《实变函数》期末考试试题汇编

目录

《实变函数》期末考试模拟试题（一）

（含解答）

一、选择题（单选题）

1、下列集合关系成立的是（ A ）

（A）$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$　（B）$(A\setminus B)\cup B=A$

（C）$(B\setminus A)\cup A\subseteq A$　（D）$(B\setminus A)\subseteq A$

2、若 $E\subset R^n$ 是开集，则（ B ）

（A）$E'\subset E$　（B）E 的内部 $=E$　（C）$\overline{E}=E$　（D）$E'=E$

3、设 P 是康托集，则（ C ）

（A）P 是可数集　（B）P 是开集　（C）$mP=0$　（D）$mP=1$

4、设 E 是 R^1 中的可测集，$\varphi(x)$ 是 E 上的简单函数，则（ D ）

（A）$\varphi(x)$ 是 E 上的连续函数　（B）$\varphi(x)$ 是 E 上的单调函数

（C）$\varphi(x)$ 在 E 上一定不 L 可积　（D）$\varphi(x)$ 是 E 上的可测函数

5、设 E 是 R^n 中的可测集，$f(x)$ 为 E 上的可测函数，若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则（ A ）

（A）在 E 上，$f(z)$ 不一定恒为零　（B）在 E 上，$f(z)\geq 0$

（C）在 E 上，$f(z)\equiv 0$　（D）在 E 上，$f(z)\neq 0$

二、多项选择题（每题至少有两个或两个以上的正确答案）

1、设 E 是 $[0,1]$ 中的无理点全体，则（C、D）

（A）E 是可数集　（B）E 是闭集

（C）E 中的每一点都是聚点　（D）$mE>0$

2、若 $E\subset R^1$ 至少有一个内点，则（ B、D ）

（A）m^*E 可以等于零　（B）$m^*E>0$

（C）E 可能是可数集　（D）E 是不可数集

3、设 $E\subset[a,b]$ 是可测集，则 E 的特征函数 $X_E(x)$ 是 （A、B、C ）

（A）$[a,b]$ 上的简单函数　（B）$[a,b]$ 上的可测函数

（C）E 上的连续函数　（D）$[a,b]$ 上的连续函数

4、设 $f(x)$ 在可测集 E 上 L 可积，则（ B、D ）

（A） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 有且仅有一个在 E 上 L 可积

（B） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 都在 E 上 L 可积

（C） $|f(z)|$ 在 E 上不一定 L 可积

（D） $|f(z)|$ 在 E 上一定 L 可积

5、设 $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的单调函数，则（ A、C、D）

（A） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的有界变差函数　（B） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的绝对连续函数

（C） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续　（D） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导

三、填空题（将正确的答案填在横线上）

1、设 X 为全集，A，B 为 X 的两个子集，则 $A\setminus B$ __=__ $A\cap B^C$ 。

2、设 $E\subset R^n$，如果 E 满足 $E'\subset E$，则 E 是 __闭__集。

3、若开区间 (α,β) 是直线上开集 G 的一个构成区间，则 (α,β) 满足 __$(\alpha,\beta)\subset G$__、

__$\alpha\notin G,\ \beta\notin G$__ 。

4、设 A 是无限集，则 A 的基数 $\overline{\overline{A}}$ __$\geq$__ a（其中 a 表示可数基数）。

5、设 E_1，E_2 为可测集，$mE_2<+\infty$，则 $m(E_1\setminus E_2)$ __$\geq$__ mE_1-mE_2 。

6、设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数，若对任意实数 a，都有 $E[x|f(x)>a]$ 是__可测集__，则称 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数。

7、设 x_0 是 $E\subset R^1$ 的内点，则 m^*E __$>$__ 0 。

8、设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，且 $f_n(x)\Rightarrow f(x)\,(x\in E)$，则由黎斯定理可得，存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $f_{n_k}(x)$ __$\xrightarrow{a.e.}$__ $f(x)\,(x\in E)$ 。

9、设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上的 L 积分不一定存在，且 $|f(x)|$ 在 E 上__不一定__ L 可积。

10、若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ 一定__是__ $[a,b]$ 上的有界变差函数。

四、判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）

1、可列（数）个闭集的并集仍为闭集。（ × ）

2、任何无限集均含有一个可数子集。（ √ ）

3、设 E 是可测集，则一定存在 G_δ 型集 G，使得 $E\subset G$，且 $m(G\setminus E)=0$。（ √ ）

4、设 E 是零测集，$f(z)$ 是 E 上的实函数，则 $f(x)$ 不一定是 E 上的可测函数。（ × ）

5、设 $f(z)$ 是可测集 E 上的非负可测函数，则 $f(x)$ 必在 E 上 L 可积。（ × ）

五、简答题

1、简述无穷多个开集的交集是否必为开集？

答：不一定为开集。例如 取 R^1 上一列开集为 $(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n})$，$n=1,2,3,\cdots$

而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n})=[-1,1]$ 是闭集，不是开集。

2、可测集 E 上的可测函数与简单函数有何关系？

答：①简单函数是可测函数；

②可测函数不一定是简单函数；

③可测函数一定可以表示成一列简单函数的极限。

3、$[a,b]$ 上的有界变差函数与单调函数有何关系？

答：①单调函数是有界变差函数；

②有界变差函数不一定是单调函数，但一定可以表示成单调函数的和或差。

六、计算题

1、设 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap Q\\ 0 & x\notin[0,1]\cap Q\end{cases}$，其中 Q 是有理数集，求 $\int_{[0,1]} D(x)\mathrm{d}x$。

解： 因为 $m\{[0,1]\cap Q\}=0$，所以 $D(x)=0\ a.e.$ 于 $[0,1]$，于是

$$\int_{[0,1]} D(x)dx=\int_{[0,1]} 0dx=0$$

2、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$。

解： 因为 $\left|\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\right|\le\frac{\ln(1+x-1+n)}{n}e^{-x}\le\frac{x-1+n)}{n}e^{-x}\le(1+x)e^{-x}$

而 $\int_0^{+\infty}(1+x)e^{-x}dx<+\infty$

所以，由 L 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0$$

七、证明题

1、证明集合等式：$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

证明：（方法1)对任意$x\in(A\cup B)\setminus C$，有$x\in(A\cup B)$且$x\notin C$，即$x\in A$或$x\in B$且$x\notin C$

所以　$x\in A\setminus C$或$x\in B\setminus C$，即$x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

反之，对任意$x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$，有$x\in A\setminus C$或$x\in B\setminus C$，即$x\in A$或$x\in B$且$x\notin C$，

所以$x\in(A\cup B)$且$x\notin C$，即$x\in(A\cup B)\setminus C$，

综上所述，$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

（方法2）$(A\cup B)\setminus C=(A\cup B)\cap C^c=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

2、设E_0是$[0,1]$中的有理点全体，则E_0是可测集且$mE_0=0$。

证明：　因为E_0是可数集，则$E_0=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$

对任意$\varepsilon>0$，取开区间$(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$，$n=1,2,\cdots$，显然它们把$E_0$覆盖住。

于是　$m^*E_0\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$。让$\varepsilon\to0$得，$m^*E_0=0$，从而$E_0$是可测集且$mE_0=0$。

3、证明：R^1上的实值连续函数$f(x)$必为R^1上的可测函数。

证明：因为对于任意实数a，由连续函数的局部保号性易知，$R^1[x|f(x)>a]$是开集，从而$R^1[x|f(x)>a]$是可测集。所以$f(x)$必为R^1上的可测函数。

4、设$f(x)$是可测集$E\subset R^1$上的L可积函数，$\{E_n\}$为E的一列可测子集，$mE<+\infty$，如果$\lim_{n\to\infty}mE_n=mE$，则$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$。

证明：因为$mE<+\infty$且$E_n\subset E$，所以$mE_n=m(E\setminus E_n)=mE-mE_n$

从而由题设　$\lim_{n\to\infty}m(E\setminus E_n)=mE-\lim_{n\to\infty}mE_n=mE-mE=0$

又$f(x)$在$E\subset R^1$上的L可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{(E\setminus E_n)\cup E_n}f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E\setminus E_n}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{E\setminus E_n}f(x)\mathrm{d}x$$

所以由积分的绝对连续性得

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x)=\lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus E_n}f(x)\mathrm{d}x=0$$

即 $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E} f(x)\mathrm{d}x$ 。

5、设 $f(x)$ 是可测集 $E\subset R^1$ 上的 L 可积函数，$\{E_n\}$ 为 E 中的一列递增可测子集，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n} f(x)\mathrm{d}x \text{ 。}$$

证明：记

$$f_n(x)=f(x)\cdot\chi_{E_n}(x)\text{，其中 }\chi_{E_n}(x)=\begin{cases}1,\ x\in E_n\\ 0,\ x\notin E_n\end{cases}$$

显然在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 上，$f_n(x)=f(x)\cdot\chi_{E_n}(x)\to f(x)$，$\left|f_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|$ 且

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n} f_n(x)dx=\int_{E_n} f(x)dx$$

于是由勒贝格控制收敛定理即可的结论。

《实变函数》期末考试模拟试题（二）

（含解答）

一、选择题（单选题）

1、下列集合关系成立的是（ A ）

（A）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （B）$(A\setminus B)\cap A=\varnothing$

（C）$(B\setminus A)\cap A\neq\varnothing$ （D）$(B\setminus A)\subseteq A$

2、若 $E\subset R^n$ 是闭集，则（ B ）

（A）E 的内部 $=E$ （B）$\overline{E}=E$ （C）$E\subset E'$ （D）$E'=E$

3、设 Q 是有理数集，则（ C ）

（A）$mQ>0$ （B）Q 是闭集 （C）$mQ=0$ （D）Q 是不可数集

4、设 $f(x)$ 为 R^1 上的连续函数，a 为任意实数，则（ D ）

（A）$R^1[x|f(x)\le a]$ 是开集 （B）$R^1[x|f(x)\ge a]$ 是开集

（C）$R^1[x|f(x)>a]$ 是闭集 （D）$R^1[x|f(x)>a]$ 是开集

5、 设 E 是 R^n 中的可测集，$f(x)$，$g(x)$ 都是 E 上的可测函数，若

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0,$$

则（ A ）

（A）$f(z)=g(x)$ $a.e.$ 于 E （B）在 E 上，$f(z)=g(x)$

（C）在 E 上，$f(z)\neq g(x)$ （D）在 E 上，$f(z)\le g(x)$

二、多项选择题（每题至少有两个或两个以上的正确答案）

1、设 E 是 $[0,1]$ 中的有理点全体，则（C、D）

（A）E 是闭集 （B）E 中的每一点都是内点

（C）E 是可数集 （D）$mE=0$

2、若 $E\subset R^1$ 的外测度为零，则（ B、D ）

（A）E 一定是可数集 （B）E 一定是可测集

（C）E 不一定是可数集 （D）$mE=0$

3、设 $mE<+\infty\ (E\subset R^n)$，函数列 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数，若 $f_n(x)\Rightarrow f(x)\ (x\in E)$，则下列哪些结论不一定成立（A、 B、C、D）

（A）$\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在　　　　（B）$f(x)$ 在 E 上 L 可积

（C）$f_n(x)\xrightarrow{a.e.} f(x)\ (x\in E)$　　　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$

4、若 $f(x)$ 在可测集 E 上有 L 积分值，则（A、C　）

（A）$f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 中至少有一个在 E 上 L 可积

（B）$f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 都在 E 上 L 可积

（C）$|f(z)|$ 在 E 上也有 L 积分值

（D）$|f(z)|$ 在 E 上一定 L 可积

5、设 $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的绝对连续函数，则（ A、B、C ）

（A）$f(z)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数　　　　（B）$f(z)$ 是 $[a,b]$ 上的一致连续函数

（C）$f(z)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数　　（D）$f(z)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导

三、填空题（将正确的答案填在横线上）

1、 设 A，B 是两个集合，则 $A\cup B$ ___=___ $(B\setminus A)\cup A$

2、设 $E\subset R^n$，如果 E 满足 $\operatorname{int}E=E$，则 E 是 __开__集。

3、设 G 为直线上的开集，若开区间 (α,β) 满足 $(\alpha,\beta)\subset G$ 和 $\alpha\notin G,\ \beta\notin G$，则 (α,β) 必为 G 的 __构成__区间。

4、设 A 是偶数集，则则 A 的基数 $\overline{\overline{A}}$ __=__ a（其中 a 表示可数基数）。

5、设 E_1，E_2 为可数集，$E_2\subset E_1$ 且 $mE_2<+\infty$，则 $m(E_1\setminus E_2)$ __=__ mE_1-mE_2。

6、设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，则对任意实数 a，b（$a<b$），都有 $E[x|a<f(x)<b]$ 是__可测集__。

7、若 $E\subset R^1$ 是可数集，则 m^*E __=__ 0。

8、设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，$f(x)$ 是 E 上的可测函数，如果 $f_n(x)\xrightarrow{a.e.} f(x)\,(x\in E)$，则 $f_n(x)\Rightarrow f(x)\,(x\in E)$ __不一定成立__。

9、设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上的 L 积分的值__一定存在__。

10、若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)$ 必可表示成两个__递增函数的差（或递减

函数的差）。

四、判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）

1、可列（数）个开集的交集仍为开集。 （ × ）

2、任何无限集均都是可数集。 （ × ）

3、设 E 是可测集，则一定存在 F_σ 型集 F，使得 $F\subset E$，且 $m(E\setminus F)=0$。（ √ ）

4、设 E 是可测集，则 $f(z)$ 是 E 上的可测函数 $\Leftrightarrow$ 对任意实数 a，都有 $E[x\,|\,f(x)\geq a]$ 是可测集。 （ √ ）

5、设 $f(z)$ 是可测集 E 上的可测函数，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在。 （ × ）

五、简答题

1、简述无穷多个闭集的并集是否必为闭集？

答：不一定为闭集。例如 取 R^1 上一列闭集为 $[-1+\dfrac{1}{n},\ 1-\dfrac{1}{n}]$，$n=1,2,3,\cdots$

而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-1+\dfrac{1}{n},\ 1-\dfrac{1}{n}]=(-1,1)$ 是开集，不是闭集。

2、可测集 E 上的可测函数与连续函数有何关系？

答：①连续函数是可测函数；

②可测函数不一定连续；

③可测函数在 E 上是“基本上”连续的。

3、$[a,b]$ 上的绝对连续函数与有界变差函数有何关系？

答：①绝对连续函数是有界变差函数；

②有界变差函数不一定是绝对连续函数。

六、计算题

1、设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in P\\ x^3 & x\in[0,1]\setminus P\end{cases}$，其中 P 是康托集，求 $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$。

解：因为 $mP=0$，所以 $f(x)=x^3\ a.e.$ 于 $[0,1]$，于是

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} x^3\mathrm{d}x$$

再由 L 积分与 R 积分的关系得

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} x^3\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}。$$

2、设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，$E=[0,1]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$。

