

第一章 图论高级算法

1.1 最大流

最大流算法分成两大类：增广路（augmenting path）算法与预流推进（preflow-push）算法。这一节介绍的三个算法，都属于增广路算法。下面给出几个术语和定义。

流网络

最大流问题（maximum flow problem）是网络流问题（network flow problem）的一种。网络流问题的研究对象是流网络（flow network），在某些文献中流网络也称作网络流图（network flow graph）。流网络 $G = (V, E, c, s, t)$ 是一个有向图， V 、 E 是其点集与边集，点和边的数目分别记作 n 、 m 。 $c: V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ 是边的容量函数，每条边 $(u, v) \in E$ 都有一容量 $c(u, v) \in \mathbb{N}$ ，若 $(u, v) \notin E$ 则 $c(u, v) = 0$ 。 s 和 t 是流网络中的两个特殊点，分别称作源点和汇点。为简便计，流网络简称「网络」或「图」，简记作 $G = (V, E)$ 。

自环在网络中无意义，我们规定图 G 中不含自环。下文在论述、证明关于网络流的原理、性质或定理时，为了表示上的方便，我们对流网络做出两条限定：

1. 图中不存在重边；
2. 图中不存在反向边，即若 $(u, v) \in E$ ，则 $(v, u) \notin E$ 。

这两条限定都不妨碍一般性。我们可以通过将容量相加把重边合为一条边，反向边可以通过新增一个节点来消除。请读者注意，上文所谓「表示上的方便」是指一条边可以通过两个端点唯一确定。下文我们要介绍的算法和代码可以处理含有重边或反向边的图，这两条限定都不是根本性的，仅仅是为了方便表述而已。

流

流是满足下述两个性质的实值函数 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

容量限制: 对任意 $u, v \in V$, 有 $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ 。

流守恒: 对任意 $u \in V - \{s, t\}$, 有 $\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$

$f(u, v)$ 即边 (u, v) 上的流量, 若 $(u, v) \notin E$, $f(u, v) = 0$ 。从源点 s 到汇点 t 的总流量称作流 f 的值, 记作 $|f|$, 不难得出

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s),$$

最大流问题即在给定的网络 G 中求一个值最大的流。

1.1.1 增广路方法

增广路方法是求解最大流问题的一种方法。本章要介绍的三个最大流算法都是基于增广路方法的。增广路算法涉及三个重要概念: 残量网络, 增广路, 割。

残量网络

给定流网络 $G = (V, E)$ 和 G 上的一个流 f , 残量网络 $G_f = (V, E_f, c_f, s, t)$ 是由 G 和 f 所导出的一个网络, 简记作 $G_f = (V, E_f)$ 。首先定义残余容量 c_f :

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{若 } (u, v) \in E, \\ f(v, u) & \text{若 } (v, u) \in E, \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

这里需要指出我们提出限制 2 的用意。 $(u, v) \in E$ 和 $(v, u) \in E$ 同时成立会给 c_f 的定义带来形式上的不便。残量网络 G_f 的边集 E_f 定义为

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V: c_f(u, v) > 0\}.$$

除了可能含有反向边, 残量网络也符合流网络的定义; 而我们已经指出「不含反向边」并非根本性的要求, 借助残余容量 c_f , 我们可以类似地定义残量网络上的流, 称作残量流。

我们考虑残量流的原因在于，借助残量网络 G_f 上的残量流 f' ，可以将网络 G 上的流 f 修改成一个值更大的流 $f \uparrow f'$ ；即用 f' 增广 f ，这正是「增广」二字含义所在。增广方法为：

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{若 } (u, v) \in E, \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

不难证明 $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$ 。

增广路

增广路是残量网络 G_f 上从 s 到 t 的一条简单路径。有了增广路 p ，很容易得到一个残量流 f_p 。

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{若边 } (u, v) \text{ 在路径 } p \text{ 上,} \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

其中 $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ 在路径 } p \text{ 上}\}$ ， $c_f(p)$ 称作路径 p 的残余容量。易见， $|f_p| = c_f(p) > 0$ 。

增广路方法即，从图 G 上的某个初始流 f （比如零流）开始，在 G_f 找一条增广路 p ；沿着 p 增广，更新 f 和 G_f ；如此循环，直到 G_f 上找不到增广路。此时 f 便是 G 上的一个最大流。下面要介绍的最大流最小割定理证明了增广路方法的正确性。

流网络的割

为了给出最大流最小割定理，我们先介绍割的概念。将流网络 $G = (V, E)$ 的点集 V 划分成两个子集 S 和 $T = V - S$ 使得 $s \in S$ 且 $t \in T$ ， (S, T) 称作 G 的一个割。令 f 为 G 上的一个流，割 (S, T) 之间的净流 $f(S, T)$ 定义为

