Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Aufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable, welche die Augenzahl beim Experiment "Werfen mit einem Würfel" beschreibt.

(a) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion für X an und stellen Sie diese graphisch dar!

Aufgabe 2

Auf einer Hauptstraße regeln Ampeln an vier Kreuzungen unabhängig voneinander den Verkehr. Jede von ihnen gestattet oder verbietet einem Auto die Weiterfahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5. Ein Auto fährt diese Hauptstraße entlang. Aus verkehrstechnischen Gründen interessiert die Anzahl der Verkehrsampeln, an denen das Auto ohne Halt vorbeifährt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto ohne Halt an den ersten x Ampeln vorbefährt, für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Definieren Sie die zugehörige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Träger dieser Zufallsvariable.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariable.

Aufgabe 3

Armin Laschet[1] verzichtet aufs Korrigieren von Klausuren und ermittelt die Noten, indem er einen sechsseitigen Würfel dreimal wirft und die kleinste auftretende Augenzahl als Endnote vergibt.

(a) Definieren Sie eine Zufallsvariable Z in Form einer Abbildung $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, die das Zufallsexperiment "Auswürfeln der Endnote" beschreibt. Geben Sie dazu die Ergebnismenge Ω sowie die Zuordnungsvorschrift $Z(\omega) = z$ für die Endnote an. Begründen Sie kurz, dass Z eine diskrete Zufallsvariable ist.

(b) Geben Sie die $\omega \in \Omega$ an, die der Endnote $Z = 5$ bzw. $Z = 6$ entsprechen.

(c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der ausgewürfelten Endnote. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Klausur?

[1] (probably) true story: `https://www.tagesspiegel.de/wissen/neues-zur-noten-affaere-um-armin-laschet-die-klausuren-sin` `11929326.html`

Aufgabe 4

Welche der nachfolgenden Funktionen sind Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen?

(a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - x^{-2} & x \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \log(1 + \sin(x)) & 0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \\ 1 & x \geq \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

(c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-x) & x \geq 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie zu allen gültigen Verteilungsfunktionen jeweils die zugehörige Dichtefunktion.

Aufgabe 5

Ein Wirt wird wöchentlich mit Bier beliefert. Die pro Woche verbrauchte Biermenge wird in Hektolitern gemessen und sei eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = (cx - 6x^2)\, I(x \in [0, 1]).$$

Hinweis:

$$I(x \in A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ist die Indikatorfunktion (auch: Deltafunktion). Andere gebräuchliche Schreibweisen dafür sind $I_A(x), \mathbb{I}_A(x), 1_A(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f(x)$ eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt.

(b) Ermitteln Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$.

(c) Mit welcher W'keit werden in einer Woche

  i) mehr als 0.8 Hektoliter verbraucht?

  ii) genau 0.5 Hektoliter verbraucht?

  iii) zwischen 0.5 und 0.8 Hektoliter verbraucht?

(d) Wie hoch ist der Bierverbrauch pro Woche, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 überschritten wird?

Aufgabe 6

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-2), & \text{für } 2 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, dass obige Funktion eine Dichtefunktion ist.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

c) Berechnen Sie $P(-4 \leq X \leq 3 \,|\, X \leq 2.1)$.

Aufgabe 7

Der Besitzer des Kinos *Cinemania* macht sich Gedanken über die Wirtschaftlichkeit seines Hauses. An 100 Tagen zählt er daher die Anzahl der Besucher.

Besucherzahl (a_j)	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Anzahl der Tage (h_j)	1	9	13	13	20	15	10	7	5	4	3

(a) Wie heißt das untersuchte Merkmal und wie ist es skaliert?

(b) Berechnen Sie die relativen und kumulierten relativen Häufigkeiten.

(c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

(d) Es wird ein Einheitspreis von 6 Euro erhoben. Wie groß ist der Anteil der Tage, an denen der Kinobesitzer weniger als 270 Euro einnimmt?

(e) Wie groß ist der Anteil der Tage, an denen mindestens 45, aber maximal 50 Besucher kommen?

Aufgabe 1

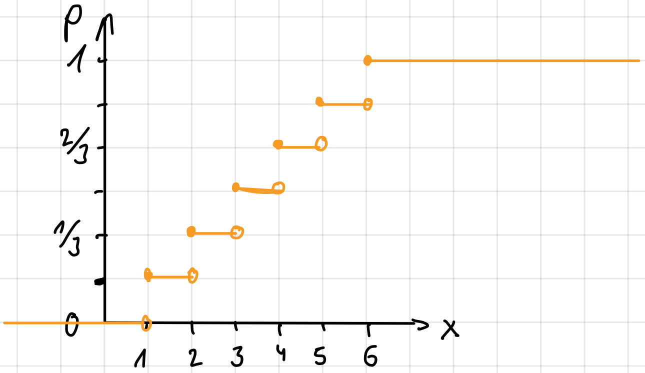
Sei X eine Zufallsvariable, welche die Augenzahl beim Experiment "Werfen mit einem Würfel" beschreibt.

