Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Sie können sich bis zu 5 Bonuspunkte für die bewerteten Hausaufgaben erreichen, indem Sie richtige Lösungen zu Aufgabe 2 und Aufgabe 4 rechtzeitig via Moodle abgeben.

Aufgabe 1

Es seien eine Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ und eine Funktion $P : \mathcal{P} \to [0,1]$ (wobei $\mathcal{P}$ Potenzmenge von Ω ist) mit

$$P(\{\omega_i\}) = p_i \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

sowie

$$P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i$$

gegeben. Zeigen Sie, daß P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω ist.

Aufgabe 2

60 Studierende in einer Vorlesung sollen auf drei identisch große Übungsgruppen verteilt werden. Wieviele mögliche Kombinationen gibt es?

Aufgabe 3

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = P(\bar{B}) \implies \bar{A} = B$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = 0 \implies P(A \cap B) = 0$.

(c) Die Menge Ω der Elementarereignisse sei die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen. Bezeichne ω_n das Ereignis, das im Auftreten der Zahl n bestehe. Außerdem gelte $P(\{\omega_n\}) = c/(n!)$. Welchen Wert muß c haben, damit P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist? *Hinweis:* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (Eulersche Konstante)

Aufgabe 4

Es werden hintereinander mit Zurücklegen drei Karten aus einem Spiel mit 32 Karten gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man

(a) höchstens einen Buben;

(b) nur Herz;

(c) mindestens zwei Herz;

(d) weder Herz noch Bube?

Aufgabe 5

Seien A und B beliebige Ereignisse mit $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 1/3$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Was kann man für $P(A \cup B)$ folgern?

Aufgabe 6

Beim Skatspiel erhält jeder der drei Spieler zufällig genau 10 der 32 vorhandenen Spielkarten. Die übrigen zwei Karten werden Skat genannt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält das Blatt eines bestimmten Spielers

(a) keinen Buben und kein As;

(b) mindestens drei Buben;

(c) alle Karten einer Farbe;

(d) genau drei Buben und alle restlichen Karten in der Farbe des fehlenden Buben?

Aufgabe 2

60 Studierende in einer Vorlesung sollen auf drei identisch große Übungsgruppen verteilt werden. Wieviele mögliche Kombinationen gibt es?

Es ist wichtig zu wissen, ob die Gruppen in diesem Kontext "Labels" haben und es daher eine Rolle spielt, ob man zur "Gruppe 1", "Gruppe 2" oder "Gruppe 3" zugewiesen wird, oder ob die Gruppen keine "Labels" haben und die ersten 20 Studierenden immer die "Gruppe 1" bilden, die nächsten 20 Studierenden immer die "Gruppe 2" bilden, u.s.w.

Wir wählen zuerst die ersten 20 aus den 60 Studenten und anschliessend nochmal 20 aus den übrigen 40. (Die dritte Gruppe ergibt sich automatisch).
Daraus folgt, dass wir $\binom{60}{20}\cdot\binom{40}{20}\cdot\binom{20}{20}$ Möglichkeiten haben die fixen Grüppchen zu bilden.

Wenn die Gruppen auch noch "Labels" haben, dann gäbe es 3! Möglichkeiten drei Grüppchen zu je 20 fixen Studenten auf die Gruppen G_1, G_2, G_3 zu verteilen.

Total gibt es also $\underline{\underline{\binom{60}{40}\cdot\binom{40}{20}}}$ Möglichkeiten ohne "Labels" und $\underline{\underline{3!\cdot\binom{60}{20}\cdot\binom{40}{20}}}$ Möglichkeiten mit "Labels".

Aufgabe 4

Es werden hintereinander mit Zurücklegen drei Karten aus einem Spiel mit 32 Karten gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man

(a) höchstens einen Buben;

(b) nur Herz;

(c) mindestens zwei Herz;

(d) weder Herz noch Bube?