解：因为 $|f_n(x)|=\left|\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right|\leq\dfrac{1}{2}$，而 $\int_E \dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{2}<+\infty$

所以，由 L 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E 0\mathrm{d}x=0$$

七、证明题

1、证明集合等式：$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

证明：（方法 1）对任意$x\in A\setminus(B\cup C)$，有$x\in A$且$x\notin B\cup C$，即$x\in A$且$x\notin B$，$x\notin C$

所以 $x\in A\setminus B$且$x\in A\setminus C$，即$x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。

反之，对任意$x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，有$x\in A\setminus B$且$x\in A\setminus C$，即$x\in A$且$x\notin B$，$x\notin C$，

所以$x\in A$且$x\notin B\cup C$，即$x\in A\setminus(B\cup C)$，

综上所述，$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。

（方法 2）

$A\setminus(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^c=A\cap B^c\cap C^c=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。

2、设$E\subset R^1$，且$m^*E=0$，则E是可测集。

证明： 对任意$T\subset R^1$，显然$m^*T\le m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$

又$m^*(T\cap E)\le m^*E=0$（因为$T\cap E\subset E$），从而$m^*(T\cap E)=0$

所以$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*(T\cap E^c)\le m^*T$ （因为$T\cap E^c\subset T$）

所以$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$，即$E$是可测集。

3、证明：R^1上的单调函数$f(x)$必为R^1上的可测函数。

证明：不妨设$f(x)$是单调递增函数，对于任意实数a，记$\inf R^1[x|f(x)>a]=\alpha_0$，由于$f(x)$是单调递增函数，$R^1[x|f(x)>a]=\begin{cases}(\alpha_0,+\infty) & \alpha_0\notin R^1[x|f(x)>a]\\ [\alpha_0,+\infty) & \alpha_0\in R^1[x|f(x)>a]\end{cases}$，显然是可测集。所以$f(x)$必为$R^1$上的可测函数。

4、设$f(x)$是可测集$E\subset R^n$上的可测函数，则$f(x)$在E上L可积$\Leftrightarrow|f(x)|$在E上L可积。

证明：必要性：因为$f(x)$在E上L可积，则$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x<+\infty$和$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x<+\infty$

而$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$，所以

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

即$|f(x)|$在E上L可积。

充分性：因为$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$，且$0 \le f^+(x) \le |f(x)|$，$0 \le f^-(x) \le |f(x)|$

则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$，$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$。

所以$f(x)$在E上L可积。

5、设$\{f_n(x)\}$可测集E上的非负可测函数列，且$f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$（$n \ge 1$）， 存在k_0使得

$$\int_E f_{k_0}(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

记$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则$f(x)$在$E$上勒贝格可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x。$$

证明：不妨设$\int_E f_1(x)dx < +\infty$，由题设注意到$f_n(x)$单调递减可得

$$f_1(x) \ge f_n(x) \ge 0,$$

且在E上恒有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

于是，由勒贝格控制收敛定理得，$f(x)$在E上勒贝格可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x。$$

6、 设$mE < +\infty$，$\{f_n(x)\}$为E上几乎处处有界的可测函数列，证明：在E上$f_n(x) \Rightarrow 0$

的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x = 0$。

证明：先证$f_n(x) \Rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \Rightarrow 0$。

事实上，由对任意$\delta > 0$，$|f_n(x)| \ge \delta \Leftrightarrow \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \ge \frac{\delta}{1+\delta}$再结合依测度收敛的定义即可得上面的结论。

下面证明本题的结论。

必要性：因$f_n(x) \Rightarrow 0$可得$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \Rightarrow 0$，于是$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有

$$mE[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\varepsilon\right]<\varepsilon$$

因此，当 $n>N$ 时，并注意到 $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\leq 1$ 和 $mE[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}<\varepsilon\right]\leq mE$ 可得

$$\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x=\int_{E[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}<\varepsilon\right]}\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x+\int_{E[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\varepsilon\right]}\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x$$

$$\leq\varepsilon\cdot mE[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}<\varepsilon\right]+1\cdot mE[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\varepsilon\right]<(1+mE)\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx=0$。

充分性：对任意 $\delta>0$，由

$$\delta\cdot mE[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\delta\right]\leq\int_{E[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geq\delta\right]}\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x\leq\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x\to 0\ (n\to\infty)$$

可得 $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\Rightarrow 0$，从而 $f_n(x)\Rightarrow 0$。

《实变函数》期末考试模拟试题（三）

（含解答）

一、选择题（单选题）

1、下列集合关系成立的是（ A ）

（A） $A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$　　（B） $A\setminus(A\cap B)\neq A\setminus B$

（C） $(B\cap A)\cup A=A\cup B$　　（D） $(B\setminus A)\cap A\neq\varnothing$

2、若 $E\subset R^n$ 是孤立点集，则（ B ）

（A） $E'\supset E$　　（B） $E'=\varnothing$　　（C） E 的内部 $\neq\varnothing$　　（D） $E'=E$

3、设 W 是 $[0,1]$ 上的无理数集，则（ C ）

（A） W 是可数集　（B） W 是开集　（C） W 是不可数集　（D） $mW=0$

4、设 $f(x)$ 是 R^1 上的单调函数，则（ D ）

（A） $f(x)$ 在 R^1 上连续　　（B） $f(x)$ 在 R^1 中的不连续点有不可数个

（C） $f(x)$ 在 R^1 上一定不 L 可积　（D） $f(x)$ 是 R^1 上的可测函数

5、设 E 是 R^n 中的可测集，$f(x)$ 为 E 上的可测函数，若 $\int_E f^2(x)\mathrm{d}x=0$，则（ A ）

（A），$f(z)$ 在 E 上几乎处处为零　　（B）在 E 上，$f(z)\equiv 0$

（C）在 E 上，$f(z)\neq 0$　　（D） $mE[x|f(x)=0]=0$

二、多项选择题（每题至少有两个或两个以上的正确答案）

1、设 E 是 $[0,1]$ 上康托集，则（B、C）

（A） E 是可数集　　（B） E 是闭集

（C） E 中的每一点都是聚点　　（D） $mE>0$

2、若 $E\subset R^1$ 至少有一个聚点，则（C、D ）

（A） $m^*E>0$　　（B） $m^*E=0$

（C） E 可能是可数集　　（D） E 可能是不可数集

3、设 $E\subset[a,b]$ 是不可测集，则 E 的特征函数 $X_E(x)$ 是 （C、D ）

（A） $[a,b]$ 上的简单函数　（B） $[a,b]$ 上的可测函数

（C） E 上的连续函数　　（D） $[a,b]$ 上的不可测函数

4、设 $f(x)$ 在可测集 E 上不 L 可积，则（ B、D ）

（A） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 都在 E 上不 L 可积

（B） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 至少有一个在 E 上不 L 可积

（C） $|f(z)|$ 在 E 上可能 L 可积

（D） $|f(z)|$ 在 E 上一定不 L 可积

5、设 $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的有界变差函数，则（ A、D）

（A） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续　（B） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的连续函数

（C） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上不可导　　（D） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导

三、填空题（将正确的答案填在横线上）

1、设 X 为全集，A，B 为 X 的两个子集，则 $A\cap B$ ___=___ $A\setminus(A\setminus B)$

2、设 $E\subset R^n$，如果 E 满足 $E'=E$，则 E 是 ___完全___集。

3、若开区间 (a,b) 和 (c,d) 是直线上开集 G 的两个不同的构成区间，则 $(a,b)\cap(c,d)=$ ___$\varnothing$___。

4、设 A 是无限集，B 是至多可数集，则 $A\cup B$ 的基数 $\overline{\overline{A\cup B}}$ ___=___ $\overline{\overline{A}}$。

5、设 E_1，E_2 为可测集，$mE_2=0$，则 $m(E_1\setminus E_2)$ ___=___ mE_1。

6、设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的有限实函数，若对任意实数 $a<b$，都有 $E[x|a<f(x)\le b]$ 是可测集，则 $f(x)$ 是可测集 E 上的 ___可测函数___。

7、设 $E\subset R^1$ 是孤立点集，则 m^*E ___=___ 0。

8、设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，且 $f_n(x)\Rightarrow f(x)\,(x\in E)$，则 $f_n(x)\overset{a.e.}{\rightarrow} f(x)\,(x\in E)$ ___不一定成立___。

9、设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上的 L 可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上 ___勒贝格可积___。

10、若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数或绝对连续函数，则 $f(x)$ $[a,b]$ 上的导数 ___几乎处处存在___。

四、判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）

1、可列（数）个 F_σ 型集的并集仍为 F_σ 型集。 （ √ ）

2、无限集中一定存在具有最大基数的无限集。 （ × ）

3、设 E 是可测集，则一定存在开集 G，使得 $E\subset G$，且 $m(G\setminus E)=0$。（ × ）

4、设 E_1 和 E_2 都是可测集，$f(z)$ 是 E_1 和 E_2 上的可测函数，则 $f(x)$ 不一定是 $E_1\cup E_2$ 上的可测函数。 （ × ）

5、设 $f(z)$ 是可测集 E 上的可测函数，且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在（可为 $\pm\infty$），则 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 至少有在 E 上 L 可积。 （ √ ）

五、简答题

1、简述无穷多个零测集的并集是否必为零测集？

答：不一定为零测集。例如 $R^1=\bigcup_{x\in R^1}\{x\}$，显然 $\{x\}$ 为单元素集，为零测集，R^1 不是零测集。

2、R^1 上的可测集与 Borel 集的关系？

答：①Borel 集是可测集；
②可测集不一定是 Borel 集；
③可测集一定可以表示成一个 Borel 集与零测集的差或并。

3、可测集 $E\subset R^1$ 上的可测函数与连续函数有何关系？

答：①可测集 E 上的连续函数一定是可测函数；
②可测集 E 上的可测函数不一定是连续函数；
③对 E 上的一个可测函数，任取 $\varepsilon>0$，在可测集 E 中去掉一个测度小于 ε 的可测子集后，可使此可测函数成为连续函数。

六、计算题

1、设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x} & x\in[0,1]\cap Q \\ x & x\notin[0,1]\cap Q \end{cases}$，其中 Q 是有理数集，求 $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$。

解：因为 $m\{[0,1]\cap Q\}=0$，所以 $f(x)=x\ a.e.$ 于 $[0,1]$，于是

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

2、设 $f_n(x)=\dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}$，$E=(0,1]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$。

解：因为 $|f_n(x)|=\left|\dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\right|=\left|\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right|\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\le\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$，而 $\int_E \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}dx=1<+\infty$

所以，由 L 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_E 0dx=0$$

七、证明题

1、证明集合等式：$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$

证明：（方法 1）对任意 $x\in(A\setminus B)\cap C$，有 $x\in(A\setminus B)$ 且 $x\in C$，即 $x\in A$，$x\notin B$ 且 $x\in C$

所以 $x\in A\cap C$ 或 $x\notin B$，即 $x\in(A\cap C)\setminus B$。

反之，对任意 $x\in(A\cap C)\setminus B$，有 $x\in A\cap C$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A$，$x\in C$ 且 $x\notin B$，所以

$x\in(A\setminus B)$ 且 $x\in C$，即 $x\in(A\setminus B)\cap C$，

综上所述，$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$。

（方法 2）$(A\setminus B)\cap C=(A\cap B^C)\cap C=(A\cap C)\cap B^C=(A\cap C)\cap B^C=(A\cap C)\setminus B$。

2、设 E_0 是 $[0,1]$ 中的无理点全体，则 E_0 是可测集且 $mE_0=1$。

证明： 记 Q_0 是 $[0,1]$ 中的有理点全体，由于 Q_0 是可数集，从而 Q_0 可测，且 $mQ_0=0$。又

$E_0=[0,1]\setminus Q_0$，所以，E_0 是可测集且 $mE_0=m[0,1]-mQ_0=1-0=0$。

3、设 $E\subset R^1$，$\chi_E(x)=\begin{cases}1,\ x\in E\\ 0,\ x\notin E\end{cases}$，证明：$\chi_E(x)$ 是 R^1 上的可测函数的充要条件是 E 为可测集。

证明：充分性：因为 $\chi_E(x)$ 是 R^1 上的可测函数，则对任意实数 a，$R^1[x\big|\chi_E(x)>a]$

是可测集，特别取 $a=\dfrac{1}{2}$，注意到 $R^1[x\Big|\chi_E(x)>\dfrac{1}{2}]=E$，可得 E 为可测集。

必要性：若 E 为可测集，则 $\chi_E(x)$ 是 R^1 上的简单函数，从而为 R^1 上的可测函数。

4、设 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 $E\subset R^1$ 上的可测函数列，若 $\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)|dx=0$，则在 E 上

$f_n(x)\Rightarrow 0$。

证明：对任意 $\delta>0$，由于

$$\delta\cdot mE[x\|f_n(x)|\geq\delta]\leq\int_{E[x\|f_n(x)|\geq\delta]}|f_n(x)|dx\leq\int_E|f_n(x)|dx$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} mE[x\|f_n(x)|\geq\delta]=0,$$

即在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow 0$。

5、设 $mE<+\infty$，若 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列几乎处处收敛于零的可积函数，且满足对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $e\subset E, me<\delta$，就有 $\int_e |f_n(x)|dx<\varepsilon(n\geq 1)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx=0。$$

证明：由题设及 Egoroff 定理得，对题设中的 $\delta>0$，存在可测集 $F\subset E$，$mF<\delta$，在 $E\setminus F$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 0，从而对题设中的 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时

$$|f_n(x)|<\varepsilon,(x\in E\setminus F)$$

于是，当 $n>N$ 时，并注意到题设的条件，有

$$\int_E |f_n(x)|dx=\int_F |f_n(x)|dx+\int_{E\setminus F}|f_n(x)|dx<\varepsilon+m(E\setminus F)\cdot\varepsilon\leq(1+mE)\varepsilon。$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx=0。$$

《实变函数》期末考试模拟试题（四）

（含解答）

一、多项选择题（每题至少有两个或两个以上的正确答案）

1、设 E 是 $[0,1]$ 中的有理点全体，则（**C、D**）[考核对典型集合掌握的情况]

（A） E 是闭集　　（B） E 中的每一点都是内点

（C） E 是可数集　　（D） $mE=0$

2、设 E 是 $[0,1]$ 中的无理点全体，则（**C、D**）

（A） E 是可数集　（B） E 是闭集　（C） E 中的每一点都是聚点　（D） $mE>0$

3、若 $E\subset R^1$ 的外测度为零，则（ **B、D** ）[考核零测集的特点]

（A） E 一定是可数集　　（B） E 一定是可测集

（C） E 不一定是可数集　　（D） $mE=0$

4、若 $E\subset R^1$ 至少有一个内点，则（ **B、D** ）[考核典型集的外测度可数性的特点]

