Kapitel 1 - Lineare Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^n$

Lineare Gleichung

Eine lineare Gleichung in $\mathbb{R}^n$ mit Variablen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ hat die Form $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$.

Lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 &+ \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Wir nennen zwei LGS äquivalent, wenn sie die gleichen Lösungen besitzen. Ein LGS lässt sich vollständig durch die Koeffizienten beschreiben und kann daher auch in Form einer (erweiterten) Koeffizientenmatrix dargestellt werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ohne die letzte Spalte spricht man von einer Koeffizientenmatrix.

LGS Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & 9 & -1 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenoperationen

Um das LGS zu vereinfachen, ohne die Lösungsmenge zu ändern, sind folgende elementare Zeilenoperationen erlaubt:

(i) Multipliziere eine Zeile mit einer Konstante $c \neq 0$.

(ii) Tausche zwei Zeilen.

(iii) Addiere eine Zeile $c \neq 0$ mal zu einer anderen.

(reduzierte) Zeilenstufenform

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, wenn:

(i) Alle Nullzeilen (Zeilen, in der höchstens der letzte Eintrag ungleich 0 ist) befinden sich am Ende der Matrix.

(ii) Die Pivots (der erste Eintrag a_{ji} einer Zeile ungleich Null: $j_i = \min\{j \colon a_{ij} \neq 0\}$) der anderen Zeilen erfüllen die Stufenbedingung

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r.$$

Variablen die zu einer Pivot gehören nennen wir gebunden und die restlichen Variablen nennen wir frei

Eine Matrix ist in reduzierter Zeilenstufenform, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Sie ist in Zeilenstufenform.

(ii) Alle Pivoteinträge a_{ij_i} sind gleich 1.

(iii) Alle Spalteneinträge über einem Pivot sind gleich 0.

LGS in Zeilenstufenform

Das untere LGS ist in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 2. \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Anzahl Lösungen

(i) Ein LGS hat genau dann keine Lösung, wenn sich durch elementare Zeilenoperationen eine *Nullzeile*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right)$$

mit $c \neq 0$ erzeugen lässt.

(ii) Ein lösbares LGS hat genau eine Lösung, wenn es keine freien Variablen gibt. Andernfalls gibt es unendlich viele Lösungen.

Elementare Zeilenoperationen Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{\frac{1}{3}\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{(2)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{(2)+2\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform.

$$\stackrel{\frac{1}{3}\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{(1)-2\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{\frac{1}{2}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{(1)+\frac{16}{3}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{(2)-\frac{5}{3}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierter Zeilenstufenform.

Gauss-Jordan-Verfahren

Um die Lösungen von einem LGS zu bestimmen, kann man das Gauss-Jordan-Verfahren benutzen:

(i) Schreibe das LGS in eine Koeffizientenmatrix.

(ii) Bringe Matrix durch elementare Zeilenoperationen in Zeilenstufenform.

(iii) Stelle fest, ob das System lösbar ist.

(iv) Falls ja, reduziere die Matrix um Lösungen zu bestimmen.

Vektor in $\mathbb{R}^n$

Ein n-dimensionaler Vektor ist ein geordnetes n-Tupel $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ von reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, genannt Komponenten.

- Wir schreiben $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ in Spaltenform:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \; x_i = y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- Wir definieren den Nullvektor als

$$\boldsymbol{0} = (\underbrace{0, 0, 0, \dots}_{n \text{ mal}}),$$

und den j-ten Einheitsvektor als

$$\boldsymbol{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0).$$

- Vektoraddition:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- Multiplikation mit einem **Skalar** $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Standardraum

Die Menge aller möglichen n-dimensionalen Vektoren ist der n-dimensionale reelle Standardraum

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorrechenregeln

Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ und $c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
3. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$
4. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
5. $c(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}$
6. $(c + d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$
7. $c(d\boldsymbol{x}) = (cd)\boldsymbol{x}$
8. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

Linearkombinationen

Wir nennen einen Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine Linearkombination von Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$, wenn er sich als

$$\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k$$

mit $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Die Zahlen $c_1, \dots, c_k$ nennen wir Gewichte oder Koeffizienten.

Linearkombinationen Beispiel

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{b}$ ist eine Linearkombination aus $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ mit Koeffizienten $c_1 = -2$ und $c_2 = 5$. Kurz: $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2$.