a) $P(\text{höchstens einen Buben}) = P(\text{kein Buben}) + P(\text{einen Buben}) = \left(\frac{28}{32}\right)^3 + 3\cdot\frac{4}{32}\cdot\left(\frac{28}{32}\right)^2 = 0.96$

b) $P(\text{nur Herz}) = \left(\frac{8}{32}\right)^3 = \frac{1}{64} = 0.016$

c) $P(\text{mindestens zwei Herz}) = P(\text{zwei Herz}) + P(\text{nur Herz}) = 3\cdot\left(\frac{8}{32}\right)^2\cdot\frac{24}{32} + \frac{1}{64} = 0.16$

d) $P(\text{weder Herz noch Bube}) = \left(\frac{21}{32}\right)^3 = 0.28$

Aufgabe 5

Seien A und B beliebige Ereignisse mit $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 1/3$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{12} \leq P(A\cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Was kann man für $P(A\cup B)$ folgern?

$$\left.\begin{aligned} A\cap B \subseteq A &\Rightarrow P(A\cap B) \leq P(A) \\ A\cap B \subseteq B &\Rightarrow P(A\cap B) \leq P(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A\cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} = \tfrac{1}{3}$$

$P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$. $A = (A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$. Daher gilt wegen Axiom: $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\bar{B})$.

Daher gilt. $P(A\cap B) = \underbrace{P(A)}_{=\frac{3}{4}} - \underbrace{P(A\cap\bar{B})}_{\leq \min\{P(A), P(\bar{B})\}} \geq \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{13}{12} - P(A\cap B)$. Wegen $P(A\cap B)\in[\frac{1}{12}, \frac{4}{12}]$ folgt: $P(A\cup B)\in[\frac{3}{4}, 1]$

Aufgabe 3

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = P(\bar{B}) \implies \bar{A} = B$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = 0 \implies P(A \cap B) = 0$.

(c) Die Menge Ω der Elementarereignisse sei die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen. Bezeichne ω_n das Ereignis, das im Auftreten der Zahl n bestehe. Außerdem gelte $P(\{\omega_n\}) = c/(n!)$. Welchen Wert muß c haben, damit P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist? *Hinweis:* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (Eulersche Konstante)

a) A: Ich habe recht, wenn ich den Dozenten korrigiere. $P(A) = 0.5$
B: Ich bekomme beim (fairen) Münzwurf Kopf als Ergebnis. $P(\bar{B}) = 0.5$
$\Rightarrow P(A) = P(\bar{B})$ aber $\bar{A} \neq B$

b) $\underbrace{A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)}$ $= 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Beweis: Sei $B \subseteq A$ und $A_1 := A \setminus B$, $A_2 := B$. Dann sind A_1 und A_2 disjunkt. Daraus folgt aus den Axiomen $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(A \setminus B) + P(B) \geq P(B)$. ∎

c) $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\omega_n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{n!} = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = c \cdot e \Rightarrow c = \frac{1}{e}$

Aufgabe 1

Es seien eine Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ und eine Funktion $P : \mathcal{P} \to [0,1]$ (wobei $\mathcal{P}$ Potenzmenge von Ω ist) mit

$$(1) \quad P(\{\omega_i\}) = p_i \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

sowie

$$(2) \quad P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

gegeben. Zeigen Sie, daß P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω ist.

Sei $A_1, A_2, A_3, \dots \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt. Dann gilt wegen (2): $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{\omega_i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} P(\{\omega_i\})$.

Da die A_j alle paarweise disjunkt sind, gilt: $\forall \omega_i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \; \exists! \, j \in \mathbb{N}.\ \omega_i \in A_j$. Daraus folgt, dass die obige Summe auch umgeschrieben werden kann zu:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{\omega_i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} P(\{\omega_i\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\omega_i \in A_j} P(\{\omega_i\}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Somit folgt aus (2) die σ-additivität von P.

Aus der σ-additivität folgt $P(\Omega) = P\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1$ ∎

Aufgabe 6

Beim Skatspiel erhält jeder der drei Spieler zufällig genau 10 der 32 vorhandenen Spielkarten. Die übrigen zwei Karten werden Skat genannt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält das Blatt eines bestimmten Spielers

(a) keinen Buben und kein As;

(b) mindestens drei Buben;

(c) alle Karten einer Farbe;

(d) genau drei Buben und alle restlichen Karten in der Farbe des fehlenden Buben?

a) $\dfrac{\binom{24}{10}}{\binom{32}{10}} = 0.03$

b) $\dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{7}+\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = 0.08$

c) $\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{24}{2}}{\binom{32}{10}} = 1.7\ 10^{-5}$

d) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{10}} = 6.2\cdot 10^{-8}$