（A） m^*E 可以等于零　（B） $m^*E>0$　（C） E 可能是可数集　（D） E 是不可数集

5、设 $mE<+\infty\,(E\subset R^n)$，函数列 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数，若 $f_n(x)\Rightarrow f(x)\ (x\in E)$，则下列哪些结论不一定成立（**A、B、C、D**）

[考核可测函数与勒贝格积分的简单综合]

（A） $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在　　（B） $f(x)$ 在 E 上 L 可积

（C） $f_n(x)\xrightarrow{a.e.} f(x)\ (x\in E)$　　（D） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$

6、设 $E\subset[a,b]$ 是可测集，则 E 的特征函数 $X_E(x)$ 是 （**A、B、C** ）[考核特征函数的特点]

（A） $[a,b]$ 上的简单函数（B） $[a,b]$ 上的可测函数 （C） E 上的连续函数（D） $[a,b]$ 上的连续函数

7、若 $f(x)$ 在可测集 E 上有 L 积分值，则（**A、C** ）[考核勒贝格积分的定义]

（A） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 中至少有一个在 E 上 L 可积　（B） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 都在 E 上 L 可积

（C） $|f(z)|$ 在 E 上也有 L 积分值　　（D） $|f(z)|$ 在 E 上一定 L 可积

8、设 $f(x)$ 在可测集 E 上 L 可积，则（ **B、D** ）[考核勒贝格积分的定义]

（A） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 有且仅有一个在 E 上 L 可积　（B） $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 都在 E 上 L 可

积

（C） $|f(z)|$ 在 E 上不一定 L 可积　　　　（D） $|f(z)|$ 在 E 上一定 L 可积

9、设 $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的绝对连续函数，则（ **A、B、C** ）[考核绝对连续函数、有界变差函数的基本性质]

（A） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数　　　（B） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 上的一致连续函数

（C） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数　（D） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导

10、设 $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的单调函数，则（ **A、C、D**）[考核绝对连续函数、有界变差函数的基本性质]

（A） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的有界变差函数　（B） $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的绝对连续函数

（C） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续　（D） $f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导

二、单项选择题　（每题仅有一个正确答案）

1．设 E 是 $[0,1]$ 中的无理点全体，则 E 是（　C　　）.[考核对典型集合掌握的情况]

（A）可数集　　（B）有限集　　（C）不可数集　（D）零测集

2．下面集合关系成立的是（　A　）.[考核对集合的基本运算掌握的情况]

（A）$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$ （B）$(A\setminus B)\cup B=A$ （C）$(B\setminus A)\cup A\subset A$ （D）$B\setminus A\subset A$

3．若 $E\subset R^2$ 至少有一个内点，则有（B　）.[考核对典型集合外测度掌握的情况]

（A） $m^*E=0$　（B） $m^*E>0$　（C） $mE=0$（D） $mE<0$

4．设 $E\subset R^2$ 是开集，则（　B　）.[考核开集闭集的基本特征]

（A） $E'\subset E$　（B） $E^0=E$　　（C） $\overline{E}=E$　（D） $E'=E$

5．设 $E\subset[a,b]$ 是可测集，则 E 的特征函数 $X_E(x)$ 是 $[a,b]$ 上的（A）.[考核对集合的特征函数的认识]

（A）简单函数　（B）常函数　（C）连续函数（D）单调函数

6．设 $Q\subset[0,1]$ 是有理数集，$D(x)=\begin{cases}1,\ x\in Q\\ 0,x\notin Q\end{cases}$,则 $D(x)$ 是 $[0,1]$ 上的（C）.[考核目标同上题]

（A）连续函数（B）单调函数（C）简单函数（D）定积分存在的函数

7．设 $f(x)$ 在可测集 E 上勒贝格可积，则（B）.[考核勒贝格积分的定义]

（A） $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 有且仅有一个在 E 上勒贝格可积;（B） $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都在 E 上勒贝格可积

（C） $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都在 E 上不勒贝格可积;（D） $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$ 在 E 上不勒

贝格可积

8．设 W 是 $[0,1]$ 上的无理数集，c 表示连续基数，则（D）.[考核对典型集合基数和测度掌握的情况]

（A）$\overline{\overline{W}}>c$ （B）$\overline{\overline{W}}<c$ （C）$mW=0$ （D）$mW=1$

9．设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的（D）.[考核基本的有界变差函数和绝对连续函数]

（A）连续函数 （B）绝对连续函数 （C）可导函数 （D）有界变差函数

10．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（A）.[考核绝对连续函数的关系的基本性质]

（A）有界变差 （B）可导 （C）单调 （D）连续可微

三、填空题

1．设 A，B 为 X 的两个子集，则 $A\backslash B$ __等于__ $A\cap B^C$ ．[考核集合之间的基本关系]

2．设 A，B 为两个集合，则 $A\cup B$ __等于__ $(B\backslash A)\cup A$ ．[考核目标同上]

3．设 $E\subset R^n$，如果 E 满足 $E'\subset E$，则 E 是 __闭__ 集．[考核开集、闭集的定义]

4．设 $E\subset R^n$，如果 E 中的每一点都是内点，则 E 是 __开__ 集．[考核开集、闭集的定义]

5．若开区间 (α,β) 是直线上开集 G 的一个构成区间，则 (α,β) 满足 $(\alpha,\beta)\subset G$ 且 __$\alpha,\beta\notin G$__．[考核开集的构成区间的定义和特点]

6．设 E 是 R^1 上的开集,若开区间 (a,b) 满足 $(a,b)\subset E$ 且 $a,b\notin E$,则称 (a,b) 是开集 E 的 __构成__ 区间．[考核开集的构成区间的定义和特点]

7．设 A 是无限集，则 A 的基数 $\overline{\overline{A}}$ __大于或等于__ a（其中 a 表示可数基数）．[考核可数集的性质]

8．设 A 是偶数集，则 A 的基数 $\overline{\overline{A}}$ __等于__ a（其中 a 表示可数基数）．[考核可数集的性质]

9．设 E_1，E_2 为可测集，$mE_2<+\infty$，则 $m(E_1\backslash E_2)$ __大于或等于__ mE_1-mE_2．[考核测度的性质，单调性和次可加性]

10．设 A，B 为可测集，则 $m(A\cup B)$ __小于或等于__ $mA+mB$．[考核测度的性质，次可加性]

11．设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数，若对任意实数 a，都有 $E[x|f(x)>a]$ 是 __可测集__，则称 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数．[考核可测函数的定义]

12．设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，则对任意实数 a，b ($a<b$)，有 $E[x|a<f(x)<b]$ 是

__可测__集. [考核可测函数的基本性质]

13．设 $E\subset R^1$ 是可数集，则 m^*E __等于__ 0 .[考核典型集合的测度和外测度]

14．设 $P\subset[0,1]$ 是康托集，则 mP __等于__ 0 .[考核典型集合的测度和外测度]

15．设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，且 $f_n(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，则存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $f_{n_k}(x)$ 在 E 上__几乎处处收敛于__ $f(x)$. [考核函数列收敛与依测度收敛的关系的记忆，本题是其中的黎斯定理]

16．设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，$f(x)$ 是 E 上的实函数,若 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $f_n(x)$ 在 E 上__依测度__收敛于 $f(x)$.[考核函数列收敛与依测度收敛的关系的记忆，本题是其中的勒贝格定理]_

17．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，且它们的积分值__相等__. [考核黎曼积分与勒贝格积分的关系]

18．设 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，且几乎处处相等,则它们在 $[a,b]$ 上勒贝格积分值__相等__. [考核勒贝格积分的基本性质]

19．若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ __是__ $[a,b]$ 上的有界变差函数. [考核有界变差函数和绝对连续函数的关系]

20.若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则 $f(x)$ 可以表示成两个单调函数的__和或差__.[考核有界变差函数和单调函数的关系，即约当分解定理]

四、判断说明题（注意这类题不仅要求判断对还是不对，而且还要简单的说明理由）

1．无限个闭集的并集仍为闭集. [考核开集、闭集的性质]

答：不对，因为闭集只对有限的并集运算封闭。

2．无限个开集的交集仍为开集. [考核开集、闭集的性质]

答：不对，因为开集只对有限的交集运算封闭。

3．无限集均含有一个可数子集. [考核可数集的性质]

答：对，因为这是可数集与无限集的关系。

4．无限集都是可数集. [考核无限集的分类]

答：不对，因为无限集还包括不可数集。

5．设 E 是可测集，则一定存在 G_δ 型集 G，使得 $E\subset G$，且 $m(G\setminus E)=0$. [考核可测集

与 G_δ 型集或 F_σ 型集的关系]

答：对，因为这是可测集与 G_δ 型集的关系。

6．设 E 是可测集，则一定存在 F_σ 型集 F，使得 $F\subset E$，且 $m(E\setminus F)=0$．[考核可测集与 G_δ 型集或 F_σ 型集的关系]

答：对，因为这是可数集与 F_σ 型集的关系。

7．设 E 是测度为零的集，$f(z)$ 是 E 上的实函数，则 $f(x)$ 不一定是 E 上的可测函数．[考核可测函数的基本性质]

答：不对，因为零测集上的任何实函数都是可测函数。

8．设 E 是可测集，$f(z)$ 是 E 上几乎处处为零的实函数，则 $f(x)$ 在 E 上可测．[考核可测函数的基本性质]

答：对，因为常函数 0 是可测函数，由可测函数的性质可得 $f(x)$ 在 E 上可测。

9．设 $f(z)$ 是可测集 E 上的非负可测函数，则 $f(x)$ 必在 E 上勒贝格可积．[考核勒贝格积分的定义]

答：不对，因为可测集 E 上的非负可测函数只能保证有勒贝格积分，不一定能保证勒贝格可积。

10．设 $f(z)$ 是可测集 E 上的可测函数，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 一定存在．[考核勒贝格积分的定义]

答：不对，因为可测集 E 上的可测函数，不一定能定义勒贝格积分，因此不一定能保证 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 存在。

五、简答题（此类题关键是要把要点答出来）

1．简述无穷多个开集的交集是否必为开集？[考核开集、闭集的运算性质]

要点：首先，回答结论：不一定为开集

其次，举出交集为开集的例子和交集不是开集的例子。

2．简述无穷多个闭集的并集是否必为闭集？[考核开集、闭集的运算性质]

要点：首先，回答结论：不一定为闭集

其次，举出并集为闭集的例子和并集不是闭集的例子。

3．可测集 E 上的可测函数与简单函数有何关系？[考核可测函数与简单函数的关系]

要点：1、简单函数是可测函数；2、可测函数不一定是简单函数；3、可测函数一定可表示成一列简单函数的极限。

4．可测集 E 上的可测函数与连续函数有何关系？[考核可测函数与简单函数的关系]

要点：1、连续函数是可测函数；2、可测函数不一定是连续函数；3、对任意 $\varepsilon>0$，在 E 中去掉一个测度小于 ε 的可测集后，可测函数能成为连续函数（鲁津定理）。

5．$[a,b]$ 上的有界变差函数与单调函数有何关系？[考核单调函数与有界变差函数的关系]

要点：1、单调函数是有界变差函数；2、有界变差函数不一定是单调函数；3、有界变差函数能分解成两个单调函数的和或差。

6．$[a,b]$上的绝对连续函数与有界变差函数有何关系？[考核有界变差函数与绝对连续函数的关系]

要点：1、绝对连续函数是有界变差函数；2、有界变差函数不一定是绝对连续函数。

六、计算题（注意这类题要写出主要步骤）

1．设 $f(x)=\begin{cases}2 & x\in[0,1]\cap W\\ 0 & x\notin[0,1]\cap W\end{cases}$，其中$W$是有理数集，求$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$．[考核简单的勒贝格积分的计算]

解：因$[0,1]\cap W$**是至多可数集，**$m([0,1]\cap W)=0$**，得**$f(x)=0$**在**$[0,1]$**上几乎处处成立。**

所以由勒贝格积分的惟一性，$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} 0\mathrm{d}x=0$。

2．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x^2 & x\in C\\ x^2 & x\in[0,1]\setminus C\end{cases}$，其中$C$是康托集，求$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$．[考核简单的勒贝格积分的计算]

解：由康托集为零测集，即$mC=0$**，得**$f(x)=x^2$**在**$[0,1]$**上几乎处处成立。所以**

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}。$$

注意：上面两题是简单积分的计算，注意利用积分的惟一性。

3．求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\mathrm{d}x$．[考核勒贝格控制收敛定理的简单应用]

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}=0$**，且**

$$\left|\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\right|=\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}=\frac{\ln(1+x+n-1)}{n}\cdot e^{-x}\le\frac{x+n-1}{n}\cdot e^{-x}\le(x+1)\cdot e^{-x}$$

而$(x+1)\cdot e^{-x}$**在**$[0,+\infty)$**勒贝格可积，所以，由勒贝格控制收敛定理**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0。$$

4．设$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx$，$E=[0,1]$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$．[考核勒贝格控制收敛定理的简单应用]

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx=0$**，且**

$$\left|f_n(x)\right|=\frac{|nx|}{1+n^2x^2}|\sin nx|\le\frac{|nx|}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2}$$

而$\frac{1}{2}$显然在$E=[0,1]$ 勒贝格可积，所以，由勒贝格控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E 0\mathrm{d}x=0\text{。}$$

注意：上面的两题在计算时，要注意验证勒贝格控制收敛定理的条件。

七、证明题

1．证明：$(E_1\cup E_2)\setminus E=(E_1\setminus E)\cup(E_2\setminus E)$.

证明：（方法 1）

$$(E_1\cup E_2)\setminus E=(E_1\cup E_2)\cap E^c=(E_1\cap E^c)\cup(E_2\cap E^c)=(E_1\setminus E)\cup(E_2\setminus E)$$

（方法 2）直接用集合相等的定义证明。

2．证明：$E\setminus(B\cup A)=(E\setminus B)\cap(E\setminus A)$.

证明：（方法 1）

$$E\setminus(B\cup A)=E\cap(B\cup A)^c=E\cap(B^c\cap A^c)=(E\cap B^c)\cap(E\cap A^c)=(E\setminus B)\cap(E\setminus A)$$

（方法 2）直接用集合相等的定义证明。

3．设E是R中的有理点全体，则E是可测集且$mE=0$.

提示：用外测度的定义证明

证明： 因为E是可数集，则$E=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$

对任意$\varepsilon>0$，取开区间$(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$，$n=1,2,\cdots$，显然它们把$E_0$覆盖住。

于是 $m^*E\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$。让$\varepsilon\to 0$得，$m^*E=0$，从而$E_0$是可测集且$mE=0$。

4．设$A\subset R^2$，且$m^*A=0$，则A是可测集.

