Kapitel 1 - Normierte Vektorräume

Vektorräume

Eine Menge V heißt $\mathbb{K}$-Vektorraum, wenn:
1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
2. $\forall \mathbf{v} \in V \forall k \in \mathbb{K} : k \cdot \mathbf{v} \in V$
3. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$
4. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V : (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$
5. $\forall \mathbf{v} \in V \exists \mathbf{0} \in V : \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
6. $\forall \mathbf{v} \in V \exists \mathbf{v}' \in V : \mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{v} = \mathbf{0}$
7. $\forall \mathbf{v} \in V \exists 1 \in \mathbb{K} : 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
8. $\forall \mathbf{v} \in V \forall k, l \in \mathbb{K} : (k \cdot l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot (l \cdot \mathbf{v})$
9. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \forall k \in \mathbb{K} : k \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = k \cdot \mathbf{v}_1 + k \cdot \mathbf{v}_2$
10. $\forall \mathbf{v} \in V \forall k, l \in \mathbb{K} : (k + l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v}$

Vektorräume im $\mathbb{K}^n$

Ist $V \subseteq \mathbb{K}^n$, dann ist V ein $\mathbb{K}$-VR, g.d.w.:
1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V : \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
2. $\forall \mathbf{v} \in V \forall k \in \mathbb{K} : k \cdot \mathbf{v} \in V$

(Die Addition und Skalarmultiplikation ist hierbei komponentenweise).

Wichtige Vektorräume

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

$\mathcal{C}^k(D)$ für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ - Raum der k-mal stetig diff.baren Funktionen mit Definitionsbereich D.

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) :=$
$\{f : \Omega \to \mathbb{K} | f \text{ ist messbar}, \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$

Normierte Vektorräume

Sei X ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Fkt. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf X, wenn:
1. $\forall \mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$
2. $\forall \mathbf{x} \in X \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
3. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ heißt normierten Vektorraum

Wichtige Normen

$\|\mathbf{x}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ heißt allgemein p-Norm.
$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ heißt Maximumsnorm.
$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ heißt Summennorm.
$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt[2]{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ heißt Euklidische Norm.
$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ heißt Frobeniusnorm.
$\|[f]\|_{L^p(\Omega)} := (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ heißt L^p-Norm.
$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| | x \in D\}$ heißt Supremumsnorm

Offene und abgeschlossene Mengen

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter VR. Wir definieren:
$B_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{y \in X | \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$ (offener Ball um $\mathbf{x}$).
$\bar{B}_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{y \in X | \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon\}$ (abgesch. Ball um $\mathbf{x}$).
$S_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{y \in X | \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon\}$ (Sphäre um $\mathbf{x}$).

$\mathbf{x}$ ist innerer Punkt von A, wenn $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq A$. Die Menge aller inneren Punkte von A heißt das Innere von A (A° oder int A).
$\mathbf{x}$ heißt Randpunkt von A, wenn $\forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ und $A^c \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. Die Menge aller Randpunkte von A heißt der Rand von A (∂A).
Die Menge $\bar{A} = A \cup \partial A$ heißt Abschluss von A.
$\mathbf{x}$ heißt Häufungspunkt von A, wenn $\forall \varepsilon > 0 : |A \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})| = \infty$
$\mathbf{x}$ heißt isolierter Punkt von A, wenn $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$.

A heißt offen in X, wenn $A = A^\circ$.
A heißt abgeschlossen in X, wenn A^c offen ist.

Eigenschaften von offenen/abges. Mengen

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter VR, $A \subseteq X$, $A_i \subseteq X$ offen $\forall i \in \mathbb{N}$ und $B_j \subseteq X$ abgeschlossen $\forall j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. A ist offen $\iff$ $\bar{A}$ ist abgeschlossen.
2. X und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.
3. $\forall \mathbf{x} \in X : \{\mathbf{x}\}$ ist abgeschlossen.
4. $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ offen.
5. $\bigcap_{i=1}^n A_i$ offen.
6. $\bigcap_{j=1}^\infty B_j$ abgeschlossen.
7. $\bigcup_{j=1}^n B_j$ abgeschlossen.

