Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Bayes

Aufgabe 1

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $P(A) = P(B) = 1/2$ und $P(B|A) = 1/2$. Sind A und B unabhängig? Wie groß ist $P(A \cup B)$?

Aufgabe 2

Die Eingänge eines Ladens sind mit einer Alarmanlage gegen Diebstahl gesichert. Wenn ein Dieb die Anlage passiert, wird mit W'keit 0.995 Alarm ausgelöst. Bei einem unbescholtenen Kunden beträgt die W'keit 0.006. Erfahrungswerte zeigen, daß auf 500 Kunden ein Dieb kommt.

(a) Mit welcher W'keit alarmiert die Anlage zu Recht? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden harmlose Kunden erschreckt?

(b) Wie groß müssten die W'keiten für korrekten und falschen Alarm seien, damit zumindest die Hälfte der Kompromittierten tatsächlich Diebe sind?

Aufgabe 3

Trotz Anschnallpflicht legen 15% aller Autofahrer keinen Gurt an. Eine Krankenversicherung ermittelte, dass bei Verkehrsunfällen von PKW-Fahrern nur 8% schwere Kopfverletzungen aufwiesen, wenn die Fahrer angeschnallt waren. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 62% keine schwere Kopfverletzung davon.
Betrachten Sie die Ereignisse

- A: Fahrer war angegurtet
- K: Unfallverletzter PKW-Fahrer weist schwere Kopfverletzung auf

(a) Interpretieren Sie das Ereignis $\bar{A} \cap K$ und berechnen Sie $P(\bar{A} \cap K)$.

(b) Sind die Ereignisse $\bar{A}$ und K stochastisch unabhängig?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer nicht angegurtet war, wenn eine schwere Kopfverletzung diagnostiziert wurde?

Aufgabe 4

Eine Behörde überwacht mit Hilfe einer Software die unverschlüsselte E-Mail Kommunikation der deutschen Internetnutzer*innen. Die Software, die E-Mails auf eine Reihe von Schlüsselbegriffen und Phrasen filtert, die auf illegal und/oder terroristische Aktivitäten hinweisen könnte, stuft eine tatsächlich bedrohliche Kommunikation mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit von 99,5% richtig ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine harmlose E-Mail fälschlicherweise als potentielle Bedrohung klassifiziert wird, liegt dagegen nur bei 0,5%.
In Deutschland gibt es 71.000.000 Internetnutzer*innen. Nachfolgend gehen wir davon aus, dass

- jede*r Nutzer*in täglich 10 unverschlüsselte E-Mails verschickt,
- 10.000 Nutzer*innen das Internet für die Vorbereitung illegaler und terroristischer Aktivitäten nutzen
- und jedes vierte Mal eine E-Mail, die von einem dieser 10.000 Nutzer*innen verschickt wird, direkte Kommunikation über einen bedrohliche Aktivität betrifft.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem beliebigen Tag eine durch die Software als potentielle Bedrohung eingestufte E-Mail tatsächlich eine reale Bedrohung aufweist?
Verwenden Sie dazu folgende Definitionen von Ereignissen:

- V = E-Mail wird anhand der Software als verdächtig eingestuft
- $\bar{V}$ = E-Mail wird anhand der Software *nicht* als verdächtig eingestuft
- B = E-Mail weist tatsächlich eine reale Bedrohung auf
- $\bar{B}$ = E-Mail ist harmlos.

$$P(V|B) = P(\bar{V}|\bar{B}) = \frac{199}{200}, \quad P(\bar{V}|B) = P(V|\bar{B}) = \frac{1}{200}, \quad P(B) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1\cancel{0}\cdot 10\,\cancel{000}}{71\,\cancel{000}\,\cancel{000}} = \frac{1/4}{710} = \frac{1}{2840}$$

$$P(B|V) = \frac{P(V|B)\cdot P(B)}{P(V|B)\cdot P(B) + P(V|\bar{B})\cdot P(\bar{B})} = \frac{\frac{199}{\cancel{200}}\cdot\frac{1}{\cancel{2840}}}{\frac{199}{\cancel{200}}\cdot\frac{1}{\cancel{2840}} + \frac{1}{\cancel{200}}\cdot\frac{2839}{\cancel{2840}}} = \frac{199}{199 + 2839} = 0.066$$

Aufgabe 1

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $P(A) = P(B) = 1/2$ und $P(B|A) = 1/2$. Sind A und B unabhängig? Wie groß ist $P(A \cup B)$?