提示：用可测集的定义证明。

证明： 对任意$T\subset R^2$，显然

$$m^*T\le m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)$$

又$m^*(T\cap A)\le m^*A=0$（因为$T\cap A\subset A$），从而

$$m^*(T\cap A)=0$$

所以

$$m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)=m^*(T\cap A^c)\le m^*T\text{（因为}T\cap A^c\subset T\text{）}$$

所以

$$m^*T=m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)\text{，}$$

即 A 是可测集。

5．证明：R 上的实值连续函数 $f(x)$ 必为 R 上的可测函数．

证明：因为对于任意实数 a，由连续函数的局部保号性易知，$R[x|f(x)>a]$ 是开集，从而 $R[x|f(x)>a]$ 是可测集。所以 $f(x)$ 必为 R 上的可测函数。

6．证明：R 上的单调函数 $f(x)$ 必为 R 上的可测函数．

证明：不妨设 $f(x)$ 是单调递增函数，对于任意实数 a，记 $\inf R[x|f(x)>a]=\alpha_0$，由于 $f(x)$ 是单调递增函数，$R[x|f(x)>a]=\begin{cases}(\alpha_0,+\infty) & \alpha_0\notin R[x|f(x)>a]\\ [\alpha_0,+\infty) & \alpha_0\in R[x|f(x)>a]\end{cases}$，显然是可测集。所以 $f(x)$ 必为 R 上的可测函数。

7. 设 $f(x)$ 是可测集 $E\subset R^n$ 上的勒贝格可积函数，$\{E_n\}$ 为 E 的一列可测子集，$mE<+\infty$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=mE$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$．

证明：因为 $mE<+\infty$ 且 $E_n\subset E$，所以 $mE_n=m(E\setminus E_n)=mE-mE_n$

从而由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E\setminus E_n)=mE-\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=mE-mE=0$

又 $f(x)$ 在 $E\subset R^n$ 上的 L 可积，且

$$\int_E f(x)dx-\int_{E_n}f(x)dx=\int_{(E\setminus E_n)\cup E_n}f(x)dx-\int_{E_n}f(x)dx$$

$$=\int_{E\setminus E_n}f(x)dx+\int_{E_n}f(x)dx-\int_{E_n}f(x)dx=\int_{E\setminus E_n}f(x)dx$$

所以由积分的绝对连续性得

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{E_n}f(x)dx-\int_E f(x)dx)=\lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus E_n}f(x)dx=0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx=\int_E f(x)dx$。

8．设 $f(x)$ 是可测集 $E\subset R^n$ 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积 $\Leftrightarrow$ $|f(x)|$ 在 E 上勒贝格可积．

证明：必要性：因为 $f(x)$ 在 E 上 L 可积，则 $\int_E f^+(x)dx<+\infty$ 和 $\int_E f^-(x)dx<+\infty$

而 $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$，所以

$$\int_E|f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx<+\infty,$$

即$\left|f(x)\right|$在E上L可积。

充分性：因为$\int_E \left|f(x)\right| dx < +\infty$，且$0 \le f^+(x) \le \left|f(x)\right|$，$0 \le f^-(x) \le \left|f(x)\right|$

则 $\int_E f^+(x)dx \le \int_E \left|f(x)\right| dx < +\infty$，$\int_E f^-(x)dx \le \int_E \left|f(x)\right| dx < +\infty$。

所以$f(x)$在E上L可积。

9．设$f(x)$是可测集$A \subset R^n$上的勒贝格可积函数，$\{E_n\}$为A中的一列递增可测子集，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n} f(x)\mathrm{d}x .$$

证明：记

$$f_n(x) = f(x)\cdot\chi_{E_n}(x)\text{，其中 }\chi_{E_n}(x) = \begin{cases}1, & x\in E_n\\ 0, & x\notin E_n\end{cases}$$

显然在$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$上，$f_n(x) = f(x)\cdot\chi_{E_n}(x) \to f(x)$，$\left|f_n(x)\right| \le \left|f(x)\right|$且

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n} f_n(x)dx = \int_{E_n} f(x)dx$$

于是由勒贝格控制收敛定理即可的结论.

10．设E是可测集，且$mE < +\infty$，若$\left\{f_n(x)\right\}$是E上一列几乎处处收敛于零的可积函数，

且满足对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，只要$e \subset E, me < \delta$，就有$\int_e |f_n(x)|dx < \varepsilon (n \ge 1)$，

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx = 0 .$$

证明：由题设及叶果洛夫定理得，对题设中的$\delta > 0$，存在可测集$F \subset E$，$mF < \delta$，

使得，$f_n(x)$在$E \setminus F$上一致收敛于0，

从而对题设中的$\forall\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，当$n > N$时

$$|f_n(x)| < \varepsilon, (x \in E \setminus F)$$

于是，当$n > N$时，并注意到题设的条件，有

$$\int_E |f_n(x)|dx = \int_F |f_n(x)|dx + \int_{E\setminus F} |f_n(x)|dx < \varepsilon + m(E\setminus F)\cdot\varepsilon \le (1+mE)\varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|dx = 0 .$$

《实变函数》期末考试模拟试题（五）

（含解答）

一、判断题（每题 2 分，共 20 分）

1、设 $E \subset R^1$，若E是稠密集，则 E^c 是无处稠密集。F

2、若$|f(x)|$是可测函数，则 $f(x)$ 必是可测函数。F

3．设 $f(x)$ 在可测集 E 上可积分，若 $\forall x \in E, f(x) > 0$，则 $\int_E f(x) > 0$ F

4、A 为可数集，B 为至多可数集，则 A$\cup$B 是可数集. T

5、若 $mE = 0$，则 $m\overline{E} = 0$ F

6、若$|f(x)|$是可测函数，则 $f(x)$ 必是可测函数 F

7．设 $f(x)$ 在可测集 E 上可积分，若 $\forall x \in E, f(x) > 0$，则 $\int_E f(x) > 0$ F

8、任意多个开集之交集仍为开集 F

9、由于$[0,1]-(0,1)=\{0,1\}$，故不存在使$(0,1)$和$[0,1]$之间$1-1$对应的映射。F

10、可数个零测度集之和集仍为零测度集。T

二、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1、下列各式正确的是（　C　）

（A）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$；（B）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

（C）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_n$；（D）以上都不对;

2、设 P 为 Cantor 集，则下列各式不成立的是（　D　）

（A）$\overline{\overline{P}} =$ c　(B) $mP = 0$　(C) $P' = P$　(D) $\overset{\circ}{P} = P$

3、设$\{E_n\}$是一列可测集，$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$，则有（B ）。

（A）$m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) > \lim\limits_{n\to\infty} mE_n$　(B) $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} mE_n$

（C）$m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} mE_n$；（D）以上都不对

4、设$\{E_n\}$是一列可测集，$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$，且 $mE_1 < +\infty$，则有（ A ）

（A） $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n$ （B） $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\le\lim_{n\to\infty}mE_n$

（C） $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\lim_{n\to\infty}mE_n$；（D）以上都不对

5、设 f(x)是$[a,b]$上绝对连续函数，则下面不成立的是（ B ）

(A) $f(x)$在$[a,b]$上的一致连续函数 (B) $f(x)$在$[a,b]$上处处可导

（C） $f(x)$在$[a,b]$上 L 可积 (D) $f(x)$是有界变差函数

6、设M,N是两集合，则 $M-(M-N)=$（ C ）

(A) M (B) N (C) $M\cap N$ (D) $\varnothing$

三、解答题（每题 6 分，共 18 分）

1、设$f(x)=\begin{cases}x, x\text{为无理数}\\1, x\text{为有理数}\end{cases}$，则$f(x)$在$[0,1]$上是否$R-$可积，是否$L-$可积，若可积，求出积分值。

解：$f(x)$在$[0,1]$上不是$R-$可积的，因为$f(x)$仅在$x=1$处连续，

即不连续点为正测度集

因为$f(x)$是有界可测函数，所以$f(x)$在$[0,1]$上是$L-$可积的

因为$f(x)$与x $a.e.$相等, 进一步，$\int_{[0,1]}f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

2、求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin^3 nxdx$.

解：设$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin^3 nxdx$，则易知当$n\to\infty$时， $f_n(x)\to 0$

又$|f_n(x)|\le\frac{nx}{1+n^2x^2}$，但是不等式右边的函数，在$[0,+\infty)$上是$L$可积的

故有$\lim_n\int_0^\infty f_n(x)dx=\int_0^\infty \lim_n f_n(x)dx=0$

3、设$A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n}), A_{2n}(0,n), n=1,2,\cdots,$求出集列$\{A_n\}$的上限集和下限集

解：$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$

设$x\in(0,\infty)$，则存在 N，使$x<N$，因此$n>N$时，$0<x<n$，即$x\in A_{2n}$，所

以 x 属于下标比 N 大的一切偶指标集，从而 x 属于无限多 A_n ，得 $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ ，

又显然 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset (0,\infty)$,所以 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0,\infty)$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \phi$

若有 $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ ，则存在 N，使任意 $n > N$ ，有 $x \in A_n$ ，因此若 $2n-1 > N$ 时，

$x \in A_{2n-1}$,即 $0 < x < \dfrac{1}{n}$,令 $n \to \infty$ 得 $0 < x \le 0$ ，此不可能，所以 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \phi$

四、证明题（每题 10 分，共 50 分）

1、试证 $(0,1) \sim [0,1]$

证明：记 $(0,1)$ 中有理数全体 $Q = \{r_1, r_2, \cdots\}$, 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(r_1) = 0 \\ \varphi(r_2) = 1 \\ \varphi(r_{n+2}) = r_n, n = 1, 2\cdots \\ \varphi(x) = x, x\text{为}(0,1)\text{中无理数}, \end{cases}$$

显然 φ 是（0,1）到[0,1]上的一一映射

所以 $(0,1) \sim [0,1]$

2、设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值连续函数，则对于任意常数 $a, E = \{x \mid f(x) \ge a\}$ 是闭集。P51

3、设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上可积函数列，$\lim_{n} f_n(x) = f(x) a.e.$ 于 E，且 $\int_E |f_n(x)| dx < k$ ，k 为常数，则 $f(x)$ 在 E 上可积.　　P133

4、设 $f(x)$ 在 E 上积分确定，且 $f(x) = g(x) a.e$ 于 E ，则 $g(x)$ 在 E 上也积分确定，且 $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$　　P108

5、设在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ，而 $f_n(x) = g_n(x)$ $a.e.$ 成立，$n = 1,2,\cdots$ ，则有 $g_n(x) \Rightarrow f(x)$　　P95

《实变函数》期末考试模拟试题（六）

（含解答）

1、若 N 是自然数集，N_e 为正偶数集，则 N 与 N_e 对等。（对）

2、由直线上互不相交的开间隔所成之集是至多可列集。（对）

3、若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 R^1 上的有限个集，则下式 $\left(A_1 + A_2 + \cdots + A_n\right)' = A_1' + A_2' + \cdots + A_n'$ 成立。　　（对）

4、任意多个开集的交集一定是开集。（错）

5、有限点集和可列点集都可测。（对）

6、可列个零测集之并不是零测集。（对）

7、若开集 G_1 是开集 G_2 的真子集，则一定有 $mG_1 < mG_2$。（错）

8、对于有界集 $E \subseteq R^1$，必有 $m^*E < +\infty$。（对）

9、任何点集 E 上的常数函数 $f(x)$=C，$x \in E$ 是可测函数。（错）

10、由 $f(x)$ 在 $E_k\left(k = 1, 2, \cdots\right)$ 上可测可以推出 $f(x)$ 在 $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可测。（对）

二、填空

1、区间（0,1）和全体实数 R 对等，只需对每个 $x \in \left(0, 1\right)$，令____$\varphi(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$________

2、任何无限集合都至少包含一个____可数子集__________

3、设 S_1, S_2 都可测，则 $S_1 \cup S_2$ 也可测，并且当 $S_1 \cap S_2$ 为空集时，对于任意集合 T 总有________

____________$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2)$_________

4、设 E 是任一可测集，则一定存在 F_∂ 型集 F，使 $F \subset E$，且___$m(E - F) = 0$__________

5、可测集 $E \subset R^n$ 上的____连续函数______是可测函数。

6、设 E 是一个有界的无限集合，则 E____至少有一_____个聚点。

7、设 π 是一个与集合 E 的点 x 有关的命题，如果存在 E 的子集 M，适合 mM=0，使得 π 在 E\M 上恒成立，也就是说，E\E[π 成立]= ____零测度集___________ ，则我们称 π 在 E 上几乎处处成立。

8、E 为闭集的充要条件是 _____$E' \subset E(\text{或}\partial E \subset E)$__________ 。

9、设 A、B 是两个非空集合，若 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$，则有___$\overline{\mathrm{A}}$=B__________。

三、证明

1、证明：若 $A \subset B$，且 $A \sim A \cup C$，则有 $B \sim B \cup C$。

证明：由条件易得，

$$B = A \cup (B - A) \qquad (1)$$

$$B \cup C = [A \cup (C - B)] \cup (B - A) \qquad (2)$$

由于 $A \cap (B - A) = \varnothing, [A \cup (C - B)] \cap (B - A) = \varnothing$,

而 $\quad A \subset A \cup (C - B) \subset A \cup C$,

已知 $A \sim A \cup C$,所以 $A \sim A \cup (C - B)$.

而 $B - A \sim B - A$,由（1）（2）得 $B \sim B \cup C$。

2、设 $f(x)$ 为 R^1 上的连续函数，则对任意的 $a \in R^1$，$E\left[f(x) \ge a\right]$、$E\left[f(x) \le a\right]$ 为闭集 $(E = R^1)$

证： 先证 $E[f(x) \ge a]$ 是闭集。设 x_0 是 $E[f(x) \ge a]$ 的一个极限点，则 $E[f(x) \ge a]$ 中有点列 $\{x_n\}$，使 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$.

由 $x_n \in E\left[f(x) \le a\right]$ 知 $f(x_n) \ge a$.又由 $f(x)$ 的连续性及极限不等性可得

$$f(x_0) = \lim_{x \to \infty} f(x_n) \ge a .$$

$\therefore \qquad x_0 \in E[f(x) \ge a]$.

即 $\qquad (E[f(x) \ge a])' \subseteq E[f(x) \ge a]$.

故 $\quad E[f(x) \ge a]$ 为闭集.

