

**Exercise 1**

Zeigen Sie, dass für Mengen  $A_i, i \in I$  beliebig, die „de Morganschen Regeln“

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{und} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

gelten.

**Exercise 2**

Sei der Ergebnisraum  $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$  gegeben. Welche der folgenden Mengen sind  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ ?

- i)  $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$
- ii)  $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$
- iii)  $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$
- iv)  $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{a, b, d, e\}, \Omega\}$

**Exercise 3**

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum mit  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Beweisen Sie die Siebformel (*Satz 4.3. iii*):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^i A_{j_k}\right).$$

- b) Wie groß ist die (Laplace-)Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig gewählte Zahl  $n \in \{1, \dots, 100\}$  durch mindestens eine der Zahlen 2, 3 oder 5 teilbar ist?

**Exercise 4**

Für eine Lieferung von drei Motoren wird für jeden Motor untersucht, ob dieser defekt oder nicht defekt ist.

- a) Geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  an.
- b) Die Ereignisse  $A, B, C$  und  $D$  sind definiert als:

$A$ : Mindestens ein Motor ist defekt.

$C$ : Motor Nr. 3 ist defekt.

$B$ : Höchstens ein Motor ist defekt.

$D$ : Genau 2 Motoren sind defekt.

Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

- |              |               |                    |
|--------------|---------------|--------------------|
| 1. $\bar{A}$ | 3. $A \cap B$ | 5. $C \setminus B$ |
| 2. $\bar{B}$ | 4. $A \cup B$ | 6. $B \cap D$      |

- c) Bezeichne nun  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  das Ereignis „Motor  $i$  ist defekt“. Formulieren Sie das Ereignis  $A$  aus Aufgabe b) über  $M_1, M_2$  und  $M_3$ .

### Exercise 5

Geben Sie den Ergebnisraum  $\Omega$  für folgende Zufallsexperimente an:

- a) Geschäftserwartung eines zufällig ausgewählten Unternehmens beim Ifo-Geschäftsklimaindex,
- b) zweifacher Würfelwurf,
- c) dreifacher Münzwurf,
- d) Anzahl schwarzer Autos, die innerhalb eines Tages einen zufällig ausgewählten Ort passiert haben,
- e) Lebensdauer (in Stunden) einer zufällig ausgewählten Glühlampe.