形式语言与自动机课后习题答案

第二章

4．找出右线性文法，能构成长度为 1 至 5 个字符且以字母为首的字符串。

答：G={N,T,P,S}

其中 N={S,A,B,C,D} T={x,y}　其中 x∈{所有字母} y∈{所有的字符}　P 如下:

S→x　S→xA　A→y　A→yB

B→y　B→yC　C→y　C→yD　D→y

6．构造上下文无关文法能够产生

L={ω/ω∈{a,b}*且ω中 a 的个数是 b 的两倍}

答：G={N,T,P,S}

其中 N={S} T={a,b} P 如下:

S→aab　S→aba　S→baa

S→aabS　S→aaSb　S→aSab　S→Saab

S→abaS　S→abSa　S→aSba　S→Saba

S→baaS　S→baSa　S→bSaa　S→Sbaa

7．找出由下列各组生成式产生的语言（起始符为 S）

(1) S→SaS　S→b

(2) S→aSb　S→c

(3) S→a　S→aE　E→aS

答：（1）$b(ab)^n$ /n≥0}或者 L={$(ba)^n b$ /n≥0}

(2) L={$a^n c b^n$ /n≥0}

(3) L={a^{2n+1} /n≥0}

第三章

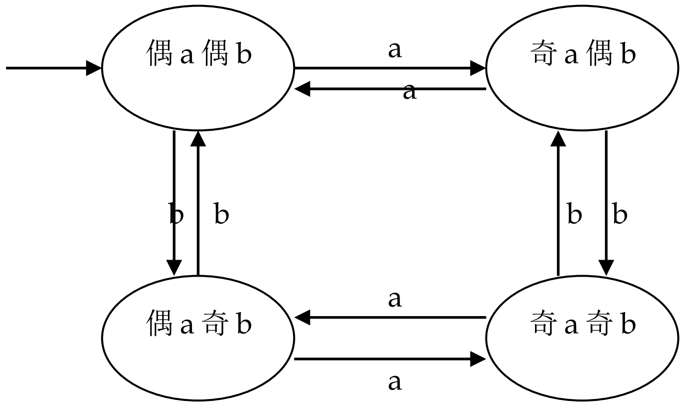
1．下列集合是否为正则集，若是正则集写出其正则式。

（1）　含有偶数个 a 和奇数个 b 的{a,b}*上的字符串集合

（2）　含有相同个数 a 和 b 的字符串集合

（3）　不含子串 aba 的{a,b}*上的字符串集合

答：（1）是正则集，自动机如下



(2) 不是正则集，用泵浦引理可以证明，具体见 17 题（2）。

(3) 是正则集

先看 L′为包含子串 aba 的{a,b}*上的字符串集合

显然这是正则集，可以写出表达式和画出自动机。（略）

则不包含子串 aba 的{a,b}*上的字符串集合 L 是 L′的非。

根据正则集的性质，L 也是正则集。

4．对下列文法的生成式，找出其正则式

（1） G=({S,A,B,C,D},{a,b,c,d},P,S),生成式 P 如下：

$S\to aA$　$S\to B$

$A\to abS$　$A\to bB$

$B\to b$　$B\to cC$

$C\to D$　$D\to bB$

$D\to d$

（2） G=({S,A,B,C,D},{a,b,c,d},P,S),生成式 P 如下：

$S\to aA$　$S\to B$

$A\to cC$　$A\to bB$

$B\to bB$　$B\to a$

$C\to D$　$C\to abB$

$D\to d$

答：(1) 由生成式得：

S=aA+B ①

A=abS+bB ②

B=b+cC ③

C=D ④

D=d+bB ⑤

③④⑤式化简消去 CD，得到 B=b+c(d+bB)

即 B=cbB+cd+b　=>B=(cb)*(cd+b) ⑥

将②⑥代入①

S=aabS+ab(cb)*(cd+b)+(cb)*(cd+b)　=>S=(aab)*(ab+ε)(cb)*(cd+b)

(2) 由生成式得：

S=aA+B ①

A=bB+cC ②

B=a+bB ③

C=D+abB ④

D=dB ⑤

由③得 B=b*a ⑥

将⑤⑥代入④ $C=d+abb^*a=d+ab^+a$ ⑦

将⑥⑦代入② $A=b^+a+c(d+b^+a)$ ⑧

将⑥⑧代入① $S=a(b^+a+c(d+ab^+a))+b^*a$

$=ab^+a+acd+acab^+a+b^*a$

5.为下列正则集，构造右线性文法：

(1){a,b}*

(2)以 abb 结尾的由 a 和 b 组成的所有字符串的集合

(3)以 b 为首后跟若干个 a 的字符串的集合

(4) 含有两个相继 a 和两个相继 b 的由 a 和 b 组成的所有字符串集合

答：（1）右线性文法 G=({S},{a,b},P,S)

P: S→aS　S→bS　S→ ε

(2) 右线性文法 G=({S},{a,b},P,S)

P: S→aS　S→bS　S→abb

(3) 此正则集为{ba*}

右线性文法 G=({S,A},{a,b},P,S)

P: S→bA　A→aA　A→ ε

(4) 此正则集为{{a,b}*aa{a,b}*bb{a,b}*, {a,b}*bb{a,b}*aa{a,b}*}

右线性文法 G=({S,A,B,C},{a,b},P,S)

P: S→aS/bS/aaA/bbB

A→aA/bA/bbC

B→aB/bB/aaC

C→aC/bC/ ε

7.设正则集为 a(ba)*

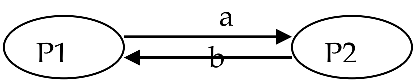
(1) 构造右线性文法

(2) 找出（1）中文法的有限自 b 动机

答：（1）右线性文法 G=({S,A},{a,b},P,S)

