1 Wahrscheinlichkeiten

Ereignisraum

Die Menge $\Omega \neq \emptyset$ aller möglichen Ergebnisse des betrachteten Zufallsexperiments. Die Elemente $\omega \in \Omega$ heissen Elementarereignisse.

Potenzmenge

Die Potenzmenge von Ω, bezeichnet mit $\mathcal{P}(\Omega)$ oder 2^Ω ist die Menge aller Teilmengen von Ω. Ein Prinzipielles Ereignis ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$, also eine Kollektion von Elementarereignissen. Die Klasse aller beobachtbaren Ereignisse ist $\mathcal{F}$.

σ-Algebra

Grundraum: Menge Ω. $\omega \in \Omega$ heisst Elementarereigniss.

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Wahrscheinlichkeitsmass

Eine Abbildung $\mathcal{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{P}[A] \geq 0$ für alle Ereignisse $A \in \mathcal{F}$

(2) $P[\Omega] = 1$

(3) Für $A_i \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt gilt $P[\bigcup_{i=1}^\infty A_i] = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{P}[A_i]$

Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

- $\mathcal{P}[A^\complement] = 1 - \mathcal{P}[A]$
- $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$
- Für $A \subseteq B$ gilt $\mathcal{P}[A] \leq \mathcal{P}[B]$
- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Impliziert:

- Ω ist endlich oder abzählbar unendlich
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

Laplace Raum

Ist $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ endlich mit $|\Omega| = N$ und $\mathcal{F} = 2^\Omega$ sowie alle ω_i gleich wahrscheinlich mit $p_i = \frac{1}{n}$, so heisst Ω ein Laplace Raum und P die diskrete Gleichverteilung auf Ω. Dann ist für $A \subseteq \Omega$:

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A, B Ereignisse mit $P[A] > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eintritt wird definiert durch:

$$P[B \mid A] := \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A \mid B] \cdot P[B]}{P[A]}$$

Multiplikationsregel

Es gilt:

$$P[A \cap B] = P[A \mid B] \cdot P[B] = P[B \mid A] \cdot P[A]$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Ereignisse, d.h. $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_k = \emptyset \quad \forall i \neq k$. Dann gilt:

$$P[B] = \sum_{i=1}^n P[B \mid A_i] \cdot P[A_i]$$

Beweis. Da $B \subseteq \Omega \implies B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$. Weiter sind alle Mengen der Art $(B \cap A_i)$ paarweise disjunkt, was bedeutet, dass $(B \cap A_i)$ eine disjunkte Zerlegung von B bilden. Damit folgt:

$$P[B] = P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^n P[B \cap A_i] = \sum_{i=1}^n P[B \mid A_i] \cdot P[A_i]$$

Satz von Bayes

Sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Zerlegung von Ω mit $P[A_i] > 0$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sei B ein Ereignis mit $P[B > 0]$. Dann gilt für jedes k:

$$P[A_k \mid B] = \frac{P[B \mid A_k] \cdot P[A_k]}{\sum_{i=1}^n P[B \mid A_i] \cdot P[A_i]}$$

Beweis. Verwende Definition Bedingte Wahrscheinlichkeit, im Zähler Multiplikationsregel und im Nenner Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

Unabhängige Ereignisse (2)

Zwei ereignisse heissen (stochastisch) Unabhängig, falls

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

Ist $P[A] = 0$ oder $P[B] = 0$, so sind A, B immer unabhängig. Für $P[A] \neq 0$ gilt:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P[A \mid B] = P[A]$$

Unabhängige Ereignisse (∞)

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen (stochastisch) unabhängig, wenn für jede endliche Teilfamilie der Produktformel gilt, d.h. für $m \in \mathbb{N}$ und $\{k_1, \ldots, k_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n * A_{k_i}\right]_1 = \prod_{i=1}^n P[A_{k_i}]$$

Diskrete Zufallsvariable

Eine reelwertige diskrete Zufallsvariable auf Ω ist eine Funktion $X: \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Mit Ω ist natürlich auch $\mathcal{W}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ endlich oder abzählbar.

- Die Verteilungsfunktion von X ist die Abbildung $F_X: \mathbb{R} \mapsto [0,1]$, definiert durch:

  $$t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{\omega : X(\omega) \leq t\}]$$

- Die Gewichtsfunktion oder diskrete Dichte von X ist die Funktion $p_X: \mathcal{W}(X) \mapsto [0,1]$, definiert durch:

  $$p_X(X_k) := P[X = x_k] = P[\{\omega : X(\omega) = x_k\}]$$

Wobei gilt:

- $F_X(t) = P[X \leq t] = \sum_{k \text{ mit } x_k \leq t} p_X(x_k)$
- Für jedes $x_k \in \mathcal{W}(X)$ gilt $0 \leq p_X(x_k) \leq 1$ und $\sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = 1$
- $\mu_X(B) := P[X \in B] = \sum_{x_k \in B} p_X(x_k)$
- $\sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = P[X \in \mathcal{W}(X)] = 1$

Indikatorfunktion

Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion I_A von A definiert durch:

$$I_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \in A^\complement \end{cases}$$

Erwartungswert

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion $p_X(x)$, dann ist der Erwartungswert definiert durch:

$$E[X] := \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} x_k \cdot p_X(x_k)$$

und hat folgende Eigenschaften:

- Linearität: $E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$
- Monotonie: $X \leq Y \implies E[X] \leq E[Y]$
- Nimmt X nur Werte in $\mathbb{N}$ an:

  $$E[X] = \sum_{i=1}^\infty P[X \geq i]$$

Beispiel: Erwartungswert gemeinsame Dichte

Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $E[XY]$

$$E[XY] = \int_0^2 \int_y^0 \frac{1}{2} xy \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{4} x^2 y \Big|_0^y = \frac{1}{4} y^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{16} \cdot 2^4 - \frac{1}{16} \cdot 0^4 = 1$$

Erwartungswert von Funktionen

Sei X eine Diskrete Zufallsvariable mit Gewichtsfunktion $p_X(x)$ und $Y = g(X)$ für eine Funktion $Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} g(x_k) \cdot p_X(x_k)$$

Varianz

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Ist $E[X^2] < \infty$, so heisst:

$$\begin{aligned} Var[X] &:= E[X - E[X]^2] \\ &= \sum_{x_k \in \mathcal{W}(X)} x_k - E[X]^2 \cdot p_X(x_k) \end{aligned}$$

die Varianz von X. Es gilt weiter:

- $E[Z]^2 \leq E[Z^2]$
- $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$
- $Var[X - Y] = Var[X] + -1^2 \cdot Var[Y]$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

Standardabweichung

$$\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$$

Gemeinsame Verteilung

Seien $X_1, \dots, X_n$ beliebige Zufallsvariablen. Die Gemeinsame Verteilungsfunktion von $X_1, \dots, X_n$ ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$, definiert durch:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, \dots, x_n) &:= P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] \\ &= \sum_{y_1 \leq x_1, \dots, y_n \leq x_n} p(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Die Gemeinsame Gewichtsfunktion ist:

$$p(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

Unabhängige Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ heissen Unabhängig, falls gilt (äquivalent):

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \\ p(x_1, \dots, x_n) &= p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

Unabhängige Ereignisse

Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heissen Unabhängig, falls für beliebige Teilmengen $B_i \subseteq \mathcal{W}(X_i) \quad i = 1, \dots, n$ gilt (äquivalent):

$$P[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in B_i]$$

Funktionen von Zufallsvariablen

Seien $X_1, \dots, X_n$ diskrete Unabhängige Zufallsvariablen und $f_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ irgendwelche Funktionen. Sei weiter $Y_i := f_i(X_i)$. Dann sind die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ ebenfalls unabhängig.

