HW 1 2016-17912 최형욱

$\boxed{3.1}$ Composing filters.

G, E, M
↓ ↓ ↓
가우시안 소벨 median

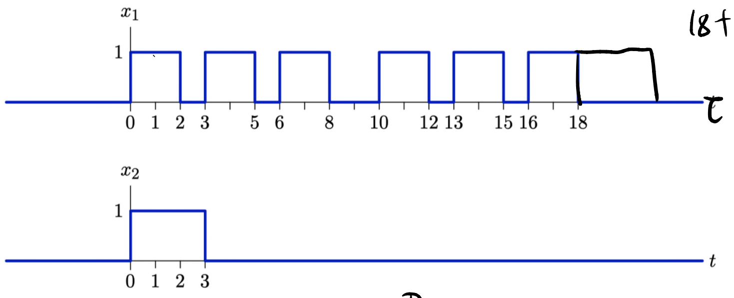
G과 E은 선형성을 가지며, M은 그렇지 않다. 또한, G와 E는 이미지에 convolution을 수행하고, M은 이미지에 convolve 할 수 없다.

따라서, $G*E$, $E*G$ 는 같은 결과를 도출한다 (convolution 연산의 교환법칙에 의해).

그러나, G를 M으로 바꾸는 경우 M는 NON-linear의 성질을 가지므로 $M \rightarrow E$, $E \rightarrow M$를 적용할 경우

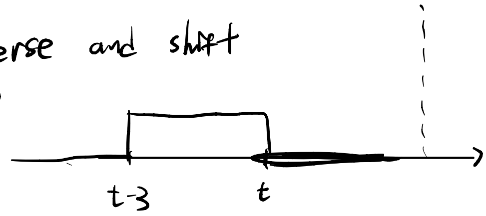
각각 다른 값을 가지게 된다.

$\boxed{3.2}$ convolution



$18+3=21$

reverse and shift →



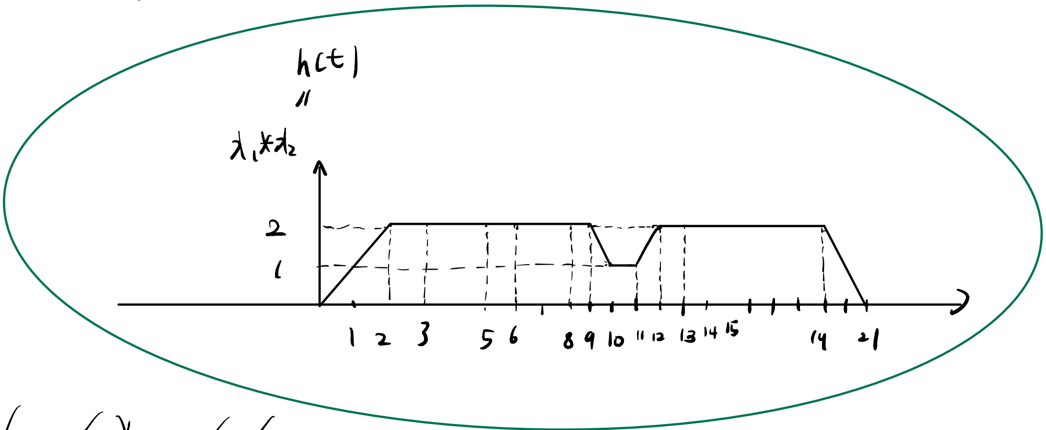
$$h(t) = x_1 * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

① $t<0$

$x_1(\tau)\, x_2(t-\tau) = 0$ 이므로 $h(t)$도 0이다.

② $0 \le t < 2$

$\int_0^t 1\, d\tau = t$ 이다.