Beispiel von offenen/abges. Mengen

1. Für $X = \mathbb{R}$ und $A = (0, 1]$ ist $A^\circ = (0, 1)$, $\partial A = \{0, 1\}$, $\bar{A} = [0, 1]$
2. Für $X = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{Q}$ ist $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \bar{A} = \mathbb{R}$

Konvergenz in normierten VR

Sei $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge im normierten VR $(X, \|\cdot\|)$

1. $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn $\{\|\mathbf{x}^k\| | k \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
2. $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent mit Limes $\mathbf{y} \in X$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k > N : \|\mathbf{x}^k - \mathbf{y}\| < \varepsilon$
3. $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge in X, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l > N : \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l\| < \varepsilon$
4. $\mathbf{y} \in X$ heißt Häufungspunkt von $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 : |\{\mathbf{x}^k | k \in \mathbb{N}\} \cap B_\varepsilon(\mathbf{y})| = \infty$

Konvergenzsätze

Sei $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge im normierten VR $(X, \|\cdot\|)$
1. $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies$ $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.
2. $\mathbf{y} \in X$ ist Häufungspunkt von $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\iff$ $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge die gegen $\mathbf{y}$ konvergiert.
3. $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\implies$ $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.
4. Sei $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^n$:
$(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff$ $\forall j : (x_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
$(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy $\iff$ $\forall j : (x_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy.
5. $A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\iff$ Der Grenzwert jeder Folge in A, die in X konvergiert, hat ihren Grenzwert in A.

Banachraum

Ein normierten VR $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert. Ein vollständiger normierter VR heißt Banachraum.

Banachraum Sätze

1. Sei $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge im Banachraum $(X, \|\cdot\|)$.
$(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff$ $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.
2. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter VR, dann ist X ein Banachraum.

Banachraum Beispiel

1. $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.
2. Kein Banachraum
3. Bsp. 1.33 (b) im Skript ist kein Banachraum.

Ab jetzt bezeichnen wir die normierten Vektorräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ als X und Y.

Grenzwerte und Stetigkeit

Sei $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ eine Fkt. Ist $\mathbf{x}^0 \in X$ ein HP von A, dann sagen wir f hat den Grenzwert/Limes $\mathbf{y}^0 \in Y$ für $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}^0) \setminus \{\mathbf{x}^0\} : \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^0\| < \varepsilon$.

Ist $\mathbf{x}^0 \in A$, so heißt f stetig in $\mathbf{x}^0$, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}^0) : \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)\| < \varepsilon$.
f heißt stetig in A, wenn $\forall \mathbf{x}^0 \in A : f$ ist stetig in $\mathbf{x}^0$.

Folgenkriterium für Stetigkeit

Sei $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ eine Fkt. Ist $\mathbf{x}^0 \in X$ ein HP von A, dann gilt:

1. $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^0 \iff \forall (x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $A \setminus \{\mathbf{x}^0\}$: $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 \implies \lim\limits_{k \to \infty} f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{y}^0$
2. f ist in $\mathbf{x}^0$ stetig $\iff \forall (x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A : $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 \implies \lim\limits_{k \to \infty} f(\mathbf{x}^k) = f(\mathbf{x}^0)$

Koordinatenfunktionen und Projektionen

1. Die Funktion $\pi_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \pi_j(z_1, \dots, z_n) := z_j$ heißt Projektion.
2. Für $A \subseteq X$ und die Fkt. $f : A \to \mathbb{K}^n$ heißen die Funktionen $f_j := f \circ \pi_j : A \to \mathbb{K}$ Koordinatenfunktionen von f.

Stetigkeit von Koord.fkt. und Proj.

1. Konstante Funktionen sind stetig.
2. Ist $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^n$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} z^k = z^0$, so gilt $\forall j \in \{1, \dots, n\} : \lim\limits_{k \to \infty} z_j^k = z_j^0$ und daher sind alle Projektionen $\pi_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \pi_j(z_1, \dots, z_n) := z_j$ stetig.
3. Für $A \subseteq X, \mathbf{x}^0 \in A$ und die Fkt. $f : A \to \mathbb{K}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ gilt:
f ist stetig in $\mathbf{x}^0 \iff$ alle f_j sind stetig in $\mathbf{x}^0$.

