# Blatt 1

Abgabe spätestens am 18.05.2022 um 12 Uhr in Moodle

**Aufgabe 1 (6 Punkte)**

Geben Sie die entsprechenden Ergebnisräume für folgende Situationen an

a) Zuerst wirft Student A sechs mal einen fairen Würfel. Anschließend wirft Student B weitere sechs mal einen fairen Würfel. Uns interessiert dabei wie of beide die 6 geworfen hat.

b) Im Vorlesungssaal sitzen k Studierende. Wir nehmen an, dass die Geburtstage der Studierenden gleichverteilt sind über das Jahr und das ein Jahr immer 365 Tage hat. Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass in der Vorlesung zwei Studierende sitzen, die am selben Tag Geburtstag haben.

c) In einer Urne befinden sich n Bälle, die mit den Zahlen $1, ..., n$ beschriftet sind. Wir greifen in die Urne und ziehen nacheinander s Bälle zufällig, ohne bisher gezogene Bälle zurückzulegen.

**Aufgabe 2 (7 Punkte)**

Sei $\mathcal{F}$ eine $\sigma$ -Algebra und seien $A_i \in \mathcal{F}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

c) $\forall i, j \in \mathbb{N} : A_i \backslash A_j \in \mathcal{F}$

d) $\forall i, j \in \mathbb{N} : A_i \triangle A_j \in \mathcal{F}$

**Aufgabe 3 (7 Punkte)**

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gegeben sei die Funktion $\mu : P(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\mu(A) = \sup A.$$

a) Ist $\mu$ ein Maß?

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_i) > \frac{1}{3}$ für alle $i = 1, 2, 3$.
Zeigen Sie: Dann gibt es $A_i$, $A_j$ mit $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ so dass $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

| Aufgabe | Punkte | Erreichte Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 6 | |
| 2 | 7 | |
| 3 | 7 | |
| Gesamt | 20 | |

Eugen Gorich MatNr 12371341

**Aufgabe 1 (6 Punkte)**
Geben Sie die entsprechenden Ergebnisräume für folgende Situationen an

a) Zuerst wirft Student A sechs mal einen fairen Würfel. Anschließend wirft Student B weitere sechs mal einen fairen Würfel. Uns interessiert dabei wie of beide die 6 geworfen hat.

b) Im Vorlesungssaal sitzen k Studierende. Wir nehmen an, dass die Geburtstage der Studierenden gleichverteilt sind über das Jahr und das ein Jahr immer 365 Tage hat. Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass in der Vorlesung zwei Studierende sitzen, die am selben Tag Geburtstag haben.

c) In einer Urne befinden sich n Bälle, die mit den Zahlen $1, ..., n$ beschriftet sind. Wir greifen in die Urne und ziehen nacheinander s Bälle zufällig, ohne bisher gezogene Bälle zurückzulegen.

a) $\Omega = \{1,\dots,6\}^{12}$ b) $\Omega = \{1,\dots,365\}^k$ oder (umständlicher) $\Omega = \{01.01., 02.01, \dots, 31.12\}^k$

c) $\Omega = \{1,\dots,n\}^s$ (würde zu viele Ereignisse mit Wahrsch. 0 enthalten. $\mathbb{P}$ ist dann nicht Laplace).

Besser: $\Omega = \{(\omega_1,\dots,\omega_s) \in \{1,\dots,n\}^s \mid \forall i,j \in \{1,\dots,s\}: i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\}$

**Aufgabe 2 (7 Punkte)**
Sei $\mathcal{F}$ eine $\sigma$ -Algebra und seien $A_i \in \mathcal{F}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

c) $\forall i,j \in \mathbb{N} : A_i \backslash A_j \in \mathcal{F}$

d) $\forall i,j \in \mathbb{N} : A_i \triangle A_j \in \mathcal{F}$

Sei $\mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$. Das heißt:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) $\forall A \in \mathcal{F} : \bar{A} \in \mathcal{F}$

iii) $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $A_i \in \mathcal{F}$ : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. (Unter anderem: $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$)

a) $\Omega \in \mathcal{F} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$.

b) $A_i \in \mathcal{F} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \overset{(iii)}{\Rightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \overset{(\text{Morgan})}{\Rightarrow} \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{F} \overset{\overset{\bar{\bar{A}}=A}{+}\,(ii)}{\Rightarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

c) $A_i \backslash A_j = A_i \cap \bar{A}_j$. $\overline{A_i \cap \bar{A}_j} = \bar{A}_i \cup A_j$

$A_i \in \mathcal{F} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \overset{(iii)}{\Rightarrow} \bar{A}_i \cup A_j \in \mathcal{F} \overset{(ii)}{\Rightarrow} A_i \backslash A_j = A_i \cap \bar{A}_j = \overline{\bar{A}_i \cup A_j} \in \mathcal{F}$.

d) $A_i \triangle A_j := (A_i \backslash A_j) \cup (A_j \backslash A_i)$

$A_i, A_j \in \mathcal{F} \overset{(c)}{\Rightarrow} A_i \backslash A_j \in \mathcal{F} \wedge A_j \backslash A_i \in \mathcal{F} \overset{(iii)}{\Rightarrow} A_i \triangle A_j = (A_i \backslash A_j) \cup (A_j \backslash A_i) \in \mathcal{F}$

**Aufgabe 3 (7 Punkte)**
Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gegeben sei die Funktion $\mu : P(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\mu(A) = \sup A.$$

a) Ist $\mu$ ein Maß?

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_i) > \frac{1}{3}$ für alle $i = 1, 2, 3$.
Zeigen Sie: Dann gibt es $A_i$, $A_j$ mit $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ so dass $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

a) Für $A = \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $\mu(A) = \mu(\emptyset) = \sup(\emptyset) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konvention}}}{=} -\infty < 0$. Also ist $\mu$ kein Maß.

Definieren wir $\sup(\emptyset) := 0$, dann gilt trotzdem:

$A_1 = \{6\}$, $A_2 = \{1\}$ $\Rightarrow$ $\sup(A_1 \cup A_2) = \sup(\{1,6\}) = 6 \neq 7 = \sup(\{1\}) + \sup(\{6\})$

b) Angenommen $A_1, A_2, A_3$ sind disjunkt. Folglich muss gelten, dass $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) > 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ ↯.
Das widerspricht der Normiertheit von $\mathbb{P}$. Wir schließen daraus, dass $A_1, A_2, A_3$ nicht disjunkt sein können, also $\exists i,j \in \{1,2,3\}$, s.d. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

∎