Linearität des Erwartungswertes

Seien $X_1, \dots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten. $E[X_1], \dots, E[X_n]$. Sei $Y = a + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i$ mit Konstanten $a, b_1, \dots, b_n$. Dann gilt:

$$E[Y] = a + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot E[X_i]$$

Kovarianz

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit endlichen Erwartungswerten. Dann ist die Kovarianz definiert als:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &:= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \end{aligned}$$

Wobei $Cov(X, X) = Var[X]$.

Korrelation

Die Korrelation von X, Y ist definiert durch

$$\rho(X, Y) := \begin{cases} \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} & \text{falls } \sigma(X) \cdot \sigma(Y) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und es gilt $|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$ beziehungsweise $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Summenformel für Varianzen

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \cdot \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

ist aber $Cov(X, Y) = 0$ (X, Y paarweise unkorreliert), so wird die Summe linear.

Produkte von Zufallsvariablen

Seien $X_1, \dots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten. Falls $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind, so ist:

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Dann sind auch $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert und:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

da Unabhängig $\implies$ paarweise Unabhängig $\implies$ unkorreliert.

Bedingte Verteilung

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $p(x, y)$. Die bedingte Gewichtsfunktion von X, gegeben dass $Y = y$, ist definiert durch:

$$\begin{aligned} p_{X \mid Y}(x \mid y) &:= P[X = x \mid Y = y] \\ \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

für $p_Y(y) > 0$ und 0 sonst.

Kriterium für Unabhängigkeit

X, Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle y mit $p_Y(y) > 0$ gilt:

$$p_{X \mid Y}(x \mid y) = p_X(x) \qquad \forall x \in \mathcal{W}(X)$$

n tief k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

2 Wichtige diskrete Verteilungen

Diskrete Gleichverteilung

Die diskrete Gleichverteilung auf einer endlichen Menge $\mathcal{W} = \{x_1, \dots, x_n\}$ gehört zu einer Zufallsvariablen X mit Wertebereich $\mathcal{W}$ und Gewichtsfunktion:

$$p_X(x_k) = P[X = x_k] = \frac{1}{N} \qquad k \in \{1, \dots, N\}$$

Unabhängige 0-1-Experimente

Es sei $A_i :=$ {Erfolg beim i-ten Experiment} und:

- Die A_i sind unabhängig
- $P[A_i] = p$ für alle i
- $$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i \\ 0 & \omega \notin A_i \end{cases}$$

Bernoulli-Verteilung

Ein einziges 0-1-Experiment mit $\mathcal{W}(X) = \{0, 1\}$. Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch $p_X(1) = p$, sowie $p_X(0) = 1 - p$. Man schreibt kurz $X \sim Be(p)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \cdot P[X = 1] + 0 \cdot P[X = 0] = p \\ Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = p \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

Binomial Verteilung

Beschreibt die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter p. Also ist die Zufallsvariable respektive Gewichtsfunktion:

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

und man schreibt kurz $X \sim Bin(n, p)$. Es gilt weiter:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = n \cdot p$$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{n} Var[Y_i] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Geometrische Verteilung

Bei einer unendlichen Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter p sein X die Wartezeit zum ersten Erfolg:

$$X = \inf\{i \in \mathbb{N} : A_i \text{ tritt ein}\}$$
$$p_X(k) = P[X = k] = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

wir schreiben $X \sim Geom(p)$ und es gilt:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^l = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$
$$E[X \cdot (X-1)] = \frac{2(1-p)}{p^2}$$
$$Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Negativbnomiale Verteilung

Bei einer unendlichen Folge von unabhängigen 0-1-Experimenten mit Erfolgsparameter p sein X die Wartezeit zum r-ten Erfolg ($r \in \mathbb{N}$):

$$X = \inf\{k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{k} I_{A_i} = r\}$$
$$p_X(k) = P[X = k] = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$$

wir schreiben $X \sim NB(r, p)$ und es gilt:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i] = \frac{r}{p}$$
$$Var[X] = \sum_{i=1}^{r} Var[X_i] = \frac{r \cdot (1-p)}{p^2}$$

Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne seien n Gegenstände, davon r vom Typ 1 und $n-r$ vom Typ 2. Man zieht ohne zurücklegen m der Gegenstände. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Gegenstände vom Typ 1 in der Stichprobe. Der Wertebereich von X ist $\mathcal{W}(X) = \{0, 1, \ldots, \min(m, r)\}$ und:

$$p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}} \qquad \text{für } k \in \mathcal{W}(X)$$
$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_X(i) = m \cdot \frac{r}{n} \qquad \text{(Nicht im Skript)}$$
$$Var[X] = m \cdot \frac{r}{n}\left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{n-m}{n-1} \qquad \text{(Nicht im Skript)}$$

Poisson Verteilung

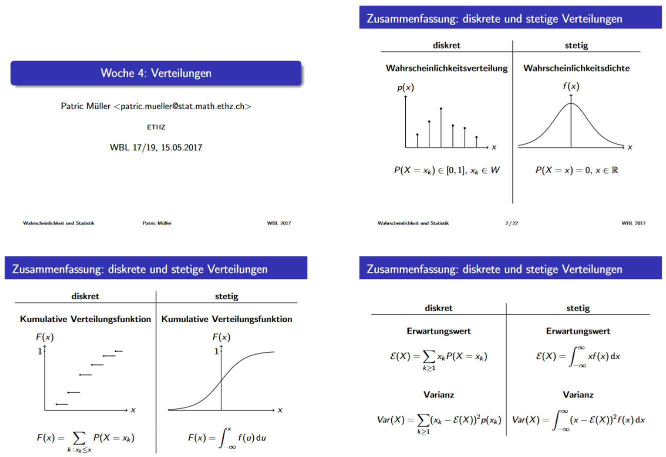
Die Poisson Verteilung mit Parameter $\lambda \in (0, \infty)$ ist eine Verteilung auf der Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Gewichtsfunktion:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$
$$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$$
$$Var[X] = \lambda$$
$$Bin(n, p) \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ with } \lambda = n * p$$

Ist eine Zufallsvariable X Poisson verteilt mit Parameter λ schreiben wir $X \sim P(\lambda)$.

