7.4 第一类曲线与曲面积分

7.4.1 第一类曲线积分(第一型曲线积分)

1. 设 $f(x,y)$ 为平面曲线 L 上的函数(比如, $f(x,y)$ 表示函数在点 (x,y) 处的线密度), 可采用下列办法求线段 AB 的质量:

(1) 分割: $A=M_0, M_1, \cdots, M_n=B, \Delta s_i$ 表示曲线段 $M_{i-1}M_i$ 的长度.

(2) 求和: 取 $(\xi_i,\eta_i)\in M_{i-1}M_i$, 则总质量 $M\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

(3) 取极限: 令 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$, 则 $M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

若该极限与分割方法和 (ξ_i,η_i) 的取法无关, 则称此极限为 $f(x,y)$ 在曲线 L 上的(第一类)曲线积分, 记作 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

即 $$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

同理可定义空间曲线 L 上的函数 $f(x,y,z)$ 的曲线积分:

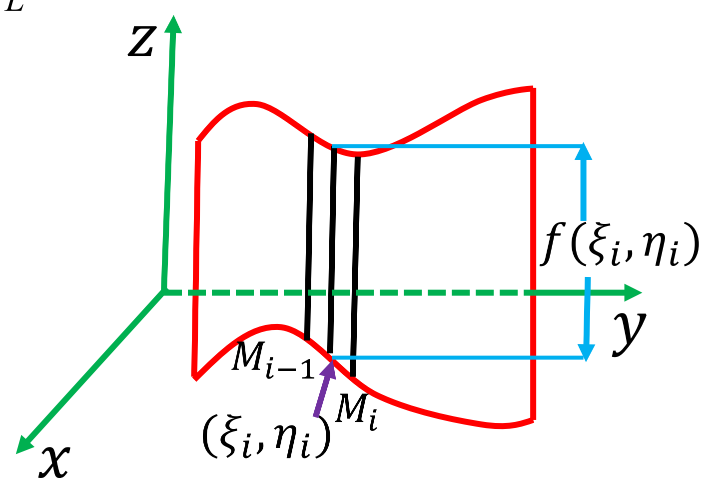
$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

2. 几何意义:

(1) 当 $f(x,y)=1$ 时, $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=$ 曲线 L 的长度.

(2) 当 $f(x,y)$ 为线密度函数时, $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 表示的是曲线 L 的质量

(3) $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 也表示以 L 为底边,以 $f(x,y)$ 为顶的柱体的面积.



3. 曲线积分的计算

(1) 平面曲线: $y=y(x)(x\in[a,b])$, 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$

曲线的长度 $L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

(2) 平面曲线: $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$, 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

曲线的长度 $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

(3) 空间曲线:

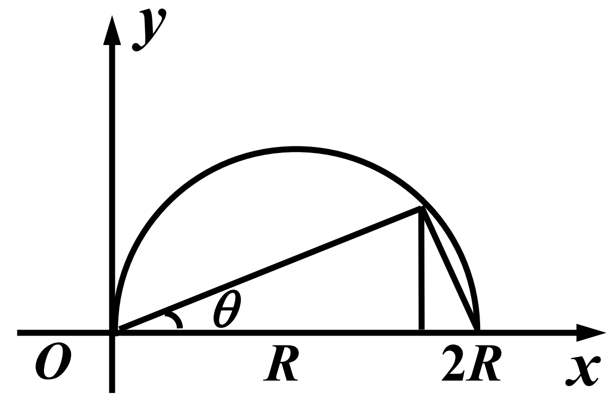
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha \le t \le \beta), \text{弧微分 } \mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\text{曲线长度} = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

注: 这里的弧长微元ds就是弧微分, 当$ds > 0$时, $dt > 0$, 故公式中的定积分下限必须小于上限, 即$\alpha < \beta$. 这是第一型曲线积分的特征.

【例】计算曲线积分$\int_L (x^2+y^2)ds$，其中L为圆心在$(R,0)$，半径为R的上半圆周.



解 L的方程为

$$y=\sqrt{2Rx-x^2}(0\le x\le 2R)$$

从而

$$y'=\frac{R-x}{\sqrt{2Rx-x^2}},$$

所以

$$\int_L (x^2+y^2)\,ds=\int_0^{2R}[x^2+\sqrt{2Rx-x^2}^2]\sqrt{1+\left(\frac{R-x}{\sqrt{2Rx-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{2R}\frac{2R^2x}{\sqrt{2Rx-x^2}}\,dx.$$

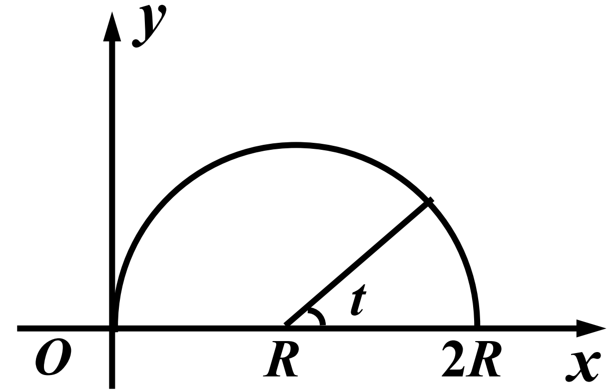
令$x=2R\cos^2\theta$,可得

$$\int_L (x^2+y^2)\,ds=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\cos^2\theta\,d\theta=2\pi R^3.$$

【例】计算曲线积分$\int_L (x^2+y^2)ds$，其中L为圆心在$(R,0)$，半径为R的上半圆周.

解 选择圆心角t为参变量, L的方程为

$$\begin{cases} x = R(1+\cos t) \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$$



$$\int_L (x^2+y^2)\,ds$$

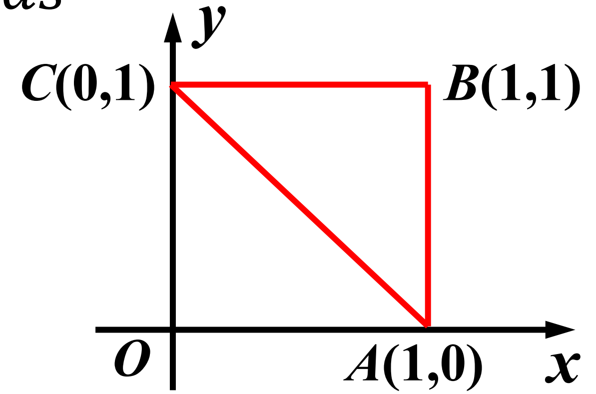
$$= \int_0^{\pi} [R^2(1+\cos t)^2 + R^2\sin^2 t\ ]\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt$$

$$= 2\pi R^3.$$

【例】计算$\oint_L (x+y)ds$,其中L以$A(1,0)$、$B(1,1)$、$C(0,1)$为顶点的三角形边界.这里记号$\oint_L$表示积分是在闭合曲线L上进行.

解 $\oint_L (x+y)\,ds = \int_{AB}(x+y)\,ds$

$$+\int_{BC}(x+y)\,ds+\int_{CA}(x+y)\,ds$$



在AB上$x=1, ds=\sqrt{1+x'^2}dy=dy,$

在BC上$y=1, ds=\sqrt{1+y'^2}dx=dx,$

CA的方程为$y=-x+1$, 故

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{2}dx,$$

于是

$$\oint_L (x+y)\,ds=\int_0^1(1+y)\,dy+\int_0^1(1+x)\,dx+\int_0^1\sqrt{2}\,dx$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}.$$

【例7-27】计算$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中$L$为螺线 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ 上对应于 t 从0到1的一段弧.

解

$$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds = \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 t+\sin^2 t+t^2}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sqrt{2}dt$$

$$= \sqrt{2}\arctan t \,\Big|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

【例7-28】计算$\oint_L x^2 ds$，其中L为圆：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

解　因为L的参数方程不易求出，但是L中x, y, z的地位是完全对称的，所以

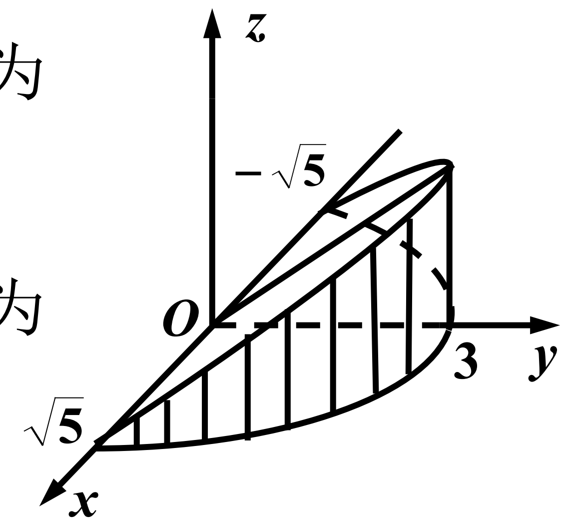
$$\oint_L x^2\,ds = \oint_L y^2\,ds = \oint_L z^2\,ds$$

$$= \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$$

$$= \frac{1}{3}\oint_L ds$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

【例7-29】设椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 被平面$z=y$及$z=0$ 所截. 求位于第一、二卦限内所截下部分的侧面积.



解　根据第一型曲线积分的几何意义，侧面积为

$$S=\int_L z\,ds=\int_L y\,ds$$

其中L为xOy平面上的半个椭圆，L用参数方程为

$$x=\sqrt{5}\cos t\,,y=3\sin t\ \ (0\le t\le\pi)$$

于是

$$S=\int_L y\,ds=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,d\cos t$$

$$=9+\frac{15}{4}\ln 5\,.$$

7.4.2 第一类(型)曲面积分

1. 分割,求和,取极限:

曲面 $S: z=z(x,y)((x,y)\in D)$,函数 $f(x,y,z)$定义在曲面S上.

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

2.几何意义:

(1) $f(x,y,z)=1, \iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_S \mathrm{d}S$ 表示曲面的面积.

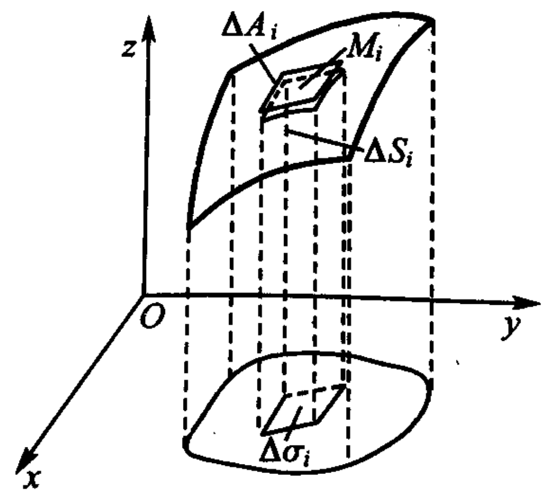
(2) $f(x,y,z)$ 为密度函数时, $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 表示曲面的质量

3. 曲面$z=z(x,y)((x,y)\in D_{xy})$面积的计算方法

将D_{xy}任意分割为n个小区域$\Delta\sigma_i$, 记

$$d=\max_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$$

这时S相应的被分划为n个小曲面ΔS_i, 在每个小曲面片ΔS_i上任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, 作平面的切平面$\pi_i$, π_i上与ΔS_i相对应的小切平面片记为ΔA_i, 即ΔA_i与ΔS_i在xOy平面的投影域同为$\Delta\sigma_i$.

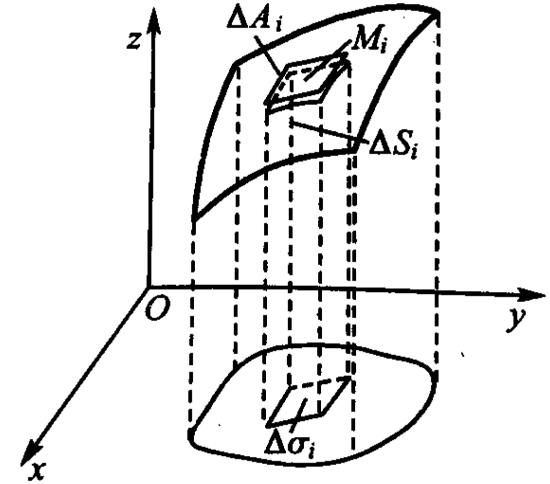


S在点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$处的切平面$\pi_i$的法向量就是$S$在点$M_i$处的法向量. 法向量为

$$\boldsymbol{n}_i=\pm(-z_x,-z_y,1)\big|_{M_i},$$

法向量与z轴正向夹角的余弦为

$$\cos\gamma_i=\pm\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}}.$$



由于$\Delta\sigma_i=\Delta A_i|\cos\gamma_i|$,所以

$$\Delta A_i=\frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}=\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i,$$

于是S的面积

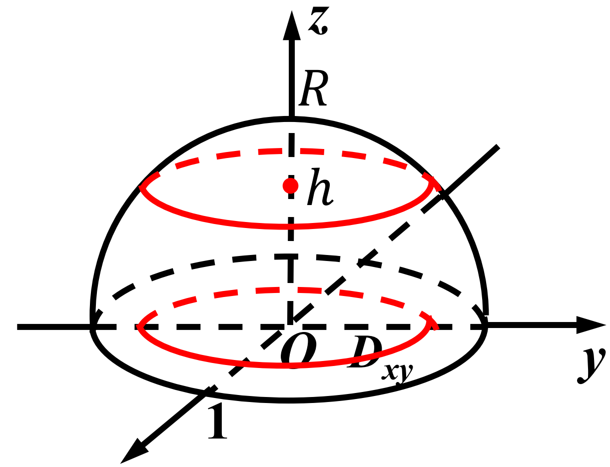
$$S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i.$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy.$$

如果曲面为$x=x(y,z)$或$y=y(z,x)$，可分别将曲面投影到yOz平面上或zOx平面上投影，类似有

$$S=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz. \qquad S=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}dzdx.$$

【例7-30】求球面$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$介于平面 $z=h$（$0<h<R$）和平面 $z=0$之间的部分的面积.