P: S→aA　A→bS　A→ ε

（2）自动机如下：



(p2 是终结状态)

9.对应图（a）(b)的状态转换图写出正则式。（图略）

（1）　由图可知 $q_0=aq_0+bq_1+a+\varepsilon$

$q_1=aq_2+bq_1$

$q_0=aq_0+bq_1+a$

$=>q_1=abq_1+bq_1+aaq_0+aa$

$=(b+ab)\ q_1+aaq_0+aa$

$=(b+ab)\ *(\ aaq_0+aa)$

$=>q_0=aq_0+b(b+ab)\ *(\ aaq_0+aa\ )\ +a+\varepsilon$

$=\ q_0(a+b\ (b+ab)\ *aa)+\ b(b+ab)\ *aa+a+\varepsilon$

$=(a+b\ (b+ab)\ *aa)\ *((b+ab)\ *aa+a+\varepsilon\ )$

$=(a+b\ (b+ab)\ *aa)\ *$

(3) $q_0=aq_1+bq_2+a+b$

$q_1=aq_0+bq_2+b$

$q_0=aq_1+bq_0+a$

$=>q_1=aq_0+baq_1+bbq_0+ba+b$

$=(ba)*(aq_0\ +bbq_0+ba+b)$

$=>q_2=aaq_0+abq_2+bq_0+ab+a$

$=(ab)*(aaq_0\ +bq_0+\ ab+a)$

$=>q_0=a(ba)^*(a+bb)\ q_0 + a(ba)^*(ba+b)+b(ab)^*(aa+b)q_0+ b(ab)^*(ab+a)+a+b$
$=[a(ba)^*(a+bb) +b(ab)^*(aa+b)]^* (a(ba)^*(ba+b)+ b(ab)^*(ab+a)+a+b)$

10.设字母表 T={a,b},找出接受下列语言的 DFA：
（1） 含有 3 个连续 b 的所有字符串集合
（2） 以 aa 为首的所有字符串集合
（3） 以 aa 结尾的所有字符串集合
答：（1）$M=(\{q_0,q_1\ q_2,q_3\},\{a,b\}, \sigma ,q_0,\{q_3\})$,其中 σ 如下：

	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_0	q_3
q_3	q_3	q_3

（2）$M=(\{q_0,q_1\ q_2\},\{a,b\}, \sigma ,q_0,\{q_2\})$,其中 σ 如下：

	a	b
q_0	q_1	Φ
q_1	q_2	Φ
q_2	q_2	q_2

（3）$M=(\{q_0,q_1\ q_2\},\{a,b\}, \sigma ,q_0,\{q_2\})$,其中 σ 如下：

	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0

14 构造 DFA M_1 等价于 NFA M，NFA M 如下：
（1）$M=(\{q_0,q_1\ q_2,q_3\},\{a,b\}, \sigma ,q_0,\{q_3\})$,其中 σ 如下：
$\sigma(q_0,a)=\{q_0,q_1\}$ $\sigma(q_0,b)=\{q_0\}$
$\sigma(q_1,a)=\{q_2\}$ $\sigma(q_1,b)=\{q_2\}$
$\sigma(q_2,a)=\{q_3\}$ $\sigma(q_2,b)=\Phi$
$\sigma(q_3,a)=\{q_3\}$ $\sigma(q_3,b)=\{q_3\}$
（2）$M=(\{q_0,q_1\ q_2,q_3\},\{a,b\}, \sigma ,q_0,\{q_1,q_2\})$,其中 σ 如下：
$\sigma(q_0,a)=\{q_1,q_2\}$ $\sigma(q_0,b)=\{q_1\}$
$\sigma(q_1,a)=\{q_2\}$ $\sigma(q_1,b)=\{q_1,q_2\}$
$\sigma(q_2,a)=\{q_3\}$ $\sigma(q_2,b)=\{q_0\}$
$\sigma(q_3,a)=\Phi$ $\sigma(q_3,b)=\{q_0\}$
答：（1）DFA $M_1=\{Q_1, \{a,b\}, \sigma_1, [q_0],\{ [q_0,q_1,q_3]，[q_0,q_2,q_3]，[q_0, q_1,q_2,q_3]\}$
其中 $Q_1 =\{[q_0],[q_0,q_1], [q_0,q_1,q_2],[q_0,q_2],[q_0,q_1, q_2,q_3],[q_0,q_1, q_3],[q_0,q_2, q_3],[q_0,q_3]\}$
σ_1满足

	a	b
$[q_0]$	$[q_0,q_1]$	$[q_0]$
$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_2]$
$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_2,q_3]$	$[q_0,q_2]$

[q_0,q_2]	[q_0,q_1, q_3]	[q_0]
[q_0,q_1, q_2,q_3]	[q_0,q_1, q_2,q_3]	[q_0,q_2, q_3]
[q_0,q_1, q_3]	[q_0,q_1, q_2,q_3]	[q_0,q_2, q_3]
[q_0,q_2, q_3]	[q_0,q_1, q_3]	[q_0,q_3]
[q_0,q_3]	[q_0,q_1, q_3]	[q_0,q_3]

