

**Hinweise:**

- Abgabeschluss für dieses Blatt ist **24.12.2021, 12:00 CET**. Nur Abgaben, die rechtzeitig über die Moodle-Seite zur Veranstaltung erfolgen, werden akzeptiert und bewertet.
- Gruppenabgaben mit maximal 4 Personen pro Gruppe sind erlaubt. Alle Beteiligten erhalten identische Bewertungen. Notieren Sie deutlich lesbar die vollständigen Namen und Matrikelnummern aller Beteiligten auf der ersten Seite Ihrer abgegebenen Lösung.
- Nur nachvollziehbare Lösungen können gewertet werden. Geben Sie für alle Berechnungen auch einen formalen Ansatz an um die volle Punktzahl zu erreichen.
- Runden Sie Ihre Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen und kürzen Sie Brüche vollständig.
- Fassen Sie sich bei Textantworten kurz und formulieren Sie präzise mit korrekter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Fachbegriffe.
- Grafiken und Berechnungen können Sie auch mit R erzeugen bzw. durchführen. Übertragen Sie in diesem Fall den vollständigen, lauffähigen (!) und kommentierten Code für ihre Lösung sowie den relevanten R-Output in Ihre abgegebene Lösung.
- Die Notation  $\log(x) = \log_e(x)$  bezeichnet stets den natürlichen Logarithmus zur Basis  $e$ .

**Aufgabe 1**

12 Punkte

Eine Gruppe von 16 Personen wird nach ihrem individuellen Monatseinkommen befragt. Es ergibt sich folgende Urliste:

3300, 9000, 2700, 6500, 3600, 1500, 1000, 1500,  
1000, 2100, 1800, 2800, 1800, 4600, 3200, 2700.

- a) Geben Sie das arithmetische Mittel sowie den Median und die beiden Quartile an.
- b) Zeichnen Sie einen modifizierten Boxplot.
- c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.
- d) Beschreiben Sie kurz die Charakteristika dieser Verteilung mit den in der Vorlesung eingeführten Begriffen.

**Aufgabe 2**

10 Punkte

Farmer McDonald hat in der letzten Woche Daten bezüglich der Nutztiere auf seiner Farm erhoben und ausgewertet. In einem unbeobachteten Moment ist sein Hausschwein Susi in sein Büro eingedrungen und hat auf der Suche nach Futter einen Teil der Ergebnisse genüsslich aufgefressen. Helfen Sie dem verärgerten Farmer McDonald seine Unterlagen zu vervollständigen und Susi vor einer Strafe zu bewahren. Die Daten bezüglich des Gewichts seiner 19 männlichen und weiblichen Schweine liegen nur noch als Urliste (Einheit: kg) vor:

204, 221, 195, 191, 205, 220, 194, 225, 185, 188, 229, 231, 222, 239, 225, 194, 211, 222, 199

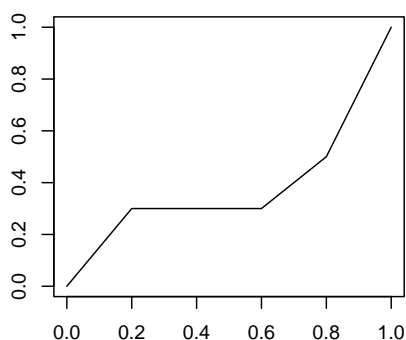
- a) Der Boxplot wurde von Susi verspeist. Berechnen Sie die Fünf-Punkte-Zusammenfassung und die Zäune des Boxplots und zeichnen Sie den modifizierten Boxplot für diese Daten.
- b) Welche Eigenschaft dieser Verteilung wird durch den Boxplot nicht dargestellt? Auf welchen Sachverhalt könnte sich diese Eigenschaft der Daten im vorliegenden Fall zurückführen lassen?
- c) Wie verändern sich die 0.25- und 0.75-Quantile wenn die 5 leichtesten Schweine jeweils 2 kg im folgenden Monat zunehmen und sich das Gewicht der übrigen Schweine nicht verändert?