Zufallsvariable

$P[X = x] = 0$für stetige Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkei



Sein $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Also Ω ein Grundraum, $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ die beobachtbaren Ereignisse und P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{F}$. Eine (reelwertige) Zufallsvariable auf Ω ist eine messbare Funktion $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass die Menge $\{X \leq t\} = \{\omega : X(\omega) \leq t\}$ für jedes t ein beobachtbares Ereigniss sein muss.

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion von X ist die Abbildung $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$:

$$t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{\omega : X(\omega) \leq t\}]$$

und hat die Eigenschaften:

- F_X ist wachsend und rechtsstetig. Das bedeutet, dass $F_X(s) \leq F_X(t)$ für $s \leq t$ gilt und $F_X(u) \to F_X(t)$ für $u \to t$ mit $u > t$
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ und $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

Beispiel: Verteilungsfunktion

Um zu verhindern, dass ein Gerät infolge eines defekten Halbleiters längere Zeit ausfällt, werden zwei identische, parallel geschaltete Halbleiter zu einem Bauteil zusammengefasst. Eine Kontrolllampe leuchtet auf, wenn einer der beiden Halbleiter ausgefallen ist. Wir nehmen an, dass die Lebensdauern der Halbleiter unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 60 Tage sind. Wie ist die Zeit, nach der die Kontrolllampe ufleuchtet, verteilt?

Seien H_1 und H_2 die Lebensdauern der entsprechenden Halbleiter. Nach Voraussetzung sind H_1 und H_2 i.i.d. und Exp(λ)-verteilt mit $\lambda = \frac{1}{60}$. Sei T die Zeit, nach der die Kontrolllampe aufleuchtet; also ist $T = \min\{H_1, H_2\}$. Die Verteilungsfunktion von T ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_T(t) = P[T \leq t] &= P[\min\{H_1, H_2\} \leq t] \\ &= 1 - P[\min\{H_1, H_2\} > t] = 1 - P[H_1 > t, H_2 > t] \\ &= 1 - P[H_1 > t]P[H_2 > t] \\ &= (1 - \exp(-2\lambda t))\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)] \end{aligned}$$

d.h. T ist wieder exponentialverteilt mit Parameter $2\lambda = \frac{1}{30}$.

Dichtefunktion

Das Analogon der Gewichtsfunktion im Diskreten Fall. Eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion $F_X(t) = P[X \leq t]$ heisst (absolut) stetig mit Dichte (funktion) $f_X : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$, falls gilt:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\, ds \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und hat die Eigenschaften:

- $f_X \geq 0$ und $f_X = 0$ ausserhalb von $\mathcal{W}(X)$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, ds = 1$; das folgt aus $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ ist ein Modell für die Zufällige Wahl eines Punktes in $[a, b]$. Die zugehörige Zufallsvariable X hat den Wertebereich $\mathcal{W}(X) = [a, b]$, sowie

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{für } t > b. \end{cases}$$

wir schreiben kurz $X \sim U(a, b)$.

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponential Verteilung

Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist das stetige Analogon der Geometrischen Verteilung. Die zugehörige Zufallsvariable X hat $\mathcal{W}(X) = [0, \infty)$, Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\, ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

wir schreiben kurz $X \sim Exp(\lambda)$. Weiter ist die Funktion Gedächtnislos, dh. $P[X > t + s \mid X > s] = P[X > t]$.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normal Verteilung

Die Normalverteilung hat zwei Parameter: $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Die zugehörige Zufallsvariable X hat den Wertebereich $\mathcal{W}(X) = \mathbb{R}$ und die Dichtefunktion:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

welche symmetrisch um μ ist. Wir schreiben kurz: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Standard Normalverteilung

Wichtige Normalverteilung mit $\mathcal{N}(0, 1)$. Weder für die zugehörige Dichte $\varphi(t)$ noch Verteilungsfunktion $\Phi(t)$ gibt es geschlossene Ausdrücke, aber das Integral

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s^2}\, ds$$

ist tabelliert. Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so ist $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, also:

$$F_X(t) = P[X \leq t] = P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

deshalb genügt es Φ zu tabellieren.

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Normalapproximation

Wenn $S_n \sim Bin(n, p)$ dann

$$S_n \sim_{approx} N(np, np(1-p))$$

Erwartungswert

Ist X stetig mit Dichte $f_X(x)$, so ist der Erwartungswert:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

sofern das Integral absolut konvergiert. Ist das Integral nicht absolut konvergent, so existiert der Erwartungswert nicht.

Erwartungswert einer Funktion

Sei X eine Zufallsvariable und $Y = g(X)$ eine weitere Zufallsvariable. Ist X stetig mit Dichte f_X, so ist

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

Momente & Absolute Momente

Sei X eine Zufallsvariable und $p \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren:

- p-te absolute Moment von X: $M_p := E[|X|^p]$
- falls $M_n < \infty$ für ein n, dann ist das n-te (rohe) Moment von X durch $m_n := E[X^n]$ definiert.
- Das n-te zentralisierte Moment von X ist durch $\mu_n := E[(X - E[X])^n]$ definiert.

Es gilt weiter, dass $M_n < \infty$ für $n \in \mathbb{N} \implies |m_m| \leq M_n$.

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_X(x)\, dx$$

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$$

$$p \leq q \wedge M_q < \infty \implies M_p < \infty$$

Gemeinsame Verteilung/Dichte

Die Gemeinsame Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ ist die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ mit:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &:= P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \dots t_1 \end{aligned}$$

dann heisst $f(x_1, \dots, x_n)$ die gemeinsame Dichte, welche folgende Eigenschaften hat:

- $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ und $= 0$ ausserhalb von $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_n)$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \dots t_1 = 1$
- $P[(X_1, \dots, X_n) \in A] = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in A} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_n \dots t_1$ für $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Randverteilung

Haben X, Y die Gemeinsame Verteilungsfunktion F, so ist die Funktion $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$,

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y < \infty] = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

