Теория к РК-1

Раздел 1.

1. Погрешность вычисления. Абсолютная и относительная погрешности. Округление чисел.

Абсолютной погрешностью называется модуль разности между точным значением и приближенным:
$\Delta_a =\mid A - a \mid$

Относительная погрешность приближенного числа a называется величина:
$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}$

В болшинстве случаев невозможно узнать точное значение числа, а значит и величину погрешности, но почти всегда можно установить, что погрешность (абсолютная или относительная) не превосходит некоторой величины.

Правила округления чисел:

1. Если первая из отбрасываемых цифр больше, чем 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу (усиливается). Усиление совершается и тогда, когда первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней есть одна или несколько значащих цифр.
2. Если первая из отбрасываемых цифр меньше, чем 5, то усиление не делается.
3. Если отбрасывается цифра 5, а за ней нет значащих цифр, то округление производится на ближайшее четное число, т.е. последняя сохраняемая цифра остается неизменной, если она четная, и усиливается, если нечетная.

Замечание: это правило можно применять на ближайшее нечетное число, точность от этого не пострадает, но четные цифры удобнее для вычислений, чем нечетные

2. Приближённые числа. Правила записи приближённых чисел.

В практической деятельности обычно обрабатывают результаты измерений, которые всегда проводятся с ограниченной точностью. Т.о. приближенные числа возникают в результате измерений точных и приближенных чисел, действий над числами.
Правила записи приближённых чисел:

1. Запись числа 4.6 означает, что верны только цифры целых и десятых.
2. Запись числа 4.60 означает, что верны и сотые доли числа.
3. Запись числа 493 означает, что верны все три цифры числа. Если за последнюю цифру нельзя ручаться, то пишут $4.9 \cdot 10$

3. Понятие значащей цифры и верной значащей цифры приближённого числа.

Значащие цифры дроби - все цифры дроби кроме нулей, расположенные левее первой отличной от нуля цифры.
Значащие цифры целого числа - все цифры числа кроме нулей, расположенных в конце числа, если нули стоят взамен неизвестных.

К значащим цифрам относятся:

- Все ненулевые цифры;
- Нули между ненулевыми цифрами;
- Нули, сохраненные десятичные разряды при округлении;

Значащие цифры делятся на:

- Верные (цифры стоящие левее верной);

- Сомнительные (первая и все другие, стоящие правее от последней верной цифры).

Верные цифры числа отсчитываются от его первой значащей цифры до цифры с разрядом, который равен разряду первой значащей цифры абсолютной погрешности этого числа.

Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называется **верными в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего n-ной значащей цифре, считая слева направо.

Первые n значащих цифр в записи приближенного числа называются **верными в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего n-ной значащей цифре, считая слева направо.

4. Понятие устойчивости вычислительной задачи.

Задача называется устойчивой по исходному параметру x, если решение y непрерывно зависит от x (т.е. малое изменение Δx приводит к малому приращению Δy)

5. Основные понятия элементарной теории погрешностей. Погрешности арифметических операций над приближёнными числами: теорема об абсолютной погрешности алгебраической суммы.

Арифметическое действие	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$a+b$	$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b$	$\delta_S = \frac{\Delta_a+\Delta_b}{S}$
$a-b$	$\Delta_{a-b} = \Delta_a - \Delta_b$	$\delta_S = \frac{\Delta_{a-b}}{\lvert a-b\rvert}$
ab	$\Delta_{a+b} = b\Delta_a + a\Delta_b$	$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$
$\frac{a}{b}$	$\Delta_{\frac{a}{b}} = \delta_{\frac{a}{b}} \frac{a}{b}$	$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b$

Теорема: Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы алгебраических погрешностей этих чисел.

Правила верных цифр:

1. Для того чтобы найти сумму с n верными цифрами достаточно наибольшее слагаемое взять с $n+1$ верной цифрой, округлив остальные слагаемые до разряда, сохраненного последним в наибольшем слагаемом.
2. Для того чтобы найти результат умножения или деления с n верными цифрами достаточно взять компоненты с $n+2$ верными цифрами.

