スカラー場に対する線積分

偏線積分

スカラー場 $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の滑らかな曲線 $[a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_3(t)\big)$ に沿った各軸方向の**線積分**は

$$\int_C f \, \mathrm{d}x_i = \int_a^b f\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \frac{\mathrm{d}\gamma_i(t)}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

で与えられる。このとき、函数 f を**被積分函数** (integrand)、曲線 C を**積分領域** (domain of integration) あるいは**積分路** (path) と呼ぶ。

線素に関する線積分

スカラー場 $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の滑らかな曲線 $C \subset U$ に沿った線素に関する線積分は

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \big|\boldsymbol{r}'(t)\big| \, \mathrm{d}t$$

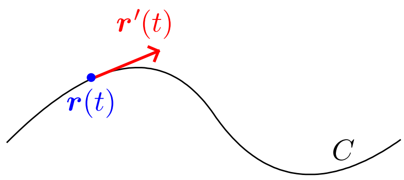
と定義する（区分的に滑らかの場合は、滑らかな区間ごとの積分の和と定める）。ただし、$\boldsymbol{r}\colon [a,b] \to C$ は、$\boldsymbol{r}(a)$ と $\boldsymbol{r}(b)$ が与えた曲線 C の両端点となるような、C の勝手な全単射媒介表示とする。

記号 $\mathrm{d}s$ は直観的には弧長の無限小成分としての**線素**と解釈できる。スカラー場の曲線 C に沿った線積分は、C の媒介表示 $\boldsymbol{r}$ の取り方に依らない。

線素に関する線積分の導出

上記の如く f, C を定め、C の媒介表示 $\boldsymbol{r}$ を取れば、スカラー場の線積分はリーマン和として構成することができる。区間 $[a,b]$ を長さ $\Delta t = (b-a)/n$ の n 個の小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に分割し、曲線 C 上に各小区間に対応する標本点 $\boldsymbol{r}(t_i)$ をとる。標本点の集合 $\{\boldsymbol{r}(t_i) | 1 \le i \le n\}$ に対して、標本点 $\boldsymbol{r}(t_{i-1})$ と $\boldsymbol{r}(t_i)$ を結んでできる線分の集まりによって曲線 C を近似することができる。各標本点の間を結ぶ線分の長さを Δs_i と書くことにすれば、積 $f(\boldsymbol{r}(t_i))\Delta s_i$ は、高さと幅が $f(\boldsymbol{r}(t_i))$ と Δs_i で与えられる矩形の符号付面積に対応する。それらの総和を取って、分割の各小区間の長さを 0 に近づける極限を

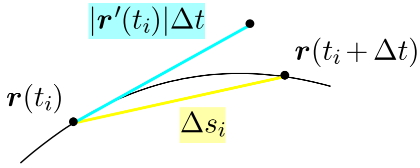
$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(t_i)) \Delta s_i$$



と考えるとき、曲線上の分点間の距離は

$$\Delta s_i = |\boldsymbol{r}(t_i + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_i)| = |\boldsymbol{r}'(t_i)| \Delta t$$

と書けるから、これを代入して得る



$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(t_i)) |\boldsymbol{r}'(t_i)| \Delta t$$

は、積分

$$I = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) |\boldsymbol{r}'(t)| \, \mathrm{d}t$$

に対応するリーマン和である。基本的にこの積分は、$x = u(t)$ および $y = v(t)$ となる制約条件下でスカラー函数 $z = f(x,y)$ の下にある領域の面積になっている。