理论作业-3：支持向量机

10225501443 刘蔚璁

Q1: 已知以下正例点 $x_1 = (1,2)^T$，$x_2 = (2,3)^T$，$x_3 = (3,3)^T$，负例点 $x_4 = (2,1)^T$，$x_5 = (3,2)^T$，试求最大间隔分离超平面和分类决策函数并找出哪些点是支持向量。

1. 问题建模

已知数据点:

- **正例点:**

$$x_1 = (1,2)^T,\ x_2 = (2,3)^T,\ x_3 = (3,3)^T$$

- **负例点:**

$$x_4 = (2,1)^T,\ x_5 = (3,2)^T$$

超平面形式:

假设超平面方程为:

$$f(x) = w^T x + b = 0$$

分类决策规则为:

$$\text{正例: } f(x) > 0 \quad \text{负例: } f(x) < 0$$

优化目标:

在支持向量机中，我们通过最大化间隔来构造最优超平面。间隔公式为:

$$\text{间隔} = \frac{2}{\|w\|}$$

最大化间隔等价于最小化 $\frac{1}{2}\|w\|^2$，同时满足以下约束条件:

$$y_i(w^T x_i + b) \geq 1, \quad \forall i$$

其中 $y_i = +1$ 表示正例，$y_i = -1$ 表示负例。

优化问题可以写为:

$$\min_{w,b} \quad \frac{1}{2}\|w\|^2$$

$$\text{s.t. } y_i(w^T x_i + b) - 1 \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5$$