Spann

Die Menge aller Linearkombinationen von gegeben Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als Spann oder die von den Vektoren aufgespannte Menge:

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\} = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k \colon c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

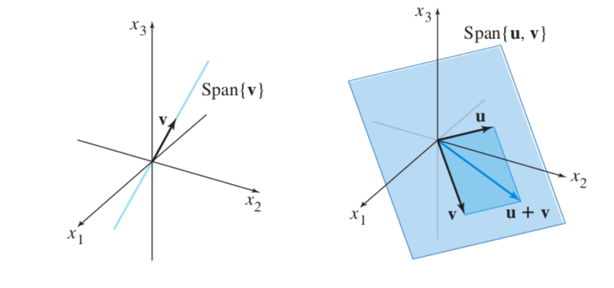
Lemma zum Spann

(i) $\boldsymbol{0} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$,

(ii) $\boldsymbol{a}_i \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ für alle $i = 1, \dots, k$,

(iii) LGS $(\boldsymbol{a}_1 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{a}_k \mid \boldsymbol{b})$ hat eine Lösung $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$

Spann Visualisierung



Matrix

Eine rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten gefüllt mit reellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

bezeichnen wir als $(m \times n)$-Matrix und schreiben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Matrix-Vektor-Produkt

Das Matrix-Vektor-Produkt von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Spalten $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

Matrix-Vektor-Produkt Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln Matrix-Vektor-Produkt

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$,

(ii) $A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x})$.

(in)homogenes LGS

Ein LGS der Form $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ wird homogen genannt.
Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist immer eine Lösung des homogenen LGS und wir nennen das die triviale Lösung.
Ein LGS der Form $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ wird inhomogen genannt.

Lösungsmenge homogener LGS

Ein homogenes System hat genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn es zumindest eine freie Variable gibt. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS kann als $\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ für Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ geschrieben werden.

Lösungsmenge inhomogener LGS

Sei $\mathbb{L}_h = \{\boldsymbol{x} \colon A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ und $\boldsymbol{x}_0$ ein Vektor mit $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$. Dann ist Menge aller Lösungen des inhomogenen Systems

$$\mathbb{L}_i = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_h \colon \boldsymbol{x}_h \in \mathbb{L}_h\}.$$

Lösungsmenge (in)homogener LGS Beispiel

Wir betrachten das folgende LGS in reduzierter Zeilenstufen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

was wir wiefolgt ausdrücken können:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & -3x_3 & + & 0x_4 \\ x_2 & = & -4 & + & 2x_3 & + & -5x_4 \\ x_3 & = & 0 & + & 1x_3 & + & 0x_4 \\ x_4 & = & 0 & + & 0x_3 & + & 1x_4 \end{array}.$$

Damit lässt jeder Lösungsvektor schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R},$$

Wenn wir die rechte Seite zu $\mathbf{0}$ ändern, dann lässt sich die Lösungsmenge schreiben als

$$\mathbb{L}_h = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

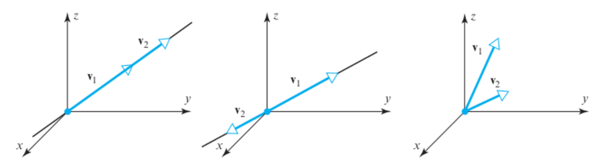
Lineare (Un)Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig, wenn die Vektorgleichung

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ besitzt. Andernfalls nennen wir die Vektoren linear abhängig.

Lineare (Un)Abhängigkeit Beispiel



zeigt zwei linear abhängige (links und mitte) und unabhängige (rechts) Vektoren.

Lineare (Un)Abhängigkeit Theorem

- Eine Menge $M = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn es ein $\boldsymbol{v}_j \in M$ gibt, so dass $\boldsymbol{v}_j \in \operatorname{span}(M \setminus \{\boldsymbol{v}_j\})$.
- Jede Menge $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $k > n$ ist linear abhängig.
- Jede Menge $M = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ mit $\mathbf{0} \in M$ ist linear abhängig.

Megatheorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat eine Lösung für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.

(iii) $\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\} = \mathbb{R}^m$.

(iv) A hat ein Pivot in jeder Zeile.

Überschrift