Sind X, Y diskrete Zufallsvariablen mit $\mathcal{W}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$ und gemeinsamer Gewichtsfunktion $p(x, y)$, so ist die Gewichtsfunktion der Randverteilung von X gegeben durch:

$$x \mapsto p_X(x) := \sum_{y_i \in \mathcal{W}(X)} P[X = x, Y = y_i]$$

Beispiel: Dichtefunktion berechnen

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, beide exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Definiere

$$U := \frac{X}{X + Y} undV := X + Y$$

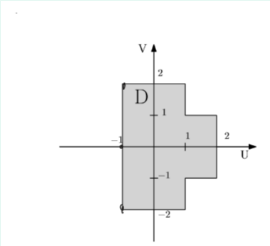
Seien f_U und f_V die zu U und V gehörigen Dichtefunktionen. Berechne die Dichtefunktion f_U und Verteilungsfunktion F_U

$$\begin{aligned} P[U \leq u] = f_U(u) &= \int_{\infty}^{\infty} f(u, v) dy \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left(\int_0^{\infty} 1_{\frac{x}{x+y} \leq u} e^{-\lambda y} dy \right) dx \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left(\int_0^{\infty} 1_{x(u^{-1}-1) \leq y} e^{-\lambda y} dy \right) dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left(\int_{x(u^{-1}-1)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-\lambda x(u^{-1}-1)} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u^{-1} x} dx \\ &= u \end{aligned}$$

Beispiel: Randverteilung, gemeinsame Dichte

Man wählt zufällig einen Punkt $P = (U, V)$ in dem Gebiet D. Die gemeinsame Dichte von (U, V)

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} c & \text{falls } (u,v) \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



1. bestimme Konstnte c
2. bestimme Randverteiungsfunktion von U und Randdichtefunktion $f_U(u)$.
3. Sind U und V unabhängig?
1.

$$\begin{aligned} D =& \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq a \leq 1 \text{ and } -2 \leq b \leq 2\} \\ & \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq a \leq 2 \text{ and } -1 \leq b \leq 1\} \end{aligned}$$

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 1/10 & \text{if } (u,v) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. For $u < -1$, $F_U(u) = P(U \leq u) = 0$. For $-1 \leq u \leq 1$, $F_U(u) = P(U \leq u) =$

$$\int_u^{-1} \int_{-2}^{2} \frac{1}{10} \mathbf{1}_D(u,v) \, dv \, ds = \frac{4(u+1)}{10}$$

For $1 \leq u \leq 2$, $F_U(u) = P(U \leq u) =$

$$\int_1^{-1} \int_{-2}^{2} \frac{1}{10} \mathbf{1}_D(u,v) \, dv \, ds + \int_u^1 \int_{-1}^{1} \frac{1}{10} \mathbf{1}_D(u,v) \, dv \, ds$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{2(u-1)}{10}$$

and $F_U(u) = 1$ for $u > 2$.

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{4}{10} & \text{if } -1 \leq u \leq 1 \\ \frac{2}{10} & \text{if } 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v) \, du =$$

$$\frac{1}{2} \left(2[v \in [-2,2]] + [v \in [-1,1]]\right)$$

3. If U and V are independent, then for all u and v:

$$f_U(u) \cdot f_V(v) = f_{U,V}(u,v)$$

However, we have $f_{U,V}(2,2) = 0$ and $f_U(2) \cdot f_V(2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \neq 0$.
Therefore, U and V are not independent.

Unabhängigkeit

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heissen unabhängig, falls gilt (äquivalent):

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(X_n)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(X_n)$$

für alle $x_1, \ldots, x_n$.

Bedingte Verteilungen

Es gilt:

$$f_{X_1 \mid X_2}(x_1 \mid x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

$$P[Y > t \mid Y < a] = \frac{P[t < Y < a]}{P[Y < a]}$$

$$E[X_1 \mid X_2] = \int x_1 \cdot f_{x_1 \mid x_2}(x_1 \mid x_2) \, dx_1$$

Summen von Zufallsvariablen

Sei $Z = X + Y$ eine Zufallsvariable mit:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P[Z \leq z] = P[X + Y \leq z] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) \, dy$$

Transformationen

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung und Dichte. Sei $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Betrachte nun $Y = g(X)$, wir suchen Verteilung und Dichte von Y:

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[g(Y) \leq t] = \int_{A_g} f_X(s) \, ds$$

$$A_g := \{s \in \mathbb{R} \mid g(s) \leq t\}$$

Wobei man die Dichte durch ableiten der Verteilung erhält.

Anwendung von Transformationen

Sei F eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit Umkehrfunktion F^{-1}. Ist $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ und $Y = F^{-1}(X)$, so hat Y gerade die Verteilungsfunktion F:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P[Y \leq t] = P[F^{-1}(X) \leq t] \\ &= P[X \leq F(t)] = F(t) \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} \phi(X) &= Y \\ X &= \phi^{-1}(y) \\ f_Y(y) &= f_X(\phi^{-1}(y)) |\det J_{\phi^{-1}}(y)| \end{aligned}$$

Beispiel: Transformation

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(x), x \in \mathbb{R}$ und sei $Y = e^X$. Was ist die Dichte $f_Y(y), y > 0$ der Zufallsvariable Y?

$$\begin{aligned} Y &= e^X \\ X &= \ln Y \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{y} \\ f_Y(y) &= f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Markov Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable und ferner $g : \mathcal{W}(X) \mapsto [0, \infty)$ eine wachsende Funktion. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $g(c) > 0$ git dann:

$$P[X \geq c] \leq \frac{E[g(X)]}{g(c)}$$

Chebyshev-Ungleichung

Sei Y eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Für jedes $b > 0$ git dann:

$$P[|Y - E[Y]| \geq b] \leq \frac{Var[Y]}{b^2}$$

Momenterzeugende Funktion

Die Momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariable X ist:

$$M_X(t) := E[e^{t \cdot X}] \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

Grosse Summenabweichung

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen, für welche die Momenterzeugende Funktion $M_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ endlich ist. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$P[S_n \geq b] \leq \exp\left(\inf_{t \in \mathbb{R}} (n \cdot \log M_X(t) - t \cdot b)\right)$$

Chernoff Schranken

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit $X_i \sim Be(p)$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sei $\mu_n := E[S_n] = \sum_{i=1}^n p_i$ und $\delta > 0$. Dann gilt:

$$P[S_n \geq (1+\delta) \cdot \mu_n] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu_n}$$

Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $Var[X_i] = \sigma^2$ haben. Sei

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dann konvergiert $\overline{X}_n$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit/stochastisch gegen $\mu = E[X_i]$, d.h.:

$$P\left[\left|\overline{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

(Statt unabhängig genügt auch $Cov(X_i, X_k) = 0$ für $i \neq k$)

Starkes Gesetz der grossen Zahlen

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die alle dieselbe Verteilung haben, und ihr Erwartungswert $\mu = E[X_i]$ sei endlich. Für:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

gilt dann

$$\overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \qquad \text{P-fastsicher}$$

d.h.:

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \overline{X}_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\right\}\right] = 1$$

i.i.d. / u.i.v.

