Aufgabe 1

Auf einer Hauptstraße regeln Ampeln an vier Kreuzungen unabhängig voneinander den Verkehr. Jede von ihnen gestattet oder verbietet die Weiterfahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5. Aus verkehrstechnischen Gründen interessiert mensch sich primär für die Anzahl der Verkehrsampeln X, an denen ein gegebener Verkehrsteilnehmer:innen ohne Halt vorbeifahren kann.

(a) Geben Sie die stochastische Grundgesamtheit Ω des hier zugrundeliegenden Laplace-Wahrscheinlichkeitsraums an.

(b) Definieren Sie die Zufallsvariable X und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Träger dieser Zufallsvariable.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariable.

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Verkehrsteilnehmer:innen ohne Anzuhalten mindestens bis zur dritten Ampel fahren dürfen.

$= \{\text{"fahren"}, \text{"halten"}\}^4$

$= \{\text{"ja"}, \text{"nein"}\}^4$

a) $\Omega = \{\text{"rot"}, \text{"grün"}\}^4 = \{g, r\}^4 = \{(g,g,g,g), (g,g,g,r), (g,g,r,g), \dots, (r,r,r,r)\}$ $\quad |\Omega| = 2^4 = 16 \quad \forall \omega_i \in \Omega: P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{16}$

b) ZV $X: \Omega \longrightarrow \{0,1,2,3,4\}$

$$X(\{\omega\}) = X(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)\}) = \begin{cases} 0 & , \omega_1 = r \\ 1 & , \omega_1 = g \wedge \omega_2 = r \\ 2 & , \omega_1 = \omega_2 = g \wedge \omega_3 = r \\ 3 & , \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = g \wedge \omega_4 = r \\ 4 & , \omega = (g,g,g,g) \end{cases} \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{2^3}{16} & , x = 0 \\ \frac{2^2}{16} & , x = 1 \\ \frac{2}{16} & , x = 2 \\ \frac{1}{16} & , x = 3 \\ 1/16 & , x = 4 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Alternativ: $A_i :=$ "Ampel i steht auf grün"

$P(A_i) = P(\bar{A}_i) = 1/2$

$\Rightarrow f_X(0) = P(\bar{A}_1) = 1/2$

$f_X(1) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$

$f_X(2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$

$f_X(3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) = (1/2)^4 = 1/16$

$f_X(4) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = (1/2)^4 = 1/16$

c) $$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} f(x_i) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0.5 & , 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & , 1 \leq x < 2 \\ 0.875 & , 2 \leq x < 3 \\ 0.9375 & , 3 \leq x < 4 \\ 1 & , x \geq 4 \end{cases}$$

d) "Ohne Anhalten mindestens bis zur dritten Ampel fahren" $\Leftrightarrow$ "Mindestens an zwei Ampeln vorbeifahren" $\Leftrightarrow X \geq 2$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 0.25$

Aufgabe 2

Armin Laschet[1] verzichtet aufs Korrigieren von Klausuren und ermittelt die Noten, indem er einen sechsseitigen Würfel dreimal wirft und die kleinste auftretende Augenzahl als Endnote vergibt.

(a) Definieren Sie eine Zufallsvariable Z in Form einer Abbildung $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, die das Zufallsexperiment "Auswürfeln der Endnote" beschreibt. Geben Sie dazu die Ergebnismenge Ω sowie die Zuordnungsvorschrift $Z(\omega) = z$ für die Endnote an. Begründen Sie kurz, dass Z eine diskrete Zufallsvariable ist.

(b) Geben Sie die $\omega \in \Omega$ an, die der Endnote $Z = 5$ bzw. $Z = 6$ entsprechen.

(c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der ausgewürfelten Endnote. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Klausur?

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),\dots,(6,6,6)\} = \{\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3) \mid \omega_i \in \{1,\dots,6\},\ i=1,2,3\}$

$Z(\{\omega\}) = Z(\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\}) = \min\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ $\qquad Z(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) $Z^{-1}(\{5\}) = \{(5,5,5),(5,5,6),(5,6,5),(6,5,5),(6,6,5),(6,5,6),(5,6,6)\}$

$Z^{-1}(\{6\}) = \{(6,6,6)\}$

c) Die ZVen Z_1, Z_2, Z_3 definieren die gewürfelte Augenzahl beim i-ten Wurf. Es gilt:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\min\{Z_1,Z_2,Z_3\} \le z) = 1 - P(\min\{Z_1,Z_2,Z_3\} \overset{\text{! nicht "}\ge\text{"}}{>} z) = 1 - P(\{Z_1>z\} \cap \{Z_2>z\} \cap \{Z_3>z\}) \overset{\text{unabhängigkeit}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{3} P(Z_i > z) \overset{\text{gleichverteilt}}{=} 1 - P(Z_1 > z)^3 = 1 - (1 - P(Z_1 \le z))^3$$
$$= 1 - (1 - F_{Z_1}(z))^3$$

$$F_{Z_1}(z) = \begin{cases} 0 & , z<1 \\ 1/6 & , 1 \le z < 2 \\ 2/6 & , 2 \le z < 3 \\ 3/6 & , 3 \le z < 4 \\ 4/6 & , 4 \le z < 5 \\ 5/6 & , 5 \le z < 6 \\ 1 & , z \ge 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , z<1 \\ 91/216 & , 1 \le z < 2 \\ 152/216 & , 2 \le z < 3 \\ 189/216 & , 3 \le z < 4 \\ 208/216 & , 4 \le z < 5 \\ 215/216 & , 5 \le z < 6 \\ 1 & , z \ge 6 \end{cases}$$

$P(\text{"Bestehen der Klausur"}) = F_Z(4) = P(Z \le 4) = \frac{208}{216} \approx 0.963$

Alternativ (aber deutlich schlechter):

$P(Z = z) = P(\text{"genau ein } z \text{ und sonst was größeres"}) + P(\text{"genau zweimal } z \text{ und sonst was größeres"}) + P(\text{"dreimal } z\text{"})$

$$= \underbrace{3}_{\text{Anzahl Möglichkeiten}} \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Wahrs. für } z} \cdot \underbrace{\left(\frac{6-z}{6}\right)^2}_{\text{Wahrs. für zweimal was größeres als } z} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{6-z}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left((6-z)^2 + (6-z) + \tfrac{1}{3}\right)$$

$$F_Z(z) = \sum_{z_i \le z} P(Z = z_i) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{k=1}^{z} (6-k)^2 + (6-k) + \tfrac{1}{3} = (\text{entweder Wolframalpha oder Reihenformeln verwenden}) = \frac{1}{216} \cdot z \cdot (z^2 - 18z + 108) \cdot I_{\{1,\dots,6\}}(z)$$