

# Kapitel 1 - Lineare Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^n$

## Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** in  $\mathbb{R}^n$  mit Variablen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  und Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  hat die Form  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ .

## Lineares Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** aus  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$  hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Wir nennen zwei LGS **äquivalent**, wenn sie die gleichen Lösungen besitzen. Ein LGS lässt sich vollständig durch die Koeffizienten beschreiben und kann daher auch in Form einer (**erweiterten**) **Koeffizientenmatrix** dargestellt werden.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Ohne die letzte Spalte spricht man von einer Koeffizientenmatrix.

## LGS Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

## Elementare Zeilenoperationen

Um das LGS zu vereinfachen, ohne die Lösungsmenge zu ändern, sind folgende **elementare Zeilenoperationen** erlaubt:

- Multipliziere eine Zeile mit einer Konstante  $c \neq 0$ .
- Tausche zwei Zeilen.
- Addiere eine Zeile  $c \neq 0$  mal zu einer anderen.

## (reduzierte) Zeilenstufenform

Eine Matrix ist in **Zeilenstufenform**, wenn:

- Alle **Nullzeilen** (Zeilen, in der höchstens der letzte Eintrag ungleich 0 ist) befinden sich am Ende der Matrix.
- Die **Pivots** (der erste Eintrag  $a_{ji}$  einer Zeile ungleich Null:  $j_i = \min\{j: a_{ij} \neq 0\}$ ) der anderen Zeilen erfüllen die Stufenbedingung

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r.$$

Variablen die zu einer Pivot gehören nennen wir **gebunden** und die restlichen Variablen nennen wir **frei**

Eine Matrix ist in **reduzierter Zeilenstufenform**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Sie ist in Zeilenstufenform.
- Alle Pivoteinträge  $a_{ij_i}$  sind gleich 1.
- Alle Spalteneinträge über einem Pivot sind gleich 0.

## LGS in Zeilenstufenform

Das untere LGS ist in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 2. \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

## Anzahl Lösungen

- Ein LGS hat genau dann keine Lösung, wenn sich durch elementare Zeilenoperationen eine **Nullzeile**

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ c)$$

mit  $c \neq 0$  erzeugen lässt.

- Ein lösbares LGS hat genau eine Lösung, wenn es keine freien Variablen gibt. Andernfalls gibt es unendlich viele Lösungen.

## Elementare Zeilenoperationen Beispiel

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array} \right) \\ \frac{1}{3} \cdot (1) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array} \right) \\ (2) - (1) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array} \right) \\ (2) \leftrightarrow (3) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ (2) + 2 \cdot (1) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (2) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ (1) - 2 \cdot (2) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot (3) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ (1) + \frac{16}{3} \cdot (3) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ (2) - \frac{5}{3} \cdot (3) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierter Zeilenstufenform.

## Gauss-Jordan-Verfahren

Um die Lösungen von einem LGS zu bestimmen, kann man das Gauss-Jordan-Verfahren benutzen:

- Schreibe das LGS in eine Koeffizientenmatrix.
- Bringe Matrix durch elementare Zeilenoperationen in Zeilenstufenform.
- Stelle fest, ob das System lösbar ist.
- Falls ja, reduziere die Matrix um Lösungen zu bestimmen.

## Vektor in $\mathbb{R}^n$

Ein  **$n$ -dimensionaler Vektor** ist ein geordnetes  $n$ -Tupel  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  von reellen Zahlen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , genannt Komponenten.

- Wir schreiben  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in Spaltenform:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .
- Wir definieren den **Nullvektor** als

$$\mathbf{0} = \underbrace{(0, 0, 0, \dots)}_{n \text{ mal}},$$

und den  $j$ -ten **Einheitsvektor** als

$$\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0).$$

- Vektoraddition:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- Multiplikation mit einem **Skalar**  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda \cdot \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

## Standardraum

Die Menge aller möglichen  $n$ -dimensionalen Vektoren ist der  **$n$ -dimensionale reelle Standardraum**

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

## Vektorrechenregeln

Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  und  $c, d \in \mathbb{R}$  gilt:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$
- $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$
- $c(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

## Linearkombinationen

Wir nennen einen Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  eine **Linearkombination** von Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ , wenn er sich als

$$\mathbf{b} = c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_k \mathbf{a}_k$$

mit  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  schreiben lässt. Die Zahlen  $c_1, \dots, c_k$  nennen wir Gewichte oder Koeffizienten.

## Linearkombinationen Beispiel

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}$  ist eine Linearkombination aus  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  mit Koeffizienten  $c_1 = -2$  und  $c_2 = 5$ . Kurz:  $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2$ .

## Spann

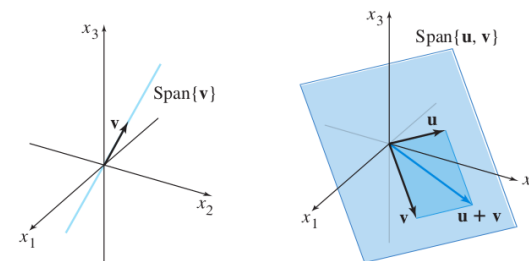
Die Menge aller Linearkombinationen von gegebenen Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir als **Spann** oder die von den Vektoren **aufgespannte Menge**:

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\} = \{c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_k \mathbf{a}_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

## Lemma zum Spann

- $\mathbf{0} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ ,
- $\mathbf{a}_i \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  für alle  $i = 1, \dots, k$ ,
- LGS  $(\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_k \mid \mathbf{b})$  hat eine Lösung  
 $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$

## Spann Visualisierung



## Matrix

Eine rechteckiges Schema mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten gefüllt mit reellen Zahlen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

bezeichnen wir als  **$(m \times n)$ -Matrix** und schreiben  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

## Matrix-Vektor-Produkt

Das **Matrix-Vektor-Produkt** von  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Spalten  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$A\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n.$$

## Matrix-Vektor-Produkt Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

## Rechenregeln Matrix-Vektor-Produkt

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ ,
- $A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x})$ .

### Megatheorem

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  hat eine Lösung für jedes  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .
- (ii) Jedes  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  ist eine Linearkombination der Spalten von  $A$ .
- (iii)  $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ .
- (iv)  $A$  hat ein Pivot in jeder Zeile.

### Überschrift