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

不难证明，对 G 的任意一个割 (S, T) 都有 $f(S, T) = |f|$ 。割 (S, T) 的容量 $c(S, T)$ 定义为

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

网络的最小割即所有割之中容量最小者。显然, 对于 G 上的任意一个流 f 和 G 的任意一个割 (S, T) 都有 $|f| \leq c(S, T)$ 。

定理 1 (最大流最小割定理). 若 f 是流网络 $G = (V, E, c, s, t)$ 上的一个流, 则下列三个命题等价:

1. f 是 G 上的一个最大流。
2. 残量网络 G_f 上无增广路。
3. 存在某个割 (S, T) 满足 $|f| = c(S, T)$ 。

证明. (1) \Rightarrow (2): 显然。

(2) \Rightarrow (3): 假设 G_f 中无增广路, 即 G_f 上不存在从 s 到 t 的路径。令 $S = \{v \in V: G_f \text{ 上有从 } s \text{ 到 } v \text{ 的路径}\}, T = V - S$, 易见 $t \notin S$, 则 (S, T) 是一个割。考虑点对 $u \in S$ 和 $v \in T$ 。若 $(u, v) \in E$, 则必有 $f(u, v) = c(u, v)$; 因为若不然则有 $(u, v) \in E_f$, 即 $v \in S$ 。若 $(v, u) \in E$, 则必有 $f(v, u) = 0$; 因为若不然则有 $c_f(u, v) = f(v, u) > 0$, 即 $(u, v) \in E_f$, 仍有 $v \in S$ 。若 $(u, v) \notin E$ 且 $(v, u) \notin E$, 则 $f(u, v) = f(v, u) = 0$ 。因此我们有

$$\begin{aligned} f(S, T) &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} 0 \\ &= c(S, T) \end{aligned}$$

所以 $|f| = f(S, T) = c(S, T)$ 。

(3) \Rightarrow (1): 由于对任意割 (S, T) 都有 $|f| \leq c(S, T)$, $|f| = c(S, T)$ 蕴含着 f 是一个最大流。□

不难看出, 高效地实现增广路方法应从两个方面考虑:

1. 如何快速地在残量网络 G_f 上找一条增广路。
2. 如何减少增广的次数。

我们已经知道, 通过深度优先搜索 (DFS) 或宽度优先搜索 (BFS) 可在线性时间内找到一条增广路。在下一小节中我们将证明, 如果每次都沿着最短增广路 (shortest augmenting path, SAP) 增广, 那么增广次数是 $O(VE)$ 的。沿着最短增广路增广的算法统称为最短增广路算法。下面三个小节中要介绍的算法都属于最短增广路算法。

1.1.2 Edmonds-Karp 算法

Edmonds-Karp 是 SAP 算法的朴素实现。代码如下：

```
#include <climits>
#include <algorithm>
const int N = 1e5 + 5, M = 1e5 + 5;
struct Edge{
    int v, rc, next;    //rc: residual capacity
}E[M * 2];
int head[N], sz, n, m, s, t;
void add_edge(int u, int v, int c){
    E[sz] = {v, c, head[u]};
    head[u] = sz++;
    E[sz] = {u, 0, head[v]};
    head[v] = sz++;
}
void init(){
    sz = 0;
    memset(head, -1, sizeof(int[n + 1]));
}
int pre[N], q[N];
int ek(){
    for(int ans = 0; ; ){
        int beg = 0, end = 0;
        memset(pre, -1, sizeof(int[n + 1])); q[end++] = s;
        while(beg < end){
            int u = q[beg++];
            for(int i = 0; i != -1; i = E[i].next){
                if(E[i].rc > 0 && pre[E[i].v] == -1)
                    if(E[i].v == t){
                        int cp = INT_MAX;
                        for(int j = i; j != -1; j = pre[E[j ^ 1].v])
                            cp = std::min(cp, E[j].rc);
                        for(int j = i; j != -1; j = pre[E[j ^ 1].v])
```

```

        E[j].rc -= cp, E[j ^ 1].rc += cp;
        ans += cp;
        break;
    }
    else{
        pre[E[i].v] = i;
        q[end++] = E[i].v;
    }
}
}
if(pre[t] == -1) return ans;
}
}

```

说明:

1. 用链式前向星存图。
2. 对任意边 $e \in E$, e 在边数组中的下标 $\text{idx}(e)$ 为偶数, e 的反向边 e' 的下标 $\text{idx}(e') = \text{idx}(e) + 1$ 。

