최현욱

Q 1. Camera model

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = K(R|t)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$R^{-1} = R^T$ , R의 각 행 또는 열은 unit vector.

(a) $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 1 \end{pmatrix} = K(R|t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 을 만족하는 점.

$$= \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ft_1 \\ ft_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f\frac{t_1}{t_3} \\ f\frac{t_2}{t_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (u_0, v_0) = \left(f\frac{t_1}{t_3}, f\frac{t_2}{t_3}\right)$$

(b)

$$\begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$ 의 식에서 $X_c = (x_c, y_c, z_c)^T$, $X_w = (x_w, y_w, z_w)^T$ 라 할 때

$$\underset{4\times4}{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{4\times1}{\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + t_1 \\ r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + t_2 \\ r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + t_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $X_c = RX_w + t$ 이고, Camera cordinate의 ($X_c$) world cordinate ($X_w$) $X_w = R^T(X_c - t)$ 이다.

(C) b번의 관계에서

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = RX_w + T \Rightarrow R^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - T\right) = \underbrace{R^T(e_3 - t)}_{\text{종점 ①}} = X_w$$

이고 방향벡터는 원점을 시점으로 하므로 $X_c$의 원점 (0,0,0) 의 world cordinate 시점 ② 는 $-R^Tt$ 이다.

$\therefore$ ① - ② $= R^T(e_3 - t) + R^Tt = R^Te_3$ 이므로

world 좌표계에서 방향 좌표는 $(r_{31}, r_{32}, r_{33})^T$ 이다. ③

(∵ 주어진조건 에의해 R의 각 행,열은 unit 벡터이므로 ③도 단위벡터)

(d)

$(d_1, d_2, d_3)^T t + (x_1, x_2, x_3)^T$ 로 직선 표현 (world cordinate)

그러나 1) 가상 평면에 평행하지 않음 ⇒ ① x,y 평면에 포함 or ② 한 점은 지남. ↳ ( Camera cordinate )

2) Camera Cordinate의 원점을 지나지 않는다.

이런 직선을 image cordinate에 표현

(a) 의 결과에 의해 world cordinate의 원점은 image cordinate에서는 $\underbrace{\left(f\frac{t_1}{t_3}, f\frac{t_1}{t_3}\right)^T}_{=(u_0, v_0)^T}$ 로 표현됨을 알고 있다.

그리고 $(d_1, d_2, d_3)^T$, $(x_1, x_2, x_3)^T$ 를 각각 image plane 의 좌표로 변환하여 보자.

$$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}d_1 + r_{12}d_2 + r_{13}d_3 + t_1 \\ r_{21}d_1 + r_{22}d_2 + r_{23}d_3 + t_2 \\ r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(r_{11}d_1 + r_{12}d_2 + r_{13}d_3 + t_1) \\ f(r_{21}d_1 + r_{22}d_2 + r_{23}d_3 + t_2) \\ r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \text{꼴변환}} \therefore \begin{pmatrix} u_d \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f(r_{11}d_1 + r_{12}d_2 + r_{13}d_3 + t_1)}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \\ \dfrac{f(r_{21}d_1 + r_{22}d_2 + r_{23}d_3 + t_2)}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \end{pmatrix}$$

앞의 과정과 계산 과정은 동일하므로,
$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f(r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + t_1)}{r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3} \\ \dfrac{f(r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 + t_2)}{r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3} \end{pmatrix}$$

따라서 $\left((u_d, v_d)^T - (u_0, v_0)^T\right) t + (u_x, v_x)^T \quad (t \in \mathbb{R})$

$$= \left( \begin{pmatrix} \dfrac{f(r_{11}d_1 + r_{12}d_2 + r_{13}d_3 + t_1)}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \\ \dfrac{f(r_{21}d_1 + r_{22}d_2 + r_{23}d_3 + t_2)}{r_{31}d_1 + r_{32}d_2 + r_{33}d_3 + t_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f\dfrac{t_1}{t_3} \\ f\dfrac{t_2}{t_3} \end{pmatrix} \right) t + \begin{pmatrix} \dfrac{f(r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + t_1)}{r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3} \\ \dfrac{f(r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 + t_2)}{r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 + t_3} \end{pmatrix}$$

Q2. Camera Calibration $\quad x_i = P X_i$

$\mathbb{P} = \min_p \|A p\|$ (where $\|p\| = 1$) 의 해가 V의 마지막 열이고 가장 작은 특이값임을 보여라.