解　因为$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 所以

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

曲面在xOy平面的投影为

$$D_{xy}=\{(x,y)|R^2-h^2\leq x^2+y^2\leq R^2\}$$

所以曲面面积为

$$S=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{R^2-h^2}}^{R}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$$

$$=2\pi R\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]\Big|_{\sqrt{R^2-h^2}}^{R}=2\pi Rh.$$

2. 第一类曲面积分的计算

考虑曲面积分: $\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,

其中曲面S的方程为$z=z(x,y)((x,y)\in D_{xy})$,则计算过程如下:

一投(投影): S 在xOy面上投影为 D_{xy};

二代(代换): 将 $z=z(x,y)$ 代入 $f(x,y,z)$ 中;

三换(换元): $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

则有

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

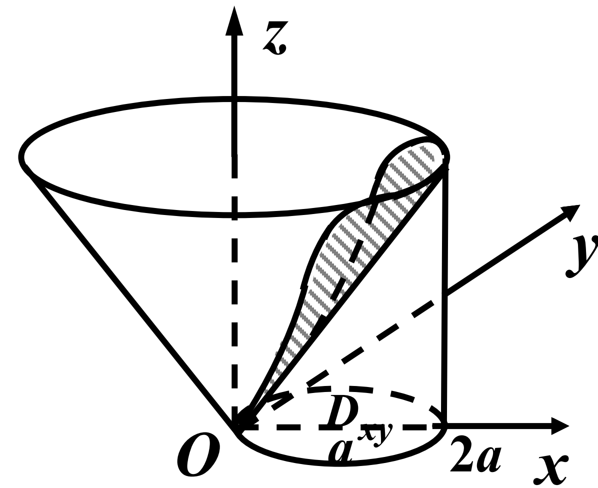
【例7-31】计算 $\iint\limits_S xz\,dS$， 其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下部分.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的正奇数}\end{cases}$$

解 S 在 xOy 平面上的投影域为

$$D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax$$

于是



$$\iint_S xz\,dS$$

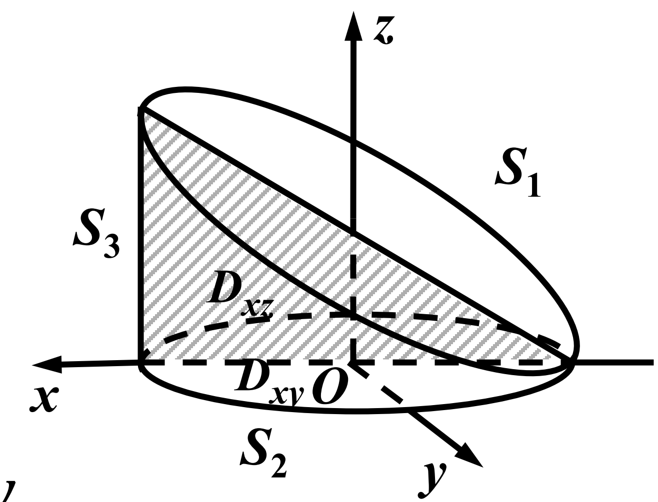
$$=\iint_{D_{xy}} x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}} x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos\theta\,dr=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4\times 2}{5\times 3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

【例7-32】计算$\oiint\limits_S zdS$，其中S是由圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，平面 $z=0$ 和 $z-x=R$ 所围立体的表面. 记号 $\oiint\limits_S$ 表示积分在闭曲面S上进行.



解 S由顶面S_1,底面S_2及侧面S_3构成，其中

$$S_1: z-x=R \ \ (x,y)\in D_{xy},$$

$$S_2: z=0 \ \ (x,y)\in D_{xy},$$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le R^2.$$

$$\iint_{S_1} z\,dS=\iint_{D_{xy}}(R+x)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

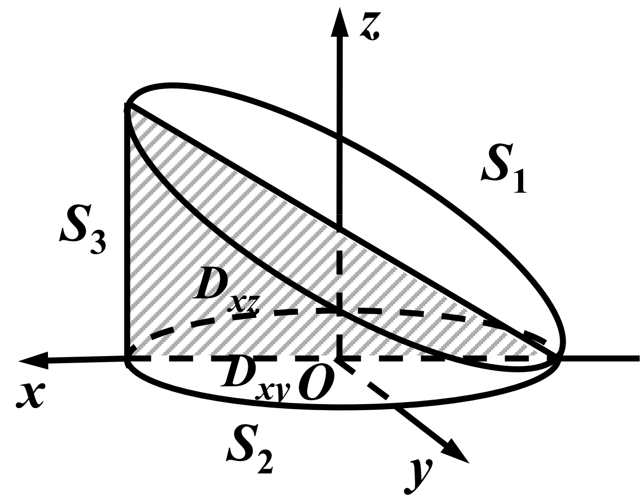
$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(R+x)\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(R+r\cos\theta)\,rdr$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}R^3+\frac{1}{3}R^3\cos\theta)d\theta=\sqrt{2}\pi R^3.$$

$$\iint_{S_2} z\,dS=\iint_{D_{xy}}0\,dxdy=0.$$

【例7-32】计算$\oiint\limits_S z dS$，其中S是由圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，平面 $z=0$ 和 $z-x=R$ 所围立体的表面. 记号 $\oiint\limits_S$ 表示积分在闭曲面S上进行.



解 S_3分为两块，其方程为

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \text{ 和 } y=-\sqrt{R^2-x^2}$$

将其投影到zOx平面上，投影区域均为

$$D_{zx}: 0 \le z \le R+x, -R \le x \le R$$

$$\iint_{S_3} z\, dS = 2\iint_{D_{zx}} z\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}\, dzdx$$

$$= 2\iint_{D_{zx}} z\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dzdx = 2\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx\int_0^{R+x} z\, dz$$

$$= \int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\cdot(R+x)^2 dx$$

令$x=R\sin t$，得

$$\iint_{S_3} z\, dS = R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)^2\, dt = \frac{3\pi R^3}{2},$$

$$\oiint_S z\, dS = \left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\pi R^3.$$

作业: 习题 7-4

1(2)(3)(6)(8)

4

5

6(4)(5)(7)(8)

7

8

向量值函数在有向曲线上的积分

回顾:

1. 定义 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

2. 计算

• **对光滑曲线弧** $L: x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$,

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

- 对光滑曲线弧 $L: y=\psi(x)\ (a\le x\le b)$,

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

- 对光滑曲线弧 $L: x=\varphi(y)\ (c\le y\le d)$

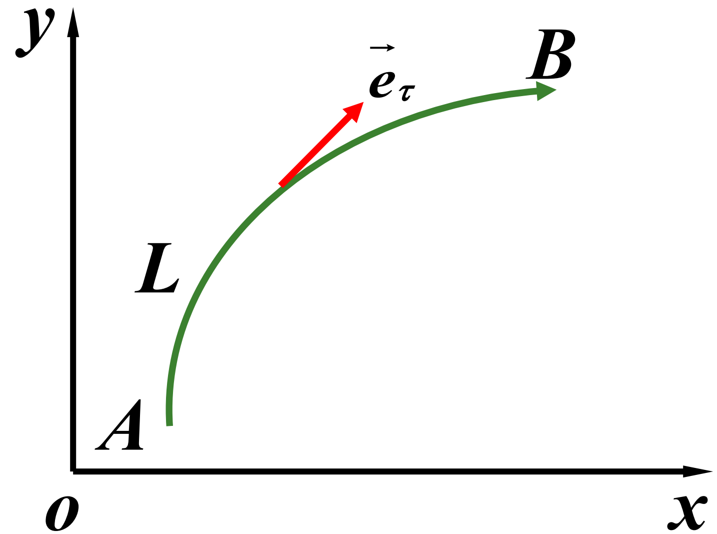
$$\int_L f(x,y)\,ds=\int_c^d f(\varphi(y),y)\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy$$

第二型曲线积分：

- 第二型曲线积分的概念与性质
- 第二型曲线积分的计算
- 两类曲线积分的关系

一　第二型曲线积分的概念与性质

实例: **变力沿曲线所作的功**



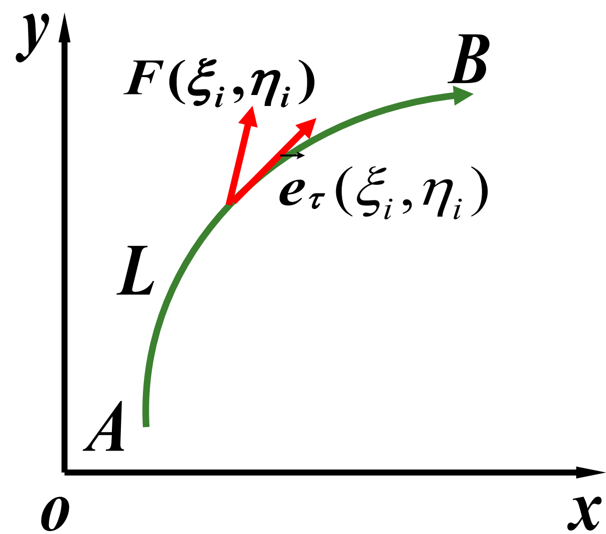
$L: A \to B,$

$\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$

常力所作的功　$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$

分割 记$\vec{e}_\tau$为曲线上任一点M处的单位切向量，其方向与曲线L上从点A到点B的方向一致. 将L分成几个小弧段$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$，第$i$个小弧段的弧长仍记为$\Delta s_i$.

代替 在Δs_i上任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i)$, 由于Δs_i很短，在每个小弧段上质点可以看作直线运动，并以$\vec{e}_\tau(\xi_i,\eta_i)$表示其方向，所以$\vec{e}_\tau(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$近似表示质点的位移，故



$$\Delta W_i \approx \vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\vec{e}_\tau(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

求和 $W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\vec{e}_\tau(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

取极限
$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\vec{e}_\tau(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$
$$=\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\vec{e}_\tau(x,y)ds$$

1 概念

定义 设L为xoy面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，$\vec{e}_\tau$为L上任一点(x,y)处的单位切向量，其方向与曲线L上从A到B的方向一致. $\vec{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$在$L$上有界，若数量积$\vec{F}\cdot\vec{e}_\tau$的第一型曲线积分存在，则称此积分值为向量值函数$\vec{F}$在有向曲线$L$上的第二型曲线积分，记为

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\vec{e}_\tau ds$$

若记$\vec{e}_\tau=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 则$\vec{e}_\tau ds=(\cos\alpha\, ds,\cos\beta\, ds)=(dx, dy)$, 故称$\vec{e}_\tau ds$为有向弧微分，记作$\overrightarrow{ds}=(dx,dy)$, 则有

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{ds}=\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy\,.$$

$\boxed{\text{坐标形式}}$

物理意义:

变力$\overrightarrow{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$沿曲线$\boldsymbol{L}$从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$对质点所作的功.

定理: 当$P(x,y)$, $Q(x,y)$在光滑曲线弧 L上连续时，第二类曲线积分存在 .

第二型曲线积分与曲线的方向有关。

三维空间的第二型曲线积分:

对向量场

$$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

定义第二型曲线积分:

$$\int_L \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

2 性质

1) $\int_{AB} k\vec{F}\cdot d\vec{s}=k\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{s}$

2) $\int_{AB}[\vec{F}(x,y)\pm\vec{Q}(x,y)]\cdot d\vec{s}=\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{s}\pm\int_{AB}\vec{Q}\cdot d\vec{s}$

3) 如果把 L 分成 L_1 和 L_2，则

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

4) $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

积分路径相反，则第二型曲线积分变号。

二 第二型曲线积分的计算

定理 设$P(x,y),Q(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续,L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$当参数$t$单调地由$\alpha$变到$\beta$时,点$M(x,y)$从$L$的起点$A$沿$L$运动到终点$B$,$\varphi(t),\psi(t)$在以$\alpha$及$\beta$为端点的闭区间上具有一阶连续导数,且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,则曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$存在,

且$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

特殊情形

(1) $L: y = y(x)$　　x起点为a，终点为b.

则$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'(x)\}dx.$

(2) $L: x = x(y)$　　y起点为c，终点为d.

则$\int_L Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[x(y),y]x'(y) + Q[x(y),y]\}dy.$

(3) 推广 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$ **t起点α,终点β.**

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\phi'(t)$$
$$+Q[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$
$$+R[\phi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

注意：

第二型曲线积分可以化为定积分计算，下限α对应于曲线L的起点，上限β对应于曲线L的终点，α不一定小于β.

例 计算曲线积分$\boldsymbol{I = \int_L ydx + xdy}$, $\boldsymbol{L}$为圆周$\boldsymbol{x = R\cos t}$,

$\boldsymbol{y = R\sin t}$ 上对应于$\boldsymbol{t}$从$\boldsymbol{0}$到$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$的一段弧.

解 将L的参数方程$x = R\cos t\,, y = R\sin t$ 代入式子, 得

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R\sin t \cdot (R\cos t)' + R\cos t \cdot (R\sin t)']\, dt$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt$$

$$= 0.$$

例设有一平面力场$F(x,y)=(x+y,y-x)$，一质点在$F(x,y)$作用下运动，求下列情形下$F(x,y)$所作的功.

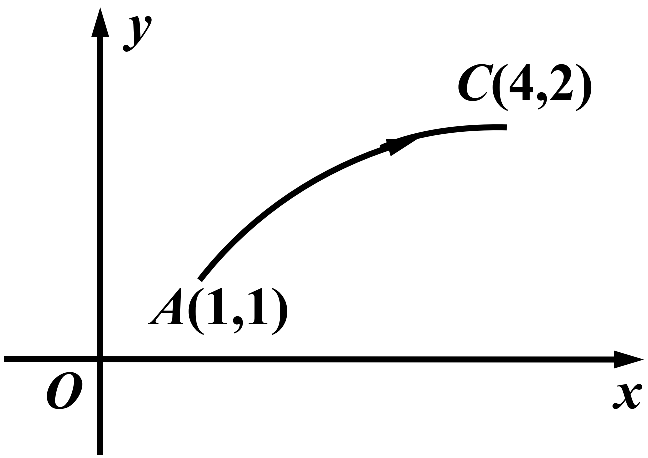
（1）质点从点$A(1,1)$到点C(4,2)沿抛物线$y^2=x$的一段弧；

（2）质点从点$A(1,1)$到点$C(4,2)$ 的直线段；

（3）质点从点$A(1,1)$沿直线到点$B(1,2)$，再沿直线到点$C(4,2)$ 的折线.

解 (1)以y为参数，曲线$\widehat{AC}$的方程为

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = y \end{cases},y\text{从1变到2，所求功为}$$



$$W = \int_{\widehat{AC}}(x+y)\,dx + (y-x)dy$$

$$= \int_1^2[(y^2+y)\,2y + (y-y^2)]dy$$

$$= \frac{34}{3}.$$

例设有一平面力场$F(x,y)=(x+y,y-x)$，一质点在$F(x,y)$作用下运动，求下列情形下$F(x,y)$所作的功.

