Blatt 4

Abgabe spätestens am 29.06.2022 um 23:59 Uhr in Moodle

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sei $X \sim F$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

a) $\mathbb{P}(X = 0)$,
b) $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2})$,
c) $\mathbb{P}(X \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$,

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei die Augenzahl beim Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$ und $\mathbb{P}(X \geq 5)$. [3]

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\mathbb{P}(X \geq 5)$ mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung. [3]
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathbb{P}(X \geq 5) \leq \mathbb{P}(|X - 3.5| \geq 1.5)$.

(c) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\mathbb{P}(X \geq 5)$ mit Hilfe der Markow-Ungleichung. [2]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für zwei Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ ist die Kullback-Leibler-Distanz definiert als

$$D(f_X, f_Y) = \mathbb{E}_X\left(\log\left(\frac{f_X(X)}{f_Y(X)}\right)\right)$$

für eine Zufallsvariable X mit Dichte f_X. Zeigen Sie, dass $D(f_X, f_Y) \geq 0$.

Hinweise:

- Der Erwartungswert wird bzgl. der Dichte f_X gebildet.
- Verwenden Sie die Jensen'sche Ungleichung.

Aufgabe	Punkte	Erreichte Punkte
1	6	
2	8	
3	6	
Gesamt	20	

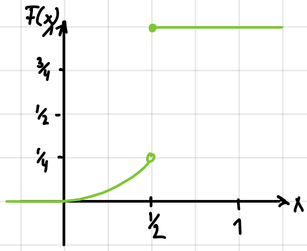
Eugen Gorich MatNr 12371341

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sei $X \sim F$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

a) $\mathbb{P}(X = 0)$,
b) $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2})$,
c) $\mathbb{P}(X \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$,



$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & , x < \frac{1}{2} \\ 3/4 & , x = \frac{1}{2} \end{cases} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x)$$

$\mu = \lambda + \delta_{1/2}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \int_{\{0\}} f_X(x)\, d\mu = f_X(0)\cdot(\lambda(\{0\}) + \delta_{1/2}(\{0\})) = 0$$

$$\mathbb{P}(X=\tfrac{1}{2}) = \int_{\{1/2\}} f_X(x)\, d\mu = f_X(\tfrac{1}{2})\cdot \mu(\{\tfrac{1}{2}\}) = \tfrac{3}{4}\cdot(\lambda(\{\tfrac{1}{2}\}) + \delta_{1/2}(\{\tfrac{1}{2}\})) = \tfrac{3}{4}\cdot(0+1) = \tfrac{3}{4}$$

. Alternativ: $\mathbb{P}(X=\frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X\leq\frac{1}{2}) - \mathbb{P}(X<\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}(X\in(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}]) = \int_{(1/3,2/3]} f_X(x)\, d\mu = \int_{(1/3,1/2)} f_X(x)\, d\mu + \int_{\{1/2\}} f_X(x)\, d\mu + \int_{(1/2,2/3]} f_X(x)\, d\mu = \int_{(1/3,1/2)} 2x\, d\lambda + \int_{\{1/2\}} f_X(x)\, d\delta_{1/2} + \int_{(1/2,2/3]} 0\, d\mu = [x^2]_{1/3}^{1/2} + \tfrac{3}{4} + 0 = \tfrac{8}{9}$$

Alternativ:

$$\mathbb{P}(X\in(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}]) = F_X(\tfrac{2}{3}) - F_X(\tfrac{1}{3}) = 1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Die Zufallsvariable X sei die Augenzahl beim Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathbb{P}(X \geq 5)$.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\mathbb{P}(X \geq 5)$ mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathbb{P}(X \geq 5) \leq \mathbb{P}(|X - 3.5| \geq 1.5)$.

