第三章　作业　参考答案

3.1.1.答：D
3.1.2.答：B
3.1.3.答：A
3.1.4.答：D
3.1.5.答：D
3.1.6.答：C
3.1.7.答：C
3.1.8.答：C
3.1.9.答：D
3.1.10.答：D
3.1.11.答：A
3.1.12.答：C
3.1.13.答：A、B、D
3.1.14.答：A、D、E
3.1.15.答：A、B、C、D
3.1.16.答：A
3.1.17.答：B
3.1.18.答：A
3.1.19.答：C
3.1.20.答：B
3.1.21.答：B
3.1.22.答：D

二、填空题

3.2.1.答：质点系所受到的外力的矢量和为零；质点系所受到的外力的力矩的矢量和为零；质点系所受到的所有外力和所有非保守内力做功的代数和为零（只有保守力做功）。

3.2.2.答：$\left(1+\dfrac{m}{M}\right)^2 x^2+y^2=R^2$，$x_0=\dfrac{M}{m+M}R$

3.2.3.答：$v=\dfrac{M}{m+M}v_0$，$v'=\dfrac{M}{m+M}v_0$，

$$s=\frac{M^2}{g(m+M)^2}{v_0}^2\sin 2\alpha，\quad \alpha=45^0，\quad s_{\max}=\frac{M^2}{g(m+M)^2}{v_0}^2$$

3.2.4.答：$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=300\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$

3.2.5.答：$v=0.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\Delta E_\mathrm{k}=-24\times10^3\ \mathrm{J}$

三　计算题

3.3.1.：（1）$v_2=1.6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$　　（2）$h_{\max}=0.288\mathrm{m}$

3.3.2.：$v_1=\dfrac{1+\sqrt{61}}{10}v_0\approx0.881v_0$；$v_2=\dfrac{1}{20}\sqrt{38-2\sqrt{61}}v_0\approx0.236v_0$；$\theta=53.9^0$

3.3.3.：（1）$v=\dfrac{m}{m+M}v_0$；　（2）$\Delta E_\mathrm{k}=\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}{v_0}^2$

3.3.4. 解：圆盘可以看作无数个质点组成的质点系。在圆盘转动过程中的任意时刻，各个质点的角速度相同。各个质点受到摩擦力的作用，摩擦力对圆盘的转轴的力矩不为零，可以应用质点系角动量定理求出圆盘转动的角加速度。

如作业图 3.3.4 所示，取 $r\to r+\mathrm{d}r$ 圆环做为“质点”，该质点的质量为

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2} r \mathrm{d}r$$

该质点的受到的摩擦力对 z 轴的力矩为

$$\mathrm{d}M_z = -r\mu \mathrm{d}mg = -\frac{2\mu mg}{R^2} r^2 \mathrm{d}r$$

整个圆盘这一“质点系”受到的力矩为

$$M_z = \int \mathrm{d}M_z = -\frac{2\mu mg}{R^2}\int_0^R r^2 \mathrm{d}r = -\frac{2}{3}\mu mgR$$

当圆盘以角速度转动时，该质点对 z 轴的角动量为

$$\mathrm{d}L_z = r\omega r \mathrm{d}m = \frac{2m}{R^2}\omega r^3 \mathrm{d}r$$

整个圆盘这一“质点系”对 z 轴的角动量为

$$L_z = \int \mathrm{d}L_z = \frac{2m}{R^2}\omega \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2} mR^2 \omega$$

由质点系角动量定理，得到

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z，\ \frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\mu mgR，\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3R}\mu g，\ \beta = -\frac{4}{3R}\mu g$$

可见，圆盘以匀角加速度减速转动。

设转动 T 时间后，圆盘停止转动，则

$$\int_{\omega_0}^0 \mathrm{d}\omega = \int_0^T \beta \mathrm{d}t，\ 0-\omega_0 = -\frac{4}{3R}\mu gT - 0，\ T = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}$$

3.3.5．解：（1）以杆和质点 m 为质点系，在碰撞过程中，质点 m 对杆的作用力和杆对质点 m 的作用力是内力；转轴对杆的拉力过转轴，对转轴的力矩为零；碰撞过程时间极为短，杆还没有来得及转动，因此，外力重力 $M\vec{g}$ 和 $m\vec{g}$ 也是过转轴的，对转轴的力矩为零。角动量守恒。