2.直接求解

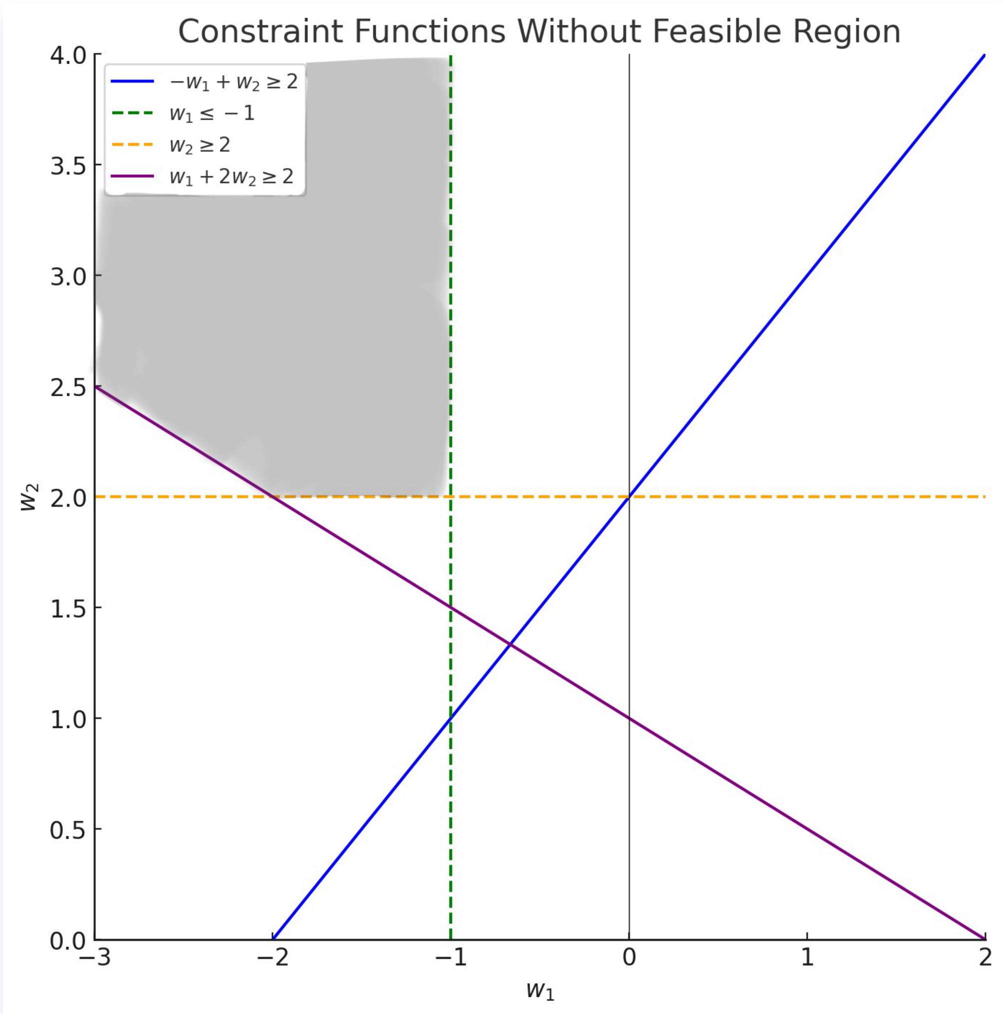
可以将约束条件写为

$$\begin{aligned}
w_1 + 2w_2 + b &\geq 1 \\
2w_1 + 3w_2 + b &\geq 1 \\
3w_1 + 3w_2 + b &\geq 1 \\
-2w_1 - w_2 - b &\geq 1 \\
-3w_1 - 2w_2 - b &\geq 1
\end{aligned}$$

化简得

$$
\begin{aligned}
w_1 &\le -1 \\
w_2 &\ge 2 \\
-w_1 + w_2 &\ge 2 \\
w_1 + 2w_2 &\ge 2
\end{aligned}
$$

画出二次规划图



从图中可以得出，当 $w_1 = -1$，$w_2 = 2$ 时 $\frac{1}{2}\|w\|^2$ 取得最小，将其代入约束条件，解得 $b = -2$

因此，最大间隔分离超平面为

$$-x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

决策函数为

$$f(x) = \text{sign}(-x_1 + 2x_2 - 2)$$

支持向量是使约束条件等号成立的点，即

$$y_i(w^T x_i + b) - 1 = 0$$

计算得，$x_1 = (1,2)$，$x_3 = (3,3)$，$x_5 = (3,2)$ 满足上式，是支持向量。

3. 对偶算法求解

我们通过引入拉格朗日乘子 $\alpha_i \ge 0$ 将约束转化为对偶问题：

$$L(w,b,\alpha) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{5} \alpha_i \left[y_i(w^T x_i + b) - 1 \right]$$

对 w 和 b 求偏导：

1. 对 w 求偏导并令其为 0：

$$\frac{\partial L}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^{5} \alpha_i y_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i y_i x_i$$

2. 对 b 求偏导并令其为 0：

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -\sum_{i=1}^{5} \alpha_i y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} \alpha_i y_i = 0$$

将 w 和 b 的表达式代入拉格朗日函数中，得到对偶问题：

$$\max_{\alpha} \quad -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i^T x_j) + \sum_{i=1}^{5} \alpha_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{5} \alpha_i y_i = 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5$$

将目标函数由求极大转换为求极小，就得到下面与之等价的对偶最优化问题：

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i^T x_j) - \sum_{i=1}^{5} \alpha_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{5} \alpha_i y_i = 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5$$

经过计算得

$$\alpha = [0.5,\ 0,\ 2.0,\ 0,\ 2.5]$$

支持向量对应的点是那些拉格朗日乘子 $\alpha_i > 0$ 的数据点，即

$$x_1 = (1, 2) \text{（正例）}$$
$$x_3 = (3, 3) \text{（正例）}$$
$$x_5 = (3, 2) \text{（负例）}$$

这些支持向量决定了最优超平面。

设 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*)^T$ 是对偶最优化问题 (7.22)～(7.24) 的解，则存在下标 j，使得 $\alpha_j^* > 0$，并可按下式求得原始最优化问题 (7.13)～(7.14) 的解 w^*, b^*：

$$w^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* y_i x_i$$

$$b^* = y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* y_i (x_i \cdot x_j)$$

代入计算得

$$w = [-1,\ 2], \quad b = -2$$

因此，最大间隔分离超平面为

$$-x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

决策函数为

$$f(x) = \text{sign}(-x_1 + 2x_2 - 2)$$