Aufgabe 3

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = P(\bar{B}) \implies \bar{A} = B$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = 0 \implies P(A \cap B) = 0$.

(c) Die Menge Ω der Elementarereignisse sei die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen. Bezeichne ω_n das Ereignis, das im Auftreten der Zahl n bestehe. Außerdem gelte $P(\{\omega_n\}) = c/(n!)$. Welchen Wert muß c haben, damit P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist? *Hinweis:* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (Eulersche Konstante)

a) Wir betrachten einen fairen Münzwurf. A = "Zahl" , B = "Zahl".
$P(A) = P(\text{Zahl}) = 0.5 = P(\text{nicht Zahl}) = P(\bar{B})$. Aber $\bar{A}$ = "nicht Zahl" = "Kopf" $\neq B$. Somit ist die Aussage widerlegt.

b) $\underbrace{A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)}$ $= 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Beweis: Sei $B \subseteq A$ und $A_1 := A \setminus B$, $A_2 := B$. Dann sind A_1 und A_2 disjunkt. Daraus folgt aus den Axiomen $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(A \setminus B) + P(B) \geq P(B)$. $\boxed{B}$

c) $$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\omega_n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{n!} = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = c \cdot e \Rightarrow c = \frac{1}{e}$$

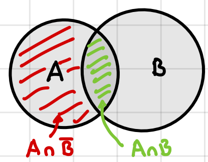
Aufgabe 5

Seien A und B beliebige Ereignisse mit $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 1/3$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Was kann man für $P(A \cup B)$ folgern?

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \\ A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} = 1/3$$



$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 2/3$. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. Daher gilt wegen Axiom: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$.
Daher gilt. $P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{= \frac{3}{4}} - \underbrace{P(A \cap \bar{B})}_{\leq \min\{P(A), P(\bar{B})\}} \geq \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{12} - P(A \cap B)$. Wegen $P(A \cap B) \in [\frac{1}{12}, \frac{4}{12}]$ folgt: $P(A \cup B) \in [\frac{3}{4}, 1]$

Aufgabe 6

Beim Skatspiel erhält jeder der drei Spieler zufällig genau 10 der 32 vorhandenen Spielkarten. Die übrigen zwei Karten werden Skat genannt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält das Blatt eines bestimmten Spielers

(a) keinen Buben und kein As;

(b) mindestens drei Buben;

(c) alle Karten einer Farbe;

(d) genau drei Buben und alle restlichen Karten in der Farbe des fehlenden Buben?

a) $\dfrac{\binom{24}{10}\binom{8}{0}}{\binom{32}{10}} = 0.03$

b) $\dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{7} + \binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = 0.08$

c) $\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{24}{2}}{\binom{32}{10}} = 1.7\ 10^{-5}$

d) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{10}} = 6.2 \cdot 10^{-8}$