Aufgabe 1

Der Deutsche Wetterdienst hat am 27.11.2012 folgende stündliche Mittelwerte für die Temperatur in °C in der Münchner Innenstadt gemessen:

7.2	7.2	6.8	7.2	7.4	7.1	7.0	7.2	7.5	7.7	7.9	8.3
7.9	7.6	7.2	7.1	6.9	6.9	6.7	6.2	6.4	6.2	6.2	6.2

(a) Berechnen Sie den Modus, das arithmetische Mittel, den Median, den Interquartilsabstand und die Varianz der Temperatur in Grad Celsius. Charakterisieren Sie die Verteilung.
Hinweis: Verwenden Sie als p-Quantil $\tilde{x}_p = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{(np)} + x_{(np+1)}\right)$, falls $n \cdot p$ ganzzahlig ist.

(b) Bestimmen Sie durch geeignete Transformation die Werte von Modus, arithmetischem Mittel, Median, Interquartilsabstand und Varianz in Grad Fahrenheit.
Hinweis: Umrechnung von Grad Fahrenheit in Grad Celcius: $y[°F] = \frac{9}{5}x[°C] + 32$.

(c) Geben Sie den MAD und den MedAD für die Temperatur in °C an.

(d) Der Variationskoeffizient gilt als skalierungsunabhängiges Streuungsmaß. Kann daraus abgeleitet werden, dass die Variationskoeffizienten für die Temperatur in °F und in °C gleich sind? Begründen Sie.

a) $\tilde{x}_{arithm.} = 7.08$, $\tilde{x}_{median} = \frac{7.1+7.2}{2} = 7.15$, $\tilde{x}_{modus} = 7.2$, $\tilde{x}_{0.25} = \frac{6.7+6.8}{2} = 6.75$, $\tilde{x}_{0.75} = \frac{7.4+7.5}{2} = 7.45$, $IQR = 7.45 - 6.75 = 0.7$

$\tilde{x}_{arithm.} \approx \tilde{x}_{median} \approx \tilde{x}_{modus}$ $\Rightarrow$ Verteilung annähernd symmetrisch.

$$\bar{S}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x}_{arithm.})^2 = 0.32$$

b) $X' = 32 + \frac{9}{5} \cdot X$

$\tilde{x}'_{arithm.} = 44.74$, $\tilde{x}'_{median} = 44.87$, $\tilde{x}'_{modus} = 44.96$, $\tilde{x}'_{0.25} = 44.15$, $\tilde{x}'_{0.75} = 45.41$, $IQR' = \frac{9}{5} \cdot 0.7 = 1.26$

$$\bar{S}_X^{2\,\prime} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot \bar{S}_X^2 = 1.04$$

c) $MAD = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{24} |x_i - 7.08| \approx 0.44$

$MedAD = median(|x_i - x_{med}|) = median(|x_i - 7.15|) = 0.35$

d) Gemäß der Vorlesung ist der Variationskoeffizient invariant gegenüber Transformationen der Form $Y = bX$. In diesem Fall liegt jedoch eine Transformation der Form $Y = a + bX$ mit $a \neq 0$ vor.
Die Streuung der beiden Verteilungen kann daher ohne vorheriges Umrechnen nicht mit Hilfe des Variationskoeffizienten verglichen werden.
$v_X = v_Y$ gilt nur, wenn $a = 0$ gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die geometrische Verteilung die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit besitzt:

$$P(X = x + x_0 | X > x_0) = P(X = x), \quad \forall\, x, x_0 \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle die Definition der geometrischen Reihe $\sum_{x=0}^{n} q^x = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ und der geometrischen Verteilung $P(X = x) = \pi(1-\pi)^{x-1}$.