③ $2 \le t < 3$

$\int_0^2 1\, d\tau$ 이므로 2

④ $3 \le t < 5$

$$\int_{t-3}^{2} 1\, d\tau + \int_3^t 1\, d\tau = (2-\cancel{(t-3)}) + \cancel{t} - \cancel{3} = 2$$

⑤ $5 \le t < 6$

$\int_3^5 1\, d\tau = 2$

⑥ $6 \le t < 8$

$$\int_{t-3}^{5} 1\, d\tau + \int_6^t 1\, d\tau = 5 - (\cancel{t}-3) + (\cancel{t}) - (6) = 2$$

⑦ $8 \le t < 9$

$\int_6^8 1\, d\tau = 2$

⑧ $9 \le t < 10$

$\int_{t-3}^{8} 1\, d\tau = 8-(t-3) = 11-t$

⑨ $10 \le t < 11$

$\int_{t-3}^{8} 1\, d\tau + \int_{10}^{t} 1\, d\tau$

$= 8 - \cancel{t} + 3 + \cancel{t} - 10$

$= 1$

⑩ $11 \le t < 12$

$\int_{10}^{t} 1\, d\tau = t - 10$

⑪ $12 \le t < 13$

$\int_{10}^{12} 1\, d\tau = 2$

⑫ $13 \le t < 15$

$\int_{t-3}^{12} 1\, d\tau + \int_{13}^{t} 1\, d\tau = 12 - \cancel{t} + 3 + \cancel{t} - 13$

$= 2$

⑬ $15 \le t < 16$

$\int_{13}^{15} 1\, d\tau = 2$

⑭ $16 \le t < 18$

$\int_{t-3}^{15} 1\, d\tau + \int_{16}^{t} 1\, d\tau = 15 - (\cancel{t}-3) + \cancel{t} - 16$

$= 2$

⑮ $18 \le t < 19$

$\int_{16}^{18} 1\, d\tau = 2$

⑯ $19 \le t < 21$

$\int_{t-3}^{18} 1\, d\tau = 18 - (t-3)$

$= 21 - t$

⑰ $t > 21$

$\int_{-\infty}^{\infty} 0\, d\tau = 0$ 〃

$\boxed{3.3}$. 연속 정의역.

1) Spatial Domain 에서의 convolution 연산은 Frequency Domain 에서의 곱셈과 같다.

$$g_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$g_y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad \cdots ②$$

) Gaussian function.

①과 ②의 Fourier transform 결과는 각각 $e^{-\frac{\sigma^2(2\pi u)^2}{2}}$, $e^{-\frac{\sigma^2(2\pi v)^2}{2}}$ 이다.

$G_{(x,y)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ 의 Fourier transform 은 $G(u,v) = e^{-2\pi^2(u^2+v^2)\sigma^2}$ 이므로

Freq 도메인에서

$$g(u) \times g(v) = e^{-2\pi^2 u^2\sigma^2} \times e^{-2\pi^2 v^2\sigma^2} = e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)} = G(u,v)$$ 이므로

$$\text{image} \xrightarrow{\text{convolve}} g_x \xrightarrow{\text{convolve}} g_y \longrightarrow \text{output}$$

$$\text{image} \xrightarrow{\text{convolve}} G(x,y) \longrightarrow \text{output}$$

의 결과가 동일함을 알 수 있다.

이는 convolution의 성질 중 cascade system가 성립함을 보여준다.

2)

이미지 크기를 $M \times N$ 이라 하고 x축 필터 사이즈 P, y축 필터 사이즈 Q라고 하자.

시간 복잡도 측면에서, 2차원 커널 사용시 $O(\underbrace{MN}_{\text{상수}}PQ)$가 소모된다. 이는 $P=Q$ 이라 할때 $O(P^2)$ 의 시간 복잡도를 가진다.

1차원 커널을 2번 적용시 $O(\underbrace{2MN}_{\text{상수}}P)$의 시간 복잡도를 가지며 간단히하면 $O(P)$의 시간 복잡도를 가진다.

따라서 G를 적용하는 것보다 <u>$g_x \rightarrow g_y$의 단계를 거치는 것이</u> 효율적이다.