Independent identically distributed

Zentraler Grenzwertsatz

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $E[X_i] = \mu$ und $Var[X_i] = \sigma^2$. Für die Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right] = \Phi(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0,1)$ ist.

3 Statistik

$\mathcal{X}^2$-Verteilung

Die $\mathcal{X}^2$- Verteilung mit n Freiheitsgraden (bez. $\mathcal{X}_n^2$) gehört zu einer stetigen Zufallsvariable Y mit Dichtefunktion:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

wobei dies ein Spezialfall der $Ga(\alpha, \lambda)$ Verteilung ist mit $\alpha = \frac{n}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}$. Sind die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$, so ist die Summe $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \mathcal{X}_n^2$.

t-Verteilung

Die t-Verteilung mit n Freiheitsgraden gehört zu einer stetigen Zufallsvariable Z mit Dichtefunktion

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad \text{für } z \in \mathbb{R}$$

für $n = 1$ ist das eine Cauchy Verteilung und für $n \to \infty$ erhält man $\mathcal{N}(0,1)$. Sind X, Y unabhängig und $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{X}_n^2$, so ist der Quotient:

$$Z := \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}} \sim t_n, \text{ also } t\text{-Verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden}$$

Hypothesen

Es gibt:

- Hypothese $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$
- Alternative $H_A : \vartheta \in \Theta_A$

Man verwirft die Hypothese genau dann, wenn der realisierte Wert im Verwerfungsbereich K liegt.

Fehler

Es gibt folgende Fehler:

- 1. Art: Hypothese wird zu unrecht abgelehnt. $P_\vartheta[T \in K]$ für $\vartheta \in \Theta_0$
- 2. Art: Hypothese wird zu unrecht nicht verworfen. $P_\vartheta[T \notin K]$ für $\vartheta \in \Theta_A$

Meisst kann man nicht beides minimieren, also geht man wie folgt vor:

1. Man wählt ein **Signifikanzniveau** $\alpha \in (0,1)$ und kontrolliert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art durch
$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} P_\vartheta[T \in K] \le \alpha$$
2. Man versucht die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art $P_\vartheta[T \notin K]$ für $\vartheta \in \Theta_A$ zu minimieren. Dazu maximiert man die **Macht des Tests**:
$$\beta : \Theta_A \mapsto [0,1] \qquad \vartheta \mapsto \beta(\vartheta) := P_\vartheta[T \in K]$$

Somit ist es schwieriger eine Hypothese zu verwerfen als zu behalten. In einem Test **verwendet man deshalb immer als Hypothese die Negation der eigentlich gewünschten Aussage.**

Beispiel: Was passiert, wenn das Signifikanzniveau α kleiner wird?

Kleineres Signifikanzniveau (α)

- Engerer Verwerfungsbereich
- Weniger extreme Teststatistikwerte für Ablehnung der Nullhypothese erforderlich
- Strengerer Test
- Höhere Anforderungen an statistische Signifikanz
- Geringere Wahrscheinlichkeit, Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen
- Höhere Wahrscheinlichkeit für Fehler vom Typ II (falsche Akzeptanz der Nullhypothese, wenn sie in Wirklichkeit falsch ist)
- Macht wird reduziert

Beispiel: Hypothesen-Test

Wir haben eine Münze mit einer Seite rot und der anderen Seite blau gefärbt, und wir vermuten, dass die Münze gezinkt ist und eher auf der blauen Seite landet.

1. **Modell:** Unter P_p sind die X_i i.i.d., $\sim Ber(p), i = 1, \ldots, 10, p$ unbekannt
2. **Nullhypothese:** $H_0 : p = p_0 = 0.5$
3. **Alternativhypothese:** $H_A : p = p_A > p_0$.
4. **Teststatistik:** $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$, denn
$$\begin{aligned} &R(x_1, \ldots, x_{10}; \lambda_0, \lambda_A) \\ &= L(x_1, \ldots, x_{10}; \lambda_0) L(x_1, \ldots, x_{10}; \lambda_A) \\ &= \frac{p_0^T(1-p_0)^{10-T}}{p_A^T(1-p_A)^{10-T}} \\ &= \left(\frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)}\right)^T \left(\frac{1-p_0}{1-p_A}\right)^{10} \end{aligned}$$
Da $\frac{p_0(1-p_A)}{p_A(1-p_0)} < 1$ wird $R(x_1, \ldots, x_{10}; p_0, p_A)$ klein, genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{10} x_i$ groß ist. Wir wählen als Teststatistik also $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$.
5. **Verteilung der Teststatistik unter** H_0: $T \sim \text{Bin}(10, 1/2)$.
6. **Verwerfungsbereich:** Der kritische Bereich "Quotient klein" hat die äquivalente Form "Summe groß", also ist der Verwerfungsbereich von der Form $K = (k, \infty)$. Um das Signifikanzniveau einzuhalten, muss gelten
$$P_{p_0}[T \in K] = P_{p_0}[T > k] \le 1\% \Rightarrow P_{p_0}[T \le k] \ge 99\%.$$
Deshalb haben wir als Verwerfungsbereich $K = (9, \infty)$.
7. **Beobachteter Wert der Testst.:** $t = T(\omega) = 8$.
8. **Testentscheid:** Da 8 nicht im Verwerfungsbereich liegt, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

Hypothesis testing

1. **Left-sided or left-tailed test:** If $H_0 : p = p_0$ is tested against the alternative $H_1 : p < p_0$, the region of rejection has the form $\{0, 1, \ldots, k\}$. The critical value k is the largest value such that $P(X \le k) \le \alpha$.
2. **Right-sided or right-tailed test:** If $H_0 : p = p_0$ is tested against the alternative $H_1 : p > p_0$, the region of rejection has the form $\{k, k+1, \ldots, n\}$. The critical value k is the smallest value such that $P(X \ge k) \le \alpha$.
3. **Two-sided or two-tailed test:** If $H_0 : p = p_0$ is tested against the alternative $H_1 : p \ne p_0$, the region of rejection has the form $K = \{0, 1, \ldots, k_1\} \cup \{k_2, k_2+1, \ldots, n\}$. The critical values k_1 and k_2 are determined as the smallest and largest value, respectively, such that $P(X \le k_1) \le \frac{\alpha}{2}$ and $P(X \ge k_2) \le \frac{\alpha}{2}$.

