  $g(x)$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar ist, so ist  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar.
- (ii) Falls  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^\infty g(x)dx$  divergiert, so divergiert auch  $\int_a^\infty f(x)dx$
- (iii) Sei  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend. Dann konvergiert  $\sum_{k=1}^\infty f(k)$  genau dann, wenn  $\int_1^\infty f(x)dx$  konvergent und in diesem Fall gilt:  $0 \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)dx \leq f(1)$

## 5.9 Rechenregeln für Integrale

Es gelten folgende Rechenregeln:

- (i)  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$  für  $a < b < c$  mit  $f : [a, c] \rightarrow \mathbf{R}$  und auf  $[a, b]$  sowie  $[b, c]$  integrierbar
- (ii)  $\int_a^b (\alpha * f_1(x) + \beta * f_2(x))dx = \alpha * \int_a^b f_1(x)dx + \beta * \int_a^b f_2(x)dx$  für  $f_1, f_2 : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt integrierbar mit Endpunkten  $a, b$  sowie  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

## 5.10 Abschätzungen von Integralen

Es gilt folgende Absätzungen:

- (i) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt und integrierbar und  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Dann folgt  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- (ii) Falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt und integrierbar folgt  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$$(iii) \quad |\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)} * \sqrt{\int_a^b g^2(x)}$$

## 5.11 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  wobei  $f$  stetig und  $g$  beschränkt integrierbar mit  $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  ist. Dann gibt es  $c \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) * g(x)dx = f(c) * \int_a^b g(x)dx$$

und falls  $g \equiv 1$  erhalten wir

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) * (b - a)$$

## 5.12 Stammfunktion

Sei  $a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  heisst **Stammfunktion** von  $f$  falls  $F$  stetig differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$  gilt.

## 5.13 Fundamentalsatz der Analysis

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$$

## 5.14 Partielle Integration

Seien  $a < b$  reelle Zahlen und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) * g(x)dx$$

beziehungsweise für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x)dx$$

- Polynome ableiten, wiederholende Funktionen ( $\sin(x), \cos(x), e^x$ ) integrieren
- manchmal mit 1 multiplizieren

## 5.15 Methode der Substitution

Die Methode der Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. Sei  $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar und  $I \subset \mathbf{R}$  ein Intervall mit  $\phi([a, b]) \subset I$  und  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_a^b f(\phi(t)) * \phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

wobei für unbestimmte Integrale gilt:

$$\int f(\phi(t)) * \phi'(t)dt + C = \int f(x)dx \Big|_{x=\phi(t)}$$

Hier ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \int 2x * \cos(x^2)dx &\Rightarrow u = x^2, \frac{du}{dx} = 2x, dx = \frac{du}{2x} \\ &= \int 2x * \cos(u) * \frac{du}{2x} = \int \cos(u)du = \sin(x^2) + C \end{aligned}$$

## 5.16 Integration konvergenter Reihen

Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine Folge von beschränkten integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  beschränkt, integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Es gilt weiter: Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  eine Folge beschränkter und integrierbarer Funktionen so dass  $\sum_{n=0}^\infty f_n$  auf  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)dx$$

Es gilt weiter: Sei  $f(x) := \sum c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist für

jedes  $0 \leq r < \rho$   $f$  auf  $[-r, r]$  integrierbar und es gilt  $\forall x \in ]-\rho, \rho[$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

### 5.17 Uneigentliche Integrale

Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$  für alle  $b > a$ . Wir definieren

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

falls existent und sagen dass  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar ist.

Analog: Sei  $f$  eine Funktion auf jedem Intervall  $[a + \epsilon, b]$   $\forall \epsilon > 0$  beschränkt und integrierbar.  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ist integrierbar falls der Folgende Grenzwert existiert, welchen wir als

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$$

definieren. (Gilt auch symmetrisch für  $[a, b - \epsilon]$   $\forall \epsilon > 0$ ) Wobei wir anmerken, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

### 5.18 Partialbruchzerlegung

Seien  $P, Q$  Polynome mit  $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$  und  $Q$  mit der Produktzerlegung  $Q(x) = \prod_{j=1}^l ((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m_j} \prod_{i=1}^k (x - \gamma_i)^{n_i}$ . Dann gibt es  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  reelle Zahlen mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x - \gamma_i)^j}$$

Bei einer Partialbruchzerlegung geht man folgendermassen vor:

- (i) Sei  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Falls  $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$  wenden wir Polynomdivision an.