6. Основные понятия элементарной теории погрешностей. Теорема об относительной погрешности алгебраической суммы.

Теорема: относительная погрешность суммы положительных слагаемых заключена между наибольшим и наименьшим значениями относительных погрешностей этих слагаемых.

7. Теорема об относительной погрешности произведения и частного.

Теорема (для произведения): относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел:
$\delta ab = \delta a + \delta b$
Теорема (для частного): Относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя
$\delta a/b = \delta a + \delta b$

8. Погрешность функции одной переменной.

Абсолютная погрешность функции равна произведению абсолютной погрешности аргумента на абсолютную величину производной:
$u_\varepsilon = |f'(a)| \cdot \varepsilon_a$
Предельная относительная погрешность функции:
$\delta u = \frac{u_\varepsilon}{|u|} = |\frac{f'(a)}{f(a)}|\varepsilon_a = |\frac{f'(a)}{f(a)}| \cdot a\delta a$, где
δa - предельная относительная погрешность аргумента)

9. Задача интерполяции.

Рассмотрим сеточную функцию множества значений (x_i, y_i) на $[x_0, b]$. Линейная интерполяция состоит в том, что заданные точки (x_i, y_i) соединяются прямыми отрезками и функция $f(x)$ апроксимируется ломаной с вершинами в указаных точках. В общем случае сетка является неравномерной.
Рассмотрим интервал $(x_{i-1}; x_i)$, составим уравнение прямой, проходящей через точки $(x_i - 1; y_i - 1), (x_i; y_i)$:
$\frac{x-x_i}{(x_i-x_{i-1})} = \frac{y-y_i}{(y_i-y_{i-1})}$, тогда
$y = a_i x + b_i$, где
$a_i = \frac{y_i-y_{i-1}}{(x_i-x_{i-1})}$,
$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$

10. Задача экстраполяции.

Экстраполяция — особый тип аппроксимации, при котором функция аппроксимируется вне заданного интервала, а не между заданными значениями. Иными словами, экстраполяция — приближённое определение значений функции $f(x)$ в точках x, лежащих вне отрезка $[x_0; x_n]$, по её значениям в точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

11. Метод Гаусса

Метод Гаусса – это метод решение квадратных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), суть которого заключается в последовательном исключение неизвестных переменных с помощью элементарных преобразований строк.

Прямой ход метода Гаусса. Пусть коэффициент $a11 \neq 0$. Поделим первое уравнение системы на элемент $a11$. Исключим из такой системы переменную $x1$ из второго, третьего и так далее до n-го уравнения. Для этого из i-го уравнения системы (1), $i = 2, 3, \ldots, n$ вычитаем первое уравнение, умноженное на коэффициент a_{i1}. В результате приведем систему к следующему виду.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Далее делим второе уравнение на коэффициент при x_2 и исключим переменную x_2 из третьего и так далее до n-го уравнения. Повторяем этот процесс до последнего уравнения. Последнее уравнение поделим на коэффициент при неизвестной. Тем самым, равносильными преобразованиями, система уравнений будет приведена к треугольному виду.

12. Методы решения нелинейных уравнений и систем.

Отсутствует

13. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена заданной степени.

Пусть:

1. На отрезке $[a, b]$ задана сетка $Ln : a <= x0 < x1 <.. < xn <= b$;
2. Заданы произвольные числа $c_i \ \ (i = 0, 1, \ldots)$.
   Тогда существует и притом единственный многочлен P_n степени не выше n, принимающий в узлах x_i заданные значения c_i.

14. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Рассмотрим интерполяционный многочлен, единый для отрезка $[x_0; x_n]$. Будем искать многочлен порядка n в виде линейной комбинации:
$L(x) = y_0 \ l_0(x) + \ldots + y_n \ l_n(x)$ такой что:
$\forall i = \overrightarrow{o, n} : l_i(x) = 0$ во всех узлах, кроме $x_i : l_i(x_i) = 1$

Тогда имеем:
$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$
$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$
$\ldots$
$l_n = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

Таким образом:
$L(x) = \sum_{i=o}^{n} y_i \ l_i(x)$

Для линейной интерполяции:
$L(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

Для кубической интерполяции:
$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$

15. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Рассмотрим случай, когда шаг является постоянной величиной $x_i - x_{i-1} = const$. Составим конечные разности n-порядков:

1. $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$
   $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)$
   ...
   $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h)$
2. $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$
   $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$
   ...
3. $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

Конечные разности можно выразить через значения функции:
$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$
$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$
...
Тогда получаем:
$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^k y_0$

Составим многочлен Ньютона:
$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

График многочлена проходит через узлы (x_i, y_i):
$N(x_i) = y_i$
$N(x_0) = y_0 = a_0$
$N(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h$

Выразим коэффициенты многочлена через значения функции:
$a_0 = y_0$

$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$
$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \dots = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$
...
$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, k = \overrightarrow{0, n}$

Перепишем многочлен Ньютона:
$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$

16. Метод наименьших квадратов.

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных a и b $F(a, b) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$ принимает наименьшее значение. То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. Таким образом, решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Раздел 2.

1. Методы численного дифференцирования. Конечные разности. Правая, левая, центральная конечная разности.

Рассмотрим равномерную сетку:
$\omega_n = |x_n = x_0 + n \cdot h|$
По определению производной:
$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_n + \Delta x) - y(x_n)}{\Delta x}$
Приравнивая Δx к h получаем:
$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h}$
Учитывая, что $y_n = y(x_n),\ y_{n+1} = y(x_n + h)$:
$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ – правая разностная производная
$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$ – левая разностная производная
$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$ – центральная разностная производная

2. Методы численного интегрирования. Квадратурная формула.

Отсутствует

3. Методы численного интегрирования. Формула прямоугольников (правых, левых, центральных).

Отсутствует

4. Методы численного интегрирования. Формулы трапеций.

Отсутствует

5. Методы численного интегрирования. Метод Симпсона (формула парабол).

Отсутствует

6. Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.

Решим задачу Коши для ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Найдем решение на отрезке $[x_0;\ b]$, который разобъем на равные части с шагом h:
$f'(x_0, y_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$
$f(x_1) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0, y_0)$
$\ldots$
$f(x_{n+1}) = f(x_n) + h \cdot f'(x_n, y_n)$

Алгоритм:

1. Ввод $x_0,\ y_0,\ h,\ n$;
2. Для i от 1 до n:
    1. $y = y + h \cdot f'(x, y)$
    2. $x = x + h$
    3. Вывод x, y (в нашем случае достаточно четырех знаков после запятой)

7. Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта.

Метод Эйлера и его варианты являются частным случаем методов 1-го и 2-го порядков, относящихся к классу методов Рунге-Кутта. Эти методоы для вычисления y_{i+1} используют предыдущие.
Запишем алгоритм метода Рунге-Кутта для задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Любой последующий y_{i+1} вычисляется следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), i = 0, 1, \ldots$$

где
$k_0 = f(x_i, y_i)$
$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{hk_0}{2})$
$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{hk_1}{2})$
$k_0 = f(x_i + h, y_i + hk_2)$, где $h-$ шаг метода

Суммарная погрешность метода есть величина бесконечно малая меньшего порядка, чем $o(h^4)$

8. Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы Адамса.

Методы Адамса относятся к многошаговым методам. Чаще всего используются метод Адамса 4-го порядка, т.е. на каждом шаге используют результате предыдущих четырех вычислений.

Имеем вычисленные $y_{i-3},\ y_{i-2},\ y_{i-1},\ y_i$, при этом имеются вычисленные ранее значения правой части $f_{i-3},\ f_{i-2},\ f_{i-1},\ f_i$.
Найдем конечные разности для правой части в узле x_i.

$$\begin{cases} \Delta f_i = f_i - f_{i-1} \\ \Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \\ \Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3} \end{cases}$$

Тогда:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i$$

9. Методы решения краевых задач. Метод «стрельбы».

