Zufallsvektoren

Aufgabe 1

Sei $Z = X + Y$ mit $X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass Z Gamma-verteilt ist mit $Z \sim \mathcal{G}(\alpha = 2, \beta = \lambda)$.

Aufgabe 2

Sei die gemeinsame Dichte von (X, Y) gegeben als

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Was ist der Träger von (X, Y)?

(b) Zeigen Sie dass die Randverteilung von X eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Randverteilung von Y.

(d) Zeigen Sie dass die bedingte Verteilung von $Y|X = x$ eine Gleichverteilung auf $[0, x]$ ist.

(e) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X|Y = y$.

Aufgabe 3

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-2\lambda)\frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} & x, y \in \mathbb{N}_0^+ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y

(b) Bestimmen Sie die bedingten Verteilungen von $X|Y = y$ und $Y|X = x$

(c) Was folgt aus den Ergebnissen der vorigen Teilaufgaben für (X, Y)?

Aufgabe 4

Der Zwedschgen-Alfons betreibt einen Obststand vor der Uni. Sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die Poisson-verteilte Anzahl an Kund:innen an einem gegebenen Tag. Seien die Umsätze U_i für die i-te Person des Tages unabhängig und identisch Gamma-verteilt: $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(\alpha, \beta)$

(a) Helfen Sie dem Zwedschgen-Alfons den Erwartungswert seines täglichen Gesamtumsatzes zu bestimmen.

(b) Helfen Sie dem Zwedschgen-Alfons die Varianz seines täglichen Gesamtumsatzes zu bestimmen.

(c) Erfahrungsgemäß kommen im Mittel 120 Kund:innen pro Tag zum Obststand und geben jeweils im Mittel 10 Euro aus, mit einer Standardabweichung von $\sqrt{10}$ Euro. Bestimmen Sie (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zwedschgen-Alfons an einem gegebenen Tag weniger als 1000 Euro Umsatz macht.

(d) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe mit einem geeigneten Simulations-Experiment in R.

Hinweis: Die Summe von n unabhängigen $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$-Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}(n\alpha, \beta)$-verteilt.

Aufgabe 1

Sei $Z = X + Y$ mit $X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass Z Gamma-verteilt ist mit $Z \sim \mathcal{G}(\alpha = 2, \beta = \lambda)$.

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda y}$, $T_X = T_Y = T_Z = \mathbb{R}^+$. $f_{\Gamma(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}$

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(y-x)\, dx = \int_0^\infty f(x) \cdot f_Y(y-x) \cdot I(x \in (0,y))\, dx = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)}\, dx = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y}\, dx = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$$

$\Rightarrow Z \sim \Gamma(\alpha = 2, \beta = \lambda)$

Aufgabe 2

Sei die gemeinsame Dichte von (X, Y) gegeben als

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Was ist der Träger von (X, Y)?

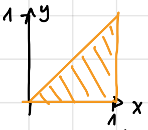
(b) Zeigen Sie dass die Randverteilung von X eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Randverteilung von Y.

(d) Zeigen Sie dass die bedingte Verteilung von $Y|X = x$ eine Gleichverteilung auf $[0, x]$ ist.

(e) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X|Y = y$.

a) $T_{X,Y} := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \ge y\}$



b) $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot I(y \le x)\, dy = \int_0^x \frac{1}{x}\, dy = \frac{1}{x} \cdot (x - 0) = \chi_{[0,1]}(x)$

c) $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot I(y \le x)\, dx = \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx = \ln\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \chi_{[0,1]}(y)$

d) Sei $x \in (0,1)$. $f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\underbrace{f_X(x)}_{=1}} = \frac{1}{x} \cdot I(0 < y \le x \le 1)$

Sei $x \in (0,1)$. $F_{Y|X}(Y \le y \mid X = x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(x,u)\, du = \int_{-\infty}^y \frac{1}{x} \cdot I(0 < u \le x \le 1)\, du = \int_0^y \frac{1}{x}\, du = \frac{1}{x}(y - 0) = \frac{y-0}{x-0}$

$\Rightarrow Y|X \sim G(0, x)$

e) Sei $y \in (0,1)$. $f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{x} \cdot I(0 < y \le x \le 1)}{\ln(y)}$