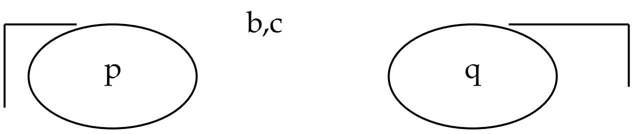
（2）DFA　M_1={Q_1, {a,b}, σ $_1$, [q_0],{ [q_1],[q_3], [q_1,q_3],[q_0,q_1,q_2],[q_1,q_2] ,[q_1,q_2,q_3],[q_2,q_3]}
其中 Q_1 ={[q_0],[q_1,q_3], [q_1],[q_2],[q_0,q_1,q_2],[q_1,q_2],[q_3], [q_1,q_2,q_3],[q_2,q_3]}
σ $_1$满足

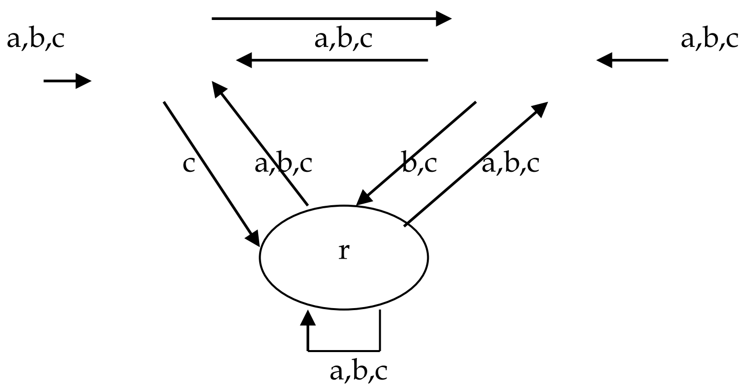
	a	b
[q_0]	[q_1,q_3]	[q_1]
[q_1,q_3]	[q_2]	[q_0,q_1,q_2]
[q_1]	[q_2]	[q_1,q_2]
[q_2]	[q_3]	[q_0]
[q_0,q_1,q_2]	[q_1,q_2,q_3]	[q_0,q_1,q_2]
[q_1,q_2]	[q_2,q_3]	[q_0,q_1,q_2]
[q_3]	Φ	[q_0]
[q_1,q_2,q_3]	[q_2,q_3]	[q_0,q_1,q_2]
[q_2,q_3]	[q_3]	[q_0]

15. 15.对下面矩阵表示的ε-NFA

	ε	a	b	c
P(起始状态)	φ	{p}	{q}	{r}
q	{p}	{q}	{r}	φ
r(终止状态)	{q}	{r}	φ	{p}

(1) 给出该自动机接收的所有长度为 3 的串
(2) 将此ε-NFA 转换为没有ε的 NFA
答：（1）可被接受的的串共 23 个，分别为 aac, abc, acc, bac, bbc, bcc, cac, cbc, ccc, caa, cab, cba, cbb, cca, ccb, bba, aca, acb, bca, bcb, bab, bbb, abb
（2）ε-NFA：M=({p,q,r},{a,b,c},σ,p,r) 其中σ如表格所示。
因为ε-closure(p)= Φ
则设不含ε的 NFA M_1=({p,q,r},{a,b,c},σ $_1$,p,r)
σ $_1$(p,a)=σ′(p,a)=ε-closure(σ(σ′(p, ε),a))={p}
σ $_1$(p,b)=σ′(p,b)=ε-closure(σ(σ′(p, ε),b))={p,q}
σ $_1$(p,c)=σ′(p,c)=ε-closure(σ(σ′(p, ε),c))={p,q,r}
σ $_1$(q,a)=σ′(q,a)=ε-closure(σ(σ′(q, ε),a))={p,q}
σ $_1$(q,b)=σ′(q,b)=ε-closure(σ(σ′(q, ε),b))={p,q,r}
σ $_1$(q,c)=σ′(q,c)=ε-closure(σ(σ′(q, ε),c))={p,q,r}
σ $_1$(r,a)=σ′(r,a)=ε-closure(σ(σ′(r, ε),a))={p,q,r}
σ $_1$(r,b)=σ′(r,b)=ε-closure(σ(σ′(r, ε),b))={p,q,r}
σ $_1$(r,c)=σ′(r,c)=ε-closure(σ(σ′(r, ε),c))={p,q,r}
图示如下：(r 为终止状态)





16．设 NFA　M=({q_0,q_1},{a,b}, σ ,q_0,{q_1}),其中 σ 如下：

σ (q_0,a)={q_0,q_1}　 σ (q_0,b)={q_1}

σ (q_1,a)= Φ　 σ (q_1,b)= {q_0, q_1}

构造相应的 DFA　M_1，并进行化简

答：构造一个相应的 DFA　M_1={Q_1, {a,b}, $σ_1$, [q_0],{ [q_1]，[q_0,q_1]}

其中 Q_1 ={[q_0]，[q_1]，[q_0,q_1]}

$σ_1$满足

	a	b
[q_0]	[q_0,q_1]	[q_1]
[q_1]	Φ	[q_0,q_1]
[q_0,q_1]	[q_0,q_1]	[q_0,q_1]

由于该 DFA 已是最简，故不用化简

17.使用泵浦引理，证明下列集合不是正则集：

（1）　由文法 G 的生成式 S→aSbS/c 产生的语言 L(G)

（2）　{ω/ω∈{a,b}*且ω有相同个数的 a 和 b}

（3）　{a^kca^k/k≥1}

（4）　{ωω/ω∈{a,b}*}

证明：（1）在 L(G)中，a 的个数与 b 的个数相等

假设 L(G)是正则集，对于足够大的 k 取ω= $a^k(cb)^kc$

令ω=$ω_1ω_0ω_2$

因为|$ω_0$|>0　|$ω_1ω_0$|≤k　存在$ω_0$使$ω_1ω_0^iω_2$∈L

所以对于任意$ω_0$只能取$ω_0$=a^n　n∈(0, k)

