Blatt 5

Abgabe spätestens am 13.07.2022 um 23:59 Uhr in Moodle

Aufgabe 1 (11 Punkte)
Gegeben seien zwei Folgen von Zufallsvariablen mit

$$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bin}\left(4, \frac{1}{2}\right), \quad Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Geom}\left(\frac{1}{3}\right),\ i \in \mathbb{N}$$

sowie die Folgen der Mittelwerte

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,\ i \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ sodass [8]

$$\bar{X}_n + \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a,$$
$$\bar{X}_n \cdot \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b.$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen!

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n \xrightarrow{2} 2$. [3]

Aufgabe 2 (9 Punkte)
Es seien $X_1, X_2, ... \sim U(0,1)$ unabhängig und identisch verteilt und $X \sim \text{Exp}(1)$. Zeigen Sie, dass

$$n \cdot \min_{1 \leq j \leq n} X_j \overset{D}{\to} X$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe	Punkte	Erreichte Punkte
1	11	
2	9	
Gesamt	20	

Eugen Gorich MatNr 12371341

Aufgabe 1 (11 Punkte)
Gegeben seien zwei Folgen von Zufallsvariablen mit

$$X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bin}\left(4, \frac{1}{2}\right), \quad Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Geom}\left(\frac{1}{3}\right), \; i \in \mathbb{N}$$

sowie die Folgen der Mittelwerte

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \; i \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ sodass

$$\bar{X}_n + \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a,$$
$$\bar{X}_n \cdot \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b.$$

Begründen Sie Ihr Vorgehen!

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n \xrightarrow{2} 2$.

a) Behauptung: $a=5$, $b=6$

$\mathbb{E}[X_i] = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ und $Var[X_i] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$. $\mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ und $Var[Y_i] = \frac{1-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = 6$.

Da $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. und $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. sind und in beiden Fällen der Erwartungswert und die Varianz existieren, folgt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, dass $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i] = 2$ und $\bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[Y_i] = 3$. Mit Julians Hinweis folgt $\bar{X}_n + \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 2+3 = 5 =: a$. Alternative Lösung wäre:
Wir definieren $Z_i := X_i + Y_i \;\forall i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[Y_i] = 2+3 = 5$ und $Var(Z_i) \leq Var(X_i) + Var(Y_i) + 2 \cdot Var(X_i) Var(Y_i) < \infty \;\forall i \in \mathbb{N}$.
Es gilt aussserdem $\bar{Z}_n = \bar{X}_n + \bar{Y}_n$ und $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist i.i.d., da $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d sind und somit auch die Summe $(X_i + Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i i.d. ist.
Somit gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen und $\bar{X}_n + \bar{Y}_n = \bar{Z}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[Z_i] = 5 = a$

Für die zweite Aussage definieren wir eine Zufallsvektorenfolge durch $Z_i := \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$. Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y$. f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.
Es gilt $\bar{Z}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_i] \\ \mathbb{E}[Y_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbb{E}[Z_i]$.
Mit dem Satz von der stetigen Abbildung folgt daraus $f(\bar{Z}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(\mathbb{E}[Z_i]) = \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[Y_i] = 2 \cdot 3 = 6$
Alternativ folgt die Aussage auch aus dem Hinweis von Julian. $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 2$ & $\bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 3 \Rightarrow \bar{X}_n \cdot \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 2 \cdot 3 = 6$

b) $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot 2 = 2$. $\mathbb{E}[\bar{X}_n^2] = Var[\bar{X}_n] + \mathbb{E}[\bar{X}_n]^2 = \frac{1}{n} + 4 < \infty$

Unabhängigkeit der X_i

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_n - 2)^2] = \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])^2] = Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 1 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

. Somit gilt $\bar{X}_n \xrightarrow{2} 2$

Aufgabe 2 (9 Punkte)
Es seien $X_1, X_2, ... \sim U(0,1)$ unabhängig und identisch verteilt und $X \sim \text{Exp}(1)$. Zeigen Sie, dass

$$n \cdot \min_{1\leq j\leq n} X_j \xrightarrow{D} X$$

für $n \to \infty$.

$$F_{X_i}: \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{für } x<0 \\ x & , \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

Aus Übung 7 wissen wir, dass für $Z_n := \min(X_1, ..., X_n)$ gilt:

$$F_{n \cdot Z_n}(x) = \mathbb{P}(n \cdot Z_n \leq x) = \mathbb{P}(\min\{X_1,...,X_n\} \leq \tfrac{x}{n}) = 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1,...,X_n\} > \tfrac{x}{n}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq \tfrac{x}{n},...,X_n \geq \tfrac{x}{n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq \tfrac{x}{n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(\tfrac{x}{n}))$$

Daraus folgt auch:

$$F_{n \cdot Z_n}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(\tfrac{x}{n})) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{x}{n}) & , 0 \leq x < n \\ 1 & , x \geq n \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1 - (1 - \frac{x}{n})^n & , 0 \leq x < n \\ 1 & , x \geq n \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 1 - e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} F_{n \cdot Z_n}(x) = (1 - e^{-x}) \cdot I_{[0,\infty)}(x)$ und somit $X_n \xrightarrow{D} X$.