(c) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\mathbb{P}(X \geq 5)$ mit Hilfe der Markow-Ungleichung.

a) $$\mathbb{E}[X] = \int_{\{1,\dots,6\}} x\, d\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{6} k\cdot\mathbb{P}(X=k) = \tfrac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{6} k = \tfrac{1}{\cancel{6}}\cdot\tfrac{\cancel{6}\cdot 7}{2} = 3.5$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \int_{\{1,\dots,6\}} x^2\, d\mathbb{P}_X - (\tfrac{7}{2})^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2\cdot\mathbb{P}(X=k) - 12.25 = \tfrac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{6} k^2 - 12.25 = \underbrace{\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13}_{=15.17} - 12.25 \approx 2.92$$

$$\mathbb{P}[X\geq 5] = \mathbb{P}[X=5] + \mathbb{P}[X=6] = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

b) $$\mathbb{P}(X\geq 5) = \mathbb{P}(X-3.5\geq 1.5) \leq \mathbb{P}(X-3.5\geq 1.5) + \mathbb{P}(X-3.5\leq -1.5) = \mathbb{P}(|X-3.5|\geq 1.5) \overset{\text{Tschebyshev}}{\leq} \tfrac{1}{(3/2)^2}\cdot \mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{9}\cdot 2.92 \approx 1.3$$

Mit der Tschebyshev-Ungleichung würde sich die obere Grenze 1.3 ergeben. Sie ist aber wenig hilfreich als obere Schranke, da $\mathbb{P}(X\geq 5)\leq 1$ gilt.

c) Markov-Ungleichung: $\mathbb{P}(X\geq 5) = \mathbb{P}(|X|\geq 5) \leq \frac{1}{5}\cdot E[|X|] = \frac{1}{5}\cdot E[X] = \frac{1}{5}\cdot 3.5 = 0.7$

Besser: $\mathbb{P}(X\geq 5) = \mathbb{P}(|X|\geq 5) \leq \frac{1}{5^2}\cdot E[|X|^2] = \frac{1}{5^2}\cdot E[X^2] = \frac{1}{5^2}\cdot 15.17 = 0.61$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für zwei Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ ist die Kullback-Leibler-Distanz definiert als

$$D(f_X, f_Y) = \mathbb{E}_X\left(\log\left(\frac{f_X(X)}{f_Y(X)}\right)\right)$$

für eine Zufallsvariable X mit Dichte f_X. Zeigen Sie, dass $D(f_X, f_Y) \geq 0$.

Hinweise:

- Der Erwartungswert wird bzgl. der Dichte f_X gebildet.
- Verwenden Sie die Jensen'sche Ungleichung.

$f(x) = \log(x)$ ist eine konkave Funktion. $g(X) := \dfrac{f_Y(X)}{f_X(X)}$. Wir zeigen $-D(f_X, f_Y) \leq 0$ und folgern daraus $D(f_X, f_Y) \geq 0$.

$$-\mathbb{E}_X\left[\log\left(\frac{f_X(X)}{f_Y(X)}\right)\right] \overset{\log(\frac{a}{b}) = -\log(\frac{b}{a})\ \&\ \mathbb{E}[-Y] = -\mathbb{E}[Y]}{=} \mathbb{E}_X\left[\log\left(\frac{f_Y(X)}{f_X(X)}\right)\right] \underset{\text{Jensen-UG}}{\leq} \log\left(\mathbb{E}_X\left[\frac{f_Y(X)}{f_X(X)}\right]\right) \overset{\mathbb{E}(g(X)) = \int_\Omega g(x) f_X(x)\, d\mu}{=} \log\left(\int_\Omega \frac{f_Y(x)}{\cancel{f_X(x)}} \cdot \cancel{f_X(x)}\, d\mu\right) = \log\left(\int_\Omega f_Y(x)\, d\mu\right) = \log(1) = 0$$

$$\Rightarrow -D(f_X, f_Y) = -\mathbb{E}_X\left[\log\left(\frac{f_X(X)}{f_Y(X)}\right)\right] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad D(f_X, f_Y) \geq 0$$