（2）质点从点$A(1,1)$到点$C(4,2)$ 的直线段;

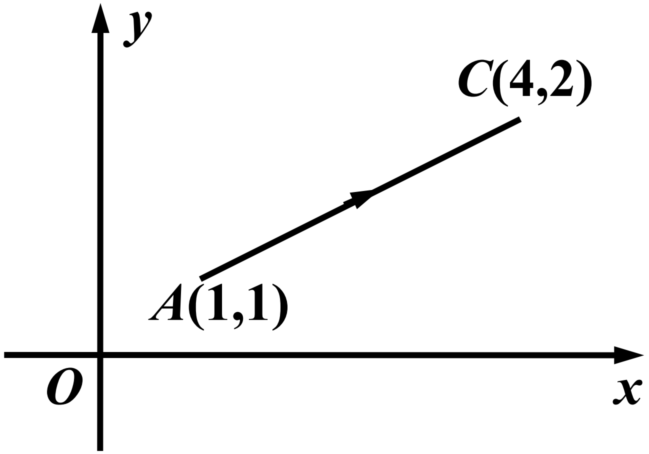
解(2)以y为参数，直线段AC的方程为: $x=3y-2$. y从1到2变化

$$W=\int_{AC}(x+y)\,dx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2(3y-2+y)\,d(3y-2)+(y-3y+2)dy$$

$$=\int_1^2(10y-4)dy$$

$$=11.$$



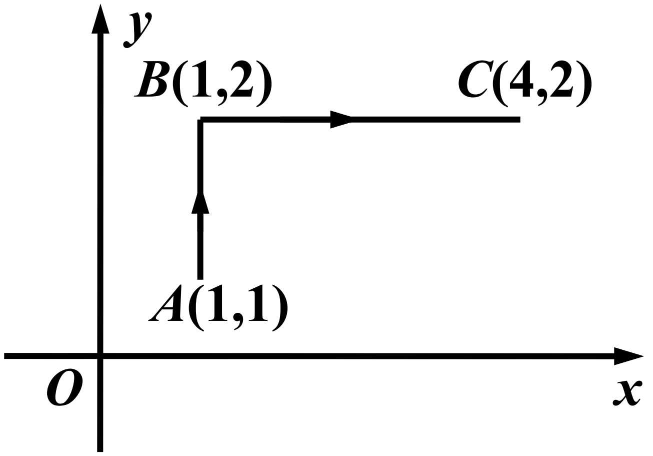
例设有一平面力场*F*(*x*,*y*)=(*x*+*y*,*y*-*x*)，一质点在*F*(*x*,*y*)作用下运动，求下列情形下*F*(*x*,*y*)所作的功.

(3) 质点从点*A*(1,1)沿直线到点*B*(1,2)，再沿直线到点*C*(4,2) 的折线.

解 (3)直线AB的方程为：$x=1, y=y, y$从1变到2;

直线段BC的方程为：$y=2, x=x, x$从1变到4，所求功为

$$W=\int_{AB}(x+y)\,dx+(y-x)dy$$
$$+\int_{BC}(x+y)\,dx+(y-x)dy$$
$$=\int_1^2(y-1)\,dy+\int_1^4(x+2)\,dx$$
$$=14.$$



例计算曲线积分$I=\int_L x^2y^3dx+zdy+ydz$,其中$L$是抛物面$z=4-x^2-y^2$与平面$z$=3的交线，从$z$轴正向往负向看，其方向为逆时针．这里积分号$\oint_L$表示沿闭合曲线$L$积分.

解　L的方程为：$\begin{cases} z=3 \\ z=4-x^2-y^2 \end{cases}$ 消去z可得：$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$

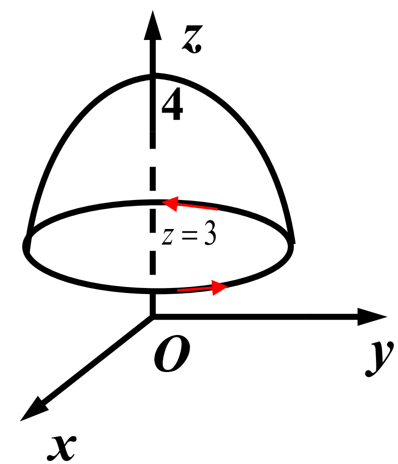
设L的参数方程为：$x=\cos t, y=\sin t, z=3\ (0\le t\le 2\pi)$,所以

$$I=\int_0^{2\pi}[\cos^2 t\sin^3 t\,(-\sin t)+3\cos t+0]\,dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}\sin^4 t\,(1-\sin^2 t)dt+3\int_0^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,dt+0$$

$$=-4\left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\times\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{8}.$$



例 设有一质点在力场$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{3}y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$作用下，

从点$A(1,0,0)$沿直线运动到点$B(3,3,4)$，求力场对质点所作的功.

解　有向线段AB的方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$

其参数表示式为　$x=1+2t, y=3t, z=4t$　t从0变化到1

力场对质点所作的功为

$$\int_{AB}\frac{1}{3}ydx-xdy+(x+y+z)dz$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}\cdot 3t\cdot 2dt-(1+2t)\cdot 3dt+(9t+1)\cdot 4dt$$

$$=\int_0^1(32t+1)\,dt$$

$$=17.$$

三 两类曲线积分的关系

第一类曲线积分：数量函数f(x,y)对弧长的积分，与积分路径的方向无关，化定积分时，下限总是小于上限；

第二类曲线积分： 向量函数 $\vec{F}(x,y)$ 对坐标的积分之和，与积分路径的方向有关，化定积分时，积分上限不一定大于下限(起点与终点对应之参数值)。

设曲线参数方程: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 起点 A 对应参数 α,

终点 B 对应参数 β。不妨设 $\alpha < \beta$ (否则可作 $t = -s$ 代换)

第二类曲线积分: $\int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_L P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t), (y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

曲线 L 的弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

曲线 L 的切向量 $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t))$, 方向余弦 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$

则 $\cos\alpha = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \cos\beta = \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}.$

$\overrightarrow{ds} = (\cos\alpha\, ds, \cos\beta\, ds) = (dx, dy)$

第二类曲线积分:

$$\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),(y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

第一类曲线积分:

$$\int_L (\vec{F} \cdot \vec{e}_l)\mathrm{d}s = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),(y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

两类曲线积分的关系

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_L [P(x,y)cos\alpha + Q(x,y)cos\beta]\,ds$$

（可以推广到空间曲线上Γ）

Γ上点(x, y, z)处的切线向量的方向角 为α, β, γ,

则 $\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$

$$= \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

例 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成对弧长的积分，其中L 为:

1、在xoy面内沿直线从点(0, 0)到点(1, 1)；

2、沿抛物线$y=x^2$从点(0, 0)到点(1, 1)；

3、沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0, 0)到点(1, 1).

解：1. L的方程为：$y=x$, 所以 $(\cos\alpha,\cos\beta)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds$$

例 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成对弧长的积分，其中L 为:

1、在xoy面内沿直线从点(0, 0)到点(1, 1)；

2、沿抛物线$y=x^2$从点(0, 0)到点(1, 1)；

3、沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0, 0)到点(1, 1).

解：2. L的方程为：$y=x^2$, 所以

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L\frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds$$

例 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成对弧长的积分，其中L 为:

1、在xoy面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

2、沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

3、沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点$(0,0)$到点$(1,1)$.

解：3. L的方程为: $y=\sqrt{2x-x^2}$, 所以$y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\sqrt{2x-x^2},\cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=1-x$$

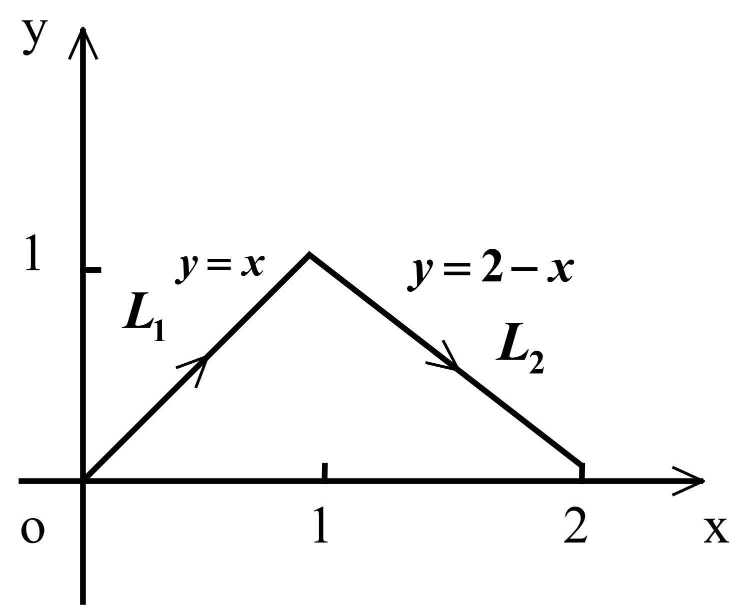
$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_L \sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)ds$$

练习 计算$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中$L$为曲线$y=1-|1-x|\,(0\le x\le 2)$依$x$增大的方向；

解 **积分路线如图所示，其方程为**

$$L: y=\begin{cases} x, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1< x\le 2 \end{cases}$$



根据曲线积分对路径的可加性知：

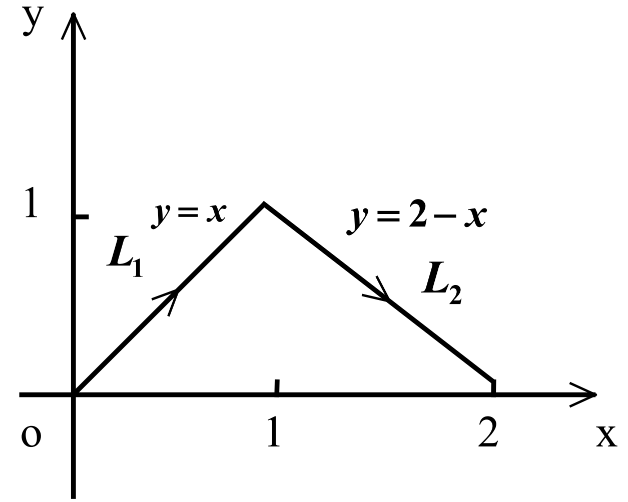
$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_{L_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy+\int_{L_2}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^1[(x^2+x^2)+(x^2-x^2)]dx$$

$$+\int_1^2\{[x^2+(2-x)^2)]-[x^2-(2-x)^2]\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2(2-x)^2dx=\frac{4}{3}$$



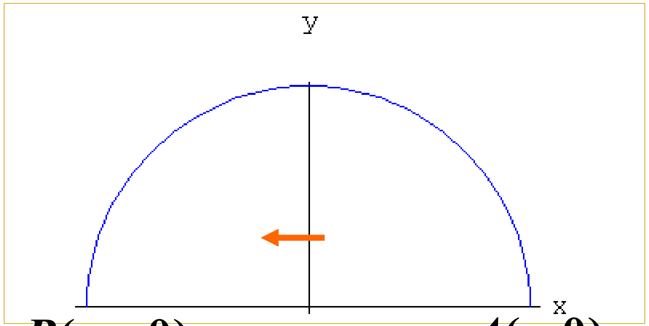
练习 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

解 (1) $\because \quad L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases},$

θ 从 0 变到 π,



$B(-a,0)$ $A(a,0)$

$$\text{原式} = \int_0^\pi a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)$$

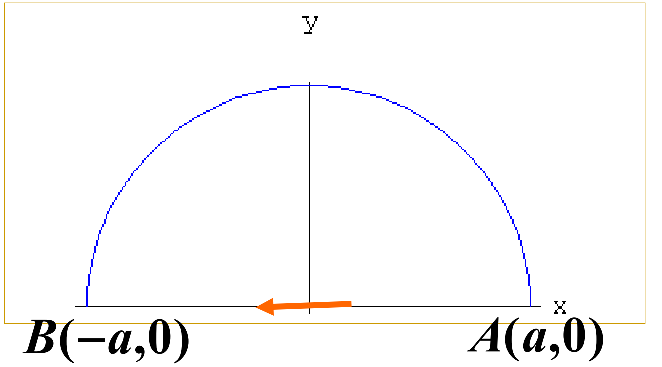
$$= -\frac{4}{3}a^3.$$

练习 计算 $\int_L y^2 dx$, 其中 L 为

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

(2) $\because \quad L: y=0,$

x 从 a 变到 $-a$,



$$原式 = \int_a^{-a} 0 dx = 0.$$

四、小结

1．对坐标曲线积分的概念

2．对坐标曲线积分的计算

3．两类曲线积分之间的联系

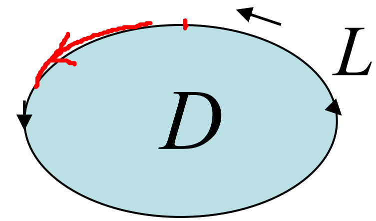
作业

8-1:
1(1)(3)(5)(7);
2(2);
4;
6;
7

8.3 格林公式,平面曲线积分与路径无关的条件

1. 单连通区域:

D内任一条闭曲线所含的区域属于D(没"洞")

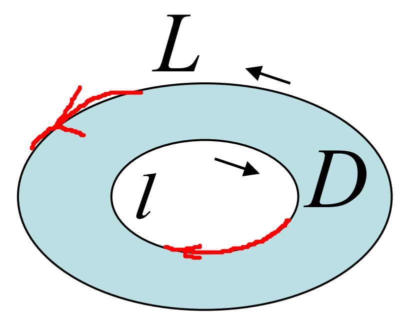


单连通区域

2. 复连通区域

3. 单连通区域边界曲线L的正向:

(逆时针方向)(D 位于L 的左侧)



复连通区域

4. 复连通区域边界曲线的正向:

当沿 L 方向行走时,D 位于 L 的左侧

格林公式

定理8-1 设$\boxed{\text{闭区域}}$ D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有$\boxed{\text{一阶连续偏导数}}$，则有 (D为单连通区域)

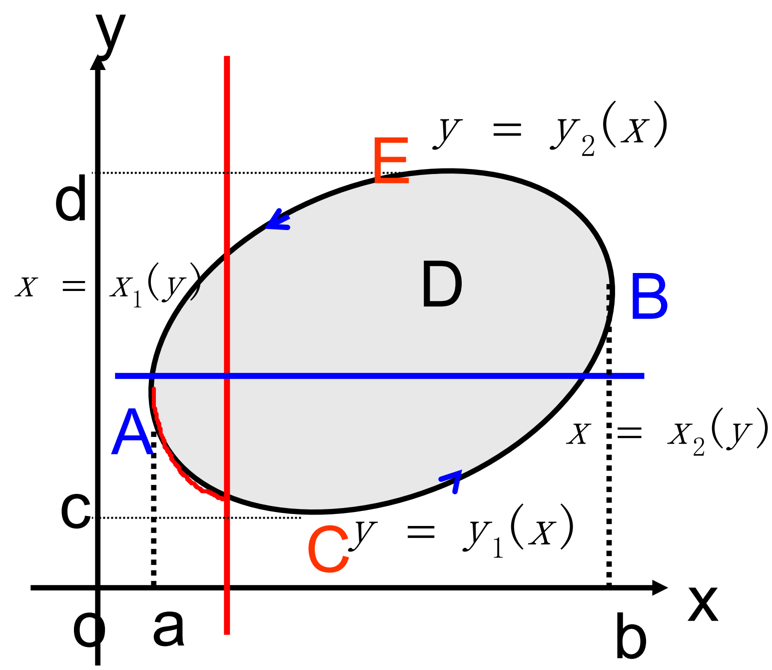
$$\underline{\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y} = \iint_{\underline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 L 为 D 的取正向的边界曲线.

