Aufgabe 1

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte (u.i.v. / i.i.d.) Zufallsvariablen mit $X_i \sim U(0, b),\ i = 1, \ldots, n$, wobei $b > 0$.
Zeigen Sie, dass

$$\max_{i=1,\ldots,n} (X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} b.$$

Aufgabe 2

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $X_i \sim \chi^2_2,\ i = 1, \ldots, n$, wobei $f_{X_i}(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) I_{(0,\infty)}(x)$.
Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{X_i}{2}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + cy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $c = \frac{4}{3}$.

b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y.

c) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X + Y)$.

e) Bestimmen Sie $P(X \leq Y)$.