Aufgabe 1

Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen X, wenn

a) X diskret gleichverteilt ist auf $\{1, \ldots, n\}$, $n \in$,

b) X stetig gleichverteilt ist auf dem Intervall (a, b), $a < b$.

Aufgabe 2

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable sowie $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen für die charakteristische Funktion $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von X.

a) Die charakteristische Funktion ist, im Gegensatz zur momenterzeugenden Funktion M, stets auf der gesamten rellen Achse wohldefiniert und insbesondere gilt, dass $|\varphi_X(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Es gilt, dass $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, wobei $\overline{z} = a - by$ die komplex konjugierte zu $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist.

c) Für die Charakteristische Funktion φ_Y von $Y = a + bX$ gilt $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$.

Aufgabe 3

Die negative Binomialverteilung (n, p) ist eine diskrete Verteilung mit Werten in $_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sie beschreibt die Anzahl der Versuche, die in einer Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Trefferwahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ erforderlich sind, um $n \in$ Erfolge zu erzielen. Ihre Zähldichte ist gegeben durch

$$f(k) = \binom{k+n-1}{k} p^k (1-p)^n, \quad k \in_0 .$$

a) Zeigen Sie, dass die momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariablen $X \sim (n, p)$ gegeben ist durch

$$M_X(s) = \left(\frac{1-p}{1-\exp(s)p}\right)^n, \quad s \in \mathcal{D}$$

und dass $\mathcal{D} = (-\infty, -\log(p))$.

b) Es seien $X \sim (n_X, p)$, $Y \sim (n_Y, p)$ zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $n_X, n_Y \in$ und $p \in (0, 1)$.

Bestimmen Sie die Verteilung von $Z := X + Y$.

Hinweise:

- Binomische Reihe: $\dfrac{1}{(1-x)^m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{k} x^k, \quad 0 \leq x < 1,\ m \in .$

- Haben zwei Zufallsvariablen die gleiche momenterzeugende Funktion, so folgen sie derselben Verteilung.

Aufgabe 4

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $X_i \sim U(0,1)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$$

und bestimmen Sie die Konstante c.