(a) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion für X an und stellen Sie diese graphisch dar!

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

b) $$P(X \le x) = \sum_{i : x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{i : x_i \le x} 1/6 = \begin{cases} \frac{\lfloor x \rfloor}{6} & , x \in \Omega \\ 1 & , x > 6 \\ 0 & , x < 1 \end{cases}$$



Aufgabe 2

Auf einer Hauptstraße regeln Ampeln an vier Kreuzungen unabhängig voneinander den Verkehr. Jede von ihnen gestattet oder verbietet einem Auto die Weiterfahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5. Ein Auto fährt diese Hauptstraße entlang. Aus verkehrstechnischen Gründen interessiert die Anzahl der Verkehrsampeln, an denen das Auto ohne Halt vorbeifährt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto ohne Halt an den ersten x Ampeln vorbeifährt, für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(b) Definieren Sie die zugehörige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Träger dieser Zufallsvariable.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariable.

a) $A_n :=$ Auto fährt ohne Halt an genau den ersten n Ampeln vorbei (Nicht an Ampel $n+1$)

Auto fährt ohne Halt an den ersten n Ampeln vorbei $= \dot{\bigcup}_{i=n}^{4} A_i =: B_n$

$P(B_n) = P\left(\dot{\bigcup}_{i=n}^{4} A_i\right) = \sum_{i=n}^{4} P(A_i)$. Siehe unten für die Werte von $P(B_n)$.

b) & c) $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\{\omega\}) = \omega$ $[A_n \Leftrightarrow X = n.]$

$$P(X = n) = \begin{cases} (1/2)^{n+1} & , n \in \{0,1,2,3\} \\ 1/16 & , n = 4 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} , \qquad F(n) = P(X \le n) = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1/2 & , n \in [0,1) \\ 3/4 & , n \in [1,2) \\ 7/8 & , n \in [2,3) \\ 15/16 & , n \in [3,4) \\ 1 & , n \ge 4 \end{cases}$$

a) $$P(B_n) = P(X \ge n) = 1 - P(X < n) = 1 - P(X \le n-1) = 1 - F(n-1) = \begin{cases} 1 , & n = 0 \\ 1/2 , & n = 1 \\ 1/4 , & n = 2 \\ 1/8 , & n = 3 \\ 1/16 , & n = 4 \end{cases}$$

Aufgabe 3

Armin Laschet[1] verzichtet aufs Korrigieren von Klausuren und ermittelt die Noten, indem er einen sechsseitigen Würfel dreimal wirft und die kleinste auftretende Augenzahl als Endnote vergibt.

(a) Definieren Sie eine Zufallsvariable Z in Form einer Abbildung $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, die das Zufallsexperiment "Auswürfeln der Endnote" beschreibt. Geben Sie dazu die Ergebnismenge Ω sowie die Zuordnungsvorschrift $Z(\omega) = z$ für die Endnote an. Begründen Sie kurz, dass Z eine diskrete Zufallsvariable ist.

(b) Geben Sie die $\omega \in \Omega$ an, die der Endnote $Z = 5$ bzw. $Z = 6$ entsprechen.

(c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der ausgewürfelten Endnote. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Klausur?

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$. $X(\{\omega\}) = X(\{(a,b,c)\}) = \min\{a,b,c\}$.

$|\Omega| = 6^3 \rightarrow$ endlich $\Rightarrow X$ ist diskret.

b) $X^{-1}(\{5,6\}) = \{(5,x,y),(x,5,y),(x,y,5) \mid x,y \in \{5,6\}\} \cup \{(6,6,6)\}$

c) $P(X=n) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{6-n}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{6-n}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left((6-n)^2 + (6-n) + \frac{1}{3}\right)$

$$F(n) = P(X \leq n) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (6-i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (6-i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3} n \cdot (n^2 - 18n + 108)\right) = \frac{1}{216} \cdot n \cdot (n^2 - 18n + 108) \quad , n \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$P(\text{Bestehen}) = F(4) = 0.963 = \frac{26}{27}$

Aufgabe 4

Welche der nachfolgenden Funktionen sind Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsvariablen?