$$P(X = x + x_0 \mid X > x_0) = \frac{P(X = x + x_0 \wedge X > x_0)}{P(X > x_0)} \overset{(*)}{=} \frac{P(X = x + x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{P(X = x + x_0)}{1 - P(X \leq x_0)} \overset{(**)}{=} \frac{\pi \cdot (1-\pi)^{x + x_0 + 1}}{(1-\pi)^{x_0}} = \pi \cdot (1-\pi)^{x-1} = P(X = x)$$

$(*)$ $X = x + x_0 \implies X > x_0 \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{N}$

$$(**)\ P(X \leq x_0) = \sum_{x=1}^{x_0} \pi (1-\pi)^{x-1} = \pi \cdot \sum_{x=1}^{x_0} (1-\pi)^{x-1} = \pi \cdot \sum_{x=0}^{x_0 - 1} (1-\pi)^x = \frac{\pi \cdot (1-\pi)^{x_0} - 1}{(1-\pi) - 1} = 1 - (1-\pi)^{x_0}$$

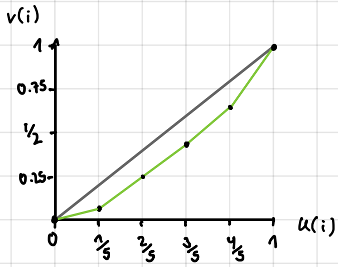
Aufgabe 2

An einem Gymnasium wurden fünf Schüler zwischen 15 und 17 Jahren nach ihrem monatlichen Taschengeld befragt. Die folgende Tabelle zeigt die erhobenen Daten:

Schüler	1	2	3	4	5
Taschengeld	50€	80€	20€	65€	40€

$\Sigma = 255$

#	$u_{(i)}$	$v_{(i)}$
3	$1/5$	$20/255$
5	$2/5$	$60/255$
1	$3/5$	$110/255$
4	$4/5$	$175/255$
2	1	1



(a) Berechnen und interpretieren Sie ein auf den Bereich [0, 1] normiertes Maß für die Konzentration des Taschengeldes. Stellen Sie die Situation graphisch dar.

(b) Wie ändert sich das in (a) berechnete Konzentrationsmaß, wenn jeder Schüler

(i) 10 Euro mehr

(ii) das doppelte von seinem ursprünglichen Taschengeld

bekommt?

Hinweis: Es ist nur nach der Richtung der Änderung gefragt, konkrete Werte müssen nicht berechnet werden!

(c) Statt fünf Schülern werden nun 485 Schüler betrachtet. Ändert sich das Konzentrationsmaß, wenn jeweils 97 Schüler ein monatliches Taschengeld von 20 Euro, von 40 Euro, von 50 Euro, von 65 Euro und von 80 Euro bekommen? Begründen Sie kurz.

a) $G = \frac{n-1}{n} - \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} v_{(i)} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \cdot \sum_{i=1}^{4} v_{(i)} = 0.23$, $G^+ = \frac{5}{4} \cdot G = 0.28$

b) i) G^+ wird kleiner, weil sich die relativen Unterschiede verringern

ii) G^+ bleibt gleich, weil die relativen Unterschiede sich nicht ändern.

c) Ändert nichts an G, da immernoch die unteren ⅕ der Population einen Anteil von $\frac{20}{255}$ am Gesamtkapital besitzen und in dem ⅕ ist es Gleichverteilt. G^+ ändert sich wegen $\frac{n}{n-1} \cdot G$.

Aufgabe 3

Diese Aufgabe ist von einem früheren Übungsblatt bekannt. Es kommt ***eine Änderung*** *des Modells hinzu. Nun soll die geometrische Verteilung zur Lösung verwendet werden!*

Auf einer Hauptstraße regeln Ampeln an vier Kreuzungen unabhängig voneinander den Verkehr. Jede von ihnen gestattet oder verbietet einem Auto die Weiterfahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5. Ein Auto fährt diese Hauptstraße entlang, **wendet am Ende, fährt sie zurück, wendet wieder usw**. Aus verkehrstechnischen Gründen interessiert die Anzahl der Verkehrsampeln, an denen das Auto ohne Halt vorbeifährt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto ohne Halt an den ersten x Ampeln vorbeifährt.