Likelihood Quotient

Sei $L(x_1,\dots,x_n;\vartheta)$ die Likelihood Funktion und $\vartheta_0 \in \Theta_0$ sowie $\vartheta_A \in \Theta_A$. Dann definieren wir:

$$R(x_1,\dots,x_n;\vartheta_0,\vartheta_A) = \frac{L(x_1,\dots,x_n;\vartheta_A)}{L(x_1,\dots,x_n;\vartheta_0)}$$

je grösser der Quotient, desto wahrscheinlicher die Alternative. Es gibt auch:

$$R(x_1,\dots,x_n) = \frac{\sup_{\vartheta\in\Theta_A} L(x_1,\dots,x_n;\vartheta)}{\sup_{\vartheta\in\Theta_0} L(x_1,\dots,x_n;\vartheta)}$$
$$\widetilde{R}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\sup_{\vartheta\in\Theta_A\cup\Theta_0} L(x_1,\dots,x_n;\vartheta)}{\sup_{\vartheta\in\Theta_0} L(x_1,\dots,x_n;\vartheta)}$$

Wähle Konstante c_0 für $K_0 = (c_0,\infty)$ mithilfe von Signifikanzniveau.

Neyman-Pearson Lemma

Sei $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ und $\Theta_A = \{\vartheta_A\}$. Wie oben sei $T = R(X_1,\dots,X_n;\vartheta_0,\vartheta_A)$ und $K := (c,\infty)$, sowie $\alpha^* := P_{\vartheta_0}[T \in K] = P_{\vartheta_0}[T > c]$. Der Likelihood Quotienten Test mit Teststatistik T und kritischem Bereich K ist dann in folgendem Sinn optimal: Jeder andere Test mit Signifikanzniveau $\alpha \le \alpha^*$ hat eine kleinere Macht (bez. Grössere WS Fehler 2. Art).

p-Wert

(Nach Wikipedia) Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit ein mindestens so extremes Testergebnis zu erhalten, wenn die Nullhypothese gelten würde:

$$p(x) = P[X \le x \mid H_0] \text{ oder } P[X \ge x \mid H_0]$$
$$p(x) = 2\cdot\min\{P[X \le x \mid H_0], P[X \ge x \mid H_0]\}$$

z-Test

Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei bekannter Varianz. Hier sind $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\vartheta,\sigma^2)$. Wir möchten die Hypothese $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ testen. Mögliche Alternativen H_A sind $\vartheta > \vartheta_0$, $\vartheta < \vartheta_0$ (einseitig) oder $\vartheta \neq \vartheta_0$ (zweiseitig). Die Teststatistik ist:

$$T = \frac{\overline{X} - \vartheta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{unter } P_{\vartheta_0}$$

Und die Verwerfungsbereich:

$$\begin{aligned} &\vartheta < \vartheta_0 && (-\infty, z_\alpha) \\ &\vartheta > \vartheta_0 && (z_{1-\alpha},\infty) \\ &\vartheta \neq \vartheta_0 && (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}},\infty) \end{aligned}$$

Wobei die z Werte in der Tabelle nachgeschaut werden können und es gilt $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Beispiel Fehler 1. Art berechnen

Sei $\Theta = [0,1]$ und seien $X_1,\dots,X_6$ unabhängig, identisch verteilt unter P_θ mit $X_i \sim \text{Ber}(\theta)$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = \frac{1}{3}$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art für den Test (T,K) mit $T = \sum_{i=1}^6 X_i$ und $K = (-\infty, 0]$?
Die Teststatistik T ist die Summe der beobachteten Werte der X_i:

$$\begin{aligned} P(T\in K) &= P[T \le 0] = P[T=0] \\ &= P(X_1 = 0)\cdot P(X_2=0)\cdot\ldots\cdot P(X_6=0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Beispiel Fehler 2. Art berechnen

Nehme an: einseitiger z-Test, $T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, $\mu_0 = 70$.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0$$

Kritischer Bereich mit 5% niveau: $K = (-\infty, -1.645)$.
Wir nehmen an, dass $T = \frac{\overline{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned} P_{\mu_A}[T \notin K] &= P_{\mu_A}[T > -1.645] \\ &= P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.645\right] \\ &= P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0-\mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] \\ &= 1 - P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\mu_0-\mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_A}{\sigma-\sqrt{n}} - 1.645\right) \\ &\text{Weil } \sim \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

t-Test

Normalverteilung, Test für Erwartungswert bei unbekannter Varianz. Hier sind $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ unter $P_{\vec{\vartheta}}$, wobei $\vec{\vartheta} = (\mu,\sigma^2)$. Wir wollen die Hypothese $\mu = \mu_0$ testen. Die Teststatistik ist:

$$T := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \text{unter } P_{\vartheta_0}$$
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

Und die Verwerfungsbereiche:

$$\begin{aligned} &c_< = t_{n-1,\alpha} && (-\infty, c_<) && \mu < \mu_0 \\ &c_> = t_{n-1,1-\alpha} && (c_>,\infty) && \mu > \mu_0 \\ &c_{\neq} = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} && (-\infty,c_<)\cup(c_>,\infty) && \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Wobei gilt $t_{m,\alpha} = -t_{m,1-\alpha}$.

Gepaarter Zweiproben-Test

Hier sind $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_X,\sigma^2)$ und $Y_1,\dots,Y_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_Y,\sigma^2)$ unter P_ϑ. Insbesondere ist $m = n$ und die Varianz beider Stichproben dieselbe. Differenzen $Z_i := X_I - Y_i$ sind unter P_ϑ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, 2\sigma^2)$. Dann analog z und t-Test. (Setzt natürliche Paarung von Daten voraus!)

Ungepaarter Zweiproben-Test

Hier sind unter P_ϑ die Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_X,\sigma^2)$ und $Y_1,\dots,Y_m$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_Y,\sigma^2)$, wobei die Varianz in beiden Fällen dieselbe ist.

- Bei bekannter Varianz:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0 \quad (z.B.\ \mu_0 = 0)$$
$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

  Die kritischen Werte für den Verwerfungsbereich sind wie oben geeignete Quantile der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung, je nach Alternative. Das ist der ungepaarte Zweistichproben-z-Test.

- Bei unbekannter Varianz:

$$S_X^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$
$$S_Y^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^m (Y_j - \overline{Y}_m)^2$$
$$S^2 := \frac{1}{m+n-2}\left((n-1)\cdot S_X^2 + (m-1)\cdot S_Y^2\right)$$
$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X-\mu_Y)}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

  unter jedem P_ϑ. Dieser Test heisst ungepaarter Zweistichproben-t-Test.