则$ω_1ω_0^iω_2$= $a^{k-n}(a^n)^i(cb)^kc$　在 i 不等于 0 时不属于 L

与假设矛盾。则 L(G)不是正则集

（2）假设该集合是正则集，对于足够大的 k 取ω= a^kb^k

令ω=$ω_1ω_0ω_2$

因为|$ω_0$|>0　|$ω_1ω_0$|≤k　存在$ω_0$使$ω_1ω_0^iω_2$∈L

所以对于任意$ω_0$只能取$ω_0$=a^n　n∈(0, k)

则$ω_1ω_0^iω_2$= $a^{k-n}(a^n)^ib^k$　在 i 不等于 0 时 a 与 b 的个数不同，不属于该集合

与假设矛盾。则该集合不是正则集

（3）假设该集合是正则集，对于足够大的 k 取ω= a^kca^k

令ω=$ω_1ω_0ω_2$

因为|$ω_0$|>0　|$ω_1ω_0$|≤k　存在$ω_0$使$ω_1ω_0^iω_2$∈L

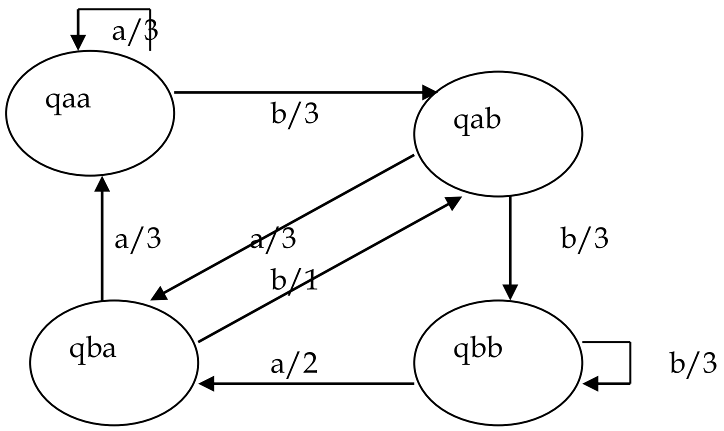
所以对于任意ω_0只能取$\omega_0=a^n$ $n\in(0,k)$
则$\omega_1\omega_0^i\omega_2= a^{k-n}(a^n)^i ca^k$ 在 i 不等于 0 时 c 前后 a 的个数不同，不属于该集合
与假设矛盾。则该集合不是正则集
（4）假设该集合是正则集，对于足够大的 k 取$\omega\omega= a^k ba^k b$
令$\omega\omega=\omega_1\omega_0\omega_2$
因为$|\omega_0|>0$ $|\omega_1\omega_0|\leq k$ 存在ω_0使$\omega_1\omega_0^i\omega_2\in L$
所以对于任意ω_0只能取$\omega_0=a^n$ $n\in(0,k)$
则$\omega_1\omega_0^i\omega_2= a^{k-n}(a^n)^i ba^k b$ 在 i 不等于 0 时不满足$\omega\omega$的形式，不属于该集合
与假设矛盾。则该集合不是正则集

18．构造米兰机和摩尔机

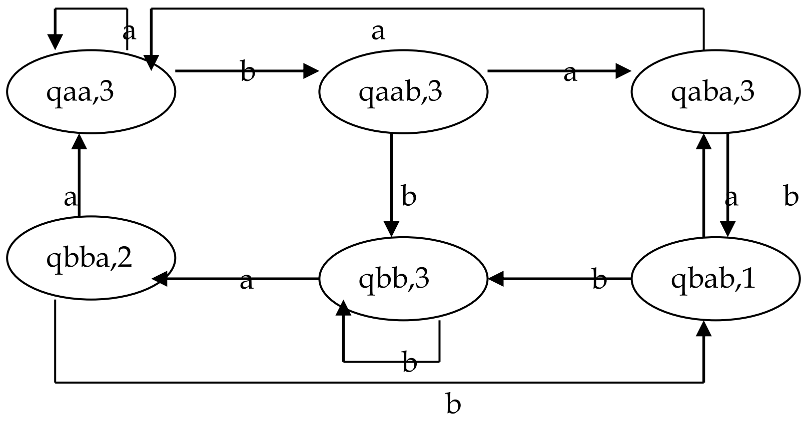
对于{a,b}*的字符串，如果输入以 bab 结尾，则输出 1；如果输入以 bba 结尾，则输出 2；否则输出 3。

答：米兰机：

说明状态 qaa 表示到这个状态时，输入的字符串是以 aa 结尾。其他同理。



摩尔机，状态说明同米兰机。



➢ 第四章

10. 把下列文法变换为无ε生成式、无单生成式和没有无用符号的等价文法：
$S \to A_1 \mid A_2, A_1 \to A_3 \mid A_4, A_2 \to A_4 \mid A_5, A_3 \to S \mid b \mid \varepsilon, A_4 \to S \mid a, A_5 \to S \mid d \mid \varepsilon$

解：⑴ 由算法 3，变换为无 ε 生成式：

$N' = \{ S, A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 \}$

$G_1 = (\{ S_1,S, A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 \} , \{ a,b,d \}, P_1 , S_1)$,其中生成式 P_1 如下：