4、设 $\left\{f_n\right\}$ 是 E 上的可测函数列，则其收敛点集与发散点集都是可测的。

证： 显然，$\{f_n\}$ 的收敛点集可表示为

$$E_0 = E[x \left| \overline{\lim_{x \to \infty}} f_n(x) = \underline{\lim_{x \to \infty}} f_n(x) \right] = \prod_{k=1}^{\infty} E[\left| \overline{\lim_{x \to \infty}} f_n - \underline{\lim_{x \to \infty}} f_n \right| < \frac{1}{k}].$$

由 f_n 可测 $\overline{\lim_{x \to \infty}} f_n$ 及 $\underline{\lim_{x \to \infty}} f_n$ 都可测，所以 $\left| \overline{\lim_{x \to \infty}} f_n - \underline{\lim_{x \to \infty}} f_n \right|$ 在 E 上可测。

从而，对任一自然数 k， $E[\left| \overline{\lim_{x \to \infty}} f_n - \underline{\lim_{x \to \infty}} f_n \right| < \frac{1}{k}]$ 可测。故

$$E_0 = \prod_{k=1}^{\infty} E[\left| \overline{\lim_{x \to \infty}} f_n - \underline{\lim_{x \to \infty}} f_n \right| < \frac{1}{k}] \text{ 可测。}$$

既然收敛点集 E_0 可测，那么发散点集 $E - E_0$ 也可测。

《实变函数》期末考试模拟试题（七）

（含解答）

一、判断题（判断正确、错误，请在括号中填“对”或“错”。共10小题，每题1.5分，共10×1.5=15分）

1、$\mathbf{R}^n$ 中全体子集构成一个 σ 代数。 （ √ ）

2、存在闭集使其余集仍为闭集。 （ √ ）

3、若 E 是可测集，F 是 E 的可测子集，则 $m(E-F)=mE-mF$。 （ × ）

4、无限集中存在基数最大的集合，也存在基数最小的集合。 （ × ）

5、可数个可数集的并集是可数集。 （ √ ）

6、、可数个 G_δ 集的交集不一定是 G_δ 集。 （ × ）

7、若 E 是可测集，$f(x)$ 是 E 上的实函数，则 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是：存在实数 a，使 $E[x|\ f>a]$ 是可测集。 （ × ）

8、若 E 是可测集，F 是 E 的可测子集，则 $m(E-F)=mE-mF$。 （ × ）

9、若 E 是可测集，$f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上一定可积。 （ × ）

10、若 E 是可测集，$f(x)$ 是 E 上的非负简单函数，则 $\int_E f(x)dx$ 一定存在。 （ √ ）

二、选择题。（每道题只有一个答案正确，多选或者不选均为零分，每道题 1.5 分，共 15 分）

1、下列集合关系成立的是（ A ）

（A）$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$ （B）$(A\setminus B)\cup B=A$

（C）$(B\setminus A)\cup A\subseteq A$ （D）$(B\setminus A)\subseteq A$

2、若 $E\subset R^n$ 是开集，则（ B ）

（A）$E'\subset E$ （B）E 的内部 $=E$ （C）$\overline{E}=E$ （D）$E'=E$

3、设□ 是有理数，则下列正确的是（ B ）

A. $\overline{\overline{□}}>\overline{\overline{[0,1]}}$； B. $\overline{\overline{□}}<\overline{\overline{[0,1]}}$； C. $\overline{\overline{□}}=\overline{\overline{[0,1]}}$； D. 以上都不正确。

4.、设 E 是 R^n 中的可测集，$f(x)$ 为 E 上的可测函数，若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则（ A ）

（A）在 E 上，$f(z)$ 不一定恒为零　　（B）在 E 上，$f(z)\geq 0$

（C）在 E 上，$f(z)\equiv 0$　　（D）在 E 上，$f(z)\neq 0$

5、设 E 是 R^1 中的可测集，$\varphi(x)$ 是 E 上的简单函数，则（ D ）

（A）$\varphi(x)$ 是 E 上的连续函数　　（B）$\varphi(x)$ 是 E 上的单调函数

（C）$\varphi(x)$ 在 E 上一定不 L 可积　　（D）$\varphi(x)$ 是 E 上的可测函数

6、设 $f(z)$ 是 $[a,b]$ 的单调函数，则（ C ）

（A）$f(z)$ 不是 $[a,b]$ 的有界变差函数　（B）$f(z)$ 不是 $[a,b]$ 的绝对连续函数

（C）$f(z)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续　（D）$f(z)$ 不在 $[a,b]$ 上几乎处处可导

7、若 $E\subset R^1$ 至少有一个内点，则（ D ）

（A）m^*E 可以等于零　　（B）E 是可数集

（C）E 可能是可数集　　（D）$m^*E>0$

8、设 E 是 $[0,1]$ 中的无理点全体，则（C）

（A）E 是可数集　　（B）E 是闭集

（C）E 中的每一点都是聚点　　（D）$m*E<0$

9、设 $f(x)$ 在可测集 E 上 L 可积，则（ D ）

（A）$f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 有且仅有一个在 E 上 L 可积

（B）$f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 不都在 E 上 L 可积

（C）$|f(z)|$ 在 E 上不一定 L 可积

（D）$|f(z)|$ 在 E 上一定 L 可积

10、设 $E\subset[a,b]$ 是可测集，则 E 的特征函数 $X_E(x)$ 是（ B）

（A）在 $[a,b]$ 上不是简单函数　（B）在 $[a,b]$ 上的可测函数

（C）在 E 上不是连续函数　（D）$[a,b]$ 上的连续函数

三、填空题（将正确的答案填在横线上，每道题 1 分，共 10 分）

1、设 X 为全集，A，B 为 X 的两个子集，则 $A\setminus B$ ＿＝＿ $A\cap B^C$ 。

2、设 $E \subset R^n$，如果 E 满足 $E' \subset E$，则 E 是 闭 集。

3、若开区间 (α, β) 是直线上开集 G 的一个构成区间，则 (α, β) 满足 $(\alpha, \beta) \subset G$ 、

$\alpha \notin G, \beta \notin G$ 。

4、设 A 是无限集，则 A 的基数 $\overline{\overline{A}}$ $\geq$ a（其中 a 表示可数基数）。

5、设 E_1，E_2 为可测集，$mE_2 < +\infty$，则 $m(E_1 \setminus E_2)$ $\geq$ $mE_1 - mE_2$。

6、设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数，若对任意实数 a，都有 $E[x \mid f(x) > a]$

是 可测集 ，则称 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数。

7、设 x_0 是 $E \subset R^1$ 的内点，则 $m^* E$ $>$ 0。

8、设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，且 $f_n(x) \Rightarrow f(x)\ (x \in E)$，则由黎斯定理可得，

存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $f_{n_k}(x)$ $\xrightarrow{a.e.}$ $f(x)\ (x \in E)$。

9、设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上的 L 积分不一定存在，且 $|f(x)|$ 在 E 上 不一定 L 可积。

10、若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ 一定 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

四、证明题。

1、$[0,1]$ 上的全体无理数作成的集合其基数为 c

证明：设 A 为 $[0,1]$ 中的有理数集，B 为 $[0,1]$ 上的无理数集，则 $A \bigcup B = [0,1]$,

即 $\overline{\overline{A \bigcup B}} = \overline{\overline{[0,1]}} = \mathrm{c}$

又因为 $\overline{\overline{A}} = a <$ c 所以 $\overline{\overline{B}}$ =c

2、开集减闭集后的差集仍是开集；闭集减开集后的差集仍是闭集。

证明：设 A 为开集，B 为闭集，则 $A - B = A \bigcap C_B$

因为 B 为闭集，所以 C_B 为开集

因此 A-B 为开集；

同上所设有 $B - A = B \bigcap C_A$

又因为 A 为开集

所以为C_A闭集。

因此 B-A 为闭集。

3、设 A,B$\subset R^P$且$m^*B<+\infty$，若 A 是可测集，证明$m^*(A\bigcup B)=mA+m^*B-m^*(A\bigcap B)$

证明：因为 A 是可测集，所以由卡拉泰奥多里条件得

$m^*(A\bigcup B)=m^*((A\bigcup B)\bigcap A)+m^*((A\bigcup B)\bigcap C_A)=mA+m^*(B-A)$　　(I)

$m^*B=m^*(B\bigcap A)+m^*(B\bigcap C_A)<+\infty$

于是$m^*(B-A)=m^*B-m^*(A\bigcap B)$　　(II)

将(II)代入(I)得$m^*(A\bigcup B)=mA+m^*B-m^*(A\bigcap B)$

4、设$E\subset R^q$，存在两侧两列可测集$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，使得$A_n\subset E\subset B_n$且$m(A_n-B_n)\to 0$，(n→∝)

则E可测.

证明：对于任意i，$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\subset B_i$，所以$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-E\subset B_i-E$

又因为 $A_i\subset E$，$B_i-E\subset B_i-A_i$

所以对于任意i，$m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-E)\le m^*(B_i-E)\le m^*(B_i-A_i)=m(B_i-A_i)$

令$i\to\propto$，由$m(B_i-A_i)\to 0$ 得$m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-E)=0$

所以$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-E$是可测的

又由于B_n可测，有$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$也是可测的

所以$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n-E)$是可测的。

《实变函数》期末考试模拟试题（八）

（含解答）

一、证明题：

1、设在 E 上 $f_n\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)$，而 $f_n\left(x\right)=g_n\left(x\right)$ $a.e.$成立，$n=1,2\ldots$，则有 $g_n\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)$

2、　　证明：开集减闭集后的差集仍是开集；闭集减开集后的差集仍然是闭集。

3. 设 M 是 R^3 空间中以有理点(即坐标都是有理数)为中心, 有理数为半径的球的全体, 证明 M 为可数集.

4. 设 $E\subset R^n$, $E\subset B_i$ 且 B_i 为可测集, $i=1,2\cdots$.根据题意, 若有

$m^*\left(B_i-E\right)\to 0,\ \left(i\to\infty\right)$, 证明 E 是可测集.

二、选择题：

1. A 为可数集，B 为有限或可数集，则 $A\bigcup B$ 为（A）

A 可数集　B 不可数集　C 无法确定

2、有 C 个（C 表示连续基数）集的并集，若每个集的基数都是（C）

A C^2　　B C　　C 2C

3、E 为开集的充要条件是（A）

A $E\subset \mathring{E}$　　B $E'\subset E$　C　$\partial E\subset E$

4、A 为开集。B 为闭集，A-B 为（A）

A 开集　B 闭集　C 可开可闭

5、设 S1、S2 都是可测，$S_1\bigcap S_2$（B）

A 不可测　B 可测　C 不确定

6. 下列命题错误的是（ ）

A. 开集、闭集都是可测集　　B. 可测集都是 Borel 集

C. 外测度为零的集是可测集　　D. F_σ 型集、G_δ 型集都是可测集

7. 设 $\left\{E_n\right\}$ 是一列递降的可测集合，$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\cdots$，且 $mE_1<+\infty$，则有（ ）

A. $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)\le\lim_{n\to\infty}mE_n$　　B. $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)\ge\lim_{n\to\infty}mE_n$

C. $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n$　　D. 以上都不对

8. 下列命题错误的是（ ）

A. 若 $\left|f\left(x\right)\right|$ 在 E 上可测，则 $f\left(x\right)$ 在 E 上也可测

B. 可测集 E 上的连续函数是可测函数

C. $f(x)$ 在 E 上 L 可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上可积

D. $[a,b]$ 上任意一有界变差函数 $f(x)$ 都可表示为两个增函数之差

9. 下列表达正确的是（ ）

A. $f^{+}(x)=\max\{-f(x),0\}$　　　B. $f(x)=f^{+}(x)+f^{-}(x)$

C. $|f(x)|=f^{+}(x)-f^{-}(x)$　　　D. $[f(x)]_n=\min\{f(x),n\}$

三、填空题:

2、设 $A_n=\left[\frac{1}{n},2\right]$, $n=1,2\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$ ________ .

3、(a,b)□$(-\infty,+\infty)$,因为存在两个集合之间的一一映射为 ________ .

4、设 E 是 R^2 中函数 $y=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 的图形上的点所组成的集合，则

$E'=$ ______________ , $E^{\circ}=$ ______________ .

5、若集合 $E\subset R^n$ 满足 $E'\subset E$, 则 E 为 ______________ 集.

6、若 (α,β) 是直线上开集 G 的一个构成区间, 则 (α,β) 满足:

________________________ , ________________________ .

7、设 E 使闭区间 $[a,b]$ 中的全体无理数集, 则 $mE=$ ________ .

8、若 $mE\left[f_n(x)\not\to f(x)\right]=0$, 则说 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上 ________ .

9、设 $E\subset R^n$, $x_0\in R^n$,若 ________________________ ,则称 x_0 是 E 的聚点.

10、设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列, $f(x)$ 是 E 上 几乎处处有限的可测函数, 若 $\forall\sigma>0$, 有 ____________________

11、 ________________________ , 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

12、设 $f_n(x)\Rightarrow f(x), x\in E$, 则 $\exists$ $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_j}(x)\}$, 使得 ________________ .

四、判断题

1. 若 A,B 可测, $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则 $mA<mB$.（）

2. 设 E 为点集, $P \notin E$, 则 P 是 E 的外点. （）

3. 点集 $E=\left\{1,2,\cdots\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 的闭集. （）

4. 任意多个闭集的并集是闭集. （）

5. 若 $E\subset R^n$,满足 $m^*E=+\infty$, 则 E 为无限集合.（）

6. 任意无限集合都至少包含一个可数子集。（）

7. 设 $A_1, A_1,$ ...... A_n ......是一列相交的集合，它们的基数都是 c ，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基数是 nc 。（）

8. E 为闭集的充要条件是 $\partial E\subset E$ 。（）

9. 集合的交或并满足交换率、结合率、分配率。（）

10. 任意无限集合都至少包含一个可数子集。（）

答案

一．证明答案：

1 、证明：设 $E_n=E\left[f_n\neq g_n\right]$，则 $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE_n=0$ 。

$\forall\sigma>0$， $E\left[\left|f-g_n\right|\ge\sigma\right]\subset\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup E\left[\left|f-f_n\right|\ge\sigma\right]$ 所以

$$mE\left[\left|f-g_n\right|\ge\sigma\right]\le m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)+mE\left[\left|f-f_n\right|\ge\sigma\right]=mE\left[\left|f-f_n\right|\ge\sigma\right]$$

因为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，所以 $0\le\lim\limits_{n}mE\left[\left|f-g_n\right|\ge\sigma\right]\le\lim\limits_{n}mE\left[\left|f-f_n\right|\ge\sigma\right]=0$

即 $g_n(x)\Rightarrow f(x)$

2、证：设 A 为 开集，B 为闭集

则 A-B= $A\bigcap\ell B$

$\because$ B 为闭集

B 的补集为开集

故 A－B 为开集

$\because$ B－A＝B $\bigcap\ell A$

由 A 为开集　则 ℓA 为闭集

$\therefore$ B-A 为闭集

3、 M 中任何一个元素可以由球心 (x,y,z) , 半径为 r 唯一确定, x , y , z 跑遍所有的正有理数, r 跑遍所有的有理数. 因为有理数集于正有理数集为可数集都是可数集, 故 M 为可数集.

4、　令 $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$，则 $E\subset B\subset B_i$ 且 B 为可测集，于是对于 $\forall i$，都有

$B-E\subset B_i-E$，故 $0\le m^*\left(B-E\right)\le m^*\left(B_i-E\right)$，

令 $i\to\infty$，得到 $m^*\left(B-E\right)=0$，故 $B-E$ 可测. 从而

$E=B-\left(B-E\right)$ 可测.

二、选择题答案：

1、A　2、C　3、A　4、A　5 、B　6. B　7. C　8. A　9. D

10、

三、填空题答案：

1、$\left[0,2\right]$.