Konfidenzbereich

Ein Konfidenzbereich für ϑ zu Daten $x_1,\dots,x_n$ ist eine Menge $C(x_1,\dots,x_n) \subseteq \Theta$. Damit ist $C(X_1,\dots,X_n)$ eine zufällige Teilmenge von Θ. Dieses C heisst Konfidenzbereich zum Niveau $1-\alpha$, falls für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt:

$$P_\vartheta[\vartheta \in C(X_1,\dots,X_n)] \ge 1-\alpha$$

Beispiel: Konfidenzbereich
Machen wir den Ansatz:

$$C(X_1,\ldots,X_n)=[\overline{X}_n-\ldots,\overline{X}_n+\ldots]$$

so wollen wir erreichen, dass gilt:

$$1-\alpha\le P_\vartheta[\vartheta\in C(X_1,\ldots,X_n)]$$
$$=P_\vartheta\left[\mu\in[\overline{X}_n-\ldots,\overline{X}_n+\ldots]\right]=P_\vartheta\left[\left|\overline{X}_n-\mu\right|\le\ldots\right]$$

Nach Satz 7.1 ist für jedes $\vartheta\in\Theta$:

$$\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}\qquad\text{unter } P_\vartheta$$
$$1-\alpha\le P_\vartheta\left[\left|\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|\le\frac{\ldots}{S/\sqrt{n}}\right]$$

also erhalten wir das Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1-\alpha$:

$$C(X_1,\ldots,X_n)=\left[\overline{X}_n-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}_n+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

4 Schätzer

Schätzer

Wir suchen ein Modell für eine Stichprobe $X_1,\ldots,X_n$ und haben einen Parameterraum $\vartheta\subseteq\Theta$ und für jedes ϑ einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P_\vartheta)$. Wir möchten nun die Parameter $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m$ bestimmen. Ein Schätzer T_j für einen Parameter ϑ_j ist eine Zufallsvariable der Form $T_j:=t_j(X_1,\ldots,X_n)$ für eine Schätzfunktion t_j.

Schätzwert

Verschiedene T_{ML}

bern(θ)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
bin(k,θ)	$\frac{1}{k}\overline{X}_n=\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^n X_i$
$\mathcal{P}(\theta)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
geom(θ)	$n/\sum_{i=1}^n X_i$
$\mathcal{U}([a,b])$	$\max\{X_1,\ldots,X_n\}$
exp(θ)	$\frac{1}{\overline{X}_n}=n/\sum_{i=1}^n X_i$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu}=\overline{X}_n\quad\hat{\sigma}^2=S^2$

Ein Schätzwert ist das Ergebnis einer konkreten Berechnung, eine Zahl. Sie entsteht durch das Einsetzen konkreter Daten in einen Schätzer: $T_j(\omega)=t_j(x_1,\ldots,x_n)$ und liefert damit einen Wert für genau einen Parameter.

Eigenschaften von Schätzern

Sei T ein Schätzer.

- T ist erwartungstreu, falls $E_\vartheta[T]=\vartheta$ gilt. T schätzt im Mittel also richtig.
- Bias $:=E_\vartheta[T]-\vartheta$. Ein erwartungstreuer Schätzer hat also keinen Bias.
- Mittlere Quadratische Schätzfehler $MSE_\vartheta[T]:=E_\vartheta[(T-\vartheta)^2]$.
- Eine Folge $T^{(n)}$ von Schätzern heisst konsistent für ϑ, falls $T^{(n)}$ für $n\to\infty$ in P_ϑ-Wahrscheinlichkeit gegen ϑ konvergiert, d.h. für jedes $\vartheta\in\Theta$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}P_\vartheta\left[\left|T^{(n)}-\vartheta\right|>\varepsilon\right]=0$$

Beispiel: Erwartungstreuer Schätzer
Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i\sim\mathcal{U}([\theta-1,\theta]) unter \mathbb{P}_\theta$ wobei $\theta\in\mathbb{R}$. Wir betrachten den Schätzer

$$T_1^{(n)}:=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n X_i+\frac{1}{2}$$

Sind Schätzer erwartungstreu?
Sei $\theta\in\mathbb{R}$ fixiert. Aus der Gleichverteilung folgt, dass

$$\mathbb{E}_\theta[T(n)_1]=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}_\theta[X_i]\right)+\frac{1}{2}$$
$$=\mathbb{E}_\theta[X_1]+\frac{1}{2}=\theta-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=\theta$$

Somit folgt, dass der Schätzer $T(n)_1$ erwartungstreu ist.

Maximum-Likelihood Methode

(Analog im diskreten Fall.) In einem Modell P_ϑ sind die Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ stetig mit einer gemeinsamen Dichtefunktion $f(x_1,\ldots,x_n,\vartheta)$. Oft sind die X_i i.i.d. und man erhält:

$$f(x_1,\ldots,x_n,\vartheta)=P[X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n]$$
$$=\prod_{i=1}^n f_X(x_i,\vartheta)$$

Wir nehmen nun an, dass die Daten die wir erhalten haben sehr Wahrscheinlich sind und versuchen nun folgende Likelihood funktion zu Maximieren durch Anpassungen an ϑ:

$$L(x_1,\ldots,x_n;\vartheta):=f(x_1,\ldots,x_n;\vartheta)$$
$$\log L(x_1,\ldots,x_n;\vartheta):=\log f(x_1,\ldots,x_n;\vartheta)$$

letzteres kann bei Produkt zu Summe umwandlung hilfreich sein.

Beispiel: Maximum Likelyhood-Funktion
Sei $\Theta=[0,1]$. Wir betrachten die Modellfamilie $P_{\theta\theta\in\Theta}$, wobei $X_1,\ldots,X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $X_1\sim\mathrm{Geom}(\theta)$. Was ist die Likelihood-Funktion $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ für $x_1,\ldots,x_n\in\{1,2,\ldots\}$?

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=(P_\theta)[X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n]$$
$$=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}_\theta[X_i=x_i]$$
$$=\theta^n\cdot(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}$$

Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ?

$$n\cdot\log(\theta)+(x_1+\ldots+x_n-n)\cdot\log(1-\theta)$$

Wir setzen nun die Ableitung der log-Likelihood-Funktion nach θ gleich 0 und erhalten:

$$\frac{n}{\theta}-\frac{x_1+\ldots+x_n-n}{1-\theta}=0$$
$$\iff n-n\theta=(x_1+\ldots+x_n)\cdot\theta-n\theta$$
$$\iff\theta=\frac{n}{x_1+\ldots+x_n}$$
$$=\frac{n}{X_1+\ldots+X_n}$$

Empirisches Moment

Für $k\in\{1,\ldots,m\}$ sei das k-te Moment empirische Moment oder Stichprobenmoment $\hat{m}_k$ der Realisierung $(x_1,\ldots,x_n)$:

$$\hat{m}_k(x_1,\ldots,x_n):=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k$$

Momentenmethode

Der Momentenmethode liegt zugrunde, dass die Momente einer Zufallsvariable bzw. einer Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Stichprobenmomente geschätzt werden können.
Sei $X_1,\ldots,X_n$ eine Stichprobe und Θ der Parameterraum. Für jeden Parameter $\vartheta=(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m)\in\Theta$ sei $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. unter dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P_\vartheta)$. Methode:

1. Für gegebene Realisierungen $x_1,\ldots,x_n$ bestimme für jedes $k\in\{1,\ldots,m\}$ das k-te empirische Moment
2. Stelle ein Gleichungssystem für die Unbekannten Parameter $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m$ auf, in dem das k-te empirische Moment dem k-ten Moment gleichgesetzt wird, also:

$$\hat{m}_k(x_1,\ldots,x_n)=g_k(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m)\qquad k\in\{1,\ldots,m\}$$

3. Existiert eine Eindeutige Lösung so wird das unsere Schätzung für ϑ.

Momentenschätzer

Der Vektor $\hat{\vartheta}(X_1,\ldots,X_m)$ heisst Momentenschätzer des Parameters ϑ.