$S_1 \to \varepsilon \mid S$,

$S \to A_1 \mid A_2$,

$A_1 \to A_3 \mid A_4$,

$A_2 \to A_4 \mid A_5$,

$A_3 \to S \mid b$,

$A_4 \to S \mid a$,

$A_5 \to S \mid d$,

⑵ 由算法 4，消单生成式：

$N_{S1} = \{ S_1,S,A_1,A_2,A_3,A_4, A_5 \}$,

$N_S = N_{A1} = N_{A2} = N_{A3} = N_{A4} = N_{A5} = \{ S, A_1,A_2,A_3,A_4, A_5 \}$,

运用算法 4，则 P_1 变为：

$S1 \to a \mid b \mid d \mid \varepsilon$,

$S \to a \mid b \mid d$,

$A_1 \to a \mid b \mid d$,

$A_2 \to a \mid b \mid d$,

$A_3 \to a \mid b \mid d$,

$A_4 \to a \mid b \mid d$,

$A_5 \to a \mid b \mid d$

⑶ 由算法 1 和算法 2，消除无用符号，得到符合题目要求的等价文法：

$G_1 = (\{ S_1 \} , \{ a,b,d \} , P_1 , S_1)$ ，其中生成式 P_1 为：$S_1 \to a \mid b \mid d \mid \varepsilon$.

11. 设 2 型文法 $G = (\{ S,A,B,C,D,E,F \} , \{ a,b,c \} , P , S)$，其中 P：

$S \to ASB \mid \varepsilon$; $A \to aAS \mid a$; $B \to SBS \mid A \mid bb$

试将 G 变换为无 ε 生成式, 无单生成式, 没有无用符号的文法, 再将其转换为 Chomsky 范式.

解：⑴ 由算法 3，变换为无 ε 生成式：

$N' = \{ S \}$

由 $S \to ASB$ 得出 $S \to ASB \mid AB$,

由 $A \to aAS$ 得出 $A \to aAS \mid aA$,

由 $B \to SBS$ 得出 $B \to SBS \mid SB \mid BS \mid B$,

由 $S \in N'$ 得出 $S_1 \to \varepsilon \mid S$,

因此无 ε 的等效文法 $G_1 = (\{ S_1,S,A,B \} , \{ a,b,d \} , P_1 , S_1)$,其中生成式 P_1 如下：

$S_1 \to \varepsilon \mid S$,

$S \to ASB \mid AB$,

$A \to aAS \mid aA \mid a$,

$B \to SBS \mid SB \mid BS \mid B \mid A \mid bb$,

⑵ 由算法 4，消单生成式：

$N_{S1} = \{ S_1,S \}$, $N_S = \{ S \}$, $N_A = \{ A \}$, $N_B = \{ A,B \}$

由于 $S \to ASB \mid AB \in P$ 且不是单生成式,故 P_1 中有 $S_1 \to \varepsilon \mid ASB \mid AB$,

同理有 $S \to ASB \mid AB$, $A \to aAS \mid aA \mid a$, $B \to SBS \mid SB \mid BS \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb$,

因此生成的无单生成式等效文法为

$G_1 = (\{S_1,S,A,B\},\{a,b\},P_1,S_1)$,其中生成式 P_1 如下：

$S_1 \to \varepsilon \mid ASB \mid AB$,

$S \to ASB \mid AB$,

$A \to aAS \mid aA \mid a$,

$B \to SBS \mid SB \mid BS \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb$,

(3) 由算法 1 和算法 2，消除无用符号(此题没有无用符号)；

(4) 转化为等价的 Chomsky 范式的文法:

将 $S1 \to ASB$ 变换为 $S \to AC$, $C \to SB$,

将 $S \to ASB$ 变换为 $S \to AC$,

将 $A \to aAS \mid aA$ 变换为 $A \to ED \mid EA$, $D \to AS$, $E \to a$,

将 $B \to SBS \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb$，变换为 $B \to CS \mid ED \mid EA \mid FF$, $F \to b$,

(5) 由此得出符合题目要求的等价文法：

$G_1 = (\{S_1,S,A,B,C,D\},\{a,b\},P_1,S_1)$,其中生成式 P_1 如下：

$S_1 \to \varepsilon \mid AC \mid AB$,

$S \to AC \mid AB$,

$A \to ED \mid EA \mid a$,

$B \to CS \mid SB \mid BS \mid ED \mid EA \mid a \mid FF$,

$C \to SB$,

$D \to AS$,

$E \to a$,

$F \to b$.

15. 将下列文法变换为等价的 Greibach 范式文法:

(1) $S \to DD \mid a$, $D \to SS \mid b$

解: 将非终结符排序为 S,D,S 为低位,D 为高位,

(1) 对于 $D \to SS$,用 $S \to DD \mid a$ 代入得 $D \to DDS \mid aS \mid b$,

用引理 4.2.4,变化为 $D \to aS \mid b \mid aSD' \mid bD'$, $D' \to DS \mid DSD'$,

(2) 将 D 生成式代入 S 生成式得 $S \to aSD \mid bD \mid aSD'D \mid bD'D \mid a$,

(3) 将 D 生成式代入 D′生成式得

$D' \to aSS \mid bS \mid aSD'S \mid bD'S \mid aSSD' \mid bSD' \mid aSD'SD' \mid bD'SD'$,

(4) 由此得出等价的 Greibach 范式文法：

$G_1 = (\{S,D,D'\},\{a,b\},P_1,S)$,其中生成式 P_1 如下：

$S \to aSD \mid bD \mid aSD'D \mid bD'D \mid a$,

$D \to aS \mid b \mid aSD' \mid bD'$,

$D' \to aSS \mid bS \mid aSD'S \mid bD'S \mid aSSD' \mid bSD' \mid aSD'SD' \mid bD'SD'$.

