

Kapitel 1 - Lineare Gleichungssysteme in \mathbb{R}^n

Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** in \mathbb{R}^n mit Variablen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ hat die Form $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$.

Lineares Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** aus m Gleichungen und n Unbekannten x_1, \dots, x_n hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Wir nennen zwei LGS **äquivalent**, wenn sie die gleichen Lösungen besitzen. Ein LGS lässt sich vollständig durch die Koeffizienten beschreiben und kann daher auch in Form einer (**erweiterten**) **Koeffizientenmatrix** dargestellt werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Ohne die letzte Spalte spricht man von einer Koeffizientenmatrix.

LGS Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

Elementare Zeilenoperationen

Um das LGS zu vereinfachen, ohne die Lösungsmenge zu ändern, sind folgende **elementare Zeilenoperationen** erlaubt:

- Multipliziere eine Zeile mit einer Konstante $c \neq 0$.
- Tausche zwei Zeilen.
- Addiere eine Zeile $c \neq 0$ mal zu einer anderen.

(reduzierte) Zeilenstufenform

Eine Matrix ist in **Zeilenstufenform**, wenn:

- Alle **Nullzeilen** (Zeilen, in der höchstens der letzte Eintrag ungleich 0 ist) befinden sich am Ende der Matrix.
- Die **Pivots** (der erste Eintrag a_{ji} einer Zeile ungleich Null: $j_i = \min\{j: a_{ij} \neq 0\}$) der anderen Zeilen erfüllen die Stufenbedingung

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r.$$

Variablen die zu einer Pivot gehören nennen wir **gebunden** und die restlichen Variablen nennen wir **frei**

Eine Matrix ist in **reduzierter Zeilenstufenform**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Sie ist in Zeilenstufenform.
- Alle Pivoteinträge a_{ij_i} sind gleich 1.
- Alle Spalteneinträge über einem Pivot sind gleich 0.

LGS in Zeilenstufenform

Das untere LGS ist in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 2. \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Anzahl Lösungen

- Ein LGS hat genau dann keine Lösung, wenn sich durch elementare Zeilenoperationen eine **Nullzeile**

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ c)$$

mit $c \neq 0$ erzeugen lässt.

- Ein lösbares LGS hat genau eine Lösung, wenn es keine freien Variablen gibt. Andernfalls gibt es unendlich viele Lösungen.

Elementare Zeilenoperationen Beispiel

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array} \right) \\ \frac{1}{3} \cdot (1) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array} \right) \\ (2) - (1) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array} \right) \\ (2) \leftrightarrow (3) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ (2) + 2 \cdot (1) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (2) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ (1) - 2 \cdot (2) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot (3) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ (1) + \frac{16}{3} \cdot (3) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ (2) - \frac{5}{3} \cdot (3) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierter Zeilenstufenform.

Gauss-Jordan-Verfahren

Um die Lösungen von einem LGS zu bestimmen, kann man das Gauss-Jordan-Verfahren benutzen:

- Schreibe das LGS in eine Koeffizientenmatrix.
- Bringe Matrix durch elementare Zeilenoperationen in Zeilenstufenform.
- Stelle fest, ob das System lösbar ist.
- Falls ja, reduziere die Matrix um Lösungen zu bestimmen.

Vektor in \mathbb{R}^n

Ein **n -dimensionaler Vektor** ist ein geordnetes n -Tupel $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ von reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, genannt Komponenten.

- Wir schreiben $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in Spaltenform:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- Wir definieren den **Nullvektor** als

$$\mathbf{0} = \underbrace{(0, 0, 0, \dots)}_{n \text{ mal}},$$

und den j -ten **Einheitsvektor** als

$$\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0).$$

- Vektoraddition:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- Multiplikation mit einem **Skalar** $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Standardraum

Die Menge aller möglichen n -dimensionalen Vektoren ist der **n -dimensionale reelle Standardraum**

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorrechenregeln

Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und $c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$
- $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$
- $c(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Linearkombinationen

Wir nennen einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ eine **Linearkombination** von Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, wenn er sich als

$$\mathbf{b} = c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_k \mathbf{a}_k$$

mit $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Die Zahlen c_1, \dots, c_k nennen wir Gewichte oder Koeffizienten.