定理 8–1　设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 L 为 D 的取正向的边界曲线.



证明 按闭区域 D 的不同情形来证明.

(1) 设 D 既是 x 型区域，又是 y 型区域，且为单连通的.

$$\iint_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy$$

$$-P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}$$

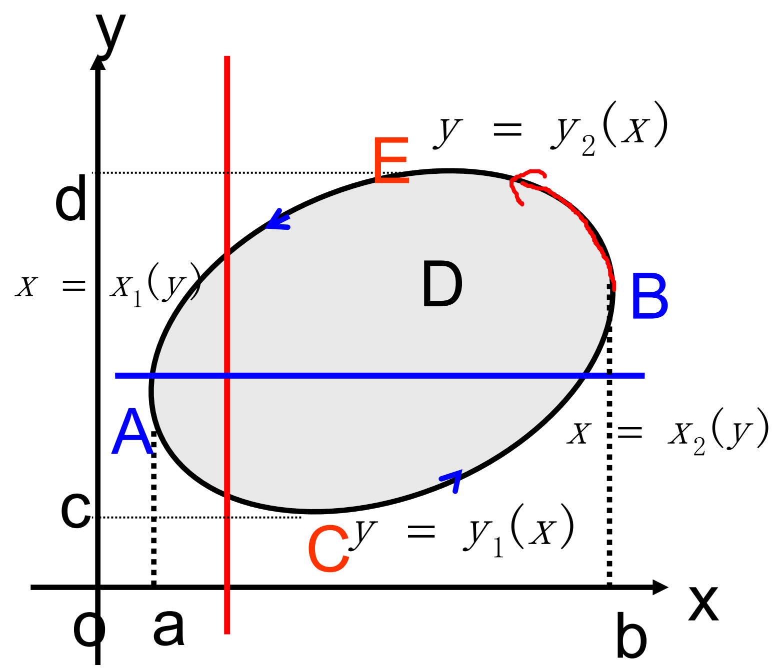
$$=\int_a^b\{P[x,y_1(x)]-P[x,y_2(x)]\}dx$$

同时根据第二型曲线积分的计算方法，有

定理 8−1　设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (*)$$

其中 L 为 D 的取正向的边界曲线.



$$\int_L Pdx = \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx$$

$$= \int_a^b P[x, y_1(x)]dx + \int_b^a P[x, y_2(x)]dx$$

$$= \int_a^b \{P[x, y_1(x)] - P[x, y_2(x)]\}dx$$

从而 $\iint_D (-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_L Pdx.$

类似的，当D表示为$D = \{(x,y) \mid x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$,可证明

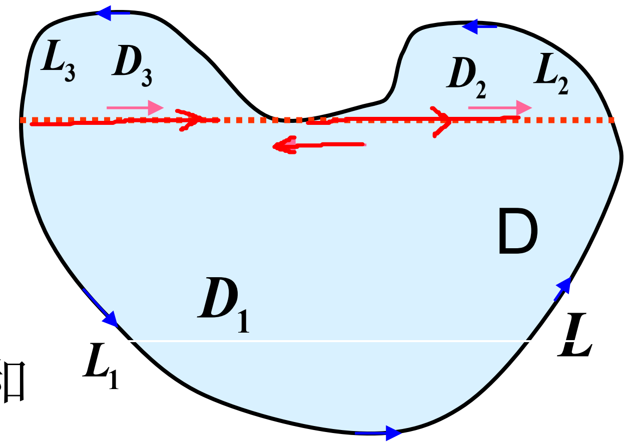
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y}dxdy = \int_L Qdy.$$

从而(*)式成立.

定理 8–1　设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (*)$$

其中 L 为 D 的取正向的边界曲线.



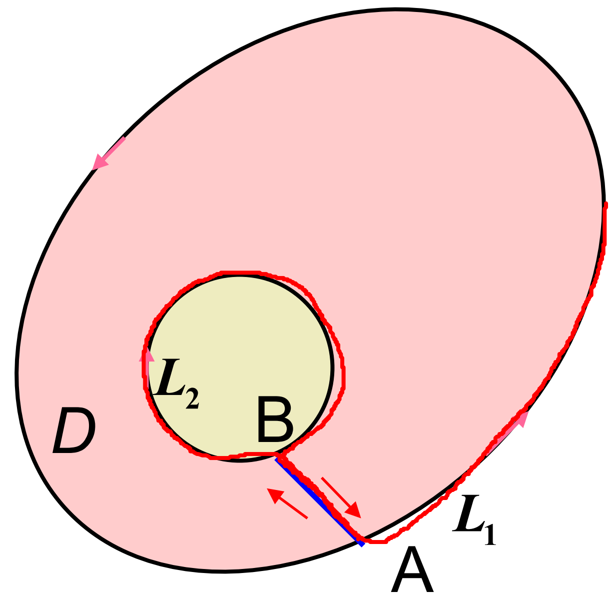
(2) 如果单连通区域 D 不同时是 x 型区域和 y 型区域，可在 D 内添加若干条辅助线将 D 分成满足(1) 的若干小区域. 如图所示，区域 D 分为三个小区域 D_1，D_2与D_3，每个区域上利用格林公式，由于辅助线为两个区域的公共边界，方向相反，所以它们对应的曲线积分相互抵消，因为格林公式仍成立.

若区域不止由一条闭曲线所围成. 添加直线段 AB, 则 $\boldsymbol{D}$ 的边界曲线由 AB, $\boldsymbol{L_2}$, BA, L_1 构成.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \left\{\int_{AB} + \int_{L_2} + \int_{L_1} + \int_{BA}\right\} Pdx + Qdy$$

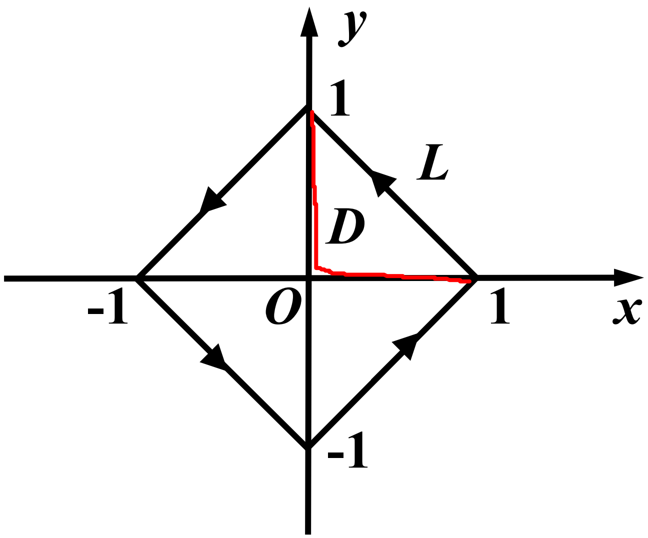
$$= \left\{\int_{L_2} + \int_{L_1}\right\} Pdx + Qdy$$



格林公式的实质: 沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系.

【例】计算 $I=\int_L ydx+2xdy$，其中L是 $|x|+|y|=1$，取正向.

解：$P=y,Q=2x$,在L所围区域D内有一阶连续偏导数，应用格林公式有

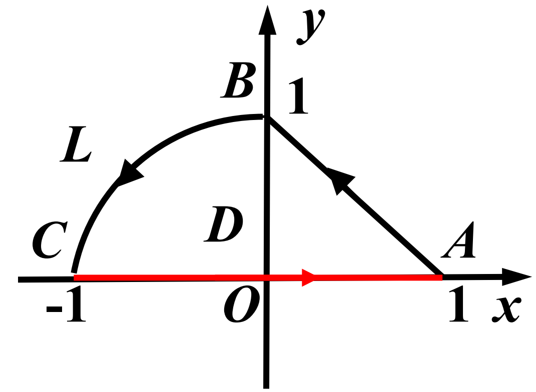


$$I=\int_L ydx+2xdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D(2-1)dxdy$$

$$=4\times\frac{1}{2}\times1\times1=2.$$

【例】计算$I=\int_L (x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$,其中$L$是由直线$x+y=1$位于第一象限的线段及圆弧$x^2+y^2=1$位于第二象限的部分组成，方向如图所示.



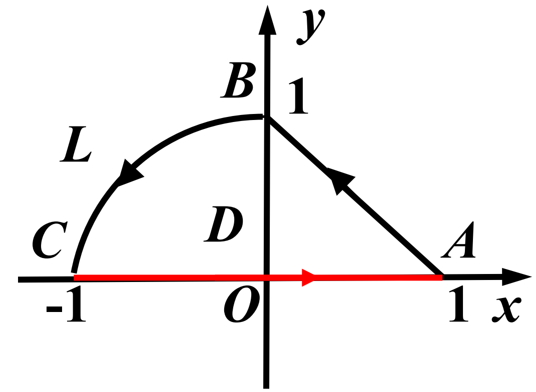
解：作线段$\overline{CA}$,则$L\cup\overline{CA}$构成闭曲线$ABCA$,取正向，设其所围区域为D,又$P=x^2-2y$,

$Q=3x+ye^y$在D上满足格林公式的条件，所以

$$\int_{ABCA}(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy=\iint_D(3+2)dxdy$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{5\pi}{4}.$$

【例】计算$I=\int_L (x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$,其中$L$是由直线$x+y=1$位于第一象限的线段及圆弧$x^2+y^2=1$位于第二象限的部分组成，方向如图所示.



因为CA的方程为: $y=0,\ -1\le x\le 1$, 所以

$$\int_{CA}(x^2-\cancel{2y})dx+(3x+ye^y)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-0)dx=\frac{2}{3}.$$

于是

$$I=\int_{ABCA}(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$$

$$-\int_{CA}(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy=5(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})-\frac{2}{3}=\frac{5\pi}{4}+\frac{11}{6}.$$

【例】计算曲线积分

$I=\int_L [e^x\sin y-b(x+y)]dx+[e^x\cos y-ax]dy\,(a>0,b>0)$,

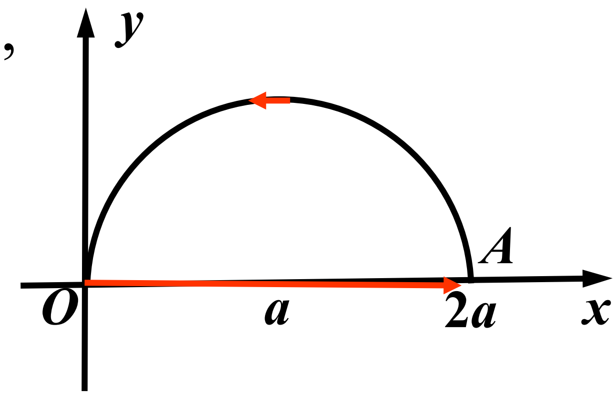
L为从点$A(2a,0)$沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点$(0,0)$的弧.

解：添加辅助线段$\overline{OA}$,则$AO\cup\overline{OA}$构成闭曲线,

取正向，设其所围区域为D,

又$P=e^x\sin y-b(x+y),Q=e^x\cos y-ax$

在D上满足格林公式的条件，所以



$$\int_{AO+\overline{AO}}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+[e^x\cos y-ax]dy=\iint_D (b-a)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\pi(b-a)a^2$$

$$\int_{\overline{OA}}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+[e^x\cos y-ax]dy=\int_0^{2a}(-bx)dx=-2a^2b$$

所以 $I=\dfrac{1}{2}\pi(b-a)a^2+2a^2b$

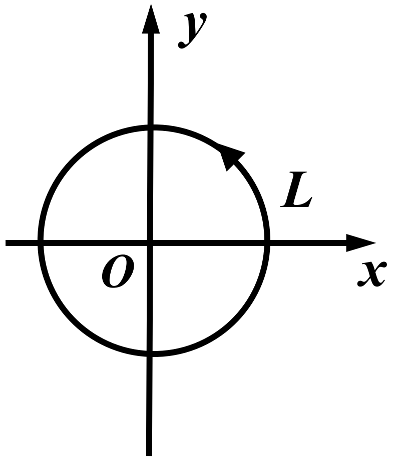
*【例】计算 $I=\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

（1）L为$x^2+y^2=a^2$（$a>0$），其方向取为逆时针方向；

（2）L为一条不过原点的光滑闭曲线，其逆时针方向.

解：因为(x, y)在曲线L上，故满足$x^2+y^2=a^2$.

从而



$$I=\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_L xdy-ydx$$

$$=\frac{2}{a^2}\iint_D dxdy=2\pi.$$

*【例】计算 $I=\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

（1）L为$x^2+y^2=a^2$（$a>0$），其方向取为逆时针方向；

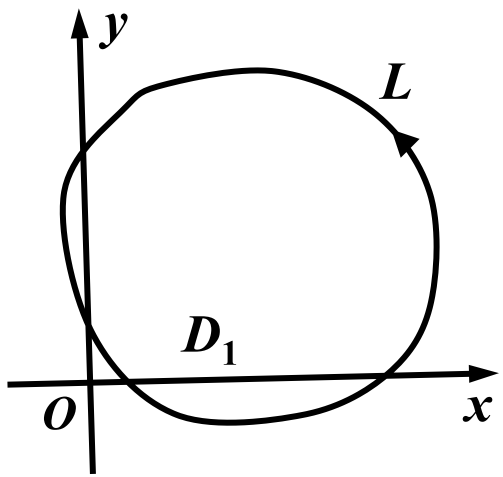
（2）L为一条不过原点的光滑闭曲线，其逆时针方向.

(2) 设D是闭曲线L所围成的区域，当点$(0,0)$

$\notin D$时，函数$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$,

在D内有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$



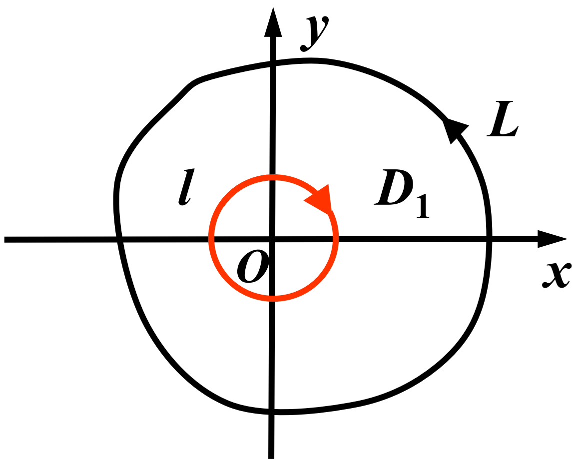
由格林公式得

$$\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=0.$$

*【例】计算 $I=\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

（2）L为一条不过原点的光滑闭曲线，其逆时针方向.