(a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - x^{-2} & x \geq 1 \end{cases}$$

- Monotonie ✓
- Rechtsstetig ✓ $F(1) = 0 = \lim_{x \to 1^-} F(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Also normiert. ✓

F ist eine Verteilungsfkt.

$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & , x > 1 \end{cases}$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \log(1 + \sin(x)) & 0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \\ 1 & x \geq \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

Erfallt nicht die Monotonie Eigenschaft, also ist das keine Verteilungsfunktion.

(c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-x) & x \geq 0 \end{cases}$$

- Monotonie ✓
- Stetig ✓
- Normiert ✓

Das ist eine Verteilungsfunktion

$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \exp(-x), & x \geq 0 \end{cases}$

Bestimmen Sie zu allen gültigen Verteilungsfunktionen jeweils die zugehörige Dichtefunktion.

Aufgabe 5

Ein Wirt wird wöchentlich mit Bier beliefert. Die pro Woche verbrauchte Biermenge wird in Hektolitern gemessen und sei eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = (cx - 6x^2)\; I(x \in [0,1]).$$

Hinweis:

$$I(x \in A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ist die Indikatorfunktion (auch: Deltafunktion). Andere gebräuchliche Schreibweisen dafür sind $I_A(x), \mathbb{I}_A(x), 1_A(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f(x)$ eine gültige Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt.

(b) Ermitteln Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$.

(c) Mit welcher W'keit werden in einer Woche

i) mehr als 0.8 Hektoliter verbraucht?

ii) genau 0.5 Hektoliter verbraucht?

iii) zwischen 0.5 und 0.8 Hektoliter verbraucht?

(d) Wie hoch ist der Bierverbrauch pro Woche, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 überschritten wird?

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx - 6x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}cx^2 - 2x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}c - 2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow c = 6$

Für $c=6$ gilt auch $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^b = (3-2b)\cdot b^2$. $F(b) = \begin{cases} 0 & , b \leq 0 \\ 3b^2 - 2b^3 & , b \in (0,1) \\ 1 & , b \geq 1 \end{cases}$

c) i) $P(X > 0.8) = 1 - P(X \leq 0.8) = 1 - F(0.8) \approx 0.1$

ii) $P(X = 0.5) = 0$

iii) $P(X \in (0.5, 0.8)) = F(0.8) - F(0.5) = 0.9 - 0.5 = 0.4$

d) $F(b) \overset{!}{=} 0.5 \iff 3b^2 - 2b^3 = 1/2 \iff b \approx 1/2$

Aufgabe 6

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-2), & \text{für } 2 \le x \le 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, dass obige Funktion eine Dichtefunktion ist.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

c) Berechnen Sie $P(-4 \le X \le 3 \,|\, X \le 2.1)$.

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^3 c(x-2)\,dx = c\left(\int_2^3 x\,dx - 2\right) = c \cdot \frac{1}{2} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow c = 2$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $$\int_2^b f(x)\,dx = \int_2^b 2x - 4\,dx = (b-2)^2$$

$$F(b) = \begin{cases} 0 & , \; b \le 2 \\ (b-2)^2 & , \; b \in (2,3) \\ 1 & , \; b \geq 3 \end{cases}$$

c) $$P(-4 \le X \le 3 \,|\, X \le 2.1) = \frac{P(-4 \le X \le 2.1)}{P(X \le 2.1)} = \frac{F(2.1) - F(-4)}{F(2.1)} = 1$$

Aufgabe 7

Der Besitzer des Kinos *Cinemania* macht sich Gedanken über die Wirtschaftlichkeit seines Hauses. An 100 Tagen zählt er daher die Anzahl der Besucher.

Besucherzahl (a_j)	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Anzahl der Tage (h_j)	1	9	13	13	20	15	10	7	5	4	3

(a) Wie heißt das untersuchte Merkmal und wie ist es skaliert? Absolutskala, Merkmal: Häufigkeit

(b) Berechnen Sie die relativen und kumulierten relativen Häufigkeiten.

(c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

(d) Es wird ein Einheitspreis von 6 Euro erhoben. Wie groß ist der Anteil der Tage, an denen der Kinobesitzer weniger als 270 Euro einnimmt?

(e) Wie groß ist der Anteil der Tage, an denen mindestens 45, aber maximal 50 Besucher kommen?

b) $n = 100$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_j	$\frac{1}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{3}{100}$
$F(x)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{36}{100}$	$\frac{56}{100}$	$\frac{71}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{88}{100}$	$\frac{93}{100}$	$\frac{97}{100}$	1

c) Nö

d) $F(4) = \frac{36}{100}$

e) $F(10) - F(4) = \frac{93-36}{100} = \frac{57}{100}$