Aufgabe 4 25 Punkte

Die Länge X (in cm) eines zufällig auf der Straße gefundenen Blütenblatts folge einer Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $c = 6$ gelten muss.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z = \frac{1}{X}$.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Blütenblatt genau 0.75 cm lang ist?

(d) Die Fläche eines Blütenblatts der Länge X sei ungefähr $Y = \frac{1}{2}X^2$. Bestimmen Sie den Träger und die Dichte der Fläche Y eines zufälligen Blütenblatts.

a) Für eine Dichtefunktion f muss gelten: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Daraus folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^1 c\cdot x(1-x)\,dx = c\cdot \int_0^1 -x^2+x\,dx = c\cdot\left[-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}\cdot c \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c = 6.$$

b) $$E\left[\tfrac{1}{X}\right] = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{x}\cdot f(x)\,dx = \int_0^1 6\cdot(1-x)\,dx = 6\cdot\tfrac{1}{2} = 3$$

c) Da es sich um eine stetige ZV handelt ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Punktwert gleich 0. (Insbesondere für $x = 0.75$)

d) Hierfür können wir den Dichtetransformationssatz verwenden: $f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right)\right|$

Die Funktion $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist hier definiert als $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ und ist auf dem Träger von X str. monoton. und differenzierbar.
Alternativ kann man die Funktion aufteilen auf die Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0,+\infty)$ und auf diesen dann seperat die Dichte mittels dem Transformationssatz bestimmen, da g auf den jeweiligen Intervallen str. monoton wäre.
Darauf wird hier bewusst verzichtet, da sowieso gilt $f(x) = 0 \; \forall x \in (-\infty, 0)$. Wenn nicht i.O., dann siehe "Alternative".

$g^{-1}(y) = \sqrt{2y}, \forall y \in [0,+\infty)$ und $(g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \dfrac{1}{\sqrt{2y}}, \forall y \in (0,+\infty)$

$$f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \begin{cases} 6\cdot\sqrt{2y}\,(1-\sqrt{2y}) & , y\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right)\right| = \begin{cases} 6\cdot(1-\sqrt{2y}) & , y\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Der Träger von Y ist $T_Y = [0,\frac{1}{2}]$, weil $(g\circ X)(\mathbb{R}) = g([0,1]) = [0,\frac{1}{2}]$

<u>Alternativ:</u>

$$F_X(x) = \begin{cases} -2x^3+3x^2 & , x\in[0,1] \\ 0 & , x<0 \\ 1 & , x>1 \end{cases} \qquad F_Y(y) = P(Y\le y) = P\left(\tfrac{1}{2}x^2\le y\right) = P\left(X^2\le 2y\right) = \begin{cases} P(-\sqrt{2y}\le X\le\sqrt{2y}) = P(X\le\sqrt{2y}) - P(X\le-\sqrt{2y}) & \forall y\in[0,+\infty) \\ 0 & , \forall y<0 \end{cases}$$

$$P(X\le\sqrt{2y}) - P(X\le-\sqrt{2y}) = F_X(\sqrt{2y}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{2y})}_{=0\;\forall y\in\mathbb{R}} = F_X(\sqrt{2y}) = \begin{cases} -4\cdot\sqrt{2}\,y^{3/2}+6y & , y\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & , y<0 \\ 1 & , y>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Also gilt $F_Y(y) = \begin{cases} -4\cdot\sqrt{2}\,y^{3/2}+6y & , y\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & , y<0 \\ 1 & , y>\frac{1}{2} \end{cases}$ Daraus folgt: $f_Y(y) = \begin{cases} 6\cdot(1-\sqrt{2y}) & , y\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$. $T_Y = [0,\frac{1}{2}]$

Aufgabe 5	10 Punkte

Die diskrete Zufallsvariable X hat den Träger $T_X = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Wahrscheinlichkeiten der ersten 3 Werte sind $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.5$, $P(X = 3) = 0.15$.