(2) $A_1 \to A_3b \mid A_2a$, $A_2 \to A_1b \mid A_2A_2a \mid b$, $A_3 \to A_1a \mid A_3A_3b \mid a$

解: (1) 转化为等价的 Chomsky 范式的文法:

$A_1 \to A_3A_4 \mid A_2A_5$,

$A_2 \to A_1A_4 \mid A_2A_6 \mid b$,

$A_3 \to A_1A_5 \mid A_3A_7 \mid a$,

$A_4 \to b$,

$A_5 \to a$,

$A_6 \to A_2A_5$,

$A_7 \to A_3A_4$,

⑵ 转化为等价的 Greibach 范式的文法:

将非终结符排序为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ,A_1 为低位 A_5 为高位,

①对于 $A_2 \to A_1A_4$,用 $A_1 \to A_3A_4 \mid A_2A_5$ 代入得 $A_2 \to A_3A_4A_4 \mid A_2A_5A_4 \mid A_2A_6 \mid b$,

用引理 4.2.4,变化为

$A_2 \to A_3A_4A_4 \mid b \mid A_3A_4A_4A_2' \mid bA_2'$,

$A_2' \to A_5A_4A_2' \mid A_6A_2' \mid A_5A_4 \mid A_6$,

②对于 $A_3 \to A_1A_5$,用 $A_1 \to A_3A_4 \mid A_2A_5$ 代入得 $A_3 \to A_3A_4A_5 \mid A_2A_5A_5 \mid A_3A_7 \mid a$,

A_3 生成式右边第一个字符仍是较低位的非终结符,将 A_2 生成式代入 A_3 生成式得

$A_3 \to A_3A_4A_5 \mid A_3A_4A_4A_5A_5 \mid bA_5A_5 \mid A_3A_4A_4A_2'A_5A_5 \mid bA_2'A_5A_5 \mid A_3A_7 \mid a$,

用引理 4.2.4,变化为

$A_3 \to bA_5A_5 \mid bA_2'A_5A_5 \mid a \mid bA_5A_5A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3' \mid aA_3'$,

$A_3' \to A_4A_5 \mid A_4A_4A_5A_5 \mid A_4A_4A_2'A_5A_5 \mid A_7 \mid A_4A_5A_3' \mid A_4A_4A_5A_5A_3' \mid A_4A_4A_2'A_5A_5A_3' \mid A_7A_3'$,

③对于 $A_6 \to A_2A_5$,将 A_2 生成式代入 A_6 生成式得

$A_6 \to A_3A_4A_4A_5 \mid bA_5 \mid A_3A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5$,

A_6 生成式右边第一个字符仍是较低位的非终结符,将 A_3 生成式代入 A_6 生成式得

$A_6 \to bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid bA_5$,

④对于 $A_7 \to A_3A_4$, 将 A_3 生成式代入 A_7 生成式得

$A_7 \to bA_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid aA_3'A_4$,

⑤将 A_5, A_6 生成式代入 A_2' 生成式得

$A_2' \to aA_4A_2' \mid bA_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid aA_4A_4A_5A_2' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_5A_2' \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_2' \mid bA_5A_2' \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid bA_5$,

将 A_4, A_7 生成式代入 A_3' 生成式得

$A_3' \to aA_5 \mid aA_4A_5A_5 \mid aA_4A_2'A_5A_5 \mid aA_5A_3' \mid aA_4A_5A_5A_3' \mid aA_4A_2'A_5A_5A_3' \mid bA_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid aA_3'A_4 \mid bA_5A_5A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_3' \mid aA_4A_3' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_3' \mid aA_3'A_4A_3'$,

(3) 由此得出等价的 Greibach 范式文法:

$G_1 = (\{S,D,D'\}, \{a,b\}, P_1, S)$,其中生成式 P_1 如下：

$A_1 \rightarrow A_3A_4 \mid A_2A_5$,

$A_2 \rightarrow A_3A_4A_4 \mid b \mid A_3A_4A_4A_2' \mid bA_2'$,

$A_3 \rightarrow b A_5A_5 \mid bA_2'A_5A_5 \mid a \mid bA_5A_5A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3' \mid aA_3'$,

$A_4 \rightarrow b$,

$A_5 \rightarrow a$,

$A_6 \rightarrow bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid b A_5$,

$A_7 \rightarrow b\ A_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid a\ A_4 \mid b\ A_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid aA_3'A_4$,

$A_2' \rightarrow aA_4A_2' \mid bA_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid aA_4A_4A_5A_2' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_5A_2' \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5\ \ A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_2' \mid bA_5A_2' \mid aA_4 \mid b\ A_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid b\ A_5$,

$A_3' \rightarrow aA_5 \mid aA_4A_5A_5 \mid aA_4A_2'A_5A_5 \mid aA_5A_3' \mid aA_4A_5A_5A_3' \mid aA_4A_2'A_5A_5A_3' \mid b\ A_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid aA_3'A_4 \mid bA_5A_5A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_3' \mid a\ A_4\ A_3' \mid b\ A_5A_5A_3'A_4\ A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4\ A_3' \mid aA_3'A_4A_3'$.

20. 设文法 G 有如下得生成式: $S \rightarrow aDD$, $D \rightarrow aS \mid bS \mid a$, 构造等价的下推自动机.

解: 根据 $P_{162\text{-}163}$ 的算法,构造下推自动机 M,使 M 按文法 G 的最左推导方式工作.