(2) 当点$(0,0)\in D$时，$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$在$D$内存在间断点$(0,0)$，不能直接用格林公式，取充分小的正数$r$，以原点为圆心，以$r$为半径，在$D$内作一个小圆周$l$，并设$L$与$l$所围成的区域为$D_1$.



函数P,Q在D_1上满足格林公式的条件，所以

$$\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+\int_l \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

*【例】计算 $I=\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

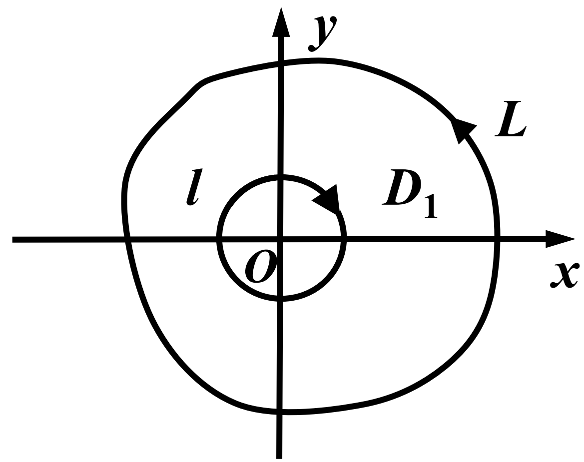
（2）L为一条不过原点的光滑闭曲线，其逆时针方向.

于是

$$I=\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=-\int_l \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{l^-} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\int_{l^-} -ydx+xdy$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_{D'} 2dxdy=2\pi.$$



所以

$$I=2\pi.$$

曲线所围平面区域的面积计算公式

设曲线 L 围成的区域为 D,则 D 的面积 S:

$$S = \frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \quad = \frac{1}{2}\iint_D 2\,dxdy$$

例 求椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 所围图形的面积.

解：利用上面的公式

$$S = \frac{1}{2}\int_L \boldsymbol{xdy - ydx} = \frac{1}{2}\int [(\boldsymbol{a}\cos \boldsymbol{t})\boldsymbol{b}\cos \boldsymbol{t} - \boldsymbol{b}\sin \boldsymbol{t}(-\boldsymbol{a}\sin \boldsymbol{t})]\boldsymbol{dt}$$

$$= \frac{\boldsymbol{ab}}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{dt} = \pi \boldsymbol{ab}.$$

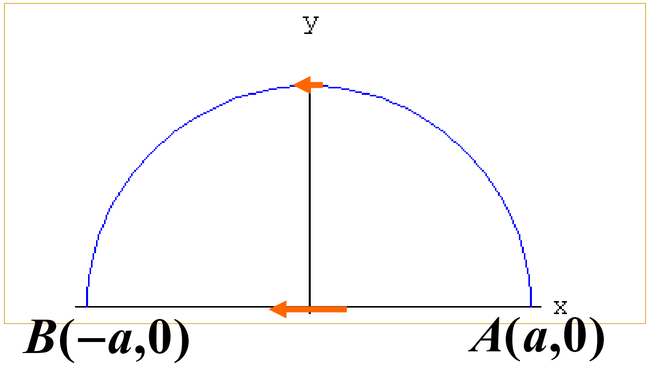
2 平面曲线积分与路径无关的条件

例 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

$(1)-\dfrac{4}{3}a^3.$ $(2)0.$



问题：被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同积分结果不同.

例 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$，其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$ 上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$ 上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0), (1,0), (1,1)$.

解：(1) $\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot \underline{x}^2 + x^2 \cdot 2\underline{x})dx = 1.$

(2) $\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2\underline{y}^2 \cdot y \cdot 2y + \underline{y}^4)dy = 1.$

(3) $\int_L 2xydx + x^2dy = \int_{OA} \cancel{2xy}dx + x^2\cancel{dy} + \int_{OB} \cancel{2xydx} + x^2dy.$

$$= 0 + \int_{OB} dy = 1.$$

问题：被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同而积分结果相同.

定理 设 D 为平面上的单连通区域,函数$P(x,y),Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数,则下列四个命题等价:

(1) 对于 D 内任意分段光滑的闭曲线 L,有

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

(2) 在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的值与积分路径无关,

即 $$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(3) 在 D 内表达式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,

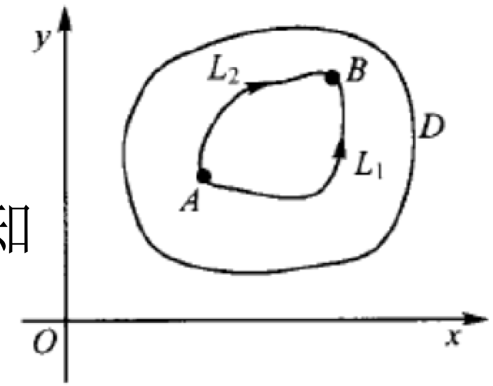
即 $$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(4) 在 D 内有: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(1) 对于 D 内任意分段光滑的闭曲线 L,有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$

(2) 在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的值与积分路径无关,即 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

证明 $(1)\Rightarrow(2)$



设L_1和L_2是D 内有相同起点A 和终点B 的两条分段光滑曲线,则$L_1+L_2^-$构成D 内分段光滑闭曲线，由(1) 知

$$\int_{L_1+L_2^-} Pdx+Qdy=0,$$

因此

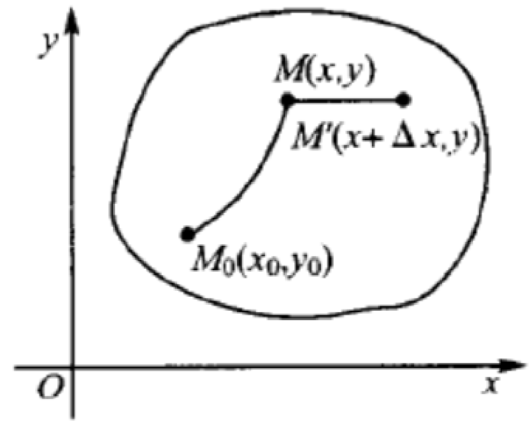
$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy.$$

(2) 在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的值与积分路径无关,即 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

(3) 在 D 内表达式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,

即 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

证明 $(2)\Rightarrow(3)$



在D 内取一个固定点$M_0(x_0,y_0)$作为积分曲线L的起点,取一点$M(x,y)$作为积分曲线的终点,当(2)成立时,曲线积分

$$\int_L Pdx+Qdy$$

只与曲线L的起点$M_0(x_0,y_0)$及终点$M(x,y)$有关,而与路径L 无关,将这个积分记为

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$$

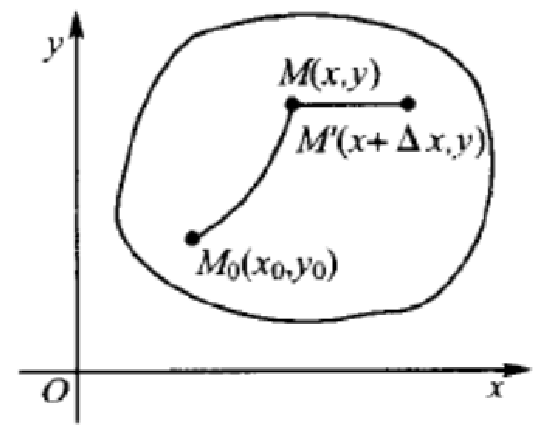
这个积分的取值取决于终点$M(x,y)$,于是,它是x,y 的函数,记为$u(x,y)$,即

(2) 在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的值与积分路径无关,即 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

(3) 在 D 内表达式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分,

即 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$$



当x取增量Δx 时，函数$u(x, y)$ 对x 的偏增量为

$$u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx$$

$$= P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x (0 \le \theta \le 1)$$

因为函数$P(x, y)$在D 内有一阶连续偏导数，所以$P(x, y)$ 在D 内连续,则有

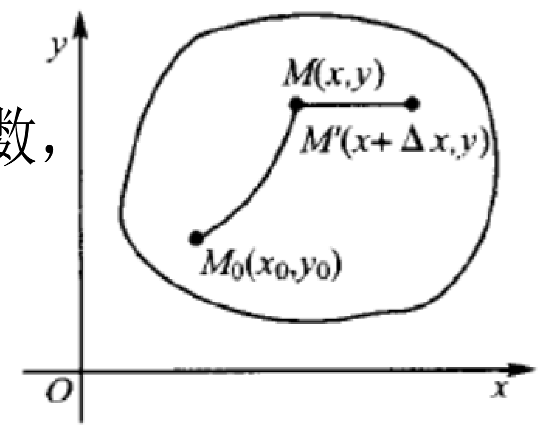
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

(2) 在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的值与积分路径无关,即 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

(3) 在 D 内表达式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分,

即 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

同理可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$



因为$P(x, y), Q(x, y)$在D 上连续，所以$u(x, y)$有连续偏导数，故$u(x, y)$可微，则有

$$du(x, y) = Pdx + Qdy.$$

(3) 在 D 内表达式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,

即 $$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

(4) 在 D 内有: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

证明 $(3)\Rightarrow(4)$

由于存在某一函数 $u(x,y)$, 使得

$$du(x,y)=Pdx+Qdy.$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P,\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$, 从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

因为 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内有一阶连续偏导数，所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 在 D 内连续，

从而有 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

即有 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

在 D 内处处成立.

(4) 在 D 内有: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(1) 对于 D 内任意分段光滑的闭曲线 L,有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

证明 $(4)\Rightarrow(1)$

设L 为D 内任一闭曲线，它所围成区域记为G, 由于D 是单连通区域，则 $G\subset D$, 由格林公式有

$$\oint_L Pdx+Qdy=\pm\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

其中，当L取正向时，取**+** 号，否则取**-** 号.

备注

(1) 该定理非常重要，它给出了曲线积分与路径无关的充要条件，也指出了$Pdx+Qdy$ 是某一函数全微分的充要条件，在这些充要条件中，命题(4)在使用中最为方便.

(2) 定理中对D 的单连通区域的要求是必须的.

作业:习题 8-3

1(1)

2(2)

3

4

向量值函数在有向曲面上的积分

第二型曲面积分：

- 第二型曲面积分的概念与性质
- 第二型曲面积分的计算

一　第二型曲面积分的概念与性质

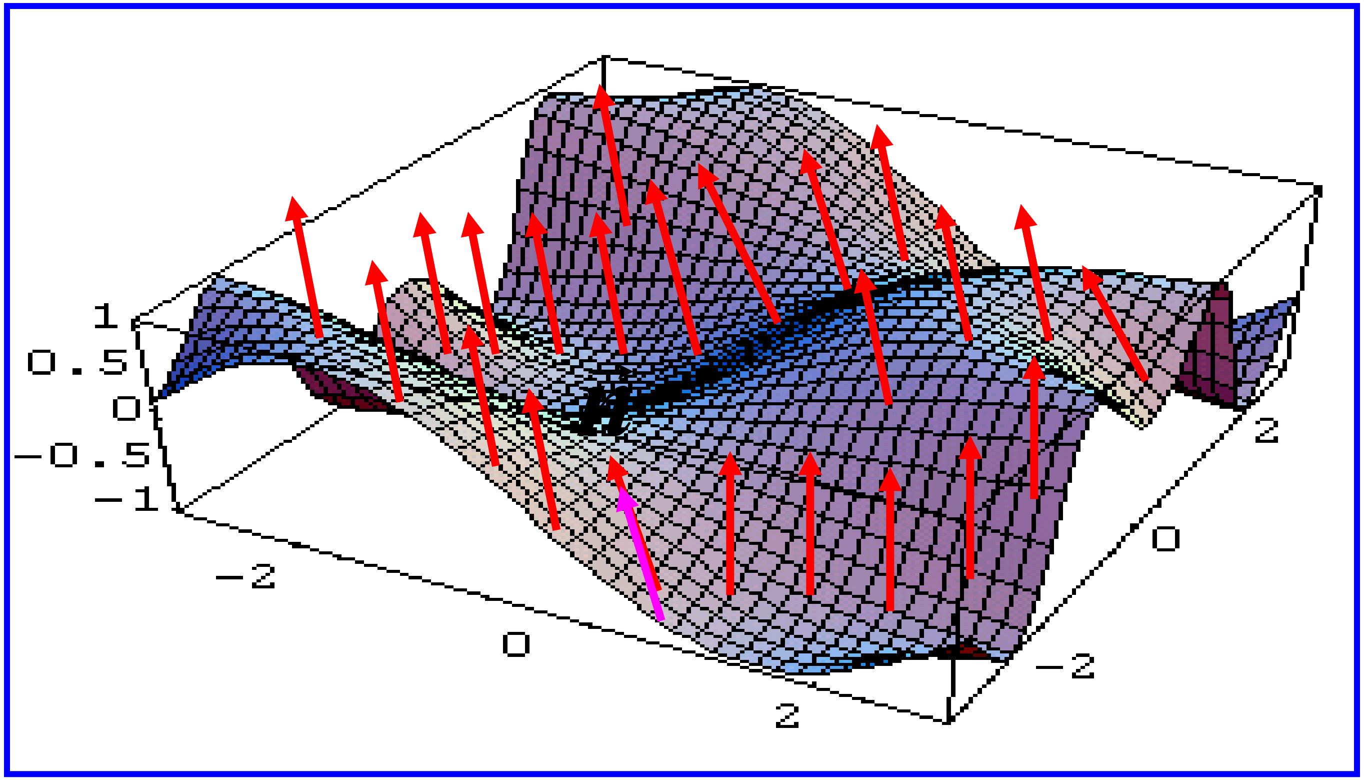
曲面的分类: 1. 双侧曲面; 2. 单侧曲面.

在光滑曲面S上取一定点M_0, 则曲面S在点M_0处的单位法向量有两个方向，选定其中的一个方向作为曲面S在该点M_0处的单位法向量，并记为n_0.

