理论作业-1：感知机

10225501443 刘蔚璁

Q2.1: 证明感知机不能表示异或问题

感知机的基本概念

以二维情况为例，感知机的模型公式为：

$$y = \text{sign}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b)$$

其中：

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$：输入特征。
- $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$：权重向量。
- b：偏置。
- $\text{sign}(\cdot)$：符号函数，输出为 $+1$ 或 -1。

感知机模型寻找的是一个线性决策边界（超平面）：

$$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$$

异或问题的定义

异或逻辑门的输入和输出如下表：

x_1	x_2	输出 y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

几何解释：

- 异或问题可以看作在二维平面上的四个点：
  - (0, 0) 对应 $y = 0$
  - (0, 1) 对应 $y = 1$
  - (1, 0) 对应 $y = 1$
  - (1, 1) 对应 $y = 0$

数学证明

使用反证法证明，首先假设存在一个线性超平面 $w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$ 能将异或问题正确分类，其中 $y = 1$ 对应正类，$y = 0$ 对应负类，得到以下式子：

- $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + b < 0$
- $w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + b \geq 0$
- $w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + b \geq 0$
- $w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + b < 0$

1. 从第一个和第二个式子：

$$b < 0 \quad \text{且} \quad w_1 + b \geq 0$$

联立可得：

$$w_1 > 0$$

2. 从第三个和第四个式子：

$$w_2 + b \geq 0 \quad \text{且} \quad w_1 + w_2 + b < 0$$

联立可得：

$$w_1 < 0$$

3. 从第一个和第三个式子：

$$b < 0 \quad \text{且} \quad w_2 + b \geq 0$$

联立可得：

$$w_2 > 0$$

4. 从第二个和第四个式子：

$$w_1 + b \geq 0 \quad \text{且} \quad w_1 + w_2 + b < 0$$

联立可得：

$$w_2 < 0$$

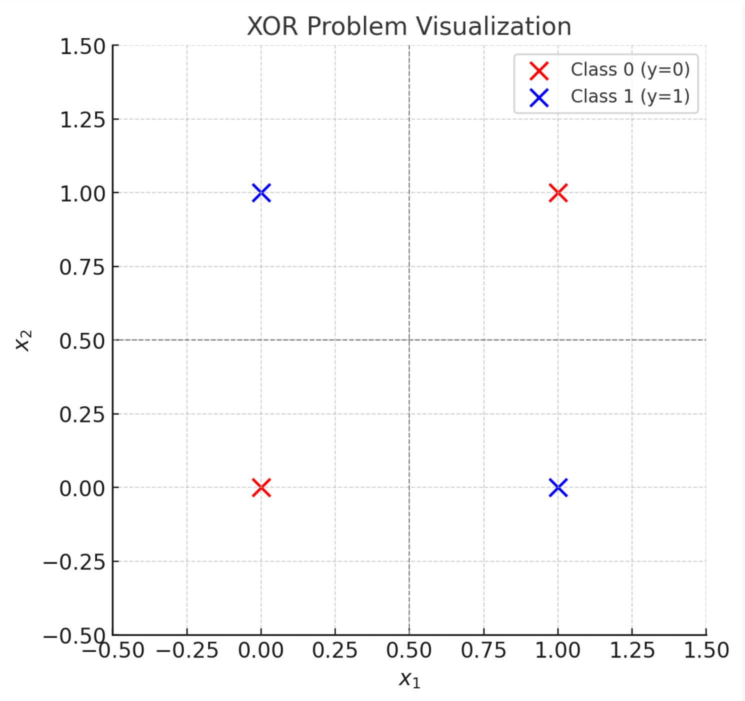
综上所述，上式对 w_1 及 w_2 的约束均矛盾，即无法找到满足所有条件的 $\mathbf{w}$ 和 b使假设成立。因此，感知机不能表示异或问题。

图形直观解释

异或问题中的点分布如下：

- 类别 $y = 0$：(0, 0) 和 (1, 1)
- 类别 $y = 1$：(0, 1) 和 (1, 0)

绘制出二维平面图：



可以看到这四个点呈现交叉分布，任何一条直线都无法将 $y = 1$ 和 $y = 0$ 的点完全分开，因此感知机不能表示异或问题。