Aufgabe 1

Eine deutsche Firma eröffnete im Jahr 2012 eine Niederlassung in Polen, die ihren Umsatz von Jahr zu Jahr steigern konnte:

Jahr	2012	2013	2014	2015	2016
Umsatz (in Euro)	510 000	530 700	590 200	640 800	?

(a) Ermitteln Sie den durchschnittlichen Umsatz für die Jahre 2012 bis 2016, wobei angenommen wird, dass der Umsatz im Jahr 2016 noch einmal um 20 Prozent im Vergleich zum Vorjahr gesteigert werden konnte.

(b) Berechnen Sie das mittlere jährliche Umsatzwachstum in Prozent.

a) $x_{2016} = 1.2 \cdot 640800 = 768960$

$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot (510\,000 + 530700 + 590200 + 640800 + 768960) = 608132$

b) $\bar{x}_G = \sqrt[4]{\frac{x_{2012}}{x_{2013}} \cdot \frac{x_{2013}}{x_{2014}} \cdot \frac{x_{2014}}{x_{2015}} \cdot \frac{x_{2015}}{x_{2016}}} = \sqrt[4]{\frac{x_{2012}}{x_{2016}}} = \sqrt[4]{\frac{768960}{510\,000}} \approx 1.1081$

$\Rightarrow$ Der Umsatz der Bäckerei ist von 2012 bis 2016 um durchschnittlich 10.81% pro Jahr gestiegen.

Aufgabe 2

Der kleine Nils Holgersson und die Wildgänse haben sich vorgenommen, die Strecke zwischen Malmö und Stockholm (Länge: 418 km) in acht Stunden zurückzulegen. Die ersten 180 km schaffen sie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 48 km/h. Da die Wildgänse allmählich müde werden erreichen sie auf den nächsten 117 km nur noch 37 km/h. Auf der letzten Strecke hingegen feuert Nils seine Reisegefährten noch einmal an, so dass sie auf diesem Teilstück auf eine Durchschnittsreisegeschwindigkeit von 52 km/h kommen.

(a) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit über die gesamte Strecke von 418 km.

(b) Schaffen die Wildgänse die Strecke innerhalb der acht Stunden?

a) $\bar{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{418}{\frac{180}{48} + \frac{117}{37} + \frac{121}{52}} = 45.24 \frac{km}{h}$

Die Durchschnittsges. der Gänse über die gesamte Strecke ist ca. 45 $\frac{km}{h}$

b) Um die Strecke in weniger als 8 Stunden zu schaffen, wäre eine Durchschnittsgeschw. von mehr als $\frac{418}{8} = 52.25 \frac{km}{h}$ nötig. Da die Gänse diese Durchschnittsgeschw. aber nicht erreichen bewältigen sie die Strecke nicht innerhalb von 8 Stunden.

Aufgabe 3

Ein Radiosender startet regelmäßig eine Umfrage zu den Hörgewohnheiten seines Publikums. Zur Beantwortung der Frage „Wieviele Stunden hörten Sie gestern Radio?“ können die Teilnehmer zehn verschiedene Kategorien ankreuzen. In den Jahren 1960, 1980 und 2000 ergaben sich folgende Klassenhäufigkeiten:

Stunden	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10)	$\sum$
Anzahl 1960	5	3	10	9	13	18	21	27	12	3	$n_1 = 121$
Anzahl 1980	6	7	5	20	29	27	13	5	3	2	$n_2 = 117$
Anzahl 2000	35	24	13	8	9	4	2	1	0	1	$n_3 = 97$

Mode

Median

Mittel

(a) Bestimmen Sie aus den klassierten Daten jeweils die Lagemaße arithmetisches Mittel, Modus und Median für die drei Jahre.

(b) Wie drücken sich die im Laufe der Zeit veränderten Hörgewohnheiten durch die drei unter (a) berechneten Lagemaße aus?

Aufgabe 5

Sei Z eine Zufallsvariable, die das Minimum von drei Würfen eines sechsseitigen Würfels beschreibt. Die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariable ist:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 1 \\ \frac{91}{216} & \text{für } 1 \leq z < 2 \\ \frac{152}{216} & \text{für } 2 \leq z < 3 \\ \frac{189}{216} & \text{für } 3 \leq z < 4 \\ \frac{208}{216} & \text{für } 4 \leq z < 5 \\ \frac{215}{216} & \text{für } 5 \leq z < 6 \\ 1 & \text{für } z \geq 6. \end{cases}$$

Berechnen Sie $E(Z)$.

$$E(Z) = \sum_{z=1}^{6} \mathbb{P}(Z = z) \cdot z \quad = 2.042$$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$$

$$\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(Z \leq z) - \mathbb{P}(Z < z)$$
$$= \mathbb{P}(Z \leq z) - \mathbb{P}(Z \leq z-1)$$
$$= F_Z(z) - F_Z(z-1)$$

In R mit diff()

$$E(Z) = \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq z) = \sum_{z=1}^{6} 1 - \mathbb{P}(Z < z) = 6 - \sum_{z=1}^{6} \mathbb{P}(Z < z) = 6 - \sum_{z=1}^{6} \mathbb{P}(Z \leq z-1) = 6 - \sum_{z=0}^{5} \mathbb{P}(Z \leq z) = 6 - \sum_{z=0}^{5} F_Z(z) \quad = 2.042$$

Aufgabe 6

Sei eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie $E(X)$

(b) Berechnen Sie $E((X - \frac{1}{\lambda})^2)$

Herleitung partielle Integration:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b (f \cdot g)'(x) \, dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow \Big[(f \cdot g)(x)\Big]_a^b = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = \Big[(f \cdot g)(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

Wähle g gemäß der Reihenfolge LATE.

Log (z.B. $\ln(x)$)
Algebraisch (z.B. x^2, $\sqrt{x}$)
Trigon. (z.B. $\sin(x)$)
Exp. (z.B. e^x)

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{[0,\infty)}(x)$$

a) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x \cdot \lambda}_{g(x)} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{f'(x)} dx = \Big[x \cdot \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \, dx = \Big[-x e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + \Big[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

b) $$E\Big[(X - \frac{1}{\lambda})^2\Big] = E\Big[X^2 - \frac{2}{\lambda} X + \frac{1}{\lambda^2}\Big] = E(X^2) - \frac{2}{\lambda} E(X) + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -\frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \, dx = -\frac{2}{\lambda} \cdot E(x) = -\frac{2}{\lambda^2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \, dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \Big[x^2 \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} 2x\lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} dx} = 0 - \Big(-\frac{2}{\lambda^2}\Big) = \frac{2}{\lambda^2}$$