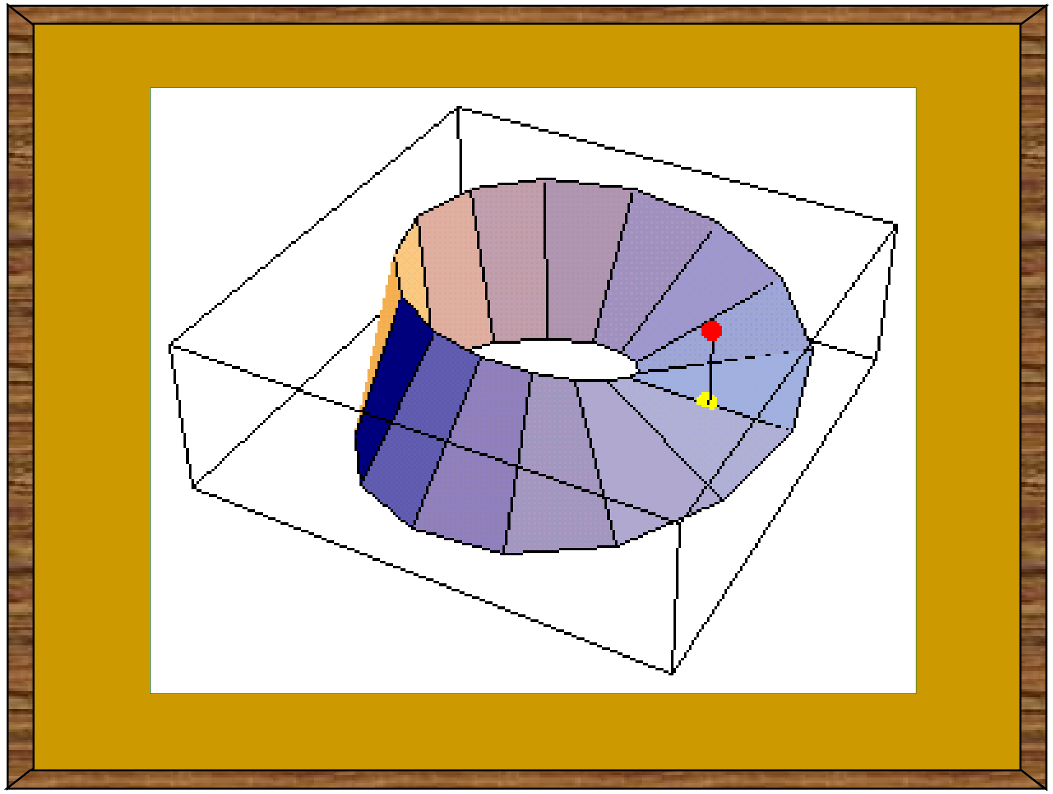
如果S上动点M从点M_0出发, 在曲面S上连续移动而不超过S的边界回到M_0时，其单位法向量与出发前的方向n_0相同，则称曲面S为双侧曲面，否则称为单侧曲面.

1. 双侧曲面;

典型双侧曲面



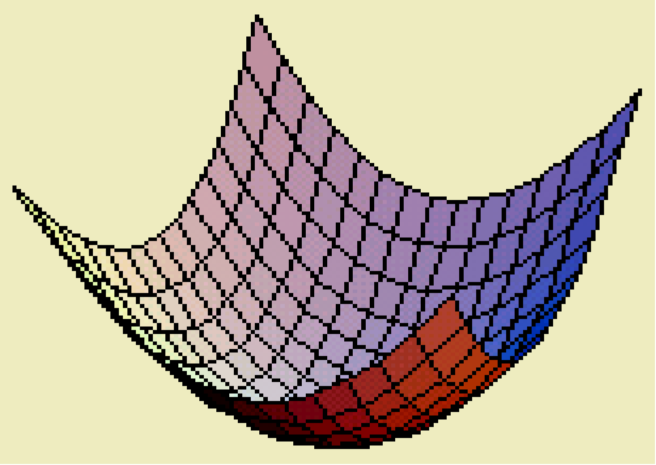
典型单侧曲面:　　莫比乌斯带



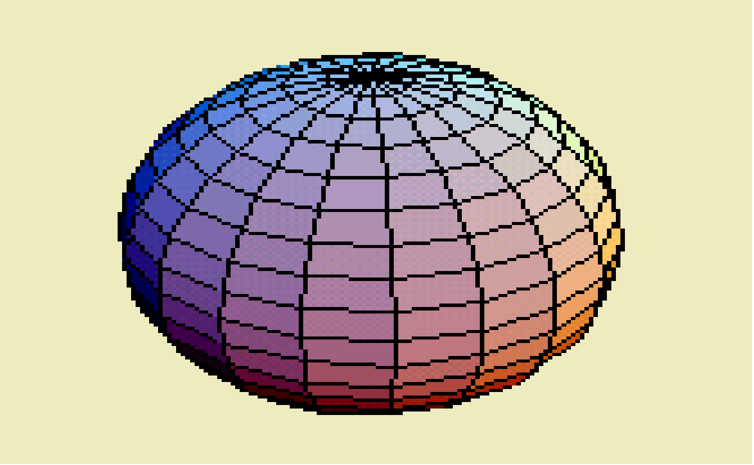
曲面法向量的指向决定曲面的侧.

决定了侧的曲面称为有向曲面.

观察以下曲面的侧 (假设曲面是光滑的)



曲面分上侧和下侧



曲面分内侧和外侧

曲面$S: z=z(x,y)$在任一点$M(x,y,z)$处的(切平面)的

法向量$\vec{n}=\left(-z_x,-z_y,1\right)$或$\vec{n}=\left(z_x,z_y,-1\right)$

若$\vec{n}$与z轴正向的夹角$\gamma<\dfrac{\pi}{2}$, 则规定曲面的侧为上侧, 其

单位法向量为$\vec{e}_n=\dfrac{-z_x\vec{i}-z_y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

若$\vec{n}$与z轴正向的夹角$\gamma>\dfrac{\pi}{2}$, 则规定曲面的侧为下侧, 其

单位法向量为$\vec{e}_n=\dfrac{z_x\vec{i}+z_y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

曲面的微元和有向曲面的微元

设曲面$S: z = z(x, y)$

曲面S的微元: $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$

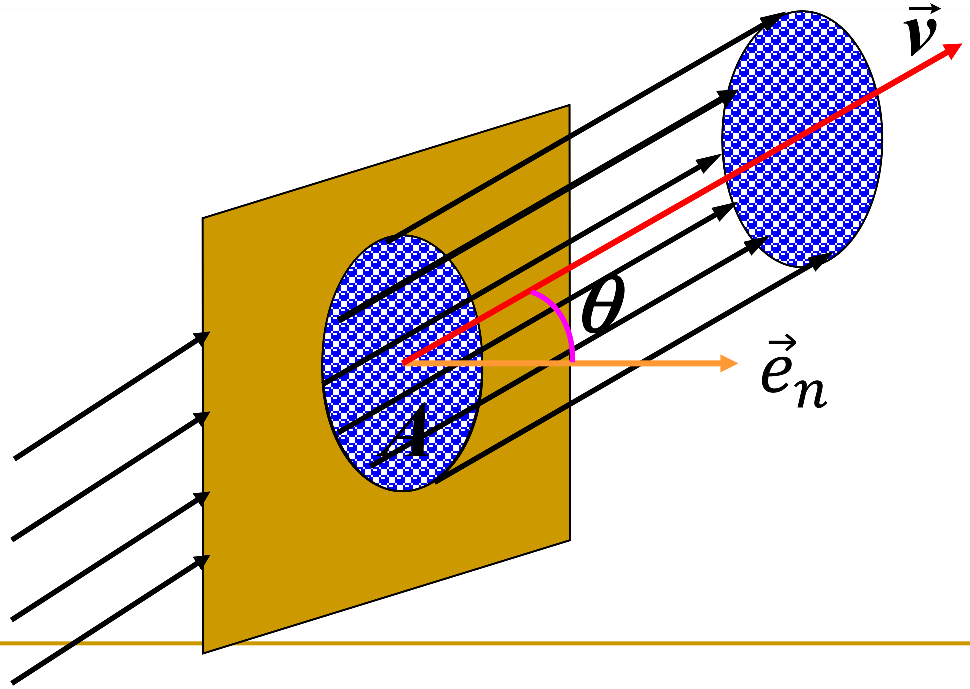
有向曲面S的微元:$\overrightarrow{dS} = \vec{e}_n dS$

曲面S的方向与$\vec{e}_n$一致

概念的引入

实例: 流向曲面一侧的流量.

(1)　流速场为常向量 $\vec{v}$, 有向平面区域 A, 求单位时间流过 A 的流体的质量Φ (假定密度为 1).



流量

$$\Phi = A|\vec{v}|cos\theta$$

$$= A\vec{v}\cdot\vec{e}_n$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{A}$$

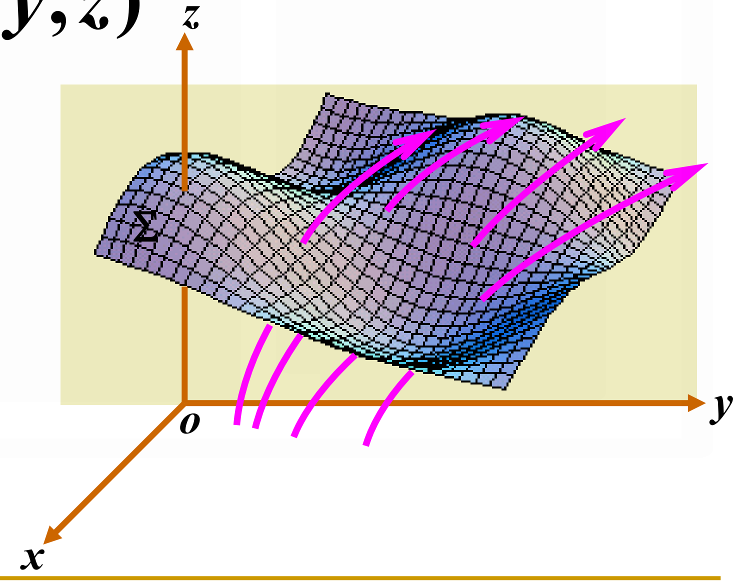
(2)　设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场由

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

给出, Σ 是速度场中的一片有向曲面, 函数

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$

都在 Σ 上连续, 求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量Φ.



1. 分割　把曲面Σ分成n小块Δs_i(Δs_i同时也代表第i小块曲面的面积),

在Δs_i上任取一点

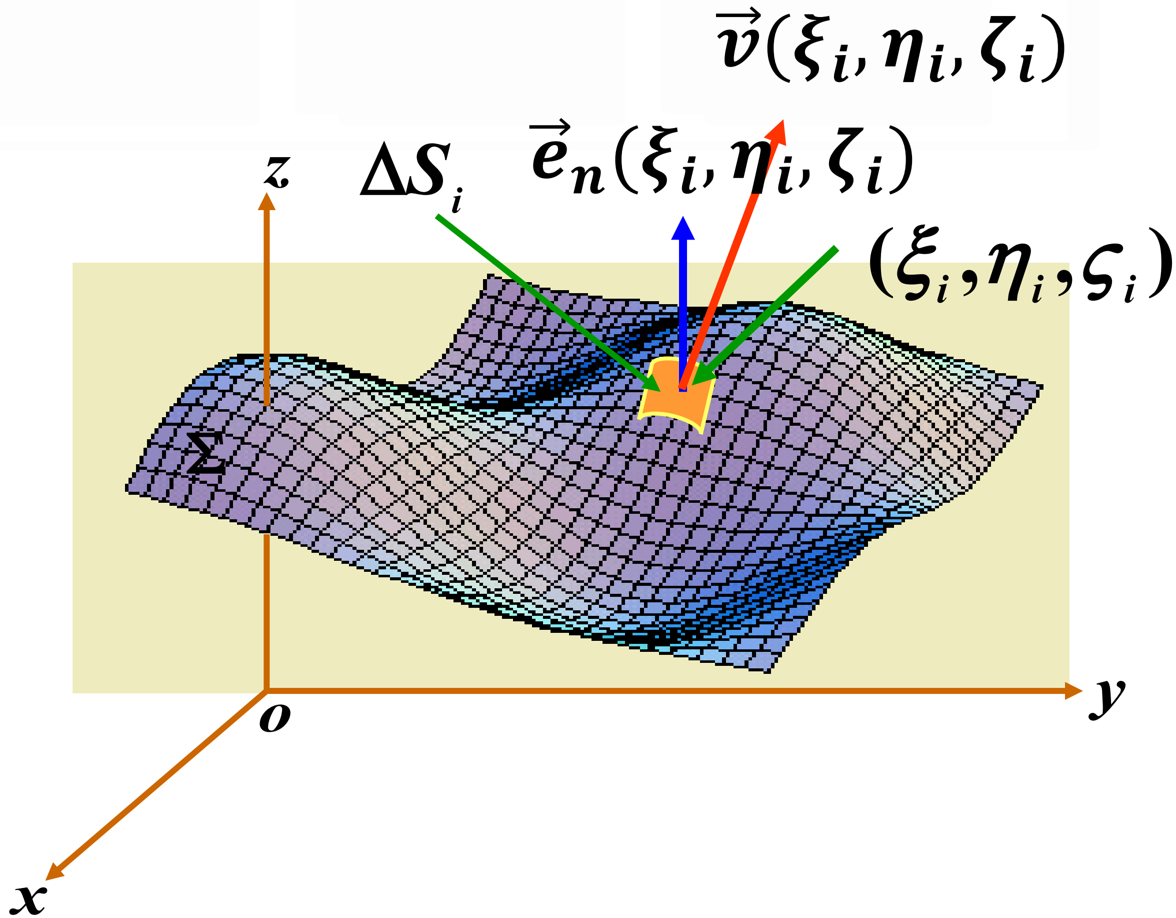
(ξ_i, η_i, ζ_i),

则该点流速为

$\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

单位法向量为

$\vec{e}_n(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$



通过Δs_i流向指定侧的流量的近似值为

$$\Delta\Phi_i \approx \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

2. 求和

通过Σ流向指定侧的流量

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n}\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

3. 取极限

记$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i$的直径$\}$，令$d\to 0$，则流量为

$$\Phi=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

即$\Phi=\iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n(x,y,z)dS$

定义: 设S为光滑有向曲面,$\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}$为曲面$\boldsymbol{S}$上任一点$\boldsymbol{M}$处的单位法向量,其方向与$S$指定侧一致,设向量值函数

$$A(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$$

其中P,Q,R在S上有界,若数量积$A\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}$在$S$上的第一型曲面积分存在,则称此积分值为$A(x,y,z)$在有向曲面$S$上的第二型曲面积分,记为

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{dS}$$

若记$\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}(x, y, z)dS$, 则

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}}(x, y, z) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}(x, y, z)\boldsymbol{dS} = \iint_S \vec{\boldsymbol{A}}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$$

若记$\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = (\cos\alpha\, dS, \cos\beta\, dS, \cos\gamma\, dS),$$

$\mathrm{d}S$ 在三个坐标面的投影记为:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}S, \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \cos\beta\mathrm{d}S, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\mathrm{d}S$$

则

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \boldsymbol{Pdydz} + \boldsymbol{Qdzdx} + \boldsymbol{Rdxdy}$$