- (ii)  $Q$  lässt sich nun als  $Q(x) = \prod_{j=1}^l ((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{m_j} \prod_{i=1}^k (x - \gamma_i)^{n_i}$  zerlegen. Das sind die komplexen und reellen Nullstellen mit ihrer Vielfachheit.

- (iii) Wir bilden nun die "hässliche" Summe von oben

- (iv) Wir bestimmen mithilfe von Koeffizientenvergleich (Nennerpolynom Multiplizieren) die unbekannten  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ .

Hier ein einfaches Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{5x+1}{x^2+x-2} &= \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ \Rightarrow \text{Löse } 5x+1 &= A(x+2) + B(x-1) \\ \Rightarrow \text{Setze } x &= -2, 1 \end{aligned}$$

Mit mehreren Linearen Faktoren:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2+x+8}{x(x-2)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\ \Rightarrow \text{Löse } -2x^2+x+8 &= A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \end{aligned}$$

Ohne reelle Nullstellen:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \Rightarrow \text{Löse } 2x^2-3x+3 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \\ \Rightarrow \text{Setze } x &= 0, 1, 2 \end{aligned}$$

### 5.19 Unbestimmte Integral

Das Unbestimmte Integral ist die Menge aller Stammfunktionen und sozusagen fast alles von oben gilt.  $+C$  ist **sehr** wichtig.

## 6 Sonstiges

### 6.1 Rewrite Function

$$h(x) = \max f(x), g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$$

### 6.2 Proof of "Null-Reihe"

Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsumme  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit:  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$  konvergiert, das

heisst, es existiert ein Grenzwert  $s$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Durch Umstellung der Reihe und mit den Rechenregeln für Grenzwerte gilt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$

### 6.3 Injektiv/ Surjektiv

Injektiv:  $\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$f$  ist injektiv Beweis: wenn Ableitung  $> 0$ : dann streng monoton wachsend auf ganz  $\mathbb{R}$  und somit injektiv

Surjektiv:  $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$   $f$  ist surjektiv Beweis: anhand von Zwischenwertsatz beweisen

### 6.4 Supremum

Sei  $A \subseteq \mathbf{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  und  $A$  nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von  $A$ . Es gibt also ein  $c \in \mathbf{R}$  so dass:

1.  $\forall a \in A \quad a \leq c$
2. Falls  $\forall a \in A \quad a \leq x$  ist  $c \leq x$

Man bezeichnet  $c := \sup A$

### 6.5 Infimum

Analog zum Supremum die grösste untere Schranke.

### 6.6 Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

### 6.7 Bernoulli Ungleichung

$$\forall x \in \mathbf{R} \geq -1 \text{ und } n \in \mathbf{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$$



## 6.8 Exponentialfunktion

Für ein  $z \in \mathbf{C}$  berechnet man die Exponentialfunktion wie folgt:

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

und es gilt:

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Die reelle Exponentialfunktion  $\exp : \mathbf{R} \rightarrow ]0, \infty[$  ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

- (i)  $\exp(x + y) = \exp(x) * \exp(y)$
- (ii)  $x^a := \exp(a * \ln(x))$
- (iii)  $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$
- (iv)  $\exp(iz) = \cos(z) + i * \sin(z) \quad \forall z \in \mathbf{C}$
- (v)  $\exp(i * \frac{\pi}{2}) = i$
- (vi)  $\exp(i\pi) = -1$  und  $\exp(2\pi i) = 1$
- (vii) Für  $a > 0$  ist  $]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  als  $x \rightarrow x^a$  eine streng monoton wachsende stetige Bijektion

Merke:  $e^x$  entspricht  $\exp(x)$ .

## 6.9 Natürliche Logarithmus

Der natürliche Logarithmus wird als  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  bezeichnet und ist eine streng monoton wachsende stetige Funktion. Es gilt auch, dass

- (i)  $\ln(1) = 0$
- (ii)  $\ln(e) = 1$
- (iii)  $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$
- (iv)  $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
- (v)  $\ln(x^a) = a * \ln(x)$
- (vi)  $x^a * x^b = x^{a+b}$
- (vii)  $(x^a)^b = x^{a*b}$
- (viii)  $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$

## 6.10 Faktorisierungs Lemma

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

## 6.11 Sinus Abschätzung

Es gilt  $|\sin(x)| \leq |x|$  mit folgendem Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sin(x), x \geq 0 \\ f'(x) &= 1 - \cos(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Weil  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \geq 0$  für  $x > 0$ . Dann  $|\sin(x)| \leq |x|$  einfach.