$A = U\Sigma V^T$ 의 SVD를 생각. $\min_p \|U\Sigma V^T p\|$ (where $\|p\|=1$)

U와 V는 orthogonal Matrix 이므로 $U^{-1} = U^T$, $V^{-1} = V^T$, Σ는 diagonal matrix 이다. (scale factor)

$$\|U\Sigma V^T p\| = \|U^{-1} U \Sigma V^T p\| = \|\Sigma V^T p\|$$

(∵ orthogonal matrix를 곱하는건 norm 에 영향 없음)

$\Sigma V^T p$ 에서 $V^T p =: a$, $p = Va$ (∵ $V^T = V^{-1}$)

따라서 우리가 보여야 할 식은 $\min_p \|\Sigma a\|$, (where $\|Va\| = 1$) 으로 나타낼 수 있다.

$= \|a\|$

↳ V는 orthogonal matrix 이므로 norm 변화 X

Σ는 대각 행렬인데 scale factor이므로 0 이상의 값을 가진다. 그리고 행렬 A의 특이값들을 대각선에 가지고 있으며 내림차순으로 정렬되어 있다.

$a = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\text{rank 만큼의 개수}}, 1)^T$ 일 때 $\|a\| = 1$ 을 만족하며, $\|\Sigma a\|$를 최소화하며

$p = Va$ 의 식을 통해 p는 V의 가장 마지막 열에 해당함을 알 수 있다.

그리고 A의 가장 작은 singular value에 대응되는 vector이다. (∵ Σ의 대각성분 내림차순, $a = (0 \cdots 0\ 1)^T$)

Q3.

(a) $Ah = b$ 에서 A와 b? $\quad = (a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i)^T$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_i + bY_i + c \\ dX_i + eY_i + f \\ gX_i + hY_i + i \end{pmatrix} \rightarrow \quad x_i = \frac{aX_i + bY_i + c}{gX_i + hY_i + i}, \quad y_i = \frac{dX_i + eY_i + f}{gX_i + hY_i + i}$$

$$(aX_i + bY_i + c) - gX_i x_i - hY_i x_i - i x_i = 0$$

$$(dX_i + eY_i + f) - gX_i y_i - hY_i y_i - i y_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_i & Y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_iX_i & -x_iY_i & -x_i \\ 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & 1 & -y_iX_i & -y_iY_i & -y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1 \\ & & & & \vdots & & & & \\ X_n & Y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_nX_n & -x_nY_n & -x_n \\ 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & 1 & -y_nX_n & -y_nY_n & -y_n \end{bmatrix} = A, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

n 2개의 행

(b) h는 9개의 미지수를 가지고 있으므로 있는데, 마지막 값 i는 scale에 관한 값이므로 1로 고정할 수 있다.

그러면 미지수가 8개 이므로 4개의 쌍을 찾아내면 8개의 식을 만들 수 있어서 h를 풀 수 있다.

(c) correspondence 개수 = n

n > 4 라면 over-determined system of equation이 되므로 문제 2번의 방법처럼 $\min_h \|Ah\|$ 을 구해서 $Ah=0$ 에 가까운 h를 찾는다.

이때 $\|h\|=1$ 이라는 제한조건을 두고, A에 SVD를 적용하여 V 행렬의 마지막 열을 h의 단위벡터로 생각하면 될 것이다. 이 h 벡터를 통해 H 행렬을 찾을 수 있다.