2、$\varphi(x)=\tan\left[\frac{\pi}{b-a}\left(x-a\right)-\frac{\pi}{2}\right],x\in\left(a,b\right).$

3、$\left\{(x,y)\middle|y=\cos\frac{1}{x},x\ne 0\right\}\cup\left\{(0,y)\middle\|y\right|\le 1\}$；$\varnothing$.

4、闭集.

5、$\left(\alpha,\beta\right)\subset G.\ \alpha\notin G,\ \beta\notin G.$

6、$b-a$.

7、几乎处处收敛于 $f(x)$ 或 a.e.收敛于 $f(x)$.

8、对 $\forall\delta>0,\ U^0(x_0,\delta)$ 有 $\left(E-\{x_0\}\right)=\varnothing$.

9、$\lim\limits_{n\to\infty}mE\left[\left|f_n(x)-f(x)\right|\ge\sigma\right]=0$

10、$f_n(x)\to f(x)$　a.e.于 E

四、判断题答案：

1. 错　例如，$A=(0,1)$，$B=\left[0,1\right]$，则 $A\subset B$ 且 $A\ne B$，但 $mA=mB=1$.

2. 错　例如，$0\notin(0,1)$，但 0 不是 $(0,1)$ 的外点.

3. 错　由于 $E'=\{0\}\not\subset E$.

4. 错　例如，在 R^1 中，$F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$，$n=3,4\cdots$ 是一系列的闭集，但是 $\bigcup_{n=3}^{\infty}F_n=(0,1)$ 不是闭集.

5. 对　因为若 E 为有界集合, 则存在有限区间 I , $|I|<+\infty$, 使得 $E\subset I$, 则

$m^*E\le m^*I=|I|<+\infty,$ 于 $m^*E=+\infty$.

6.对　见教材 P_{20}

7.错　见教材 P_{26}

8.对　见教材 P_{39}

9.对　见教材 P_{9}

10.对　见教材 P_{13}

《实变函数》期末考试模拟试题（九）

（含解答）

一，填空题

13、设 $A_n=\left[\frac{1}{n},2\right]$，$n=1,2\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$________.

14、$(a,b)\sim(-\infty,+\infty)$，因为存在两个集合之间的一一映射为 ______.

15、设 E 是 R^2 中函数 $y=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$ 的图形上的点所组成的集合，则 $E'=$____________，$E^{\circ}=$____________.

16、若集合 $E\subset R^n$ 满足 $E'\subset E$，则 E 为____________集.

17、若 (α,β) 是直线上开集 G 的一个构成区间，则 (α,β) 满足：

______________________，______________________.

18、设 E 使闭区间 $[a,b]$ 中的全体无理数集，则 $mE=$________.

19、若 $mE\left[f_n(x)\not\to f(x)\right]=0$，则说 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上 ________.

20、设 $E\subset R^n$，$x_0\in R^n$，若____________，则称 x_0 是 E 的聚点.

21、设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，若 $\forall\sigma>0$，有 __________________

__________________，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

22、设 $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in E$，则 $\exists$ $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_j}(x)\}$，使得______________.

二，判断题. 正确的证明，错误的举反例.

11. 若 A, B 可测，$A \subset B$ 且 $A \neq B$,则 $mA < mB$.

12. 设 E 为点集，$P \notin E$，则 P 是 E 的外点.

13. 点集 $E = \left\{1, 2, \cdots \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 的闭集.

14. 任意多个闭集的并集是闭集.

15. 若 $E \subset R^n$,满足 $m^* E = +\infty$，则 E 为无限集合.

三，计算证明题

1. 证明: $A-(B-C)=(A-B)\bigcup(A\bigcap C)$

2. 设 M 是 R^3 空间中以有理点(即坐标都是有理数)为中心，有理数为半径的球的全体，证明 M 为可数集.

3. 设 $E \subset R^n, E \subset B_i$ 且 B_i 为可测集，$i=1,2\cdots$.根据题意，若有 $m^*(B_i - E) \to 0, (i \to \infty)$，证明 E 是可测集.

4. 设 P 是 Cantor 集，$f(x)=\begin{cases} \ln(1+x^3), & x \in P \\ x^2, & x \in [0,1]-P \end{cases}$.

求 $(\mathrm{L})\int_0^1 f(x)dx$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 Cantor 集 P_0 中点 x 上取值为 x^3，而在 P_0 的余集中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间上取值为 $\frac{1}{6^n}$，$(n=1,2\cdots)$，求

$\int_0^1 f(x)dx$.

6. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nxdx$.

试题解答

一　填空题

1. $[0,2]$.

2. $\varphi(x)=\tan\left[\frac{\pi}{b-a}(x-a)-\frac{\pi}{2}\right], x\in(a,b)$.

3. $\left\{(x,y)\middle| y=\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\right\}\cup\left\{(0,y)\middle\|y\right|\leq 1\}$; $\varnothing$.

4. 闭集.

5. $(\alpha,\beta)\subset G$. $\alpha\notin G$, $\beta\notin G$.

6. $b-a$.

7. 几乎处处收敛于 $f(x)$ 或 a.e.收敛于 $f(x)$.

8. 对 $\forall\delta>0$, $U^0(x_0,\delta)$ 有 $\left(E-\{x_0\}\right)=\varnothing$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} mE\left[\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\sigma\right]=0$

10. $f_n(x)\to f(x)$ a.e.于 E.

二　判断题

6. F．例如，$A=(0,1)$，$B=[0,1]$，则 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,但 $mA=mB=1$.

7. F．例如，$0\notin(0,1)$，但 0 不是 $(0,1)$ 的外点.

8. F．由于 $E'=\{0\}\not\subset E$.

9. F．例如，在 R^1 中，$F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$，$n=3,4\cdots$ 是一系列的闭集，但是 $\bigcup_{n=3}^{\infty}F_n=(0,1)$ 不是闭集.

10. T．因为若 E 为有界集合，则存在有限区间 I，$|I|<+\infty$，使得 $E\subset I$，则 $m^*E\le m^*I=|I|<+\infty$，于 $m^*E=+\infty$.

三，计算证明题.

1. 证明如下：

$$\begin{aligned}
A-(B-C)&=A-(B\cap)\complement_S C\\
&=A\cap\complement_S(B\cap\complement_S C)\\
&=A\cap\complement_S(B\cup C)\\
&=(A\cup\complement_S B)\cup(A\cup C)\\
&=(A-B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}$$

2. M 中任何一个元素可以由球心 (x,y,z)，半径为 r 唯一确定，x , y，z 跑遍所有的正有理数，r 跑遍所有的有理数. 因为有理数集于正有理数集为可数集都是可数集，故 M 为可数集.

3. 令 $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$，则 $E\subset B\subset B_i$ 且 B 为可测集，于是对于 $\forall i$，都有 $B-E\subset B_i-E$，故 $0\le m^*\left(B-E\right)\le m^*\left(B_i-E\right)$，令 $i\to\infty$，得到 $m^*\left(B-E\right)=0$，故 $B-E$ 可测. 从而 $E=B-\left(B-E\right)$ 可测.

4. 已知 $mP=0$，令 $G=\left[0,1\right]-P$，则

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{L})\int_0^1 f(x)dx &= (\mathrm{L})\int_P \ln\left(1+x^3\right)dx+(\mathrm{L})\int_G x^2dx \\
&= 0+(\mathrm{L})\int_G f(x)dx \\
&= (\mathrm{L})\int_P x^2dx+(\mathrm{L})\int_G x^2dx \\
&= (\mathrm{R})\int_0^1 f(x)dx \\
&= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

.

5. 将积分区间 $\left[0,1\right]$ 分为两两不相交的集合：P_0，G_1，$G_2\cdots$，其中 P_0 为Cantor 集，G_n 是 P_0 的余集中一切长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间(共有 2^{n-1} 个)之并. 由L积分的可数可加性，并且注意到题中的 $mP_0=0$，可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_{P_0} f(x)dx + \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n} f(x)dx \\
&= \int_{P_0} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_0} f(x)dx \\
&= \int_{P_0} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_0} \frac{1}{6^n}dx \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} mG_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9^n} = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

6. 因为 $\frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nx$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(\mathrm{R})\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nxdx$ 存在且与 $(\mathrm{L})\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nxdx$ 的值相等. 易知

$$
\left|\frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nx\right| \le \frac{nx}{1+n^2x^3} \le \frac{2nx^{\frac{3}{2}}}{1+n^2x^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}.
$$

由于 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 上非负可测， 且广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 收敛，则 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 上 (L) 可积， 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nx = 0$，$x \in (0,1)$，于是根据勒贝格控制收敛定理，得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nxdx &= \lim_{n\to\infty}(\mathrm{L})\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nxdx \\
&= \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^3}\sin^3 nx\right)dx \\
&= \int_0^1 0dx = 0
\end{aligned}.
$$

《实变函数》期末考试模拟试题（十）

（含解答）

一、单项选择题

1、下列各式正确的是（　C D　）

（A）$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$；（B）$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

（C）$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$；　（D）$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$；

2、设 P 为 Cantor 集，则下列各式不成立的是（　D　）

（A）$\overline{\overline{P}} =$ c　　（B）$mP = 0$　　（C）$P' = P$　　（D）$\overset{\circ}{P} = P$

3、下列说法不正确的是（　B　）

(A) 凡外侧度为零的集合都可测（B）可测集的任何子集都可测
(C) 开集和闭集都是波雷耳集　（D）波雷耳集都可测

4、设$\{f_n(x)\}$是E上的$a.e.$有限的可测函数列,则下面不成立的是(　A　)

（A）若$f_n(x) \Rightarrow f(x)$，则$f_n(x) \to f(x)$　(B) $\sup_n \{f_n(x)\}$是可测函数

（C）$\inf_n \{f_n(x)\}$是可测函数;（D）若$f_n(x) \Rightarrow f(x)$,则$f(x)$可测

5. 下列说法不正确的是(C)

(A) P_0的任一领域内都有E中无穷多个点，则P_0是E的聚点

(B) P_0的任一领域内至少有一个E中异于P_0的点，则P_0是E的聚点

(C) 存在E中点列$\{P_n\}$，使$P_n \to P_0$，则P_0是E的聚点

(D) 内点必是聚点

6. 设 $f(x)$ 在 E 上 L 可积, 则下面不成立的是(　C)

(A) $f(x)$ 在 E 上可测　　　(B) $f(x)$ 在 E 上 a.e. 有限

(C) $f(x)$ 在 E 上有界　　　(D) $|f(x)|$ 在 E 上 L 可积

7. 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集，$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$，则有（B ）。

（A）$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > \lim_{n\to\infty} mE_n$　（B）$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n$

（C）$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n$；（D）以上都不对

9、设 $A_n = [\frac{1}{n}, 2+(-1)^n], n = 1,2,\cdots$，则（　B　　）

（A）$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = [0,1]$　　（B）$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = (0,1]$

（C）$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = (0,3]$　　（D）$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = (0,3)$

10、设 E 是 $[0,1]$ 上有理点全体，则下列各式不成立的是（　D　）

（A）$E' = [0,1]$　　(B) $\overset{o}{E} = \varnothing$　　（C）$\overline{E}$=[0，1]　　(D) $mE = 1$

11、下列说法不正确的是（ C　）

(A) 若 $A \subset B$，则 $m^*A \le m^*B$　（B） 有限个或可数个零测度集之和集仍为零测度集　(C) 可测集的任何子集都可测　（D）凡开集、闭集皆可测

12、设 $\{E_n\}$ 是一列可测集，$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$，且 $mE_1 < +\infty$，则有（ A　）

（A）$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n$　（B）$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \lim_{n\to\infty} mE_n$

（C）$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \lim_{n\to\infty} mE_n$；（D）以上都不对

13、设 f(x)是 $[a,b]$ 上绝对连续函数，则下面不成立的是（　B　）

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续函数　(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导

（C）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积　　　(D) $f(x)$ 是有界变差函数

14．设 M,N 是两集合，则 $M-(M-N)$ =（　C　）

(A) M (B) N (C) $M \cap N$ (D) $\varnothing$

16. 下列断言(B)是正确的。

（A）任意个开集的交是开集；(B) 任意个闭集的交是闭集；

(C) 任意个闭集的并是闭集；(D) 以上都不对；

17. 下列断言中(C)是错误的。

（A）零测集是可测集； （B）可数个零测集的并是零测集；

（C）任意个零测集的并是零测集； （D）零测集的任意子集是可测集；

18. 若 $f(x)$是可测函数，则下列断言（ A ）是正确的

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ $L-$可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 $[a,b]$ $L-$可积；

(B) $f(x)$在$[a,b]$$R-$可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在$[a,b]$$R-$可积

(C) $f(x)$在$[a,b]$$L-$可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在$[a,b]$$R-$可积；

(D) $f(x)$在$(a,+\infty)$$R-$广义可积 $\Rightarrow f(x)$在$(\mathrm{a},+\infty)$$L-$可积

19、设E是闭区间$[0,1]$中的无理点集，则（A ）

$A.\ mE=1$ $B.\ mE=0$

$C.\ E$ 是不可测集 $D.\ E$ 是闭集

二、填空题

1、$(C_sA\cup C_sB)\cap(A-(A-B))=\varnothing$

2、设E是$[0,1]$上有理点全体，则$E^{'}=[0,1]$, $\overset{o}{E}=\varnothing$, $\overline{E}=[0,1]$.

3、设E是R^n中点集，如果对任一点集T都有$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$，则称$E$是$L$可测的.

4、$f(x)$可测的(充要)条件是它可以表成一列简单函数的极限函数.

5、设$A_n=[\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}],n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$（0，2）

6、设$E\subset R$, 若$E'\subset E$, 则E是闭集；若$E\subset\overset{0}{E}$，则E是开集；若$E=E^{'}$，则E是完备集.

7、设$\{S_i\}$是一列可测集，则$m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}mS_i$

8、设集合$N\subset M$，则$M-(M-N)=N$

9、设P为Cantor 集，则 $\overline{\overline{P}}=c$，$mP=0$，$\overset{o}{P}=\varnothing$。

10、果洛夫定理：设$m(E)<\infty,\{f_n\}$是E上一列$a.e.$收敛于一个$a.e.$有限的函数f 的可测函数，则对任意$\delta>0,$存在子集$E_\delta \subset E$，使$\{f_n\}$在E_δ上一致收敛且$m(E\setminus E_\delta)<\delta$。

11、$f(x)$在E上可测，则$f(x)$在E上可积的充要条件是$|f(x)|$在E上可积.