$\boxed{3.4}$

a) $\delta(t-5)$의 Fourier Transform 식을 구하고 그래프 그리기. 음, 양 모두

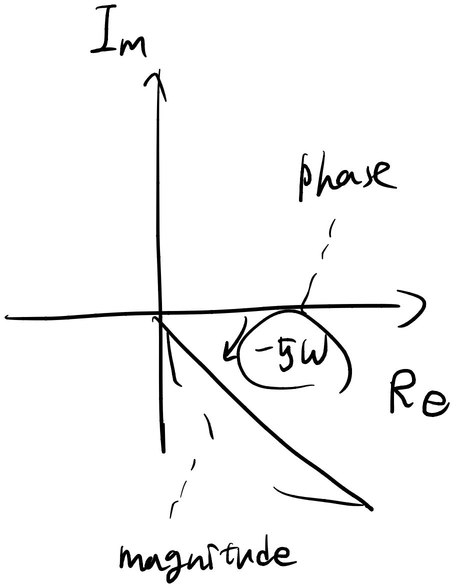
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)\, e^{-iwt}\, dt \qquad \delta(t-5) = \begin{cases} 0 & (t \neq 5) \\ \infty & (t = 5) \end{cases}$$

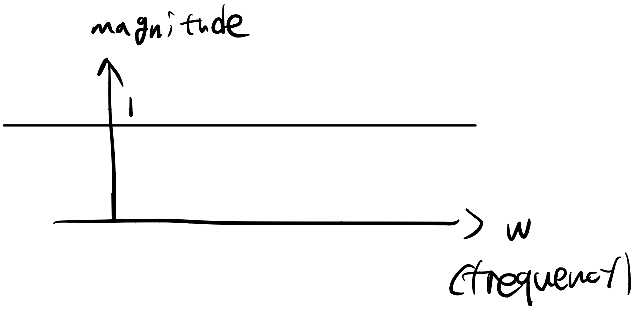
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)\, e^{-iw5}\, dt$$

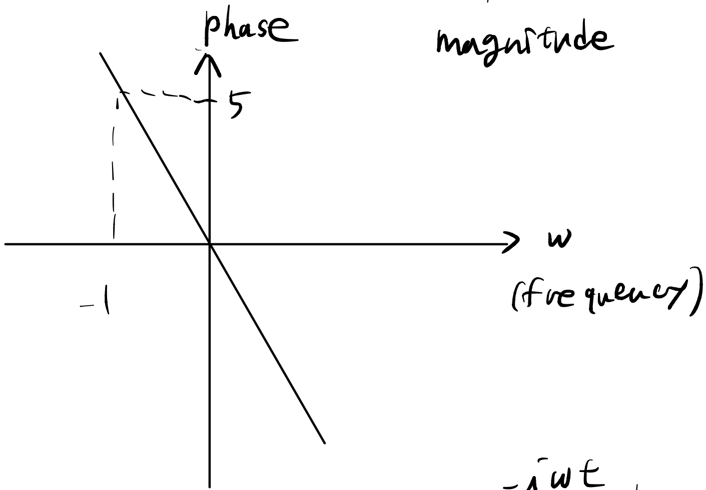
$$= e^{-i5w} \qquad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)\, dt = 1\right)$$

$$= \cos(-5w) + i \sin(-5w)$$

$$= \cos 5w - i \sin(5w)$$







2)

$$\mathcal{F}\{x_3(t)\} = X_3(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (a x_1(t) + b x_2(t))\, e^{-iwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a x_1(t)\, e^{-iwt} + b x_2(t) e^{-iwt}\right) dt$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-iwt}\, dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

$= a X_1(w) + b X_2(w)$ 이다. ($\because$ $X_1(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-iwt}\, dt$

$X_2(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\, e^{-iwt}\, dt$

이다, by fourier transform definition)

$\therefore$ $X_3(w) = a X_1(w) + b X_2(w)$ 이다. #