Sei $y \in (0,1)$. $F_{X|Y}(X \le x \mid Y = y) = \int_{-\infty}^x \frac{\frac{1}{u} \cdot I(0 < y \le u \le 1)}{\ln(y)}\, du = \begin{cases} 0 & , \ x < y \\ 1 & , \ x \ge 1 \\ \frac{1}{\ln(y)} \int_y^x \frac{1}{u}\, du = \frac{\ln(x) - \ln(y)}{\ln(y)} & , \ x \in [y, 1) \end{cases}$

Aufgabe 3

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-2\lambda)\frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} & x,y \in \mathbb{N}_0^+ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y

(b) Bestimmen Sie die bedingten Verteilungen von $X|Y = y$ und $Y|X = x$

(c) Was folgt aus den Ergebnissen der vorigen Teilaufgaben für (X, Y)?

a) $f_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=0}^{\infty} \exp(-2\lambda) \cdot \frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} = \exp(-2\lambda) \cdot \frac{1}{x!} \cdot \lambda^x \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \exp(-2\lambda) \cdot \frac{1}{x!} \cdot \lambda^x \cdot e^{\lambda} = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Wegen Symmetrie gilt $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

b) $f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\exp(-2\lambda) \cdot \frac{\lambda^{x+y}}{x!y!}}{\frac{\lambda^y \cdot e^{-\lambda}}{y!}} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$ $\Rightarrow X|Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Wegen Symmetrie gilt $Y|X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

c) $f_{X|Y}(x,y) = f_X(x) \wedge f_{Y|X}(x,y) = f_Y(y)$. $\Rightarrow$ X und Y sind unabhängig.

Aufgabe 4

Der Zwedschgen-Alfons betreibt einen Obststand vor der Uni. Sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die Poisson-verteilte Anzahl an Kund:innen an einem gegebenen Tag. Seien die Umsätze U_i für die i-te Person des Tages unabhängig und identisch Gamma-verteilt: $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(\alpha, \beta)$

(a) Helfen Sie dem Zwedschgen-Alfons den Erwartungswert seines täglichen Gesamtumsatzes zu bestimmen.

(b) Helfen Sie dem Zwedschgen-Alfons die Varianz seines täglichen Gesamtumsatzes zu bestimmen.

(c) Erfahrungsgemäß kommen im Mittel 120 Kund:innen pro Tag zum Obststand und geben jeweils im Mittel 10 Euro aus, mit einer Standardabweichung von $\sqrt{10}$ Euro. Bestimmen Sie (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zwedschgen-Alfons an einem gegebenen Tag weniger als 1000 Euro Umsatz macht.

(d) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe mit einem geeigneten Simulations-Experiment in R.

Hinweis: Die Summe von n unabhängigen $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$-Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}(n\alpha, \beta)$-verteilt.

Gesamtumsatz $= Y = \sum_{i=0}^{N} U_i \sim \Gamma(N\alpha, \beta)$

a) $E(Y|N=n) = \sum_{i=0}^{n} E(U_i) = n \cdot \frac{\alpha}{\beta}$. $E(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} E(Y|N=i) \cdot P(N=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lambda$

b) Satz von der totalen Varianz: $Var(X) = E(Var(X|Z)) + Var(E(X|Z))$

$Var(\text{Gesamtumsatz}) = E(\underbrace{Var(Y|N)}_{\frac{N\alpha}{\beta^2}}) + Var(\underbrace{E(Y|N)}_{\frac{N\alpha}{\beta}}) = \frac{\alpha}{\beta^2} E(N) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot Var(N) = \lambda\alpha \cdot \left(\frac{1+\alpha}{\beta^2}\right)$

c) Gesamtumsatz an Tag i: $Y_i = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$, $N = 120$

$Y_i \overset{\cdot}{\sim} \mathcal{N}(N \cdot 10, N \cdot 10) \Rightarrow P(Y_i \leq 1000) = P\left(Z \leq \frac{1000 - 1200}{\sqrt{120 \cdot 10}}\right) = 1 - \Phi(5.77) \approx 0$

$\bar{Y}_i \overset{\cdot}{\sim} \mathcal{N}\left(10, \frac{10}{120}\right) \Rightarrow P\left(\bar{Y}_i \leq \frac{1000}{120}\right) = P\left(Z \leq \frac{\frac{1000}{120} - 10}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{120}\right) = \Phi(-5.77) \approx 0$

1000 hat deutlich mehr als 3σ Abstand zu 1200. Daher nachvollziehbar.

d) NS.