下面我们来分析 Edmonds-Karp 算法的时间复杂度。用 $\delta_f(u, v)$ 表示残量网络 G_f 上从 u 到 v 的距离, G_f 中边的长度都是 1。

引理 1. 用 Edmonds-Karp 算法求流网络 $G = (V, E, c, s, t)$ 的最大流的过程中, 对任意节点 $v \in V - \{s, t\}$, 残量网络 G_f 上从源点 s 到 v 的距离 $\delta_f(s, v)$ 在每次增广之后不会减小。

证明. 假设此命题不成立。设 v 是 $V - \{s, t\}$ 中一点; 令 f 为「 s 到 v 的距离减小」首次出现之前的流, 令 f' 为 f 增广之后的流。再令 v 为满足 $\delta_f(s, v) > \delta_{f'}(s, v)$ 的点中 $\delta_{f'}(s, v)$ 最小的一个点。令 $p = s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ 为 $G_{f'}$ 中从 s 到 v 的一条最短路, 因而有 $(u, v) \in E_{f'}$ 且

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) - 1. \quad (1.1)$$

又由于 v 是满足 $\delta_f(s, v) > \delta_{f'}(s, v)$ 的点中 $\delta_{f'}(s, v)$ 最小者, 我们有

$$\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u). \quad (1.2)$$

由上两式我们能推导出 $(u, v) \notin E_f$ 。若不然, 即 $(u, v) \in E_f$, 则有

$$\begin{aligned}\delta_f(s, v) &\leq \delta_f(s, u) + 1 && \text{依据三角形不等式} \\ &\leq \delta_{f'}(s, u) + 1 && \text{依据 (1.2) 式} \\ &= \delta_{f'}(s, v) && \text{依据 (1.1) 式}\end{aligned}$$

这与 $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$ 矛盾。

由 $(u, v) \notin E_f$ 且 $(u, v) \in E_{f'}$, 我们可以推知在 G_f 上所选的那条增广路一定经过了边 (v, u) 。因此有

$$\begin{aligned}\delta_f(s, v) &= \delta_f(s, u) - 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s, u) - 1 && \text{(根据 (1.2) 式)} \\ &= \delta_{f'}(s, v) - 2 && \text{(根据 (1.1) 式)}\end{aligned}$$

这与我们的假设 $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$ 相矛盾。 \square

定理 2. 在流网络 $G = (V, E, c, s, t)$ 上, *Edmonds-Karp* 算法的总增广次数为 $O(V|E|)$ 。

证明. 设 p 为残量网络 G_f 中的一条增广路, (u, v) 为 p 上的一条边。若有 $c_f(p) = c_f(u, v)$, 则称 (u, v) 为 p 的瓶颈边。不难看出, (i) 沿着 p 增广后, p 上的瓶颈边都消失了; (ii) p 上至少有一条瓶颈边。下面我们证明: 一条边在 G_f 上成为瓶颈边的次数至多为 $|V|/2$ 。

令 (u, v) 为残量网络 G_f 中的一条边。当 (u, v) 首次成为瓶颈边时, 我们有

$$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1.$$

增广之后, 边 (u, v) 将从残余网络中消失。下一次 (u, v) 出现在残量网络中, 必然是在某次 (v, u) 出现在增广路上之后。设上述「 (v, u) 成为增广路上的边」这一情况发生时 G 上的流为 f' , 则有

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1.$$

根据引理 1 有 $\delta_f(s, v) \leq \delta_{f'}(s, v)$, 因而有

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s, u) &= \delta_{f'}(s, v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s, v) + 1 \\ &= \delta_f(s, u) + 2.\end{aligned}$$

所以从某次 (u, v) 成为瓶颈边到 (u, v) 下一次成为瓶颈边, 从源点 s 到 u 的距离至少增加 2。初始时 s 到 u 的距离至少为 0。从 s 到 u 的最短路上的中间节点必定不包含 s, u 或者 t (边 (u, v) 在最短路蕴含着 $u \neq t$)。因此, 只要 $s \rightsquigarrow u$ 的路径存在, s 到 u 的距离至多为 $|V| - 2$ 。所以在 (u, v) 首次成为瓶颈边之后, 它最多还能在成为 $(|V| - 2)/2 = |V|/2 - 1$ 次瓶颈边, 共计 $|V|/2$ 次。又由于在残量网络上有 $O(E)$ 对点之间可能有边相连, 在 Edmonds-Karp 算法运行过程中瓶颈边的总数是 $O(VE)$ 的。□

我们可以通过 BFS 在 $O(E)$ 的时间内在残量网络上找到一条 $s \rightsquigarrow t$ 最短路, 因此 Edmonds-Karp 算法的时间复杂度为 $O(VE^2)$ 。严格说来, BFS 的时间复杂度应为 $O(V + E)$; 但是在流网络 G 中一个点应至少有一条边与其相连 (孤立的点是无意义的) 所以我们有 $|V| \leq 2|E|$ 。