(b) Definieren Sie die zugehörige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte zu dieser Zufallsvariable.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariable.

b) $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$, X ist die Anzahl an Ampeln an denen man ohne Halt vorbeifährt. $\underbrace{\mathbb{P}(X=k) = (\frac{1}{2})^{k+1}}_{a)}$, $k \in \mathbb{N}_0$

c) Für $x < 0$ ist $F_X(x) = 0$. Für $x > 0$ ist $F_X(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (\frac{1}{2})^{k+1}$

$= \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2})^{\lfloor x \rfloor + 1} - 1}{-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^{\lfloor x \rfloor + 1}$

Aufgabe 5

Stellen Sie sich folgendes Experiment vor: am Morgen nach dem Aufwachen notiert jeder Proband ein Wort, nämlich den Name des ersten Objekts, das er beim Öffnen seiner Augen sieht. Im Laufe der ersten beiden Stunden des Tages zählt jeder Teilnehmer per Strichliste, wie oft er an dieses Objekt denkt. Sie haben folgende Daten gesammelt:

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_i =$	3	6	4	7	9	4	13	18	5	1	1
$x_{(i)} =$	1	1	3	4	4	5	6	7	9	13	18

Im folgenden werden Verteilungseigenschaften begutachtet:

(a) Berechnen Sie den Quantilskoeffizient und interpretieren Sie ihn.

(b) Bestimmmen Sie den Momentkoeffizienten der Schiefe.

(c) Bewerten Sie nun die Kurtosis mit einer geeignete Maßzahl.

(d) Erstellen Sie eine Graphik, in der sich die gefunden Eigenschaften der Verteilung widerspiegeln.

a) $\tilde{x}_{0.25} = 3 \qquad 0.25 \cdot 11 = 2.75 \Rightarrow k = 3$

$\tilde{x}_{0.75} = 9 \qquad 0.75 \cdot 11 = 8.25 \Rightarrow k = 9$

$\tilde{x}_{med} = 5 \qquad 0.5 \cdot 11 = 5.5 \Rightarrow k = 6$

$$g_{0.25} = \frac{(\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{med}) - (\tilde{x}_{med} - \tilde{x}_{0.25})}{(\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25})} = \frac{(9-5)-(5-3)}{(9-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \text{Die Verteilung ist linkssteil}$$

b) $\bar{x} = 6.45$

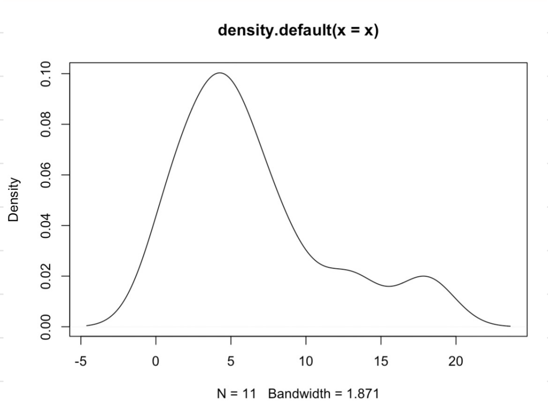
$$s = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3} = 5.18$$

$$\Rightarrow g_{m_3} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{s} \right)^3 = 0.938 \quad > 0 \quad \Rightarrow \text{linkssteil}$$

c) $$k_X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{s} \right)^4 = 2.72$$

Die Exzess - Kurtosis ist $-0.276 < 0$ und somit ist die Verteilung platykurtisch (flachgipfelig).

d) Aufgrund des kleinen Stichprobenumfangs und der - damit verbundenen - geringen Anzahl von Ausprägungen kann ein Kerndichteschätzer die identifizierten Eigenschaften besser darstellen als bspw. ein Histogramm.



← plot (density(x))