Zentraler Grenzwertsatz

Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(X_i)=\mu$ und $Var(X_i)=\sigma^2<\infty$. Dann gilt:

1) $\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} \leq x\right] = \Phi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$. bzw. $S_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

2) $\lim_{n\to\infty} P\left[\sqrt{n}\cdot\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq x\right] = \Phi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$. bzw. $\bar{X}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Binomial - Verteilung

Wahrscheinlichkeit für x Erfolge bei n Bernoulli-Versuchen.

X ist Binomial-verteilt $X\sim\mathcal{B}(n,\pi)$, wenn

$P_{n,\pi}(X=x) = \binom{n}{x}\cdot\pi^x\cdot(1-\pi)^{n-x}$, für $x\in\mathbb{N}_0$

Dann ist $F_X(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, für $x\geq 0$

Aufgabe 1

Bei der Lufthansa ist aus Erfahrung bekannt, dass etwa 18% der Fluggäste ihre gebuchte Reise nicht antreten. Um die Auslastung der Flugzeuge möglichst hoch zu halten, werden mehr als die verfügbaren 150 Plätze in einem Airbus A320 angeboten.

Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aufgrund von Überbelegung nicht alle Passagiere, die den Flug tatsächlich antreten, mitgenommen werden können, wenn 171 Plätze gebucht wurden.

$\pi_F = 0.82$ (Tritt Flug an)

Formulierung gemäß ZGWS:

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{B}(0.82)$. $\quad \Omega = \{0,1\} = \{\text{"Nicht Fliegen"}, \text{"Fliegen"}\}$ $\quad P(X_i=0) = 0.18 = 1-0.82 = 1-P(X_i=1)$

Jede Realisierung von X_i entspricht der Entscheidung eines Passagieres zu fliegen oder nicht zu fliegen.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ entspricht der Anzahl an Passagieren die Fliegen. Daher gilt $S_n \sim \mathcal{B}(n, 0.82)$.

Für $n=171$ gilt $S_{171} \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(171\cdot\pi_F, 171\cdot\pi_F\cdot(1-\pi_F))$

$$P(S_n>150) = 1-P(S_n\leq 151) = 1 - P\left(\frac{S_n - 171\cdot 0.82}{\sqrt{171\cdot 0.82\cdot(1-0.82)}} \leq \frac{151-171\cdot 0.82}{\sqrt{171\cdot 0.82\cdot(1-0.82)}}\right) = 1 - P\Bigg(\underbrace{\frac{S_n - 171\cdot 0.82}{\sqrt{171\cdot 0.82\cdot(1-0.82)}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq 2.15\Bigg) = 1-\Phi(2.15) = 0.0158$$

<u>Exakter Wert:</u> $P(S_n>150) = \sum_{k=151}^{171}\binom{171}{k}\cdot 0.82^k\cdot 0.18^{171-k} = 0.01665$ (gelöst mit Wolfram)

Aufgabe 2

Wie oft muß mit einer idealen Münze mindestens geworfen werden, so dass die relative Häufigkeit von Wappen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95, um höchstens 0.01 respektive 0.001 von $\pi = 0.5$ abweicht?

$$0.95 \overset{!}{\leq} P(\bar{X}_n \in [0.49, 0.51]) = P(\bar{X}_n \leq 0.51) - \underbrace{P(\bar{X}_n \leq 0.49)}_{\overset{\text{Symm.}}{=} P(\bar{X}_n\geq 0.51)} = P(\bar{X}_n\leq 0.51) - (1-P(\bar{X}_n\leq 0.51)) = 2\cdot P(\bar{X}_n\leq 0.51)-1 = 2\cdot\Phi\left(\frac{0.51-0.5}{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{n}\right)-1 = 2\cdot\Phi(\sqrt{n}\cdot 0.005)-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.95 \overset{!}{\leq} 2\cdot\Phi(\sqrt{n}\cdot 0.005)-1 \Leftrightarrow \frac{1.95}{2} \leq \Phi(\sqrt{n}\cdot 0.005) \Leftrightarrow \sqrt{n}\cdot 0.005 \overset{!}{\geq} 1.96 \Leftrightarrow n \geq 153\,664$$

$$0.95 \overset{!}{\leq} P(\bar{X}_n \in [0.499, 0.501]) = 2\cdot\Phi\left(\frac{0.501-0.5}{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{n}\right)-1 \Leftrightarrow 0.975 \overset{!}{\leq} \Phi(\sqrt{n}\cdot 0.0005) \Leftrightarrow 1.96 \leq \sqrt{n}\cdot 0.0005 \Leftrightarrow n \geq 15\,366\,400$$

Aufgabe 3

Ein Beamter verlässt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro immer erst kurz nach Dienstschluss. Die Dauern der täglichen zusätzlichen Arbeitszeiten lassen sich jeweils durch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda} = 5$ Minuten angemessen beschreiben und seien als unabhängig vorausgesetzt.

a) Leiten Sie die approximative Verteilung der gesamten zusätzlichen Arbeitszeit eines Jahres für den Beamten her.

b) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass der Beamte in einem Jahr mehr als 16 Stunden zusätzlich arbeitet.

Exponentialverteilung

Wartezeit zwischen Erfolgen einer Poisson-verteilten ZV.

X ist exponential verteilt $X \sim Exp(\lambda)$, wenn

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

Zentraler Grenzwertsatz

Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Dann gilt:

1) $\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \leq x \right] = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ bzw. $S_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

2) $\lim_{n \to \infty} P\left[\sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq x \right] = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ bzw. $\bar{X}_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

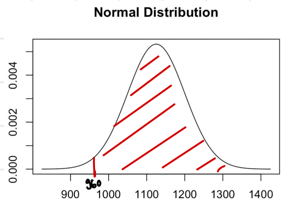
a) $\frac{1}{\lambda} = 5$ min

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mit $X_i \sim Exp(0.2)$

X_i steht für eine realisierte zusätzliche Arbeitszeit an Tag i (in Minuten)

$S_n \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2) = \mathcal{N}\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right) = \mathcal{N}(1125, 5625)$

Gesamtüberzeit pro Jahr



→ x in min

b) 16 Stunden = 960 min

$P(S > 960) = 1 - P(S \leq 960) = 1 - P(S \geq 1290) = P(S \leq 1290) = \Phi\left(\frac{1290 - 1125}{\sqrt{5625}}\right) = \Phi(2.2) = 0.986$