1.1.3 Dinic 算法

Dinic 算法是对 Edmonds-Karp 算法的改进, 它的时间复杂度是 $O(n^2m)^1$ 。下面给出 Dinic 算法的代码, 其中图的表示部分与 Edmonds-Karp 算法的代码相同, 故略去。

```
#include <algorithm>
#include <climits>
int q[N], n, m, s, t;
bool bfs(){
    memset(level, -1, sizeof(int[n + 1]));
    int beg = 0, end = 0;
    level[s] = 0; q[end++] = s;
    while(beg < end){
        int u = q[beg++];
        for(int i = head[u]; i != -1; i = E[i].next)
            if(E[i].rc && level[E[i].v] == -1){
                level[E[i].v] = level[u] + 1;
                if(E[i].v == t) return true;
                q[end++] = E[i].v;
            }
    }
```

¹在 §1.1 中, 我们约定了 $n = |V|$, $m = |E|$ 。


```

    }
    return false;
}
using LL = long long;
LL dfs(int u, LL rc){
    if(u == t) return rc;
    LL total = 0;
    for(int &i = cur[u]; i != -1; i = E[i].next)
        if(level[E[i].v] == level[u] + 1 && E[i].rc > 0){
            int tmp = dfs(E[i].v, std::min(rc, LL(E[i].rc)));
            if(tmp > 0){
                E[i].rc -= tmp;
                E[i ^ 1].rc += tmp;
                total += tmp;
                rc -= tmp;
                if(rc == 0) break;
            }
        }
    return total;
}
LL dinic(){
    LL ans = 0;
    while(bfs()){
        memcpy(cur, head, sizeof(int[n + 1]));
        for(LL f; f = dfs(s, LLONG_MAX); ans += f);
    }
    return ans;
}

```

先介绍 Dinic 算法用到的两个概念：分层图（level graph）和阻塞流（blocking flow）。

分层图

设 f 是网络 G 上的一个流, 以 s 为起点对 G_f 做一次 BFS, 将 s 到 u 的距离记作 $\text{level}(u)$ 。 G_f 的分层图 G'_f 是由 G_f 所导出的一个流网络。 G'_f 定义为

$$G'_f = (V, E'_f, c'_f, s, t)$$

其中

$$E'_f = \{(u, v) \in E_f : \text{level}(v) = \text{level}(u) + 1\}$$

$$c'_f(u, v) = \begin{cases} c_f(u, v), & (u, v) \in E'_f; \\ 0, & (u, v) \notin E'_f. \end{cases}$$

简记作 $G'_f = (V, E'_f)$ 。

阻塞流

首先要指出的是, 由 G_f 所导出的分层图 G'_f 完全符合 §1.1 中流网络的定义 (G'_f 与 G_f 不同的地方在于 G'_f 中一定不含有反向边)。此外, 不难看出 G'_f 中的任意一条 $s \rightsquigarrow t$ 路径都是 $s \rightsquigarrow t$ 最短路。

设 f 是网络 $G = (V, E)$ 上的一个流, $(u, v) \in E$ 是 G 上的一条边; 若 $f(u, v) = c(u, v)$ 则称边 (u, v) 是饱和的。又设 f' 是层次图 G'_f 上的一个流, 若 G'_f 中的任意一条 $s \rightsquigarrow t$ 路径上都至少一条饱和边, 则称 f' 是 G'_f 上的一个阻塞流。注意, G'_f 上阻塞流未必是 G'_f 上的最大流。

下面考虑如何构造阻塞流。前面已经提到, 层次图 G'_f 是一个流网络; 所以一个自然的想法便是在 G'_f 上不断地寻找增广路²并沿着找到的增广路增广; 每次增广至少会使一条边饱和, 所以增广次数是有限的。在分层图上找到一条 $s \rightsquigarrow t$ 增广路的复杂度是 $O(m)$, 而增广路的数量也是 $O(m)$ 的, 所以朴素地实现上述过程的复杂度是 $O(m^2)$ 。

²准确地说应该是「在 G'_f 的残量网络上找增广路」, 但我们在 G'_f 要求的是一个阻塞流而不是最大流, 无须考虑反向边。

1.1.4 ISAP 算法

1.1.5 网络流的建图

1.2 费用流

1.3 二分图

1.3.1 最大流和二分图

1.3.2 匈牙利算法

1.3.3 二分图模型应用

1.4 图的连通

1.4.1 强连通-Tarjan 算法

1.4.2 双连通

1.4.3 2-SAT 问题