Aufgabe 1

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $P(A) = P(B) = 1/2$ und $P(B|A) = 1/2$. Sind A und B unabhängig? Wie groß ist $P(A \cup B)$?

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(B|A)P(A) = P(A \cap B) \Rightarrow A$ & B sind unabhängig.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 2

Die Eingänge eines Ladens sind mit einer Alarmanlage gegen Diebstahl gesichert. Wenn ein Dieb die Anlage passiert, wird mit W'keit 0.995 Alarm ausgelöst. Bei einem unbescholtenen Kunden beträgt die W'keit 0.006. Erfahrungswerte zeigen, daß auf 500 Kunden ein Dieb kommt.

(a) Mit welcher W'keit alarmiert die Anlage zu Recht? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden harmlose Kunden erschreckt?

(b) Wie groß müssten die W'keiten für korrekten und falschen Alarm seien, damit zumindest die Hälfte der Kompromittierten tatsächlich Diebe sind?

A: Alarm ausgelöst. D: Dieb

$P(A|D) = 0.995$. $P(A|\bar{D}) = 0.006$. $P(D) = 0.002$

a) P("zu Recht alamiert") = P("Wenn der Alarm losgeht, ist die Person ein Dieb") = $P(D|A)$

$$P(D|A) = \frac{P(A|D) \cdot P(D)}{P(A|D) \cdot P(D) + P(A|\bar{D}) \cdot (1 - P(\bar{D}))} = \frac{0.995 \cdot 0.002}{0.995 \cdot 0.002 + 0.006 \cdot 0.998} = 0.25$$

P("harmlosen Kunden erschrecken") = P("Wenn der Alarm losgeht, ist die Person kein Dieb") = $P(\bar{D}|A)$

$P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 0.75$

b) Wie groß müssen $P(A|D)$ und $P(A|\bar{D})$ sein, damit $P(D|A) \geq \frac{1}{2}$ bzw. $P(\bar{D}|A) < \frac{1}{2}$

$$P(D|A) = \frac{P(A|D) \cdot P(D)}{P(A|D) \cdot P(D) + P(A|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A|D) \cdot P(D) \geq \frac{1}{2} P(A|D) \cdot P(D) + \frac{1}{2} P(A|\bar{D}) \cdot P(\bar{D}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} P(A|D) \cdot P(D) \geq \frac{1}{2} P(A|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A|D)}{P(A|\bar{D})} \geq \frac{P(\bar{D})}{P(D)}$$

$$\frac{P(A|D) \cdot 0.002}{P(A|D) \cdot 0.002 + P(A|\bar{D}) \cdot 0.998} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A|D)}{P(A|\bar{D})} \geq \frac{0.998}{0.002} = 499$$

z.B. • $P(A|D) = 0.995$, $P(A|\bar{D}) = 0.002$