Zufallsvektoren

Aufgabe 1

Sei $Z = X + Y$ mit $X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass Z Gamma-verteilt ist mit $Z \sim \mathcal{G}(\alpha = 2, \beta = \lambda)$.

Aufgabe 2

Sei die gemeinsame Dichte von (X, Y) gegeben als

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Was ist der Träger von (X, Y)?

(b) Zeigen Sie dass die Randverteilung von X eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Randverteilung von Y.

(d) Zeigen Sie dass die bedingte Verteilung von $Y|X = x$ eine Gleichverteilung auf $[0, x]$ ist.

(e) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X|Y = y$.

Aufgabe 3

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-2\lambda)\frac{\lambda^{x+y}}{x!y!} & x, y \in \mathbb{N}_0^+ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y

(b) Bestimmen Sie die bedingten Verteilungen von $X|Y = y$ und $Y|X = x$

(c) Was folgt aus den Ergebnissen der vorigen Teilaufgaben für (X, Y)?

Aufgabe 4

Der Zwedschgen-Alfons betreibt einen Obststand vor der Uni. Sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die Poisson-verteilte Anzahl an Kund:innen an einem gegebenen Tag. Seien die Umsätze U_i für die i-te Person des Tages unabhängig und identisch Gamma-verteilt: $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(\alpha, \beta)$

(a) Helfen Sie dem Zwedschgen-Alfons den Erwartungswert seines täglichen Gesamtumsatzes zu bestimmen.

(b) Helfen Sie dem Zwedschgen-Alfons die Varianz seines täglichen Gesamtumsatzes zu bestimmen.

(c) Erfahrungsgemäß kommen im Mittel 120 Kund:innen pro Tag zum Obststand und geben jeweils im Mittel 10 Euro aus, mit einer Standardabweichung von $\sqrt{10}$ Euro. Bestimmen Sie (approximativ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zwedschgen-Alfons an einem gegebenen Tag weniger als 1000 Euro Umsatz macht.

(d) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe mit einem geeigneten Simulations-Experiment in R.

Hinweis: Die Summe von n unabhängigen $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$-Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}(n\alpha, \beta)$-verteilt.