注意:

(1) 设S的另一侧为S^-, 则

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S^-} \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

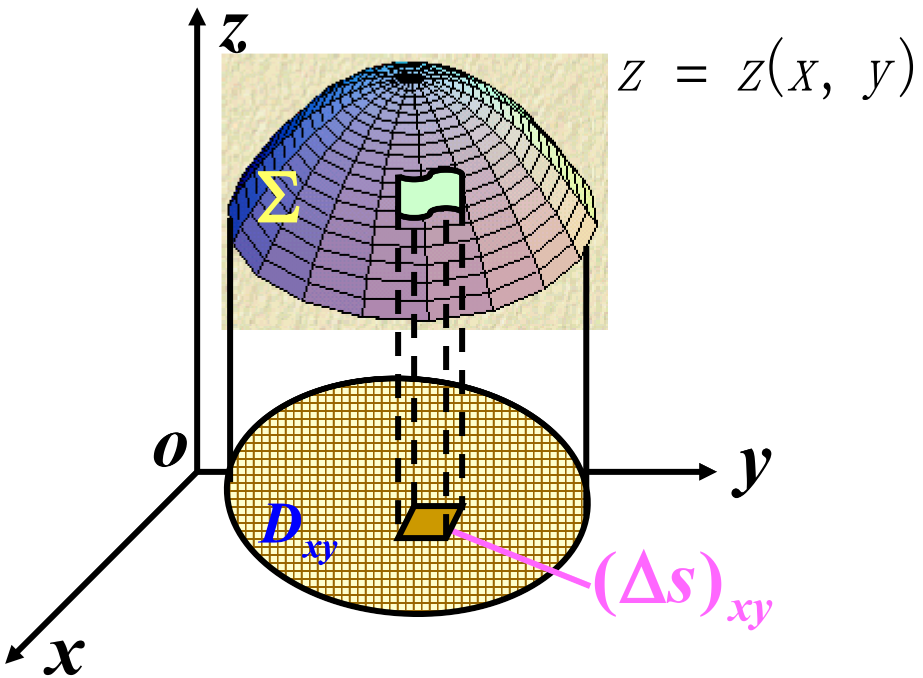
(2) 若 S 可分解为 S_1 与 S_2 两部分, 即 $S = S_1 + S_2$

且 S_1 与 S_2 的侧与 S 的侧一致, 则

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

二 第二型曲面积分的计算

设积分曲面 S 是由方程$z=z(x,y)$所给出的曲面上侧, S 在xoy面上的投影区域为D_{xy}, 函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数, 被积函数 P, Q, R在 S 上连续.



1.现取上侧: $\vec{n}=(-z_x,-z_y,1), \vec{e}_n=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

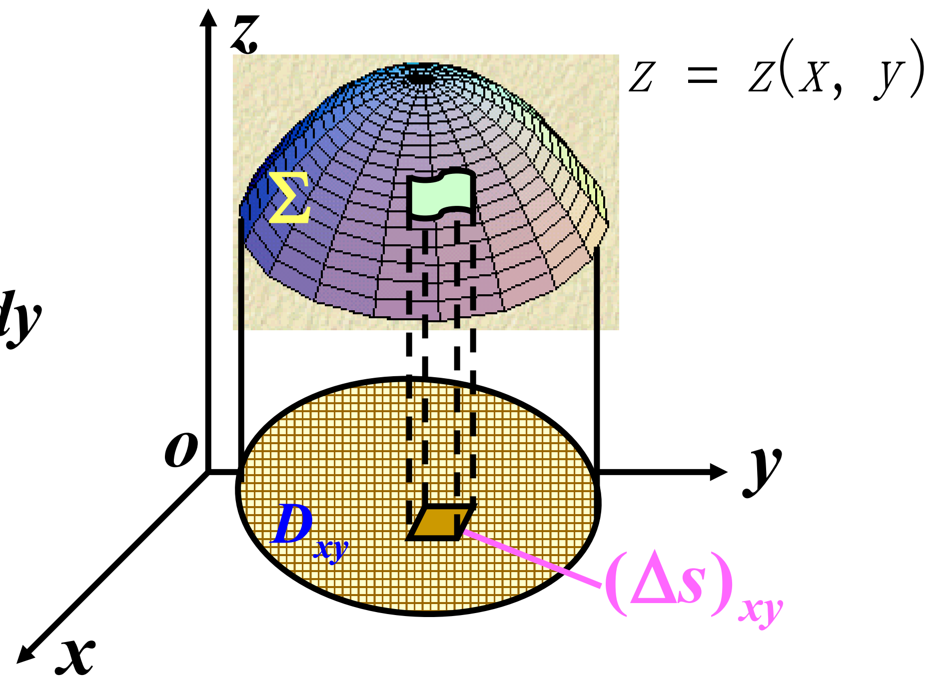
设S在xoy面上的投影为D_{xy}, 则

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_S (A\cdot\vec{e}_n)dS=\iint_{D_{xy}}[\vec{A}(x,y,z(x,y))\cdot\vec{n}]dxdy$$

2.若取下侧，则

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_S (A\cdot\vec{e}_n)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}[\vec{A}(x,y,z(x,y))]\cdot(-\vec{n})dxdy$$



于是有,

当曲面方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 时,(侧分上,下侧)

取 $\vec{n}=(-z_x-z_y,1)$, 则 $\iint\limits_{S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\pm\iint\limits_{D_{xy}}[\vec{A}(x,y,z(x,y))\cdot\vec{n}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(上侧为正，下侧为负)

当曲面方程为 $x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$ 时,(侧分前,后侧)

取 $\vec{n}=(1,-x_y-x_z)$, 则 $\iint\limits_{S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\pm\iint\limits_{D_{yz}}[\vec{A}(x(y,z),y,z)\cdot\vec{n}]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(前侧为正，后侧为负)

当曲面方程为 $y=y(x,z),(x,z)\in D_{xz}$ 时,(侧分左,右侧)

取 $\vec{n}=(-y_x,1,-y_z)$, 则 $\iint\limits_{S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\pm\iint\limits_{D_{xz}}[\vec{A}(x,y(x,z),z)\cdot\vec{n}]\mathrm{d}x\mathrm{d}z$

(右侧为正，左侧为负)

第一种计算方法

当曲面 S 的方程为 $z=z(x,y)$ 时,第二类曲面积分的计算可归结为:

1. 取 $\vec{n}=(-z_x\ -z_y,1)$;
2. S 在 xoy 上的投影: D_{xy}
3. 确定 $\vec{A}=(P,Q,R)$,则(将 $z=z(x,y)$ 代入)

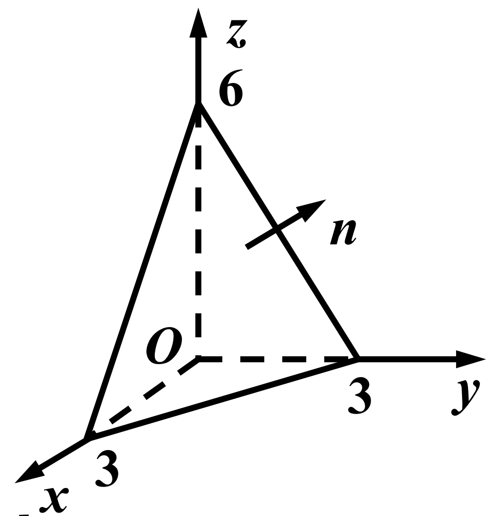
$$\iint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\pm\iint_{D_{xy}}[\vec{A}(x,y,z(x,y))\cdot\vec{n}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. 确定符号:上侧取"+",下侧取"−"

【例】计算曲面积分

$$\iint_S xydydz - x^2dzdx + (x+z)dxdy,$$

其中S是平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$位于第一卦限部分的上侧.



解 S在xoy平面的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x,y)|0 \le y \le 3-x, 0 \le x \le 3\},$$

平面S指向上侧的法向量为

$$n = (-z_x, -z_y, 1) = (2,2,1).$$

$$A(x,y,z) = (xy, -x^2, x+z),$$

从而

$$\iint_{D_{xy}} (xy, -x^2, x+6-2x-2y)\cdot(2,2,1)dxdy$$

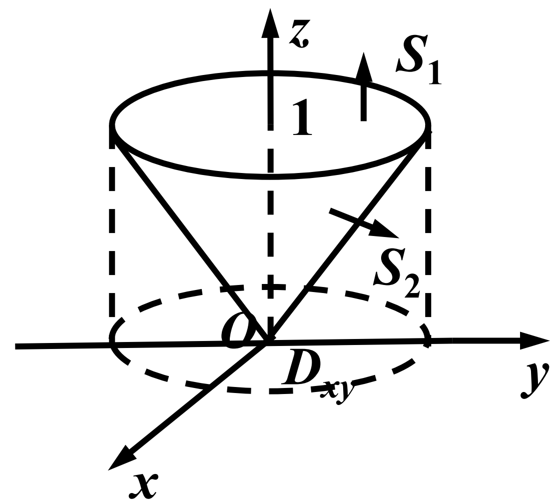
$$= \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 + 6 - x - 2y)\, dxdy$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2xy - 2x^2 + 6 - x - 2y)\, dy = \frac{27}{4}.$$

【例】某流体的流速为 $v=(x,y,z)$，求流体在单位时间内通过上半锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面 $z=1$所围成椎体表面向外流出的流量.

解 椎体外表面S由S_1,S_2组成，流量

$$\Phi=\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$



S_1的方程和法向量为: $z=1, n_1=(0,0,1)$, S_2的方程为: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 指向上侧的法向量为

$$n_2=(-z_x,-z_y,1)=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right).$$

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{D_{xy}}(x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dxdy=\iint_{D_{xy}}dxy=\pi.$$

$$\iint_{S_2}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{D_{xy}}\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=0.$$

所求流量为：$\Phi=\iint_{S_1}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\pi+0=\pi.$

二. 第二种计算方法:

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对于积分 $\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 若曲面 $S: z = z(x,y)$, 则

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} [(0,0,R(x,y,z))\cdot(-z_x,-z_y,1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上述公式可归结为: (1) 投影: S 在 xoy 上投影 D_{xy};

(2) 确定" $\pm$ "(上侧取" $+$ ", 下侧取" $-$ ");

(3) 代入: 将 $z = z(x,y)$ 代入 R 中.

对于 $\iint\limits_{S} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 曲面 $S: x = x(y,z)$, 有

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对于 $\iint\limits_{S} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 曲面 $S: y = y(x,z)$, 有

$$\iint\limits_{S} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

这就是把对坐标的曲面积分化成二重积分的计算公式

概括为：　一代、二投、三定号

代：将曲面的方程表示为二元显函数，然后代入被积函数，将其化成二元函数

投：将积分曲面投影到与有向面积元素（如$dxdy$）中两个变量同名的坐标面上（如xoy 面）

定号：由曲面的方向，即曲面的侧确定二重积分的正负号

注

① 积分曲面的方程必须表示为**单值显函数**

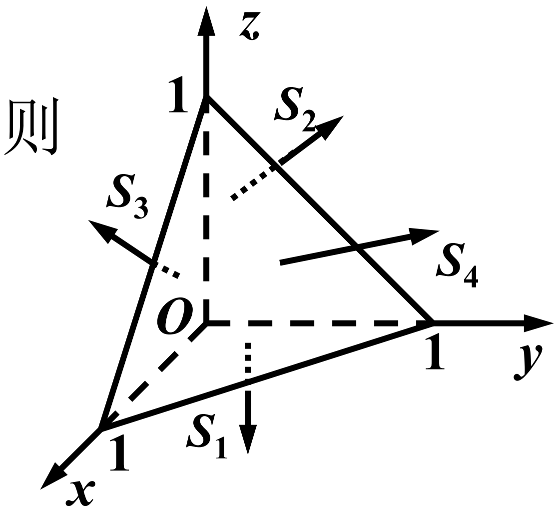
否则分片计算，结果相加

②确定正负号的原则：

曲面取上侧、前侧、右侧时为**正**

曲面取下侧、后侧、左侧时为**负**

【例】计算$I = \oiint\limits_{S} z^2 dxdy$,其中$S$为平面$x+y+z=1$与三个坐标面所围立体表面的外侧．这里记号$\oiint\limits_{S}$表示沿闭合曲面$S$积分．



解 S由S_1, S_2, S_3, S_4组成，其中S_1, S_2, S_3分别为xoy, yoz, zox的坐标面，$S_4: x+y+z=1$. 则

$$\iint_{S_1} z^2\,dxdy = -\iint_{D_{xy}} 0\,dxdy = 0.$$

S_2和S_3上$\cos\gamma = \frac{\pi}{2} = 0$, 所以

$$\iint_{S_2} z^2\,dxdy = \iint_{S_3} z^2\,dxdy = 0.$$

$$\iint_{S_4} z^2\,dxdy = \iint_{D_{xy}} (1-x-y)^2\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{12}. \qquad I = 0+0+0+\frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

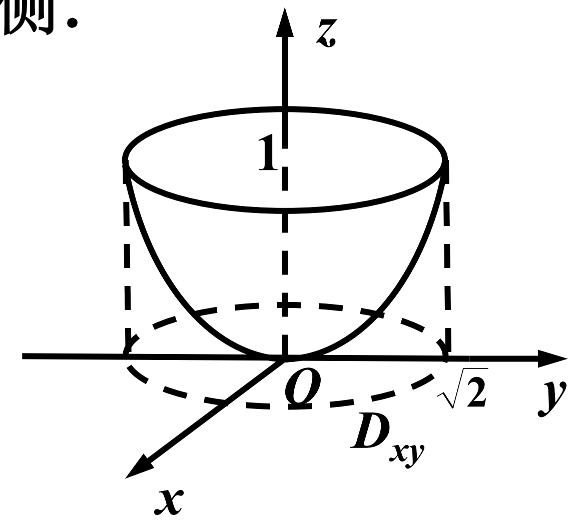
$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

第三种计算方法 : 坐标面转换法

利用: $\cos\alpha \,\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\cos\beta \,\mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$; $\cos\gamma \,\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例如 : $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha \,\mathrm{d}S = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma \,\mathrm{d}S = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【例】计算$I=\iint\limits_S (x+z^2)dydz - zdxdy$,其中$S$是旋转抛物面$2z=x^2+y^2$介于平面$z=0$及$z=1$之间的部分的下侧.