设 $M = (Q,T,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$,其中

$Q = \{q_0,q_f\}$,

$T = \{a,b\}$,

$\Gamma = \{a,b,D,S\}$,

$Z_0 = S$,

$F = \{q_f\}$,

δ 定义如下:

$\delta(q_0, \varepsilon, S) = \{(q_0, aDD)\}$,

$\delta(q_0, \varepsilon, D) = \{(q_0,aS), (q_0,bS), (q_0,a)\}$,

$\delta(q_0,a,a) = \{(q_0, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}$.

21. 给出产生语言 $L = \{a^ib^jc^k \mid i, j, k \geqslant 0$ 且 $i = j$ 或者 $j = k\}$的上下文无关文法.你给出的文法是否具有二义性?为什么?

解: G=({S,A,B,C,D,E},{a,b,c}，P，S)

P：$S \rightarrow AD \mid EB$, $A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$, $B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$, $D \rightarrow cD \mid \varepsilon$, $E \rightarrow aE \mid \varepsilon$

文法具有二义性。

因为当句子ω中 a,b,c 个数相同时，对于ω存在两个不同的最左(右)推导。

如 abc∈L，存在两个不同的最左推导 $S \Rightarrow AD \Rightarrow aAbD \Rightarrow abD \Rightarrow abcC \Rightarrow abc$ 及 $S \Rightarrow EB \Rightarrow aEB \Rightarrow aB \Rightarrow abBc \Rightarrow abc$ 。

22. 设下推自动机 $M = (\{q_0,q_1\},\{a,b\},\{Z_0,X\}, \delta, q_0, Z_0, \Phi)$,其中δ如下:

$\delta(q_0,b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$, $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}$,A

$\delta(q_0,b, X) = \{(q_0, XX)\}$, $\delta(q_1,b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_0,b, X) = \{(q_1, X)\}$, $\delta(q_1,a, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$,

试构造文法 G 产生的语言 L (G) = L(M).

解: 在 G 中,$N = \{ [q_0,Z_0,q_0], [q_0,Z_0,q_1], [q_0,X,q_0], [q_0,X,q_1], [q_1,Z_0,q_0], [q_1,Z_0,q_1], [q_1,X,q_0], [q_1,X,q_1] \}$.

⑴ S 生成式有

$S \to [q_0,Z_0,q_0]$,

$S \to [q_0,Z_0,q_1]$,

根据 $\delta(q_0,b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$,则有

$[q_0,Z_0,q_0] \to b[q_0,X,q_0]\ [q_0,Z_0,q_0]$,

$[q_0,Z_0,q_0] \to b[q_0,X,q_1]\ [q_1,Z_0,q_0]$,

$[q_0,Z_0,q_1] \to b[q_0,X,q_0]\ [q_0,Z_0,q_1]$,

$[q_0,Z_0,q_1] \to b[q_0,X,q_1]\ [q_1,Z_0,q_1]$,

因为有 $\delta(q_0,b, X) = \{(q_0, XX)\}$,则有

$[q_0,X,q_0] \to b[q_0,X,q_0]\ [q_0,X,q_0]$,

$[q_0, X,q_0] \to b[q_0,X,q_1]\ [q_1, X,q_0]$,

$[q_0, X,q_1] \to b[q_0,X,q_0]\ [q_0, X,q_1]$,

$[q_0, X,q_1] \to b[q_0,X,q_1]\ [q_1, X,q_1]$,

因为有 $\delta(q_0,a, X) = \{(q_1, X)\}$,则有

$[q_0,X,q_0] \to a[q_1,X,q_0]$,

$[q_0,X,q_1] \to a[q_1,X,q_1]$,

因为有 $\delta(q_1,a, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$,则有

$[q_1,Z_0,q_0] \to a[q_0,Z_0,q_0]$,

$[q_1,Z_0,q_1] \to a[q_0,Z_0,q_1]$,

因为有 $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}$,则有

$[q_0,Z_0,q_0] \to \varepsilon$,

因为有 $\delta(q_1,b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,则有

$[q_1,X,q_1] \to \varepsilon$

⑵ 利用算法 1 和算法 2,消除无用符号后,得出文法 G 产生的语言 L(G) = { N,T,P,S }

其中 $N = \{ S,[q_0,Z_0,q_0],[q_1,Z_0,q_0],[q_1,X,q_1], [q_0,X,q_1] \}$,T = { a,b },生成式 P 如下:

$S \to [q_0,Z_0,q_0]$,

$[q_0,Z_0,q_0] \to b[q_0,X,q_1]\ [q_1,Z_0,q_0]$,

$[q_0, X,q_1] \to b[q_0,X,q_1]\ [q_1, X,q_1]$,

$[q_0,X,q_1] \to a[q_1,X,q_1]$,

$[q_1,Z_0,q_0] \to a[q_0,Z_0,q_0]$,

$[q_0,Z_0,q_0] \to \varepsilon$,

$[q_0,Z_0,q_0] \to \varepsilon$.

23. 证明下列语言不是上下文无关语言:

(1) $\{ a^n b^n c^m \mid m \leqslant n \}$;

证明: 假设 L 是上下文无关语言, 由泵浦引理, 取常数 p, 当 $\omega \in L$ 且 $|\omega| \geqslant p$ 时, 可取 $\omega = a^p b^p c^p$, 将 ω 写为 $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_0 \omega_3 \omega_4$, 同时满足 $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| \leqslant p$

(1) ω_2和ω_3不可能同时分别包含 a 和 c, 因为在这种情况下, 有 $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| > p$;

(2) 如果ω_2和ω_3都只包含 a (b), 即 $\omega_2 \omega_0 \omega_3 = a^j$ (b^j) ($j \leqslant p$), 则当 $i \neq 1$ 时, $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$中会出现 a 的个数与 b 的个数不等;

如果ω_2和ω_3都只包含 c, 即 $\omega_2 \omega_0 \omega_3 = c^j$ ($j \leqslant p$), 当 i 大于 1 时, $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$中会出现 c 的个数大于 a 的个数 (b 的个数);

(3) 如果ω_2和ω_3分别包含 a 和 b (b 和 c), 当 i=0 时 $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$中会出现 a, b 的个数小于 c 的个数 (或 a, b 个数不等)

这些与假设矛盾, 故 L 不是上下文无关语言.

