Blatt 3

Abgabe spätestens am 15.06.2022 um 23:59 Uhr in Moodle

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Tom hat bei einer Verlosung sechs Kinokarten gewonnen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf seiner besten 11 Freundinnen und Freunde einzuladen
   - allgemein,
   - wenn Anna und Basti sich nicht gut verstehen und daher nicht zusammentreffen sollten? Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Im Kino finden Tom und seine Freunde eine Reihe mit sechs freien Plätzen nebeneinander. Auf wie viele Arten können sich die drei Jungen und drei Mädchen auf die Plätze verteilen, wenn
   - Jungen und Mädchen abwechselnd nebeneinander sitzen wollen,
   - Christina und David zusätzlich nebeneinander sitzen wollen?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_4\})$ sowie $\mu(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mu(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} \omega_1 \mapsto & 1 \\ \omega_2 \mapsto & 4 \\ \omega_3 \mapsto & 1 \\ \omega_4 \mapsto & 2 \end{cases}$$

das Integral

$$\int f \, d\mu.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, diskreter Zufallsvariablen mit

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_n)$ und $\mathrm{Var}(X_n)$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe	Punkte	Erreichte Punkte
1	8	
2	7	
3	5	
Gesamt	20	

Eugen Gorich MatNr 12371341

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Tom hat bei einer Verlosung sechs Kinokarten gewonnen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf seiner besten 11 Freundinnen und Freunde einzuladen
   - allgemein,
   - wenn Anna und Basti sich nicht gut verstehen und daher nicht zusammentreffen sollten? Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Im Kino finden Tom und seine Freunde eine Reihe mit sechs freien Plätzen nebeneinander. Auf wie viele Arten können sich die drei Jungen und drei Mädchen auf die Plätze verteilen, wenn
   - Jungen und Mädchen abwechselnd nebeneinander sitzen wollen,
   - Christina und David zusätzlich nebeneinander sitzen wollen?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

a) • allgemein: Es gibt $\binom{11}{5} = 462$ Möglichkeiten, da ich aus 5 Personen aus 11 Freunden auswähle und ich jede Person nur einmal wählen kann (ohne zurücklegen) und die Reihenfolge in der ich die 5 wähle spielt keine Rolle.

• Wenn Basti und Anna Stress haben: Es gibt $\binom{2}{1}\cdot\binom{11-2}{4} + \binom{2}{0}\cdot\binom{9}{5} = 378$ Möglichkeiten, da ich, wenn ich Basti oder Anna dabei haben möchte, aus zwei Personen (Basti, Anna) zuerst eine wähle die ich einlade. Dafür gibt es $\binom{2}{1} = 2$ Möglichkeiten. Und aus den restlichen 9 kann ich 4 unterschiedliche Freunde in beliebiger Reihenfolge wählen - also $\binom{9}{4} = 126$ Möglichkeiten. Wenn ich weder Basti noch Anna einlade, kann ich aus den anderen 9 Freunden 5 verschiedene in beliebiger Reihenfolge wählen - also $\binom{2}{0}\binom{9}{5}$. Zusammen ergibt das $2\cdot\binom{9}{4} + \binom{9}{5}$

b) • Jungen und Mädchen abwechselnd: Es gibt $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ Möglichkeiten. Zuerst wählen wir, ob mit Mädchen oder Junge angefangen werden soll - also ob MJMJMJ oder JMJMJM. Dann hat der erste Junge 3 Plätze zur Auswahl, der zweite hat zwei zur Auswahl und der dritte nimmt den übrigen. Analog für die Mädchen.

• Christina und David sind Päärchen: Es gibt $2\cdot\left(\underbrace{\binom{1}{1}\cdot 2!\cdot\binom{1}{1}\cdot 2!}_{4} + \underbrace{\binom{2}{1}\cdot 2!\cdot\binom{2}{1}\cdot 2!}_{16}\right) = 40$ Möglichkeiten. Zuerst wählen wir wieder ob wir MJMJMJ oder JMJMJM haben. Danach betrachten wir den Fall, dass David sich den einen Platz am Rand wählt: Dann können die anderen Jungs zwischen 2 Plätzen wählen, Christina hat nur eine Wahl und die anderen Mädchen können auch zwischen zwei Plätzen wählen. Wenn David dagegen keinen Platz am Rand wählt, dann hat David die Wahl zwischen zwei Plätzen, die anderen Jungs wählen dann zwischen den übrigen zwei, Christina hat zwei Plätze zur Auswahl und die anderen Mädchen wählen zwischen den verbliebenen zwei.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_4\})$ sowie $\mu(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mu(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} \omega_1 \mapsto & 1 \\ \omega_2 \mapsto & 4 \\ \omega_3 \mapsto & 1 \\ \omega_4 \mapsto & 2 \end{cases}$$

das Integral

$$\int f \, d\mu.$$

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1,\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_2,\omega_4\}, \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}, \{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}, \{\omega_2\}\}$

Da μ ein W-maß ist, folgt, dass

$\mu(\{\omega_2\}) = \mu(\Omega \setminus (\{\omega_1,\omega_3\} \cup \{\omega_4\})) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Die Funktion f lässt sich darstellen als:

$f(\omega) = 1 \cdot \mathbb{1}_{\{\omega_1,\omega_3\}} + 2 \cdot \mathbb{1}_{\{\omega_4\}} + 4 \cdot \mathbb{1}_{\{\omega_2\}}$

Daraus folgt:

Definiert, da $\{\omega_2\} \in \mathcal{F}$.

$\int f \, d\mu = 1 \cdot \mu(\{\omega_1,\omega_3\}) + 2 \cdot \mu(\{\omega_4\}) + 4 \cdot \mu(\{\omega_2\})$

$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, diskreter Zufallsvariablen mit

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_n)$ und $\mathrm{Var}(X_n)$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

Aus obiger Aussage folgt, dass $\mathbb{P}(X_n \notin \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\}) = 0$

$\mathbb{E}[X_n] = \int X_n \, d\mathbb{P} = -\frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = 0$

$\mathrm{Var}[X_n] = \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}(X_n))^2] = \mathbb{E}[X_n^2] = \int X_n^2 \, d\mathbb{P} = (-\frac{1}{n})^2 \cdot \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n})^2 \cdot \mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2}$