12、设P为Cantor集，则$\overline{\overline{P}}=\underline{c}$，$mP=0$，$\overset{o}{P}=\varnothing$。

13、设$\{S_i\}$是一列可测集，则$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\le \sum_{i=1}^{\infty} mS_i$

14、鲁津定理：设$f(x)$是E上$a.e.$有限的可测函数，则对任意$\delta>0$，存在闭子集$E_\delta \subset E$，使得$f(x)$在E_δ上是连续函数，且$m(E\setminus E_\delta)<\delta$。

15、设$F(x)$为$[a,b]$上的有限函数，如果对任意$\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使对$[a,b]$中互不相交的任意有限个开区间$(a_i,b_i),i=1,2,\cdots,n,$只要$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，就有$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$则称$F(x)$为$[a,b]$上的绝对连续函数。

16、$(a,b)\sim(-\infty,+\infty)$，因为存在两个集合之间的一一映射为$\underline{\varphi(x)=\tan\left[\frac{\pi}{b-a}(x-a)-\frac{\pi}{2}\right],x\in(a,b).}$.

17、设E是R^2中函数$y=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$的图形上的点所组成的集合，则$\underline{E'=\left\{(x,y)\middle| y=\cos\frac{1}{x},x\ne 0\right\}\cup\left\{(0,y)\middle||y|\le 1\right\}}$，$E^\circ=\underline{\varnothing}$.

18、设E是闭区间$[a,b]$中的全体无理数集，则$mE=\underline{b-a}$.

19、设 $E\subset R^n$，$x_0\in R^n$，若 $\underline{x_0\text{的任一邻域内都含有无穷多个属于E的点}}$，则称 x_0 是 E 的聚点.

20 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，若 $\forall\sigma>0$，有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} mE\left[\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\sigma\right]=0}$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

三、判断

1、设 $E\subset R^1$，若 E 是稠密集，则 E^c 是无处稠密集。F

2、若 $mE=0$，则 E 一定是可数集. F

3、若 $|f(x)|$ 是可测函数，则 $f(x)$ 必是可测函数。F

4．设 $f(x)$ 在可测集 E 上可积分，若 $\forall x\in E, f(x)>0$，则 $\int_E f(x)>0$ F

5、A 为可数集，B 为至多可数集，则 $A\cup B$ 是可数集. T

6、若 $mE=0$，则 $m\overline{E}=0$ F

7、若 $|f(x)|$ 是可测函数，则 $f(x)$ 必是可测函数 F

8．设 $f(x)$ 在可测集 E 上可积分，若 $\forall x\in E, f(x)>0$，则 $\int_E f(x)>0$ F

9、任意多个开集之交集仍为开集 F

10、若 $mE=0$，则 E 一定是可数集. F

11、$a.e.$ 收敛的函数列必依测度收敛。F

12、由于 $[0,1]-(0,1)=\{0,1\}$，故不存在使 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 之间 $1-1$ 对应的映射。F

13、可数个零测度集之和集仍为零测度集。T

14、若 A,B 可测，$A\subset B$ 且 $A\neq B$，则 $mA<mB$ .F

15、设 E 为点集，$P\notin E$，则 P 是 E 的外点. F

16、点集 $E=\left\{1,2,\cdots\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 为闭集.F

17、任意多个闭集的并集是闭集.F

四、解答题

1、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\text{为无理数} \\ a, x\text{为有理数} \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 $R-$ 可积，是否 $L-$ 可积，若可积，求出积分值。

解：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 $R-$ 可积的，因为 $f(x)$ 仅在 $x=a$ 处连续，即不连续点为正测度集，因为 $f(x)$ 是有界可测函数，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 $L-$ 可积的

因为 $f(x)$ 与 x^2 $a.e.$ 相等，进一步，$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

2、求 $\lim\limits_n \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$

解：设 $f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x$，则易知当 $n \to \infty$ 时，$f_n(x) \to 0$

又因 $\left(\frac{\ln t}{t}\right)' = \frac{1-\ln t}{t^2} < 0$，（$t \geq 3$），所以当 $n \geq 3, x \geq 0$ 时，

$$\frac{\ln(x+n)}{n} = \frac{n+x}{n}\frac{\ln(x+n)}{x+n} \leq \frac{n+x}{n}\frac{\ln 3}{3} \leq \frac{\ln 3}{3}(1+x)$$

从而使得 $|f_n(x)| \leq \frac{\ln 3}{3}(1+x)e^{-x}$ 但是不等式右边的函数，在 $[0,+\infty)$ 上是 L 可积的，故有 $\lim\limits_n \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} \lim\limits_n f_n(x)dx = 0$，$\lim\limits_n \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} \lim\limits_n f_n(x)dx = 0$

3、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx dx$

解：记 $f_n(x) = \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx$

则 $f_n(x)$ 在[0, 1]上连续, 因而在[0, 1]上（R）可积和（L）可积.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, x \in [0,1]$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^3 nx\right| \leq \left|\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad x \in [0,1], n = 1,2,\cdots$$

且 $\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ 在[0, 1]上非负可积, 故由 Lebesgue 控制收敛定理得

考

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^3 nxdx=\int_0^1 0dx=0$$

4、设 $f(x)=\begin{cases}x,x\text{为无理数}\\1,x\text{为有理数}\end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 $R-$ 可积，是否 $L-$ 可积，若可积，求出积分值。

解：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 $R-$ 可积的，因为 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处连续，

即不连续点为正测度集

因为 $f(x)$ 是有界可测函数，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 $L-$ 可积的

因为 $f(x)$ 与 x $a.e.$ 相等，进一步，$\int_{[0,1]}f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

5、求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin^3 nxdx$.

解：设 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin^3 nxdx$ ，则易知当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to 0$

又 $|f_n(x)|\le\frac{nx}{1+n^2x^2}$ ，但是不等式右边的函数，在 $[0,+\infty)$ 上是 L 可积的

故有 $\lim_n\int_0^\infty f_n(x)dx=\int_0^\infty\lim_n f_n(x)dx=0$

6、设 $A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n}),A_{2n}(0,n),n=1,2,\cdots,$ 求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集

证明：$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$

设 $x\in(0,\infty)$ ，则存在 N，使 $x<N$ ，因此 $n>N$ 时，$0<x<n$ ，即 $x\in A_{2n}$ ，所以 x 属于下标比 N 大的一切偶指标集，从而 x 属于无限多 A_n ，得 $x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ ，

又显然 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset(0,\infty)$,所以 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$

$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\phi$

若有 $x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ ，则存在 N，使任意 $n>N$ ，有 $x\in A_n$ ，因此若 $2n-1>N$ 时，

$x\in A_{2n-1}$,即 $0<x<\frac{1}{n}$,令 $n\to\infty$ 得 $0<x\le 0$ ，此不可能，所以 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\phi$

五、证明题

1、证明 $[0,1]$ 上的全体无理数作成的集其势为 c .

证明：设 $E=[0,1],\ A=E\cap Q,B=E\setminus(E\cap Q)$.

$\because B$是无限集，$\therefore \exists$可数子集$M \subset B$ 。$\because A$是可数集，$\therefore A \cup M \sim M$.

$\because B = M \cup (B \setminus M), E = A \cup B = A \cup M \cup (B \setminus M)$,
且$(A \cup M) \cap (B \setminus M) = \phi, M \cap (B \setminus M) = \phi$,
$\therefore E \sim B, \therefore \overline{\overline{B}} = c.$

2. 设$\varepsilon > 0, \exists$开集$G \supset E$, 使$m^*(G-E) < \varepsilon$，则 E 是可测集。

证明：对任何正整数n，由条件存在开集$G_n \supset E$, 使$m^*(G_n - E) < \dfrac{1}{n}$

令$G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$，则$G$是可测集

又因$m^*(G-E) \le m^*(G_n - E) < \dfrac{1}{n}$对一切正整数$n$成立，因而$m^*(G-E) = 0$，
即$M = G - E$是一零测度集，所以也可测.

由$E = G - (G - E)$知，E可测。

3. 试用 Fatou 引理证明 Levi 定理.

证明：设$\{f_n\}$为可测集$E \subset R^q$上的一列非负可测函数，且在E上有

$f_n(x) \le f_{n+1}(x), n = 1,2,\cdots$，令$f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$

由$\{f_n\}$为单调可测函数列知，$f(x)$可测，且$f_n(x) \le f(x)$

于是 $\int_E f_n(x)dx \le \int_E f(x)dx$

从而 $\lim\limits_n \int_E f_n(x)dx \le \int_E f(x)dx$ …（*）

另一方面，因$\{f_n\}$为可测集$E \subset R^q$上的一列非负可测函数，由 Fatou 引理知

$\int_E f(x)dx = \int_E \underline{\lim\limits_n} f_n(x)dx \le \underline{\lim\limits_n} \int_E f_n(x)dx$ …（**）

由（*）、（**）两式即证$\lim\limits_n \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$

4、试证$(0,1) \sim [0,1]$

证明：记$(0,1)$中有理数全体$Q = \{r_1, r_2, \cdots\}$，令

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(r_1) = 0 \\ \varphi(r_2) = 1 \\ \varphi(r_{n+2}) = r_n, n = 1, 2\cdots \\ \varphi(x) = x, x\text{为}(0,1)\text{中无理数,} \end{cases}$$

显然φ是（0,1）到[0,1]上的一一映射

所以$(0,1)\sim[0,1]$

5、设 $f(x)$ 是可测集 E 的非负可积函数，$g(x)$ 是 E 的可测函数，且 $|g(x)|\le f(x)$，则 $g(x)$ 也是 E 上的可积函数。

证明：$\because |g(x)|\le f(x)$，$\therefore g^{+}(x)\le f(x), g^{-}(x)\le f(x)$

$$\therefore \int_{E_n}\left[g^{+}(x)\right]_n dx\le\int_{E_n}\left[f(x)\right]_n dx\le\int_{E} f(x)dx$$

$\because f(x)$ 是可测集 E 的非负可积函数

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}\left[g^{+}(x)\right]_n dx\le\int_{E} f(x)dx<+\infty$ $\therefore g^{+}(x)$ 是 E 上的可积函数.

同理，$g^{-}(x)$ 也是 E 上的可积函数. $\therefore g(x)$ 是 E 上的可积函数。

7. 设 $f(x)$ 在 $E=\left[a,b\right]$ 上可积，则对任何 $\varepsilon>0$，必存在 E 上的连续函数 $\varphi(x)$，使 $\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon$.

证明：设 $e_n=E[|f|>n]$, 由于 $f(x)$ 在 E 上 $a.e.$ 有限，故 $me_n\to 0,(n\to\infty)$

由积分的绝对连续性，对任何 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，使 $N\cdot me_N\le\int_{e_N}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}$

令 $B_N=E\setminus e_N$，在 B_N 上利用鲁津定理，存在闭集 $F_N\subset B_N$ 和在 R^1 上的连续函数 $\varphi(x)$ 使（1）$m(B_N\setminus F_N)<\frac{\varepsilon}{4N}$;（2）$x\in F_N$ 时，$f(x)=\varphi(x)$，且 $\sup\limits_{x\in R^1}|\varphi(x)|=\sup\limits_{x\in F_N}|f(x)|\le N$

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx\le\int_{e_N}|f(x)-\varphi(x)|dx+\int_{B_N}|f(x)-\varphi(x)|dx$$

所以 $$\le\int_{e_N}|f(x)|dx+\int_{e_N}|\varphi(x)|dx+\int_{B_N\setminus F_N}|f(x)-\varphi(x)|dx$$

$$\le\frac{\varepsilon}{4}+N\cdot me_N+2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N}\le\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

8、设 $E\subset R^n$, $E\subset B_i$ 且 B_i 为可测集, $i=1,2\cdots$.根据题意, 若有 $m^*\left(B_i-E\right)\to 0,\ \left(i\to\infty\right)$, 证明 E 是可测集.

证明：令 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，则 $E\subset B\subset B_i$ 且 B 为可测集，于是对于 $\forall i$，都有 $B-E\subset B_i-E$，故

$$0\le m^*\left(B-E\right)\le m^*\left(B_i-E\right),$$

令 $i\to\infty$，得到 $m^*\left(B-E\right)=0$，故 $B-E$ 可测．从而 $E=B-\left(B-E\right)$ 可测．

9. 证明: $A-\left(B-C\right)=\left(A-B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)$

证明：

$$\begin{aligned}A-\left(B-C\right)&=A-\left(B\bigcap\complement_S C\right)\\&=A\bigcap\complement_S\left(B\bigcap\complement_S C\right)\\&=A\bigcap\left(\complement_S B\bigcup C\right)\\&=\left(A\cap\complement_S B\right)\bigcup\left(A\cap C\right)\\&=\left(A-B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)\end{aligned}$$

1、设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值连续函数，则对于任意常数 $a,E=\{x\mid f(x)\ge a\}$ 是闭集。P51

2、设 $mE<\infty,f(x)$ 在 E 上可积，$e_n=E(|f|\ge n)$，则 $\lim\limits_n n\cdot me_n=0$. P132

3、设 $f(x)$ 是 E 上 $a.e.$ 有限的函数，若对任意 $\delta>0$，存在闭子集 $F_\delta\subset E$，使 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，且 $m(E-F_\delta)<\delta$，证明：$f(x)$ 是 E 上的可测函数。(鲁津定理的逆定理）P94

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上可积函数列，$\lim\limits_n f_n(x)=f(x)a.e.$ 于 E，且 $\int_E|f_n(x)|\,dx<k$，k 为常数，则 $f(x)$ 在 E 上可积. P133

5. 设函数列 $f_n(x)\quad(n=1,2,\cdots)$ 在有界集 E 上"基本上"一致收敛于 $f(x)$，证明：$f_n(x)a.e.$ 收敛于 $f(x)$. P94

6、设 f(x) 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值连续函数，则对任意常数 c，$E=\{x\mid f(x)>c\}$ 是一开集. P51

7、设 $f(x)$ 在 E 上积分确定，且 $f(x)=g(x)a.e$ 于 E，则 $g(x)$ 在 E 上

也积分确定，且 $\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$ P108

8、设在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，而 $f_n(x)=g_n(x)$ $a.e.$ 成立，$n=1,2,\cdots$，则有 $g_n(x)\Rightarrow f(x)$ P95

《实变函数》期末考试题（一）

一、 判断正误（每小题 2 分）

1、若一个点不是 E 的聚点，则必然也不是 E 的内点. （ ）

2、若 $f(x)=g(x)$，$a.e.$ 于 E，$f(x)$ 在可测集 E 上可测，则 $g(x)$ 也在 E 上可测.（ ）

3、若 $f(x)$ 在可测集 E 上可测，则 $f(x)$ 在 E 的任意可测子集上也可测.（ ）

4、任意个开集的交也是开集. （ ）

5、可列集在无限集中具有最小的势. （ ）

6、若 E 可测，A 可测，且 $m(A-E)=0$ ，则 $mE=m(E\cup A)$. （ ）

7、设 $f(x)$ 在可测集 E 上可积分，若 $\forall x\in E, f(x)>0$，则 $\int_E f(x)>0$.（ ）

8、由于 $[0,1]-(0,1)=\{0,1\}$，故不存在使 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 之间 $1-1$ 对应的映射.（ ）

9、$a.e.$ 收敛的函数列必依测度收敛. （ ）

10、连续函数一定是有界变差函数. （ ）

二、填空题（每空 2 分）

1、设 $A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n})$，$A_n=(0,n)$，$n=1,2,\cdots$，则集列 $\{A_n\}$ 的上限集为________________.