Рассмотрим краевую задачу для ДУ 2-го порядка, разрешенного относительно второй производной, т.е.

$$(1)\ y'' = f(x, y, y')$$

Будем искать решение $y = y(x)$ на отрезке $[a, b]$, который можно привести к отрезку $[0, 1]$ выполнив замену $t = \frac{x-a}{b-a}$. Граничные условия для уравнения (1) будут иметь вид:

$$(2) \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Сущность метода стрельбы заключается в сведение краевой задачи (1)-(2) к решению последовательности задач Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = \tan\alpha \end{cases}$$

где y_0 - точка начала интегральной кривой, $\tan\alpha$ - тангенс угла касательной к интегральной кривой в точке y_0.

Будем считать решение задачи Коши $y = y(x, \alpha)$, зависящем от параметра α. Нужно найти такую интегральную кривую, которая выходит из точки $(0, y_0)$, попадает в точку $(1, y_1)$ и при $\alpha = \alpha*$ является решением краевой задачи (1)-(2). При $x = 1 : y = y_1$, т.е:

$$y(1, \alpha) = y_1 y(1, \alpha) - y_1 = 0(3) F(\alpha) = 0$$

Для решения алгебраического уравнения (3) можно применить любой из методов решения уравнений.

10. Методы решения краевых задач. Метод конечных разностей.

Рассмотрим ДУ 2-го порядка:
$y'' = f(x, y, y'),\ y(x_0) = y_0,\ y(1) = y_1,\ \ [0, 1]$

Разобъем отрезок на n равных частей. Заменим производные ДУ выражениями:

$$(3) \begin{cases} y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h^2} + o(h^2) \\ y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + o(h^2) \end{cases}$$

$y'' = f(x, y, y')$
Получаем систему n-1 алгебраических уравнений относительно сеточной функции $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Применим метод конечных разностей к линейным ДУ 1-го порядка:
$y'' - p(x)y(x) = f(x)$
$p(x) > 0$
$x \in [0; 1]$

$$\begin{cases} y(0) = A \\ y(1) = B \end{cases}$$

Подставим $y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ в $y'' - p(x)y(x) = f(x)$, тогда:
$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p(x)y(x) = f(x)$
Откуда, считая $p(x_i) = p_i,\ f(x_i) = f_i$:
$y_{i+1} = h^2 f_i - y_{i-1} + (2 + h^2 p_i) y_i$

Раздел 3.

1. Методы минимизации унимодальных функций: прямые методы (общая характеристика).

Различают методы прямого поиска (без использования производных) и методы, использующие производные ф-ции. Методы прямого поиска еще разделяют на методы пассивного поиска (перебор) и метода последовательного поиска (исключение отрезков).

2. Методы минимизации унимодальных функций: метод перебора.

Разобьём $[a;b]$ на n-равных частей точками $x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$. Вычислим значения ф-ции $f(x)$ в точке x_i, сравним вычисленное значение найдем точку x_m $(0 < m < n)$ такую, что значение в ней наименьшее $f(x_m) = min(f(x_i)) \implies x* = x_m$

3. Методы минимизации унимодальных функций: метод поразрядного поиска.

В методе поразрядного поиска перебор точек отрезка происходит сначала с шагом $h = x_{i+1} - x_i > \varepsilon$ до тех пор, пока не выполнится условие $f(x_i) \le f(x_{i+1})$ или пока очередная из этих точек не совпадет с концом отрезка. После этого шаг уменьшается (обычно в четыре раза), и перебор точек с новым шагом производится в противоположном направлении до тех пор, пока значения $f(x)$ не перестанут уменьшаться или очередная точка не совпадет с концом отрезка и т. д. Процесс завершается, когда перебор в данном направлении закончен, а использованный при этом шаг дискретизации не превосходит ε.

4. Общий вид задачи линейного программирования.

Отсутствует

5. Построение допустимого множества решений в двумерном случае (графический метод).

Отсутсвует

6. Методы минимизации унимодальных функций: метод дихотомии.

