Blatt 6

Abgabe spätestens am 27.07.2022 um 23:59 Uhr in Moodle

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Gegeben seien die beiden Zufallsvariablen X und Y mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.8 \cdot (x + y + xy) & , 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Begründen Sie kurz ohne weitere Rechnung, warum beide Zufallsvariablen nicht unabhängig sein können.

b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

c) Berechnen Sie die bedingten Dichten $f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X}(y|x)$.

d) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Im Wintersemester 2014/15 waren unter den Studierenden der drei größten Münchner Hochschulen 47% an der LMU, 36% an der TU und 17% an der FH eingeschrieben. Der Anteil der weiblichen Studierenden an den drei Hochschulen betrug 60% (LMU), 33% (TU) bzw. 38% (FH). (Quelle: Bayerisches Landesamt für Statistik).
Das Studierendenwerk macht unter den im WS 2014/15 eingeschriebenen Studierenden dieser drei Hochschulen eine Umfrage.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Studentin an der LMU / TU / FH studiert, wenn bekannt ist, dass 46% der Befragten weiblich sind? [4]

Aufgabe	Punkte	Erreichte Punkte
1	16	
2	4	
Gesamt	20	

Eugen Gorich MatNr 12371341

Aufgabe 1 (16 Punkte)
Gegeben seien die beiden Zufallsvariablen X und Y mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.8 \cdot (x + y + xy) & ,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 & ,\text{sonst.} \end{cases}$$

a) Begründen Sie kurz ohne weitere Rechnung, warum beide Zufallsvariablen nicht unabhängig sein können.

b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

c) Berechnen Sie die bedingten Dichten $f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X}(y|x)$.

d) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

a) X, Y können nicht unhängig sein, da sich $x+y+x\cdot y$ nicht zerlegen lässt in das Produkt von zwei Funktionen die jeweils nur von x bzw. nur von y abhängig sind. Das heißt, es existieren keine Funktionen $f(x), g(y)$, so dass $f(x)\cdot g(y) = x+y+xy$.

b) $$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 0.8(x+y+xy)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\,dy = 0.8\Big(x\cdot\underbrace{\int_0^1 dy}_{=1} + \underbrace{\int_0^1 y\,dy}_{=\frac{1}{2}} + x\cdot\underbrace{\int_0^1 y\,dy}_{=\frac{1}{2}}\Big)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x) = 0.8\big(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x\big)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x) = (1.2x + 0.4)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

Wegen der Symmetrie von x,y in $f_{X,Y}$ folgt direkt, dass $f_Y(y) = (1.2y + 0.4)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$

c) Für $y \in (0,1)$ gilt: $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{0.8(x+y+xy)\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)}{1.2y+0.4} = \frac{(x+y+xy)}{1.5y+0.5}\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

Wegen der Symmetrie von x,y in $f_{X,Y}$ folgt direkt, dass:

für $x \in (0,1)$ gilt: $$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{(x+y+xy)}{1.5x+0.5}\cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

d) $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] \overset{(4)}{=} 0.3\overline{5} - 0.6^2 = -0.00\overline{4} \approx 0$$

(4) $$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 0.8\int_0^1\int_0^1 xy(x+y+xy)\,dx\,dy = 0.8\int_0^1\Big(y\int_0^1 x^2dx + y^2\int_0^1 x\,dx + y^2\int_0^1 x^2 dx\Big)dy = 0.8\cdot\int_0^1\Big(\frac{1}{3}y + \frac{5}{6}y^2\Big)dy$$

$$= 0.8\cdot\Big(\frac{1}{3}\int_0^1 y\,dy + \frac{5}{6}\int_0^1 y^2\,dy\Big) = 0.8\cdot\Big(\frac{1}{6} + \frac{5}{18}\Big) = 0.3\overline{5}$$

(4) $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 1.2x^2 + 0.4x\,dx = \frac{1.2}{3} + \frac{0.4}{2} = 0.6$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Im Wintersemester 2014/15 waren unter den Studierenden der drei größten Münchner Hochschulen 47% an der LMU, 36% an der TU und 17% an der FH eingeschrieben. Der Anteil der weiblichen Studierenden an den drei Hochschulen betrug 60% (LMU), 33% (TU) bzw. 38% (FH). (Quelle: Bayerisches Landesamt für Statistik).
Das Studierendenwerk macht unter den im WS 2014/15 eingeschriebenen Studierenden dieser drei Hochschulen eine Umfrage.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Studentin an der LMU / TU / FH studiert, wenn bekannt ist, dass 46% der Befragten weiblich sind? [4]

$\mathbb{P}[LMU] = 0.47 \qquad \mathbb{P}[TU] = 0.36 \qquad \mathbb{P}[FH] = 0.17$

$\mathbb{P}[W|LMU] = 0.6 \qquad \mathbb{P}[W|TU] = 0.33 \qquad \mathbb{P}[W|FH] = 0.38$

a) $\mathbb{P}[W] = 0.46 \approx 0.6\cdot 0.47 + 0.33\cdot 0.36 + 0.38\cdot 0.17 = \mathbb{P}[W|LMU]\,\mathbb{P}[LMU] + \mathbb{P}[W|TU]\,\mathbb{P}[TU] + \mathbb{P}[W|FH]\,\mathbb{P}[FH]$

↳ Verifizierung vom Wert mittels Satz der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$\mathbb{P}[LMU|W] = \frac{\mathbb{P}[W|LMU]\cdot\mathbb{P}[LMU]}{\mathbb{P}[W]} = \frac{0.6\cdot 0.47}{0.46} = 0.61$$

$$\mathbb{P}[TU|W] = \frac{\mathbb{P}[W|TU]\cdot\mathbb{P}[TU]}{\mathbb{P}[W]} = \frac{0.33\cdot 0.36}{0.46} = 0.26$$

$$\mathbb{P}[FH|W] = \frac{\mathbb{P}[W|FH]\cdot\mathbb{P}[FH]}{\mathbb{P}[W]} = \frac{0.38\cdot 0.17}{0.46} = 0.14$$