Blatt 2

Abgabe spätestens am 01.06.2022 um 23:59 Uhr in Moodle

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Ein technisches System besitzt 3 Kontrollleuchten, von denen entweder genau eine oder alle drei auf einmal leuchten. Jede dieser Möglichkeiten tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

Bezeichne K_i das Ereignis „Kontrollleuchte i brennt“ ($i = 1, 2, 3$).

a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse K_i paarweise unabhängig sind.
b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse K_i insgesamt nicht unabhängig sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0, 1)$, d.h. die Zähldichte von X ist gegeben durch $f_X(x) = p(1-p)^{x-1},\ x \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie explizit die Verteilungsfunktion F_X von X, d.h.

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie dabei, dass die Funktion vollständig beschrieben wird.

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Für $c > 0$ sei die Funktion $\mu : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty)$ mit

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{c^n}{n!} \exp(-c), \quad A \subseteq \mathbb{N}_0$$

auf dem Messraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist. [7]

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mu(A)$ für das Ereignis [2]

$$A = \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ gerade}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Hinweis: $\cosh(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

Aufgabe	Punkte	Erreichte Punkte
1	6	
2	5	
3	9	
Gesamt	20	

Eugen Gorich MatNr 12371341

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Ein technisches System besitzt 3 Kontrollleuchten, von denen entweder genau eine oder alle drei auf einmal leuchten. Jede dieser Möglichkeiten tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

Bezeichne K_i das Ereignis „Kontrollleuchte i brennt“ ($i = 1, 2, 3$).

a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse K_i paarweise unabhängig sind.
b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse K_i insgesamt nicht unabhängig sind.

$L_i :=$ "Nur Leuchte i brennt". $A :=$ "Alle Leuchten brennen".

$\Omega = \{L_1, L_2, L_3, A\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. $K_i := \{L_i, A\} \in \mathcal{F}$. $\forall B \in \mathcal{F}: \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{|B|}{4}$.

K_i bedeutet entweder brennt nur Leuchte i oder alle Leuchten brennen.

a) $\forall i,j \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$: $\mathbb{P}(K_i \cap K_j) = \mathbb{P}(\{A\}) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \mathbb{P}(\{L_i, A\}) \cdot \mathbb{P}(\{L_j, A\}) = \mathbb{P}(K_i) \cdot \mathbb{P}(K_j)$

b) $\mathbb{P}(K_1 \cap K_2 \cap K_3) = \mathbb{P}(\{A\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \mathbb{P}(\{L_1, A\}) \cdot \mathbb{P}(\{L_2, A\}) \cdot \mathbb{P}(\{L_3, A\}) = \mathbb{P}(K_1) \cdot \mathbb{P}(K_2) \cdot \mathbb{P}(K_3)$ $\Rightarrow$ Die Ereignisse sind nicht unabhängig.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0, 1)$, d.h. die Zähldichte von X ist gegeben durch $f_X(x) = p(1-p)^{x-1}$, $x \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie explizit die Verteilungsfunktion F_X von X, d.h.

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie dabei, dass die Funktion vollständig beschrieben wird.

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Siehe Def. Zähldichte}}}{=} \sum_{\omega \in (-\infty, x] \cap \mathbb{N}} f_X(\omega) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \sum_{\omega=1}^{\lfloor x \rfloor} f_X(\omega) & , x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \sum_{\omega=1}^{\lfloor x \rfloor} p(1-p)^{\omega-1} & , x \geq 1 \end{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrische Reihe}}}{=} \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor} & , x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Für $c > 0$ sei die Funktion $\mu : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty)$ mit

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{c^n}{n!} \exp(-c), \quad A \subseteq \mathbb{N}_0$$

auf dem Messraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mu(A)$ für das Ereignis

$$A = \{n \in \mathbb{N} | \, n \text{ gerade}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Hinweis: $\cosh(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

a) i) $\mu(\emptyset) = \sum_{n \in \emptyset} \ldots = 0$

ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$: $\mu(A) = \sum_{n \in A} \underbrace{\frac{c^n}{n!}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\exp(-c)}_{> 0} \geq 0$

iii) Sei $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. Es gilt $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \frac{c^n}{n!} \exp(-c) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in A_i} \frac{c^n}{n!} \exp(-c) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

iv) $\mu(\mathbb{N}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \exp(-c) = \exp(-c) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} = \exp(-c) \cdot \exp(c) = 1$

$\Rightarrow$ μ ist ein normiertes Maß / Wahrscheinlichkeitsmaß und somit zusammen mit dem Maßraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

b) $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n}}{(2n)!} \exp(-c) = \exp(-c) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n}}{(2n)!} = \exp(-c) \cdot \frac{\exp(c) + \exp(-c)}{2} = \frac{1 + \exp(-2c)}{2}$