Метод дихотомии заключается в том, что исходный интервал $[a, b]$ делится средней точкой $c = \frac{b+a}{2}$ на два подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$ в одном из которых лежит точка минимума $x*$.
Для выбора подинтервала, для хорошо дифференцируемой функции вычисляют в точке с производную $f'(c)$ и анализируют ее знак:

- если $f'(c) > 0$, то $x*$ лежит слева от точки c, т.е. в отрезке $[a, c]$;
- если $f'(c) < 0$, то $x*$ лежит справа от точки c, т.е. в отрезке $[c, b]$, а при $f'(c) \approx 0$ найдена точка минимума $x* = c$.

Если $f'(c)$ не дифференцируемая, то выясняется направление убывания унимодальной функции. С этой целью задается точка $c + h$ (где $h > 0$ – малая величина, соизмеримая с ε) и вычисляется ордината $f(c + h)$.

- если приращение функции $f(c) = f(c) - f(c + h) < 0$, то точка $x*$ лежит справа от точки c, т.е. $x*$ принадлежит отрезку $[c, b]$.
- если $f(c) = f(c) - f(c + h) > 0$, то точка $x*$ лежит слева от точки c, т.е. $x*$ принадлежит отрезку $[a, c]$.
- при $f(c) \approx 0$ имеем точку минимума $x* \approx c$.

После выбора подинтервала, в котором находится $x*$, например $[c, b]$, переопределяем левую границу $a = c$ (при выборе $[a, c]$ следует поменять правую границу $b = c$).

Проверяем $b - a \le \varepsilon$: если неравенство не выполняется, то вновь делим отрезок $[b - a]$ пополам и опять определяем, в каком подинтервале находится точка минимума.

7. Методы минимизации унимодальных функций: метод золотого сечения.

Тогда для того, чтобы найти неопределённое значение этой функции на заданном отрезке, отвечающее критерию поиска минимума, рассматриваемый отрезок делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, то есть выбираются две точки $x_1, \ x_2$ такие, что:
$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-a}{x_2-a} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$
Таким образом:
$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}$;

$x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}$
То есть точка делит отрезок $[a, x_2]$ в отношении золотого сечения. Аналогично x_2 делит отрезок $[x_1, b]$ в той же пропорции. Это свойство и используется для построения итеративного процесса.

Алгоритм:

1. На первой итерации заданный отрезок делится двумя симметричными относительно его центра точками и рассчитываются значения в этих точках.
2. После чего тот из концов отрезка, к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, значение в которой максимально, отбрасывают.
3. На следующей итерации в силу показанного выше свойства золотого сечения уже надо искать всего одну новую точку.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

8. Методы минимизации унимодальных функций: метод средней точки.

Определим точки x_1 и x_2 таким образом: $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) > 0$. Стационарная точка расположена между точками x_1 и x_2 . Вычислим значение производной функции в средней точке рассматриваемого интервала $x_i = \frac{x_1+x_2}{2}$. Если $f'(x_i) > 0$, то интервал (x_i, x_2) можно исключить из интервала поиска. С другой стороны, если $f'(x_i) < 0$, то можно исключить интервал (x_1, x_i). Ниже дается формализованное описание шагов алгоритма.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности (a, b) и параметр сходимости ε- малое положительное число, характеризующие точность расчета.
2. Положить $x_1 = a,\ x_2 = b$ при этом $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$.
3. Вычислить среднюю точку интервала: $x_i = \frac{x_1+x_2}{2}$
4. Вычислить значение производной в точке x_i : $f'(x_i)$
5. Проверить условие выполнения окончания расчета:
   - если $|f'(x_i)| \le \varepsilon$, закончить поиск;
   - если $|f'(x_i)| \ge \varepsilon$, продолжить поиск и сформировать новый интервал неопределенности:
     - если $f'(x_i) < 0$, положить $a = x_i$ и перейти к шагу 3;
     - если $f'(x_i) > 0$, положить $b = x_i$ и перейти к шагу 3.

