

Aufgabe 1

Erstellen Sie eine schematische Übersicht der verschiedenen Konvergenzarten, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. Welche Konvergenz folgt aus welcher? (Tipp: Folie 417 aus der Vorlesung)

Aufgabe 2

Gegeben seien Zufallsvariablen $X_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, wobei $\lambda_n, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

für eine Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Aufgabe 3

Es sei X_n , $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ und sei X eine weitere Zufallsvariable.

a) Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{1} X \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X).$$

Hinweis: Jensen'sche Ungleichung.

b) Es seien nun $X_n \sim \text{Bin}(1, \frac{1}{n})$ und X sei definiert durch

$$X: \Omega \rightarrow \{-1, 1\} \quad \text{mit} \quad P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

mit X_n, X stu. für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Rückrichtung nicht gilt, d.h.

$$\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X) \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{1} X.$$