## 6.12 Polynomiale Funktion

Eine **Polynomiale Funktion**  $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ist eine Funktion der Form  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$  wobei  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ . Falls  $a_n \neq 0$ , ist  $n$  der Grad von  $P$ .

## 6.13 Kompaktes Intervall

Ein Intervall  $\subset \mathbf{R}$  ist kompakt, wenn es von der Form  $\mathbf{I} = [a, b]$ ,  $a \leq b$  ist.

## 6.14 Funktionenfolge

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{R}^{\mathbf{D}} = \{f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}\} \\ n &\rightarrow f_n \end{aligned}$$

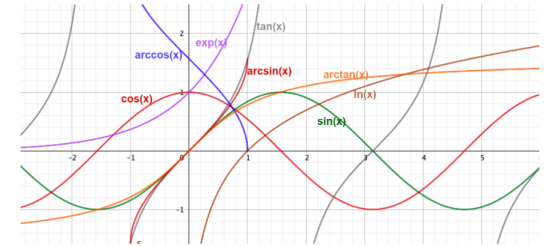
wobei  $f_n : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  eine Funktion ist. Für jedes  $x \in \mathbf{D}$  erhält man eine Folge  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  reeller Zahlen.

## 6.15 Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(z) &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \forall z \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} \end{aligned}$$

welche alle stetige Funktionen sind. Es gilt weiter:

- (i)  $\cos(z) = \cos(-z)$
- (ii)  $\sin(-z) = -\sin(z)$
- (iii)  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbf{C}$



## 6.16 Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbf{R}$  ist ein **Häufungspunkt** der Menge  $\mathbf{D}$ , falls  $\forall \delta > 0 \quad (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$

## 6.17 Lokales Extremum

Eine Funktion  $f$  besitzt ein lokales Extremum in  $x_0$  falls es entweder ein lokales Minimum oder lokales Maximum von  $f$  ist.

## 6.18 Lokales Minimum

Die Funktion  $f$  besitzt ein lokales Minimum in  $x_0$  falls es  $\delta > 0$  gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbf{D}$$

## 6.19 Lokales Maximum

Die Funktion  $f$  besitzt ein lokales Maximum in  $x_0$  falls es  $\delta > 0$  gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbf{D}$$

## 6.20 Kritische Stelle

Eine **kritische Stelle** einer Funktion ist ein  $x_0$  an der  $f'(x_0)$  null oder undefiniert ist.

## 6.21 Hyperbol Funktionen

(i)  $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \rightarrow [1, \infty]$

(ii)  $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

(iii)  $\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$

und es gilt  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

## 6.22 Funktionen Verknüpfung

$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

## 6.23 Sin/Cos Werte

$\alpha$	0	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N/A	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	N/A

	$-\alpha$	$-\alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$
$\sin$	$-\sin \alpha$	$\cos$	$\cos$	$\sin$	$-\sin$	$-\sin$	$\sin$
$\cos$	$\cos$	$\sin$	$-\sin$	$-\cos$	$-\cos$	$\cos$	$\cos$
$\tan$	$-\tan$	$\cot$	$-\cot$	$-\tan$	$\tan$	$-\tan$	$\tan$

# 7 Trigonometrie

## 7.1 Regeln

### 7.1.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

### 7.1.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

### 7.1.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

### 7.1.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha)$

### 7.1.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

### 7.1.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

### 7.1.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

### 7.1.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha) \sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$
- $\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

### 7.1.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

### 7.1.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  und  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

## 8 Tabellen

### 8.1 Grenzwerte

Wichtige Tabellen stehen hier

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a), \forall a > 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \leq q < 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{1-x}{x}}{x} = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

### 8.2 Ableitungen

Kurze Notiz am Rande, ein stationärer Punkt ist:  
 $x \in \mathbb{R}$  mit  $f'(x) = 0$

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	$a^{kx}$	$ka^{kx} \ln(a)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
$-\ln \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
		$1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln \sin(x) $	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln x  - 1)$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x  - 1)$	$\log_a x $	$\frac{1}{\ln(a)x}$

### 8.3 Weitere Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\arcsin(x)/\arccos(x)$	$\frac{1/-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$f(x)^{g(x)}$	$e^{g(x)\ln(f(x))}$
$f(x) = \cos(\alpha)$	$f(x)^n = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$

### 8.4 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x) \, dx$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$\ln f(x) $
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n \, dx$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n \, dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} \, dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} \, dx$	$\frac{1}{ap} \ln ax^p+b $
$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $
$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$	$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x+f(x))$