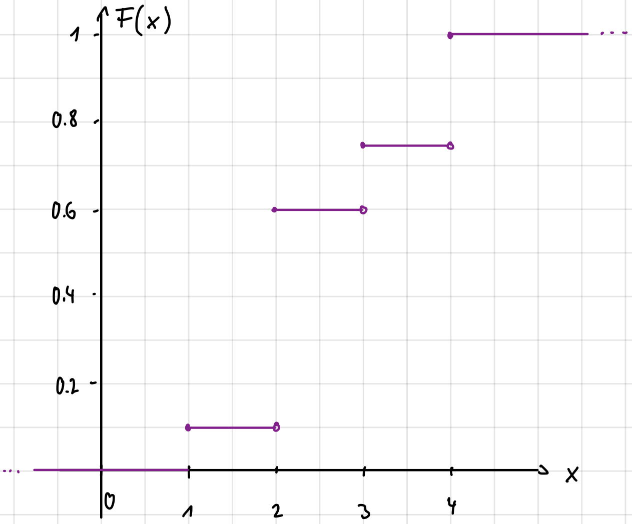
(a) Bestimmen Sie $P(X = 4)$ und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

(c) Berechnen Sie $P(2 < X < 3)$, $P(X \geq 3)$ und $P(X \geq 3 | X \geq 2)$.

(d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = X^2$.

a) $P(X=4) = 1 - \sum_{i=1}^{3} P(X=i) = 1 - (0.1 + 0.5 + 0.15) = 0.25$



b) $E(X) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot P(X=k) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.25 = 2.55$

$Var(X) = \sum_{k=1}^{4} P(X=k) \cdot (k - E(X))^2 = 0.1 \cdot (1 - 2.55)^2 + 0.5 \cdot (2 - 2.55)^2 + 0.15 \cdot (3 - 2.55)^2 + 0.25 \cdot (4 - 2.55)^2 = \frac{379}{400} \approx 0.95$

c) $P(2 < X < 3) = P(X < 3) - P(X \leq 2) = 0.6 - 0.6 = 0$

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = 0.15 + 0.25 = 0.4$

Alternativ: $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(X \geq 3 | X \geq 2) = \frac{P(X \geq 3 \wedge X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X \geq 3)}{P(X \geq 2)} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9} \approx 0.44$

d) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) - \underbrace{P(X \leq -\sqrt{y})}_{=0 \text{, da } X > 0} = F_X(\sqrt{y})$.

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} 0 & , y < 1 \\ 0.1 & , y \in [1,4) \\ 0.6 & , y \in [4,9) \\ 0.75 & , y \in [9,16) \\ 1 & , y \geq 16 \end{cases}$$

$y \in [1, 4) \Rightarrow \sqrt{y} \in [1, 2)$

$$F_X(y) = \begin{cases} 0 & , y < 1 \\ 0.1 & , y \in [1,2) \\ 0.6 & , y \in [2,3) \\ 0.75 & , y \in [3,4) \\ 1 & , y \geq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 6	15 Punkte

Sei $F(x) = \begin{cases} 1 & x > \exp(1) \\ \log_e(ax+b) & 0 \le x \le \exp(1) \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

$\ln(ax+b) = y$

$\Leftrightarrow ax + b = e^y \Leftrightarrow \underline{x} = \frac{e^y - b}{a} = \frac{e^y - 1}{\frac{e-1}{e}} = F^{-1}(p$

(a) Für welche Werte von a und b ist $F(x)$ die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable?

(b) Wie lautet die zugehörige Dichte?

(c) Wie lautet die zugehörige Quantilsfunktion?

(d) Berechnen Sie das 95%-Quantil der Verteilung.

a) Es muss gelten, dass $F(e) = 1$, da F rechtsstetig sein muss.

Ausserdem muss für die Dichtefunktion f gelten, dass $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \overset{!}{=} 1$. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin [0,e) \\ \frac{a}{ax+b} & , x \in [0,e) \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^e f(x)\,dx = F(e) - F(0) = \ln(ae+b) - \ln(b) \overset{!}{=} 1 \overset{!}{=} F(e) = \ln(ae+b) \Rightarrow \underline{\underline{b = 1}}. \quad F(e) = \ln(ae+1) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{e-1}{e}}}$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin [0,e) \\ \frac{e-1}{(e-1)x+e} & , x \in [0,e) \end{cases}$

Note: $\frac{\frac{e-1}{e}}{\frac{e-1}{e}x + 1} = \frac{\frac{e-1}{e}}{\frac{e-1}{e}x + \frac{e}{e}} = \frac{e-1}{(e-1)x+e}$. $\boxed{\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = \frac{a}{ax+b}}$

c) $\forall p \in (0,1)$ gilt: $\hat{x}_p = F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge p\} = \frac{e^p - 1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e^{p+1} - e}{e-1}$

d) Das 0.95-Quantil ist gegeben durch $\hat{x}_{0.95} = F_X^{-1}(0.95) = \frac{e^{1.95} - e}{e-1} = \underline{\underline{2.51}}$