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(B|A)\,P(A) = P(A \cap B)$ $\Rightarrow$ A & B sind unabhängig.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$

Aufgabe 2

Die Eingänge eines Ladens sind mit einer Alarmanlage gegen Diebstahl gesichert. Wenn ein Dieb die Anlage passiert, wird mit W'keit 0.995 Alarm ausgelöst. Bei einem unbescholtenen Kunden beträgt die W'keit 0.006. Erfahrungswerte zeigen, daß auf 500 Kunden ein Dieb kommt.

(a) Mit welcher W'keit alarmiert die Anlage zu Recht? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden harmlose Kunden erschreckt?

(b) Wie groß müssten die W'keiten für korrekten und falschen Alarm seien, damit zumindest die Hälfte der Kompromittierten tatsächlich Diebe sind?

A: Alarm ausgelöst. D: Dieb

$P(A|D) = 0.995$. $P(A|\bar{D}) = 0.006$. $P(D) = 0.002$

a) $P(D|A) = \dfrac{P(A|D) \cdot P(D)}{P(A|D) \cdot P(D) + P(A|\bar{D}) \cdot (1 - P(\bar{D}))} = \dfrac{0.995 \cdot 0.002}{0.995 \cdot 0.002 + 0.006 \cdot 0.998} = 0.25$

$P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 0.75$

b) $\dfrac{P(A|D) \cdot 0.002}{P(A|D) \cdot 0.002 + P(A|\bar{D}) \cdot 0.998} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{P(A|D)}{P(A|\bar{D})} \geq \dfrac{0.998}{0.002} = 499$.

z.B. $\cdot\ P(A|D) = 0.995$, $P(A|\bar{D}) = 0.002$

! $P(A|\bar{D})$ darf den Wert $\frac{1}{499}$ nicht überschreiten, da sonst keine W-heit mit mindestens 50% möglich ist.

Aufgabe 3

Trotz Anschnallpflicht legen 15% aller Autofahrer keinen Gurt an. Eine Krankenversicherung ermittelte, dass bei Verkehrsunfällen von PKW-Fahrern nur 8% schwere Kopfverletzungen aufwiesen, wenn die Fahrer angeschnallt waren. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 62% keine schwere Kopfverletzung davon.

Betrachten Sie die Ereignisse

- A: Fahrer war angegurtet $P(A) = 0.85$ $P(\bar{A}) = 0.15$
- K: Unfallverletzter PKW-Fahrer weist schwere Kopfverletzung auf $P(K|A) = 0.08$ $P(\bar{K}|\bar{A}) = 0.62$ $\Rightarrow P(K) = P(K|A) \cdot P(A) + P(K|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.08 \cdot 0.85 + 0.38 \cdot 0.15 = 0.125 = 1/8$

(a) Interpretieren Sie das Ereignis $\bar{A} \cap K$ und berechnen Sie $P(\bar{A} \cap K)$. $\bar{A} \cap K$ bedeutet die Person hat sich nicht angeschnallt und einen Unfall mit schwerer Kopfverletzung gehabt. $P(\bar{A} \cap K) = P(K|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.38 \cdot 0.15 = 0.057 \approx 6\%$

(b) Sind die Ereignisse $\bar{A}$ und K stochastisch unabhängig? $P(K|\bar{A}) = 0.38 \neq 0.125 = P(K) \Rightarrow$ Die Ergebnisse sind nicht stoch. unabhängig. Alternativ: $P(\bar{A} \cap K) \neq P(\bar{A}) \cdot P(K)$

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer nicht angegurtet war, wenn eine schwere Kopfverletzung diagnostiziert wurde? $P(\bar{A}|K) = \dfrac{P(\bar{A} \cap K)}{P(K)} = \dfrac{0.093}{0.125} = 0.456$