Aufgabe 1

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_{X_i}, i = 1, \ldots, n$.

a) Stellen Sie die Verteilungsfunktion von $Z_{\max} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $Z_{\min} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ als Funktion der F_{X_i} dar.

b) Berechnen Sie die Dichte von $Z_{\max}$ unter der Annahme, dass $F_{X_i} = F \;\forall\; i = 1, \ldots, n$ und F stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2

a) Sei $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ und $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ stochastisch unabhängig. Welcher Verteilung folgt $Z = X + Y$?

b) Folgern Sie anhand des Ergebnisses aus a), welcher Verteilung die Zufallsvariable $X^* = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$ stochastisch unabhängig, $i = 1, \ldots, n$, folgt.

c) Seien $X_1, \ldots, X_n$ poissonverteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Po}(\lambda)$ stochastisch unabhängig, $i = 1, \ldots, n$. Berechnen Sie den Erwartungswert von

$$T = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}.$$

Aufgabe 3

Sei X eine stetige Zufallsvariable. Die zugehörige Dichte $f(x)$ sei symmetrisch um $x = a$. Zeigen Sie, dass $E(X) = a$ gilt, falls $E(X)$ existiert.

Besprechung von ausgewählter Themen aus der Vorlesung.