(2) $\{ a^k \mid k$ 是质数 $\}$;

证明: 假设 L 是上下文无关语言, 由泵浦引理, 取常数 p, 当 $\omega \in L$ 且 $|\omega| \geqslant p$ 时, 可取 $\omega = a^k$ ($k \geqslant p$ 且 $k \neq 1$), 将 ω 写为 $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_0 \omega_3 \omega_4$, 同时满足 $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| \leqslant p$, 且

$|\omega_2 \omega_3| = j \geqslant 1$, 则当 $i=k+1$ 时, $|\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4| = k+(i-1)*j = k+k*j = k*(1+j)$, $k*(1+j)$至少包含因子 k 且 $k \neq 1$, 因此必定不是质数, 即 $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$不属于 L.

这与假设矛盾, 故 L 不是上下文无关语言.

(3) 由 a, b, c 组成的字符串且是含有 a, b, c 的个数相同的所有字符串.

证明: 假设 L 是上下文无关语言, 由泵浦引理, 取常数 p, 当 $\omega \in L$ 且 $|\omega| \geqslant p$ 时, 可取 $\omega = a^k b^k c^k$ ($k \geqslant p$), 将 ω 写为 $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_0 \omega_3 \omega_4$, 同时满足 $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| \leqslant p$

(1) ω_2和ω_3不可能同时分别包含 a 和 c, 因为在这种情况下, 有 $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| > p$;

(2) 如果ω_2和ω_3都只包含 a (b 或 c), 即 $\omega_2 \omega_0 \omega_3 = a^j$ (b^j或 c^j) ($j \leqslant p$), 则当 $i \neq 1$ 时, $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$中会出现 a, b, c 的个数不再相等;

(3) 如果ω_2和ω_3分别包含 a 和 b (b 和 c), $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$中会出现 a, b 的个数与 c 的不等;

这些与假设矛盾, 故 L 不是上下文无关语言.

24. 设 G 是 Chomsky 范式文法,存在 $\omega \in L(G)$, 求在边缘为 ω 的推导树中,最长的路径长度与 ω 的长度之间的关系.

解: 设边缘为 ω 的推导树中,最长路径长度为 n,则它与 ω 的长度之间的关系为 $|\omega| \leqslant 2^{n-1}$.

因为由 Chomsky 范式的定义可知,Chomsky 范式文法的推导树都是二叉树,在最长路径长度为 n 的二叉推导树中,满二叉树推出的句子长度最长,为 2^{n-1},因此 ω 的长度与其推导树的最长路径长度 n 的关系可以用上式表示.

25. 设计 PDA 接受下列语言(注意:不要求为确定的)

(1) $\{ 0^m 1^n \mid m \leqslant n \}$;

解: 设 PDA $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$,其中

$Q = \{ q_0, q_1, q_f \}$,

$T = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0,1, Z_0\}$,

$F = \{q_f\}$,

δ定义如下:

$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$,

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$,

$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$,

$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, 1, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

$\delta(q_f, 1, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

⑵ $\{0^m 1^n \mid m \geqslant n\}$;

解: 设 PDA $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$,其中

$Q = \{q_0, q_1, q_f\}$,

$T = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0,1, Z_0\}$,

$F = \{q_f\}$,

δ定义如下:

$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$,

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$,

$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$,

$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_1, \varepsilon, 0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

$\delta(q_f, 1, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

⑶ $\{0^m 1^n 0^m \mid$ n 和 m 任意 $\}$;

解: 设 PDA $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$,其中

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}$,

$T = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0,1, Z_0\}$,

$F = \{q_f\}$,

δ定义如下:

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$,

$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00), (q_0, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_3, 1, \varepsilon) = \{(q_3, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_3, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_1, 0)\}$,

$\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_1, 0)\}$,

$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$,

$\delta(q_2,0,0) = \{(q_2,\varepsilon)\}$,
$\delta(q_2,\varepsilon,Z_0) = \{(q_f,\varepsilon)\}$,
$\delta(q_0,\varepsilon,Z_0) = \{(q_f,\varepsilon)\}$nm

➢ 第五章

1. 考虑如下的图灵机 $M = (\{q_0, q_1, q_f\},\{0,1\},\{0,1,B\}, \delta, q_0,B,\{q_f\})$,其中 δ 定义为:
$\delta(q_0,0) = \{(q_1,1,R)\}$, $\delta(q_1,1) = \{(q_0,0,R)\}$, $\delta(q_1,B) = \{(q_f,B,R)\}$,
非形式化但准确地描述该图灵机的工作过程及其所接受的语言.

解: 开始时,M的带上从左端起放有字符串 $0(10)^i$ $(i\geqslant 0)$,后跟无限多个空白符B.M的第一次动作先读到第一个0,并改写为1;然后右移,如果找到第一个1,则改写为0,并继续向右寻找下一个0,这样重复进行.当向右寻找1的时候,找到一个空白符B,则结束.
该图灵机所接受的语言 $L(M) = \{0(10)^i \mid i\geqslant$