如图所示，在杆上取“质点” $\mathrm{d}M$，“质点” $\mathrm{d}M$ 的质量为

$$\mathrm{d}M = \frac{M}{l}\mathrm{d}x$$

设碰撞后一起开始转动的角速度为 ω_0，则“质点” $\mathrm{d}M$ 对转轴 oz 的角动量为

$$\mathrm{d}L_z(M) = x\omega_0 x \mathrm{d}M = \frac{M\omega_0}{l} x^2 \mathrm{d}x$$

整个杆对转轴 oz 的角动量为

$$L_z(M) = \int \mathrm{d}L_z(M) = \frac{M\omega_0}{l}\int_0^l x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}M\omega_0 l^2$$

碰撞过程角动量守恒，则有

$$lmv_0 = lm\omega_0 l + L_z(M)，\ lmv_0 = m\omega_0 l^2 + \frac{1}{3}M\omega_0 l^2，\ \omega_0 = \frac{3m}{(3m+M)l}v_0$$

（2）碰撞过后，杆和质点 m 组成的质点系的内力做功代数和为零，转轴对杆的拉力不做功，只有重力这一保守力做功，杆和质点 m 组成的质点系的机械能守恒。

取质点 m 在最低点处为重力势能零点。则碰撞结束“质点” $\mathrm{d}M$ 的重力势能为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}0}(M) = (l-x)g\mathrm{d}M = (l-x)\frac{Mg}{l}\mathrm{d}x$$

整个杆的重力势能为

$$E_{\mathrm{p}0}(M) = \int \mathrm{d}E_{\mathrm{p}}(M) = \frac{Mg}{l}\int_0^l (l-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Mgl$$

碰撞结束“质点” $\mathrm{d}M$ 的动能为

$$\mathrm{d}E_{k0}(M)=\frac{1}{2}(\omega_0 x)^2\mathrm{d}M=\frac{M\omega_0{}^2}{2l}x^2\mathrm{d}x$$

整个杆的动能为

$$E_{k0}(M)=\int\mathrm{d}E_{k0}(M)=\frac{M\omega_0{}^2}{2l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}M\omega_0{}^2l^2$$

碰撞结束，杆和质点 m 组成的“质点系”的机械能为

$$E_0=E_{p0}(M)+E_{k0}(M)+E_{p0}(m)+E_{k0}(m)=\frac{1}{2}Mgl+\frac{1}{6}M\omega_0{}^2l^2+0+\frac{1}{2}m\omega_0{}^2l^2$$

杆和质点 m 组成的“质点系”转到最大角度 α 时，质点系动能为零。“质点” $\mathrm{d}M$ 的重力势能为

$$\mathrm{d}E_p(M)=(l-y\cos\alpha)g\mathrm{d}M=(l-y\cos\alpha)\frac{Mg}{l}\mathrm{d}y$$

整个杆的重力势能为

$$E_p(M)=\int\mathrm{d}E_p(M)=\frac{Mg}{l}\int_0^l(l-y\cos\alpha)\mathrm{d}x=Mgl-\frac{1}{2}Mgl\cos\alpha$$

质点 m 的重力势能为

$$E_p(m)=(l-l\cos\alpha)mg=mgl-mgl\cos\alpha$$

杆和质点 m 组成的“质点系”转到最大角度 α 时，“质点系”的机械能为

$$E=E_p(M)+E_k(M)+E_p(m)+E_k(m)=Mgl-\frac{1}{2}Mgl\cos\alpha+mgl-mgl\cos\alpha$$

转动过程中，杆和质点 m 组成的“质点系”机械能守恒，得到

$$E_0=E\,,\quad \frac{1}{2}Mgl+\frac{1}{6}M\omega_0{}^2l^2+\frac{1}{2}m\omega_0{}^2l^2=Mgl-\frac{1}{2}Mgl\cos\alpha+mgl-mgl\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=1-\frac{3m^2v_0{}^2}{(2m+M)(3m+M)gl}$$

3. 3. 6.： $A_1=-\frac{1}{2}\frac{M^2+2mM}{(m+M)^2}mv_0{}^2$； $A_2=\frac{1}{2}\frac{mM}{(m+M)^2}mv_0{}^2$； $\Delta E=-\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0{}^2$

3. 3. 7.：（1） $v_A=v_B=x_0\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ （2） $x_A=x_0\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}$

3. 3. 8.： $v_{max}=\sqrt{\frac{Mg}{k(m+M)}}$

3. 3. 9.： $s=\frac{m}{m+M}(a-b)$