Stetigkeit von Verknüpfungen

Seien $f, g : X \to Y$ Fkt. stetig in $\mathbf{x}^0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind $f+g, \lambda f, f \cdot g, \frac{f}{g}$ für $g \neq 0$, $|\, f \,|$, $\max\{g, f\}$, $\min\{g, f\}$, $f^+ = \max\{0, f\}$ und $f^- = -\min\{0, f\}$ stetig in $\mathbf{x}^0$ sofern überhaupt wohldefiniert.

Ist Z ein weiterer normierter VR und $h : Y \to Z$ eine Fkt. die stetig in $f(\mathbf{x}^0)$ ist. Dann ist $h \circ f : X \to Z$ stetig in $\mathbf{x}^0$, sofern überhaupt wohldefiniert.

Stetigkeit Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x, z) := x^z = \exp(z \log(x))$. f ist stetig, weil $f(x, z) = \exp(\pi_2(x, z) \log(\pi_1(x, z)))$ bzw. $f = \exp \circ (\pi_2 \cdot (\log \circ \pi_1))$ eine Verkettung bzw. Multiplikation stetiger Funktionen ist und somit laut dem Satz oben wieder stetig ist.

Stetigkeit bezüglich Koordinaten

Sei $f : \mathbb{K}^n \to Y$ und $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{K}^n$. Wir nennen f stetig in $\mathbf{x}^0$ bezüglich der j-ten Komponente x_j^0, wenn die Funktion $\phi : \mathbb{K} \to Y$ mit
$\phi(x) := f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$
stetig in $x = x_j^0$ ist.

Lemma: Ist f stetig in x^0, so ist f stetig in jeder Komponente von x^0. **!** Umkehrung gilt nicht im allgemeinen.

Stetigkeit bezüglich Koordinaten Beispiel

f kann in allen Komponenten von $\mathbf{x}^0$ stetig sein ohne in $\mathbf{x}^0$ stetig zu sein. Sei $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$. Definiere $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ mit
$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 x_2 = 0 \\ 1 & x_1 x_2 \neq 0 \end{cases}$, dann sind
$\phi_1(x_1) := f(x_1, 0), \phi_2(x_2) := f(0, x_2)$ beide konstant gleich 0 und somit stetig in $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$. Also ist f stetig in jeder Komponente von $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$. Aber f ist nicht stetig in $\mathbf{x}^0$, weil z.B. für die Folge
$(x_1^k, x_2^k) = \begin{cases} (\frac{1}{k}, 0) & \text{für k gerade} \\ (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) & \text{für k ungerade} \end{cases}$ gilt, dass
$\lim\limits_{k \to \infty} (x_1^k, x_2^k) = (0, 0)$, jedoch $f(x_1^k, x_2^k) = 1$ für alle ungeraden k. Also konvergiert $f(x_1^k, x_2^k)$ nicht gegen $f(0, 0) = 0$ und somit ist f nicht stetig in $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$.

Monome/Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$.
p heißt Multiindex und $|\, p \,| := p_1 + \dots + p_n$ heißt Grad von p.
Für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ setze $x^p := x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}$.
Die Funktion $f(\mathbf{x}) = x^p = x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}$ heißt Monom vom Grad $|\, p \,|$.
Eine Linearkombination von Monomen heißt Polynom. D.h. P ist ein Polynom, wenn $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, mit $P(\mathbf{x}) = P((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k \geq |p|} a_p x^p$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_p \in \mathbb{K}$.
Für zwei Polynome P, Q heißt $\frac{P}{Q}$ rationale Funktion.

Monome/Polynome Beispiel

		Grad
Monome	xy^2z^2	5
	x^2y^2	4
	x^2y	3
	y	1
	1	0
Polynome	$3xy^2z^2 + 4x^2y^2 - 2x^2y + 3y + 1$	5
	$(x+y)(x+z^2)$	3
	$0x^2 + 2y$	1

Skalarprodukt und induzierte Norm

Die Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt inneres Produkt oder Skalarprodukt auf X, wenn gilt:

- $\forall \mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = 0$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
$\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X, so definiert $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$, mit $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ eine Norm auf X. Diese nennen wir die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm.

Hilbertraum

Ist X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, so heißt $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prähilbertraum oder Innenproduktraum. Wenn die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\|\cdot\|$ zusammen mit X ein Banachraum bildet (vollständige Norm), dann nennen wir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen Hilbertraum.