Beispiel: Normalverteile Stichprobe

Sei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit unbekannten Parametern $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$. Damit berechnen wir mit der log max likelihood funktion Ableitungen setzen diese zu 0 und bekommen:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_1 - \overline{X}_n{}^2$$

möchten wir aber noch, dass der Schätzer erwartungstreu wird, so wählen wir für $T_2 = S^2$:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

Normalverteile Stichproben

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt:

- $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ und $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \right) \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$
- $\overline{X}_n$ und S^2 sind unabhängig
- $\frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{S/\sigma} = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{n-1}{\sigma^2} S^2}} \sim t_{n-1}$

5 Diskrete Verteilungen

Verteilung	Parameter	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	$p_X(t)$	$F_X(t)$
Gleichverteilung	n: Anzahl Ereignisse x_i: Ereignisse	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$	$\frac{1}{n}$	$\frac{\lvert\{k:x_k\leq t\}\rvert}{n}$
Bernoulli	p: ErfolgsWK	p	$p\cdot(1-p)$	$p^t(1-p)^{1-t}$	$1-p$ für $0\leq t<1$
Binomial	p: ErfolgsWK n: Anzahl Versuche	np	$np(1-p)$	$\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}$	$\sum_{k=0}^{t}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Geometrisch	p: ErfolgsWK t: Anzahl Versuche	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p(1-p)^{t-1}$	$1-(1-p)^t$
Negativ Binomial	$r>0$: Erfolge bis Abbruch p: ErfolgsWK t: Misserfolge	$\frac{pr}{1-p}$	$\frac{pr}{(1-p)^2}$	$\binom{t+r-1}{k}\cdot(1-p)^r p^t$	$F_{\text{Binomial}}(t; n=t+r, p)$
Hypergeometrisch	N: Anzahl aller Elemente $M\leq N$: Anzahl möglicher Erfolge $n\leq N$: Anzahl Elemente in der Stichprobe	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-m}{N-1}$	$\frac{\binom{M}{t}\binom{N-M}{n-t}}{\binom{N}{n}}$	$\sum_{k=0}^{t}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
Poisson	λ: Erwartungswert und Varianz	λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	p

6 Stetige Verteilungen

Verteilung	Parameter	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	$f_X(t)$	$F_X(t)$
Gleichverteilung	$[a,b]$: Intervall	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{t-a}{b-a}$
Exponentialverteilung	$\lambda: \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$
Normalverteilung	σ^2: Varianz $\mu: \mathbb{E}[X]$	μ	σ^2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<t<\infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}y$
χ^2-Verteilung	n: Freiheitsgrad	n	$2n$	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}\quad t>0$	$\mathrm{Gamma}(\frac{n}{2},\frac{t}{2})$
Gamma-Verteilung	α,λ	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}\quad t>0\quad \alpha,\lambda>0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\gamma(\alpha,\lambda t)$
t-Verteilung	n: Freiheitsgrad	0 für $n>1$ sonst undef.	$\begin{cases}\frac{n}{n-2} & n>2\\ \infty & 1<n\leq 2\\ \text{undef.} & \text{sonst}\end{cases}$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	oof

7 Tabellen

Ableitung, Integration

Es gilt:

- **Summenregel** $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
- **Produktregel** $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- **Quotientenregel** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ wenn $g(x)\neq 0$
- **Kettenregel** $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
- **Partielle Integration** $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$
- **Substitution** $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$
- $a+c, b+c\in I:\quad \int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$
- **Logarithmus** $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \log(|f(x)|)$

Beispiel: Substitution

$$\int \cos(x^2)2x\,dx \qquad u = x^2$$

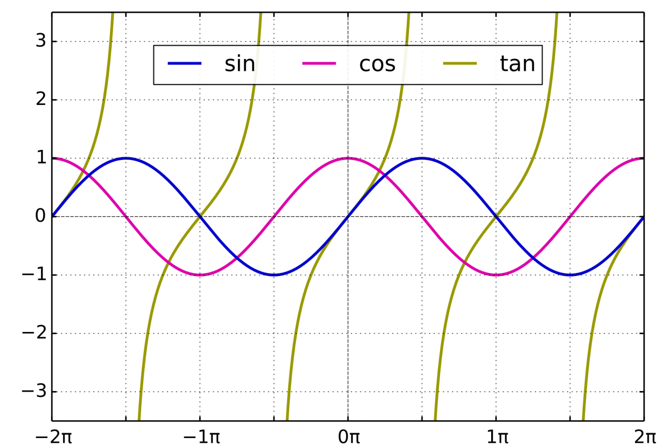
$$\int \cos(u)du \qquad \frac{du}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = 2x$$

7.1 Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$(x-1)e^x$	xe^x	$(x+1)e^x$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a\ (a\neq -1)$	$a\cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$	a^{kx}	$ka^{kx}\ln(a)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\frac{\sin(x)^2}{2}$	$\sin(x)\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\tan(x)-x$	$\tan(x)^2$	$2\sec(x)^2\tan(x)$
$-\cot(x)-x$	$\cot(x)^2$	$-2\cot(x)\csc(x)^2$
$\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1+\tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c}\cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c\cdot e^{cx}$
$x(\ln\lvert x\rvert-1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert-1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\arcsin(x)/\arccos(x)$	$\frac{1/-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$
$x^x\ (x>0)$	$x^x\cdot(1+\ln x)$
$f(x)^{g(x)}$	$e^{g(x)ln(f(x))}$
$f(x)=cos(\alpha)$	$f(x)^n = sin(x+n\frac{\pi}{2})$
$f(x)=\frac{1}{ax+b}$	$f(x)^n = (-1)^n * a^n * n! * (ax+b)^{-n+1}$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$
$\ln(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\ln(\tan(\frac{x}{2}))$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$	$\frac{1}{\cos(x)}$

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x)\,dx$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n\,dx$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\,dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2}-\frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\,dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1}x^{p-1}\,dx$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx$	$\frac{ax}{c}-\frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{x}{2}f(x)+\frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$



Sonstiges

Mitternachtsformel

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$