In einer Region gibt es  $n = 4$  Faschingsvereine. Welcher Anteil von Vereinen wieviele Faschingswägen besitzt steht in folgender Tabelle:

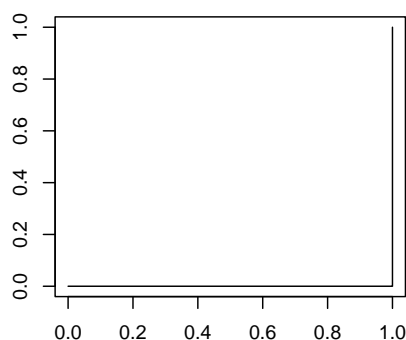
Anteil an Vereinen	0.25	0.25	0.5
Anzahl Wägen	7	1	3

- a) Bestimmen Sie ein auf den Bereich  $[0, 1]$  normiertes Konzentrationsmaß. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis kurz.
- b) Beschreiben Sie (konkrete Werte nicht gefragt), wie sich das Konzentrationsmaß im Vergleich zu Teilaufgabe (a) jeweils ändert, wenn ...
- (i) der Verein mit den wenigsten Wägen zwei weitere Wägen bekommt.
  - (ii) der Verein mit den meisten Wägen zwei weitere Wägen bekommt.
  - (iii) alle Vereine einen Wagen verlieren.
- Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
- c) Geben Sie alle (relevanten) Stützstellen der Lorenzkurve an und zeichnen Sie diese.
- d) Stellen die untenstehenden Graphiken potentiell mögliche Lorenzkurven für Datensätze mit  $n = 10$  Beobachtungseinheiten dar? Begründen Sie Ihre Antwort für jede der 4 folgenden Grafiken kurz.

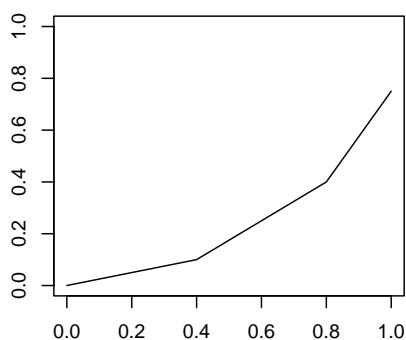
(i)



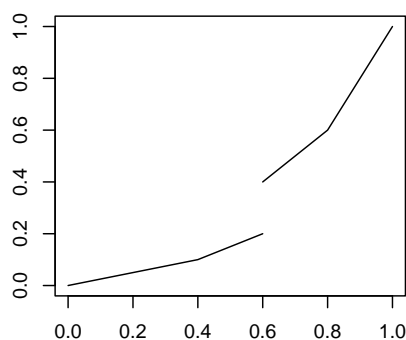
(ii)



(iii)



(iv)



**Aufgabe 4**

25 Punkte

Die Länge  $X$  (in cm) eines zufällig auf der Straße gefundenen Blütenblatts folge einer Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $c = 6$  gelten muss.
- (b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen  $Z = \frac{1}{X}$ .
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Blütenblatt genau 0.75 cm lang ist?
- (d) Die Fläche eines Blütenblatts der Länge  $X$  sei ungefähr  $Y = \frac{1}{2}X^2$ . Bestimmen Sie den Träger und die Dichte der Fläche  $Y$  eines zufälligen Blütenblatts.

**Aufgabe 5**

10 Punkte

Die diskrete Zufallsvariable  $X$  hat den Träger  $T_X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Die Wahrscheinlichkeiten der ersten 3 Werte sind  $P(X = 1) = 0.1$ ,  $P(X = 2) = 0.5$ ,  $P(X = 3) = 0.15$ .

- (a) Bestimmen Sie  $P(X = 4)$  und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X$ .
- (c) Berechnen Sie  $P(2 < X < 3)$ ,  $P(X \geq 3)$  und  $P(X \geq 3 | X \geq 2)$ .
- (d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $Y = X^2$ .

**Aufgabe 6**

15 Punkte

$$\text{Sei } F(x) = \begin{cases} 1 & x > \exp(1) \\ \log_e(ax + b) & 0 \leq x \leq \exp(1) \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

- (a) Für welche Werte von  $a$  und  $b$  ist  $F(x)$  die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable?
- (b) Wie lautet die zugehörige Dichte?
- (c) Wie lautet die zugehörige Quantilsfunktion?
- (d) Berechnen Sie das 95%-Quantil der Verteilung.