Ab jetzt bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum X

Sätze für Skalarprodukte

Für $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gilt:

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}:$
  $\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \overline{\mu}\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle$
  Note: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\overline{\lambda} = \lambda$ und $\overline{\mu} = \mu$.
- $\forall \mathbf{x} \in X : \langle 0, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, 0\rangle = 0$
- (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Für die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm $\|\cdot\|$ gilt
  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X : |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$
  Gleichheit gilt g.d.w. $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear abhängig sind.

Äquivalente Normen

Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X (beliebige Normen. Nicht verwechseln mit Notation für 1-Norm und 2-Norm).
Dann heißen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, wenn
$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ \forall \mathbf{x} \in X : a\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{y}\|_2 \leq b\|\mathbf{x}\|_1$.
In Worten: Normen sind äquivalent, wenn ihr Ergebnisse sich höchstens um einen konstanten Faktoren unterscheiden.

Sätze für äquivalente Normen

Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X. Dann sind die beiden Aussagen äquivalent:

- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent.
- $\forall (\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X : $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ bzgl. $\|\cdot\|_1 \iff \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

! Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent. D.h. alle Normen erzeugen die genau die gleichen konvergenten Folgen.

Kapitel 2 - Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Partielle Ableitungen von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{K}$, $\mathbf{x}^0 \in A$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Gibt es ein $\varepsilon > 0$, s.d. $\forall h \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_j \in A$, so nennen wir f in $\mathbf{x}^0$ partiell differenzierbar nach x_j, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}^0)}{h}$ existiert. Den Grenzwert nennen wir dann j-te partielle Ableitung von f in $\mathbf{x}^0$ und wird bezeichnet durch: $\partial_j f(\mathbf{x}^0)$, $\partial_{x_j} f(\mathbf{x}^0)$, $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}$, $f_{x_j}(\mathbf{x}^0)$, $D_j f(\mathbf{x}^0)$
Randnotiz: Für $\mathbf{x}^0 \in \partial A$ definieren wir $\partial_j f(\mathbf{x}^0)$ so wie oben, bloss mit $h \in [0, \varepsilon)$ bzw. $h \in (\varepsilon, 0]$.

Existieren alle partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}^0$, so nennen wir den (Zeilen)vektor $\nabla f(\mathbf{x}^0) = (\partial_1 f(\mathbf{x}^0), \dots, \partial_n f(\mathbf{x}^0))$ Gradient von f in $\mathbf{x}^0$.

Exisitert $\partial_j f(\mathbf{x}^0)$ für alle $\mathbf{x}^0 \in A$, so nennen wir die Funktion $\partial_j f : A \to \mathbb{K}, \mathbf{x} \mapsto \partial_j f(\mathbf{x})$ die j-te partielle Ableitung von f.

Partielle Ableitung berechnen

Um die $\partial_j f(\mathbf{x}^0)$ zu berechnen, falls diese existiert, tun wir so, als seien alle x_i mit $i \neq j$ konstant und berechnen die Ableitung der Funktion
$\phi(x) := f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$ in $x = x_j^0$ wie im 1-dimensionalen Fall.
Beispiel:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 e^{2x_1 + x_2} - 3x_2 + x_1$ und $\mathbf{x}^0 = (1, 0)$. Dann ist
$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 e^{2x_1 + x_2} + 2x_1^2 x_2 e^{2x_1 + x_2} + 1$
$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{2x_1 + x_2} + x_1^2 x_2 e^{2x_1 + x_2} - 3$
$\nabla f(\mathbf{x}^0) = (1, e^2 - 3)$

Partielle Ableitungen von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}^m$

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{K}^m$, $\mathbf{x}^0 \in A$. Existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_l(\mathbf{x}^0)$ für $j \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, m\}$, dann nennen wir die $m \times n$-Matrix

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}^0) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}^0) & \dots & \partial_n f_m(\mathbf{x}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}^0) \end{bmatrix}$$

die Jacobimatrix von f in $\mathbf{x}^0$ und bezeichnen diese mit $J_f(\mathbf{x}^0)$. Für $m = n$ bezeichnen wir $\det(J_f(\mathbf{x}^0))$ als die Jacobideterminante von f in $\mathbf{x}^0$.