9. Методы минимизации унимодальных функций: метод хорд.

На отрезке $[\alpha_0; \alpha_1]$: $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)\cdot(\alpha_n-\alpha_{n+1})}{f(\alpha_n)-f(\alpha_{n+1})}$ – уравнение прямой, проходящей через α_n. До тех пор, пока $|\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \varepsilon \implies \alpha* = \frac{\alpha_n+\alpha_{n-1}}{2}$

10. Методы минимизации унимодальных функций: метод Ньютона.

Считая минимизируемую функцию дважды дифференцируемой, раскладываем ее в ряд Тейлора:
$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k)\cdot h + \frac{1}{2}f''(x_k)\cdot h^2$
Если вторая производная положительна, квадратичное приближение является выпуклой функцией от t, и ее минимум можно найти, установив производную равной нулю. Поскольку:
$\frac{d}{dt}(f(x_k) + f'(x_k)\cdot h + \frac{1}{2}f''(x_k)\cdot h^2)) = f'(x_k) + f''(x_k)\cdot h$
То минимум достигается при:
$t = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$
Таким образом на каждой итерации метод Ньютона выполняет:
$x_{k+1} = x_k + t = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

11. Теоремы двойственности. Двойственная задача линейного программирования.

Отсутствует

12. Методы линейного программирования: симплекс-метод (выбор разрешающих строки, столбца, элемента).

Отсутствует

13. Преобразование симплекс-таблиц, поиск решения.

Отсутствует

14. Метод градиентного спуска.

Рассмотрим выпуклую, дифференцируемыую функцию $F(x) \in E_n$, которую нужно минимизировать. Выберем произвольные приближения $x^{(0)} \in E_n$. Построим последовательность точек $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)})$. Значения параметра альфа_к (параметрический шаг) выбираются таким образом, чтобы выполнялось неравенство:
$(1)\ f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$

В качестве условия окончания вычислений обычно берут условие $\mid gradF \mid_{x^{(k+1)}} \leq \varepsilon$ или вместо градиента берут все частные производные. Точка минимума в таком случае равна $x^* = x^{(k+1)}$, а минимальное значчеие $f^* = f(x^{(k+1)})$.

15. Метод наискорейшего спуска.

Метод наискорейшего спуска отличается от градиентного способом определения параметрического шага α, который находится из условия:
(1) $\Phi_k(\alpha_k) = min \Phi_k(\alpha)$, где
$\Phi_k(\alpha) = f(x^k - \alpha \cdot f'(x^k))$

Такой выбор параметрического шага обеспечивает максимально возможное значение функции вдоль направления антиградиента в заданной точке. Таким образом, чтобы найти α_k на каждом шаге метода наискоейшего спуска, решают задачу одномерной минимизации (метод перебора, метод средней точки и т. д.)

16. Метод проекции градиента.

На размеры прямоугольного параллелипипеда накладываются следующие ограничения:
$x_1 \leq A,\ x_2 \leq B,\ x_3 \leq C,\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \leq \delta$. Необходимо найти такие размеры параллелипипеда, при которых объем будет максимальный.

Выберем начальную точку $x_0 = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} \\ \frac{B}{2} \\ \frac{C}{2} \end{pmatrix}$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \ \frac{gradF}{|gradF|}$
Вычислив грандиент для функции объема параллелипипеда получаем:
$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \ \frac{\begin{pmatrix} -x_2x_3 \\ -x_1x_3 \\ -x_1x_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_1x_3)^2}}$
Если $x^{(k+1)} \notin U, \quad \mid\mid x^{(k+1)} - x^{(k)} \mid\mid \geq e$, где $U = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \leq \delta$, то:
$t = \frac{\delta - \alpha x_1 - \beta x_2 - \gamma x_3}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$
Уточним $x^{(k+1)}$:
$\hat{x}^{(k+1)} = \begin{cases} x_1 = \alpha t + x_1^{(k+1)} \\ x_2 = \beta t + x_2^{(k+1)} \\ x_3 = \gamma t + x_3^{(k+1)} \end{cases}$