2、设 P 为 Cantor 集，则 $mP=$_____.

3、设 Q 为有理数集，则 $\overline{Q}=$________________.

4、 $f(x)$ 可测的________条件是它可以表成一列简单函数的极限函数.

（填“充分”,“必要”,“充要”）

5、设 $mE<\infty$，则有 L^p ___ $L^1, (P\ge 1)$.

三、单项选择题（每小题 2 分）

1、下列断言中(　　　)是错误的.

（A）零测集是可测集；　　　（B）可数个零测集的并是零测集；

（C）任意个零测集的并是零测集；（D）零测集的任意子集是可测集.

2、设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数，则下面不成立的是（　　　）.

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续函数；　(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导；

（C） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积；　(D) $f(x)$ 是有界变差函数.

3、设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的 $a.e.$ 有限的可测函数列, 则下面不成立的是(　　　).

（A）若 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，则 $f_n(x)\to f(x)$；　(B) $\sup\limits_n\{f_n(x)\}$ 是可测函数；

（C） $\inf\limits_n\{f_n(x)\}$ 是可测函数；　（D）若 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 则 $f(x)$ 可测.

4、若 $f(x)$是可测函数，则下列断言（　　　）是正确的.

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ $L-$可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 $[a,b]L-$可积；

(B) $f(x)$在 $[a,b]R-$可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 $[a,b]R-$可积；

(C) $f(x)$在 $[a,b]L-$可积 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 $[a,b]R-$可积；

(D) $f(x)$在 $(a,+\infty)R-$广义可积 $\Rightarrow f(x)$在 $(\mathrm{a},+\infty)L-$可积.

5、设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，则下面不成立的是（　　　）.

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；　(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在导数；

（C） $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积；　(D) $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$.

四、计算题（每小题 10 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in P_0 \\ \sqrt[3]{x},\ x\in[0,1]-P_0 \end{cases}$，其中 P_0 为 Cantor 集，计算 $\int_{[0,1]} f(x)dm$.

2、求极限 $\lim\limits_{n}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx$.

五、证明题（每小题 10 分）

1、设 $f(x)$ 是 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的实值连续函数，则对于任意常数 $a, E=\{x\mid f(x)\geq a\}$ 是闭集.

2、设在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，而 $f_n(x)=g_n(x)$ $a.e.$成立，$n=1,2,\cdots$，则有 $g_n(x)\Rightarrow f(x)$.

3、设 $f(x)$ 是 E 上 $a.e.$有限的函数，若对任意 $\delta>0$，存在闭子集 $F_\delta\subset E$，使 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，且 $m(E-F_\delta)<\delta$，证明：$f(x)$ 是 E 上的可测函数.（鲁津定理的逆定理）

4、在有限闭区间$[a,b]$上的单调有限函数$f(x)$是有界变差函数.

《实变函数》期末考试题（一）答案

一、判断正误（每小题 2 分，共 20 分）

1、√　　2、√　　3、√　　4、×　　5、√

6、√　　7、×　　8、×　　9、×　　10、×

二、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1、$\overline{A}=(0,+\infty)$　　2、0　　3、R　　4、充要　　5、$\subset$

三、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1、C　　2、B　　3、A　　4、A　　5、D

四、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

1、设$f(x)=\begin{cases} x^2, x\in P_0 \\ \sqrt[3]{x},\ x\in[0,1]-P_0 \end{cases}$，其中$P_0$为 Cantor 集，计算$\int_{[0,1]} f(x)dm$。

解. 设$g(x)=\sqrt[3]{x}, x\in[0,1]$，因$mP_0=0$，……………………3 分

则在$[0,1]$上$f(x)\sim g(x)$，……………………5 分

$\therefore \int_{[0,1]} f(x)dm=\int_{[0,1]} g(x)dm=(R)\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}$　……………………10 分

2、求极限$\lim\limits_n \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx$

解：设$f_n(x)=\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x$，则易知当$n\to\infty$时，$f_n(x)\to 0$……………2 分

又因$\left(\frac{\ln t}{t}\right)' = \frac{1-\ln t}{t^2} < 0$，（$t \ge 3$），所以当$n \ge 3, x \ge 0$时，………………4 分

$\frac{\ln(x+n)}{n} = \frac{n+x}{n}\frac{\ln(x+n)}{x+n} \le \frac{n+x}{n}\frac{\ln 3}{3} \le \frac{\ln 3}{3}(1+x)$ ………………6 分

从而使得$|f_n(x)| \le \frac{\ln 3}{3}(1+x)e^{-x}$ ……………………………………8 分

但是不等式右边的函数，在$[0,+\infty)$上是L可积的，故有

$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_n f_n(x)dx = 0$ ……………………………………10 分

五、证明题（每小题 10 分，共 40 分）

1、设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的实值连续函数，则对于任意常数$a, E = \{x \mid f(x) \ge a\}$是闭集。

证明：$\forall x \in E'$，则存在E中的互异点列$\{x_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ………. 4 分

$\because x_n \in E, \therefore f(x_n) \ge a$ …………………………………………………. 6 分

$\because f(x)$在x点连续，$\therefore f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \ge a$

$\therefore x \in E$ ……………………………………………………………8 分

$\therefore E$是闭集. ………………………………………………………. 10 分

2、设在E上$f_n(x) \Rightarrow f(x)$，而$f_n(x) = g_n(x)$ $a.e.$ 成立，$n = 1,2,\cdots$，则有$g_n(x) \Rightarrow f(x)$

证明：记$E_n = E[f_n \ne g_n]$，由题意知$mE_n = 0$

由$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} mE_n = 0$知$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ …………2 分

对任意$\delta > 0$，由于$E[|g_n - f| \ge \sigma] \subset (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \cup E[|f_n - f| \ge \sigma]$，从而有：

$mE[|g_n - f| \ge \sigma] \le m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) + m(E[|f_n - f| \ge \sigma]) = m(E[|f_n - f| \ge \sigma])$ ………4 分

又因为在E上$f_n(x) \Rightarrow f(x)$，故$\lim\limits_{n\to\infty} m(E[|f_n - f| \ge \sigma]) = 0$ …………6 分

所以$0 \le \lim\limits_{n\to\infty} m(E[|g_n - f| \ge \sigma]) \le \lim\limits_{n\to\infty} m(E[|f_n - f| \ge \sigma]) = 0$ ……………8 分

于是：$\lim\limits_{n\to\infty} m(E[|g_n - f| \ge \sigma]) = 0$

故在E上有$g_n(x) \Rightarrow f(x)$ ………………………10 分

3、设 $f(x)$ 是 E 上 $a.e.$ 有限的函数，若对任意 $\delta>0$，存在闭子集 $F_\delta\subset E$，使 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，且 $m(E-F_\delta)<\delta$，证明：$f(x)$ 是 E 上的可测函数。(鲁津定理的逆定理)

证明：$\forall n\in N,$ 存在闭集 $F_n\subset E, m\left(E-F_n\right)<\frac{1}{2^n}, f(x)$ 在 F_n 连续………………2 分

令 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}F_n$，则 $\forall x\in F\Rightarrow\exists k, x\in\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}F_n, \forall n\geq k, x\in F_n\Rightarrow f(x)$ 在 F 连续……4 分

又对任意 k,

$m\left(E-F\right)\leq m[E-(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}F_n)]=m[\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(E-F_n)]\leq\sum\limits_{n=k}^{\infty}m(E-F_n)<\frac{1}{2^k}$…………. 6 分

故 $m(E-F)=0, f(x)$ 在 $F\subset E$ 连续…………………………. . 8 分

又 $m(E-F)=0,$ 所以 $f(x)$ 是 $E-F$ 上的可测函数，从而是 E 上的可测函数…………………. . 10 分

4、在有限闭区间 $[a,b]$ 上的单调有限函数 $f(x)$ 是有界变差函数.

证明. 在 $[a,b]$ 上任取一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$，-----------2 分

从而对任何 n，有

$$\sigma=\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=|f(b)-f(a)| \qquad \text{-----------6 分}$$

所以 $\quad \bigvee\limits_a^b(f)\leq|f(b)-f(a)<+\infty,$-----------------------8 分

故 $f(x)$ 有界变差. -----------------------------10 分

《实变函数》期末考试题（二）

一、判断题（判断正确、错误，并改正。共 5 题，共 5×3=15 分）

1、无限集中存在基数最大的集合，也存在基数最小的集合。 (×)

改正：无限集中不存在基数最大的集合，但存在基数最小的集合。

2、存在闭集使其余集仍为闭集。 （ √ ）

3、若 E 是可测集，F 是 E 的可测子集，则 $m(E-F)=mE-mF$ 。 (×)

改正：若 E 是可测集，F 是 E 的测度有限的子集，则 $m(E-F)=mE-mF$ 。

4、若 E 是可测集，$f(x)$ 是 E 上的实函数，则 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是：存在实数 a，使 $E[x\mid f>a]$ 是可测集。 （ × ）

改正：若 E 是可测集，$f(x)$ 是 E 上的实函数，则 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是：对任意实数 a，$E[x\mid f>a]$ 是可测集。

5、若 E 是可测集，$f(x)$ 是 E 上的非负简单函数，则 $\int_E f(x)dx$ 一定存在。 (√)

二、叙述题（共 5 题，共 5×3=15 分）

1、伯恩斯坦定理。

答：设 A 、B 是两个集合，若 A 的基数不超过 B 的基数，且 B 的基数也不超过 A 的基数，则 A 与 B 对等。

2、伯恩斯坦定理。

答：设 A 、B 是两个集合，若 A 的基数不超过 B 的基数，且 B 的基数也不超过 A 的基数，则 A 与 B 的基数相等。

3、可测集与开集的关系。

答：设E为可测集，则对任意$\varepsilon>0$，存在开集G，使$E\subset G$且$m(G-E)<\varepsilon$。

4、叶果洛夫定理的逆定理。

答：设$\{f_n(x)\}$为E上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$也为E上几乎处处有限的可测函数如果对任意$\varepsilon>0$，存在可测子集$E_\varepsilon\subset E$，使在E_ε上，$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$，而$m(E-E_\varepsilon)<\varepsilon$则$f_n(x)\to f(x)$ a.e.于E。

5、$f_n(x)$在可测集E上几乎处处收敛于$f(x)$的定义。

答：设E是可测集，$f_n(x)$、$f(x)$均为E上的可测函数，如果E中使$f_n(x)$不收敛于$f(x)$的点 所成的集为零测集，则称$f_n(x)$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，记为$f_n(x)\to f(x)$ a.e.于E。

三、简答题（共 1 题，共 1×10=10 分）

1、按从简单到复杂的方式简述 Lebesgue 的定义。

答：1. 设E为可测集，$f(x)$为E上非负简单函数，即$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ （E_i两两不交）且当$x\in E_i$时 $f(x)=c_i$ $i=1,2,...,n$，则称$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i mE_i$为$f(x)$在$E$上的 Lebesgue 积分，记为 $\int_E f(x)dx$。 ————3 分

2. 设E为可测集，$f(x)$为E上非负可测函数，则存在一列单调递增非负简单函数列$\varphi_n(x)$使$\varphi_n(x)\to f(x)$，则称$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\varphi_n(x)dx$为$f(x)$在$E$上的 Lebesgue 积分，记为$\int_E f(x)dx$。

——————————————————7 分

3. 设E为可测集，$f(x)$为E上可测函数，由于$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，如果$\int_E f^+(x)dx$与 $\int_E f^-(x)dx$至少有一个为有限数，则称$\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$为$f(x)$在$E$上的 Lebesgue 积分，记为$\int_E f(x)dx$。 ——————————————————10 分

四、 解答题（共 6 题，共 6×10=60 分）

1、设$f(x)$是$E=(-\infty,+\infty)$上的单调函数，证明$f(x)$是E上的可测函数。

证：由题设知 $f(x)$在$E=(-\infty,+\infty)$上几乎处处连续，————————6 分

而 $E=(-\infty,+\infty)$ 上连续函数是可测函数

所以由可测函数的性质知 $f(x)$ 是 E 上的可测函数。 ——————————————————10 分

2、设 $E\subset R^n$，证明 E 是闭集的充要条件是：$E=\bigcap\limits_{F_\lambda\in\Lambda}F_\lambda$，其中 $\Lambda=\{$包含 E 的闭集全体$\}$。

证：充分性 由闭集的交集运算性知 $E=\bigcap\limits_{F_\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ 是闭集。——————————————————4 分

必要性 对任意 $\lambda\in\Lambda$，有 $E\subset F_\lambda$，所以 $E\subset\bigcap\limits_{F_\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ ———————————————7 分

又 $E\in\Lambda$，从而 $E\supset\bigcap\limits_{F_\lambda\in\Lambda}F_\lambda$

所以 $E=\bigcap\limits_{F_\lambda\in\Lambda}F_\lambda$。 ——————————————————10 分

3、若 A_1,A_2,A_3 均为 $[0,1]$ 上的可测子集，且 $\sum\limits_{i=1}^{3}mA_i>2$，则 $m\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i>0$。

证：因为 $\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i=[0,1]-\bigcup\limits_{i=1}^{3}([0,1]-A_i)$ ————————————————————4 分

而 $m[0,1]=1<\infty$，$\sum\limits_{i=1}^{3}mA_i>2$

所以 $m\bigcap\limits_{i=1}^{3}A_i=1-\sum\limits_{i=1}^{3}(1-mA_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}mA_i-2>0$。————————————————10 分

4、利用 Lebesgue 控制收敛定理，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$。

证：因为 当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x=0$，————————————————————4 分

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x=0$ a.e.于 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$

由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx=0$。————————————10 分

5、设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\notin Q_0\\ e^{\cos x}, x\in Q_0\end{cases}$，其中 Q_0 是 $[0,1]$ 上的有理数集，求 $\int_{[0,1]}f(x)dx$。

解：因 $mQ_0=0$，所以 $f(x)=\sin x$ a.e.于 $[0,1]$ ——————————————————5 分

由积分的唯一性知

$\int_{[0,1]}f(x)dx=\int_{[0,1]}\sin xdx=1-\cos 1$ ——————————————————10 分

6、若 R^n 中的可测集列 $\{E_n\}$，满足 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} mE_k = 0$，则 $m(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = m(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n) = 0$

证：因 $\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge n} E_k \subset \bigcup_{k\ge n} E_k$， ————————————————4 分

所以 $m\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \le m \bigcup_{k\ge n} E_k \le \sum_{k\ge n} mE_k$

让 $n\to\infty$，由夹逼原则知

$$m\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = 0$$

又 $\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n$

所以 $m\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = 0$。 ————————————————————10 分