Linearkombinationen Beispiel

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{b} ist eine Linearkombination aus \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 mit Koeffizienten $c_1 = -2$ und $c_2 = 5$. Kurz: $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2$.

Spann

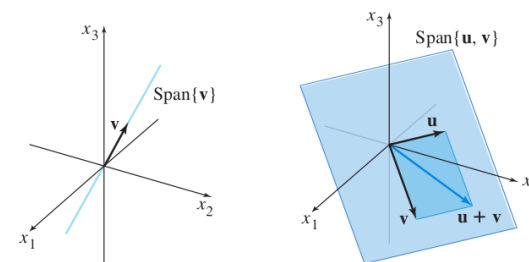
Die Menge aller Linearkombinationen von gegebenen Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als **Spann** oder die von den Vektoren **aufgespannte Menge**:

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\} = \{c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_k \mathbf{a}_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma zum Spann

- $\mathbf{0} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$,
- $\mathbf{a}_i \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ für alle $i = 1, \dots, k$,
- LGS $(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b})$ hat eine Lösung $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$

Spann Visualisierung



Matrix

Eine rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten gefüllt mit reellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

bezeichnen wir als **$(m \times n)$ -Matrix** und schreiben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Matrix-Vektor-Produkt

Das **Matrix-Vektor-Produkt** von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Spalten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$A\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n.$$

Matrix-Vektor-Produkt Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln Matrix-Vektor-Produkt

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$,
- $A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x})$.

(in)homogenes LGS

Ein LGS der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ wird **homogen** genannt. Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist immer eine Lösung des homogenen LGS und wir nennen das die **triviale Lösung**. Ein LGS der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ wird **inhomogen** genannt.

Lösungsmenge homogener LGS

Ein homogenes System hat genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn es zumindest eine freie Variable gibt. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS kann als $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ für Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ geschrieben werden.

Lösungsmenge inhomogener LGS

Sei $\mathbb{L}_h = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ und \mathbf{x}_0 ein Vektor mit $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Dann ist Menge aller Lösungen des inhomogenen Systems

$$\mathbb{L}_i = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h : \mathbf{x}_h \in \mathbb{L}_h\}.$$

Lösungsmenge (in)homogener LGS bestimmen

Wir betrachten das folgende LGS in reduzierter Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

was wir wie folgt ausdrücken können:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + -3x_3 + 0x_4 \\ x_2 &= -4 + 2x_3 + -5x_4 \\ x_3 &= 0 + 1x_3 + 0x_4 \\ x_4 &= 0 + 0x_3 + 1x_4 \end{aligned}$$

Damit lässt jeder Lösungsvektor schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R},$$

Wenn wir die rechte Seite zu $\mathbf{0}$ ändern, dann lässt sich die Lösungsmenge schreiben als

$$\mathbb{L}_h = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

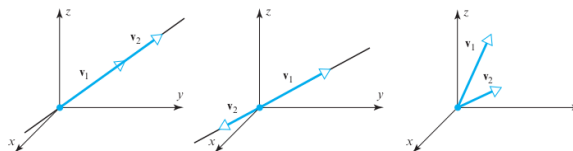
Lineare (Un)Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sind **linear unabhängig**, wenn die Vektorgleichung

$$x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzt. Andernfalls nennen wir die Vektoren **linear abhängig**.

Lineare (Un)Abhängigkeit Beispiel



zeigt zwei linear abhängige (links und mitte) und unabhängige (rechts) Vektoren.

Lineare (Un)Abhängigkeit Theorem

- Eine Menge $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn es ein $\mathbf{v}_j \in M$ gibt, so dass $\mathbf{v}_j \in \text{span}(M \setminus \{\mathbf{v}_j\})$.
- Jede Menge $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $k > n$ ist linear abhängig.
- Jede Menge $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ mit $\mathbf{0} \in M$ ist linear abhängig.

Megatheorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine Lösung für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
- Jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ist eine Linearkombination der Spalten von A .
- $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$.
- A hat ein Pivot in jeder Zeile.

Überschrift