解 S在xoy平面上的投影为

$$D_{xy}=\left\{(r,\theta)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}\right\}.$$

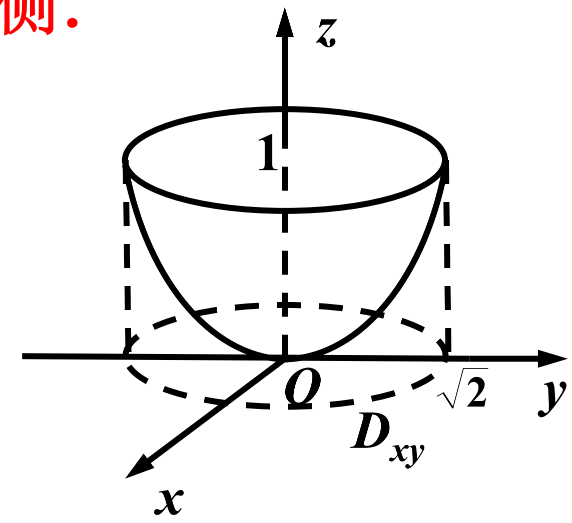
$$\iint_S -z\,dxdy=\iint_{D_{xy}} z\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{2}\cdot rdr=\pi.$$

因为S的法向量为$\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)$, 所以$\cos\alpha=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$,

$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$,所以

【例】计算 $I=\iint\limits_S (x+z^2)dydz - zdxdy$, 其中$S$是旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$及 $z=1$之间的部分的下侧.



$$\iint_S (x+z^2)\,dydz = \iint_S (x+z^2)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$$

$$= -\iint_S (x+z^2)\,xdxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(x + \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right) x\,dxdy$$

因为D_{xy}关于y轴是对称的，所以$\iint_{D_{xy}} \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\cdot x\,dxdy = 0.$

$$\iint_S (x+z^2)\,dydz = \iint_{D_{xy}} x^2\,dxdy$$

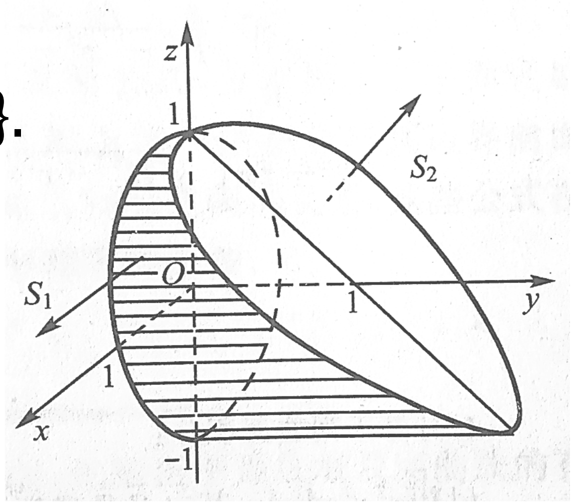
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos^2\theta \cdot rdr = \pi$$

$I = 2\pi.$

【例】计算$I=\iint_S(-x)\,dydz+(z+1)dzdx$, 其中$S$为圆柱面$x^2+z^2=1$被平面$y+z=1$和$y=0$所截得部分的外侧.

解 S在yoz平面上的投影为

$$D_{yz}=\{(y,z)|-1\le z\le 1-y, 0\le y\le 2\}.$$



S按yoz面分成前、后两部分S_1,S_2, S_1取前侧, S_2取后侧，它们的方程为

$$S_1: x=\sqrt{1-z^2}, (y,z)\in D_{yz},$$

$$S_2: x=-\sqrt{1-z^2}, (y,z)\in D_{yz},$$

于是

$$\iint_S(-x)\,dydz=\iint_{S_1}(-x)\,dydz+\iint_{S_2}(-x)\,dydz$$

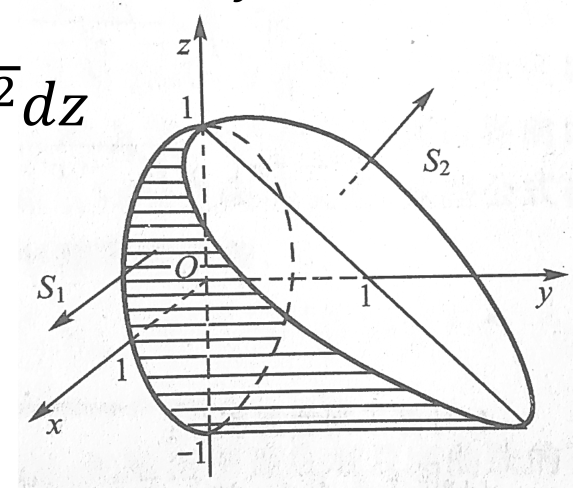
$$=\iint_{D_{yz}}(-\sqrt{1-z^2})\,dydz-\iint_{D_{yz}}(\sqrt{1-z^2})\,dydz$$

$$= \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{1-z^2})\, dydz - \iint_{D_{yz}} (\sqrt{1-z^2})\, dydz$$

$$= -2\iint_{D_{yz}} \sqrt{1-z^2}\, dydz = -2\int_{-1}^{1} dz \int_0^{1-z} \sqrt{1-z^2}\, dy$$

$$= -2\int_{-1}^{1} (1-z)\sqrt{1-z^2} dz = -4\int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz$$

$$= (-4)\cdot\frac{\pi}{4} = -\pi.$$



S上任意点向外的法向量与y轴正向的夹角 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 因而$dzdx = \cos\beta\, dS = 0$, 从而

$$\iint_S (z+1)\, dzdx = 0,$$

所以

$$I = \iint_S (-x)dydz + (z+1)\, dzdx = -\pi + 0 = \pi.$$

【例】计算$I=\oiint xdydz+ydzdx+zdxdy$其中$S$为球面

$x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧.

解 根据对称性

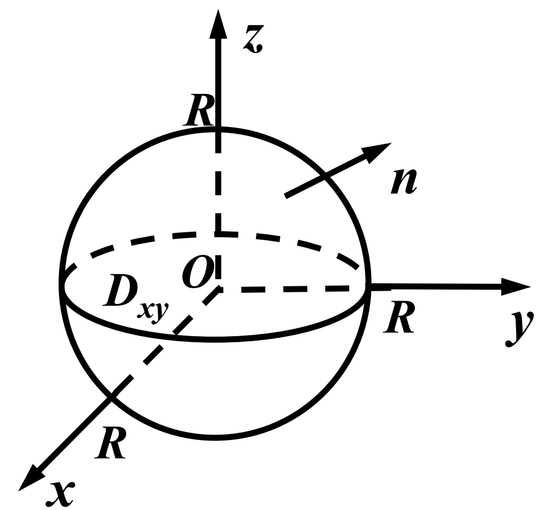
$$I=\oiint_S x\,dydz+ydzdx+zdxdy=3\oiint_S z\,dxdy$$

$$=3\left[\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy-\iint_{D_{xy}}(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy\right]$$

$$=6\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,rdr$$

$$=-6\pi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,d(R^2-r^2)=4\pi R^3.$$



例 计算 $\iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$ S是柱面 $x^2+y^2=1$被平面 $z=0$及 $z=3$所截得的第一卦限部分的前侧.

解 因为曲面的法向量与z轴是垂直的，所以$\cos\gamma = 0$, 从而

$$\iint_S z\,dxdy = 0$$

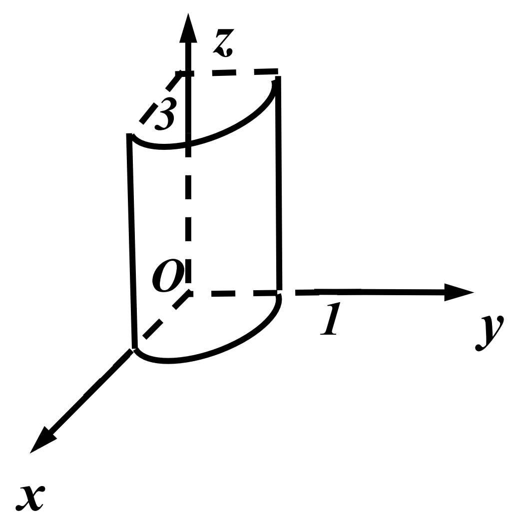
将S投影到yoz平面，投影区域为

$$D_{yz} = \{(y,z)|0 \le y \le 1, 0 \le z \le 3\}.$$

$$\iint_S x\,dydz = \iint_{D_{yz}} x\,dydz$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^3 \sqrt{1-y^2}\,dz$$

$$= \frac{3\pi}{4}.$$



同样的方法，将S投影到xoz平面，投影区域为

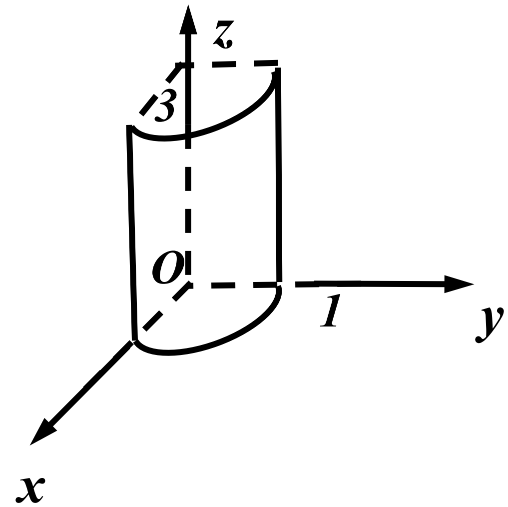
$$D_{zx} = \{(z,x) | 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 3\}.$$

$$\iint_S \ y\,dzdx = \iint_{D_{yz}} x\,dzdx$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^3 \sqrt{1-x^2}\,dz$$
$$= \frac{3\pi}{4}.$$

所以

$$\iint_S \ zdxdy + xdydz + ydzdx$$

$$= 0 + \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$



作业

8-2:

1(2)(4);2;4;5;6;7;8

8.4 高斯公式,斯托克斯公式

格林公式

建立了第二类平面曲线积分与二重积分的联系;

高斯公式

建立了第二类曲面积分与三重积分的联系;

斯托克斯公式

建立了第二类空间曲线积分与曲面积分的联系.

高斯公式

定理 设空间闭区域V是由光滑或分片光滑的封闭曲面 S 所围成的单连通区域, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 上有一阶连续偏导数,则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 S 取外侧.

Gauss公式的实质

表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

注

1. 若S不满足上述条件，可以引进若干张辅助曲面将S分成几个有限的小区域使之都满足上述条件

注意到沿辅助曲面相反两侧的两个曲面积分绝对值相等，而符号相反，相加时正好抵消，因此上述公式对这样的区域也成立，

故一般地

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

2。公式成立的条件

(1) Σ – 封闭曲面

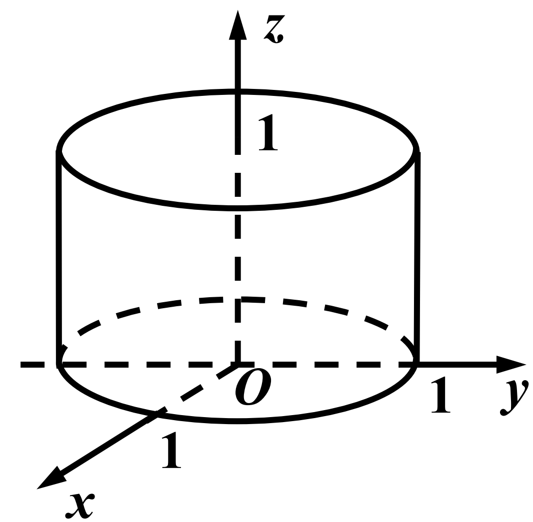
(2) Σ – 方向取外侧

(3) $\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$连续

根据Gauss 公式，用三重积分来计算曲面积分是比较方便的，但Gauss 公式同时也说明，可用曲面积分来计算三重积分

【例】计算 $I=\iint\limits_{S}(y-z)xdydz+(x-y)dxdy$, 其中$S$为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$，$z=1$所围成的空间闭区域V的边界曲面的外侧.

解 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$. 利用高斯公式得



$$I=\oint\!\!\!\oint_S (y-z)x\,dydz+(x-y)dxdy$$

$$=\iiint_V (y-z)\,dxdydz$$

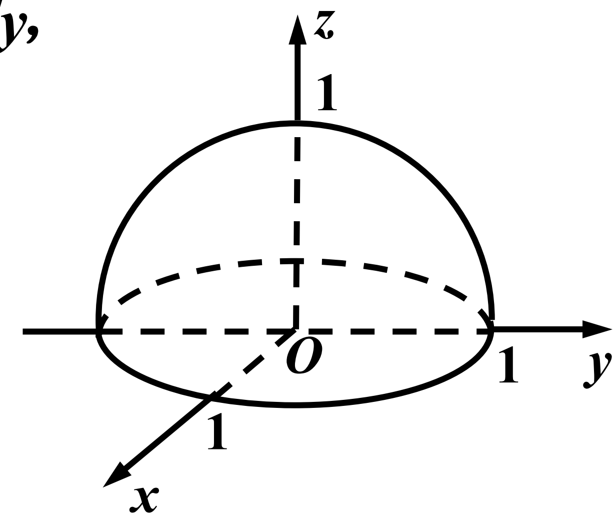
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^1(r\sin\theta-z)\,dz$$

$$=-\frac{\pi}{2}.$$

【例】计算曲面积分

$$I=\iint_S 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$$

其中S是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.



解　引进辅助曲面S_1:

$S_1: z=0, (x,y)\in D_{xy}$,取下侧

$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$,

则有

$$I=\oiint_{S+S_1} 2x^3\,dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$-\oiint_{S_1} 2x^3\,dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

由高斯公式知

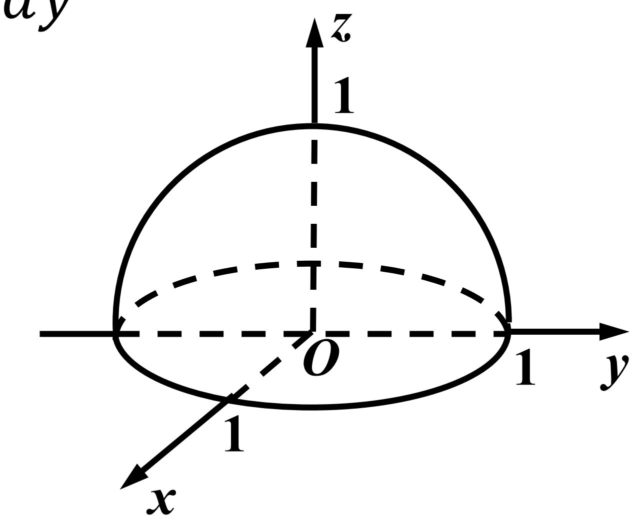
$$\oiint_{S+S_1} 2x^3\,dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

$$= \iiint_V \ 6(x^2+y^2+z)\,dxdydz$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z+r^2)\,rdz$$

$$= 12\pi\int_0^1 [\frac{1}{2}r(1-r^2)^2 + r^3(1-r^2)]dr$$

$$= 2\pi.$$



$$\iint_{S_1} 2x^3\,dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$$

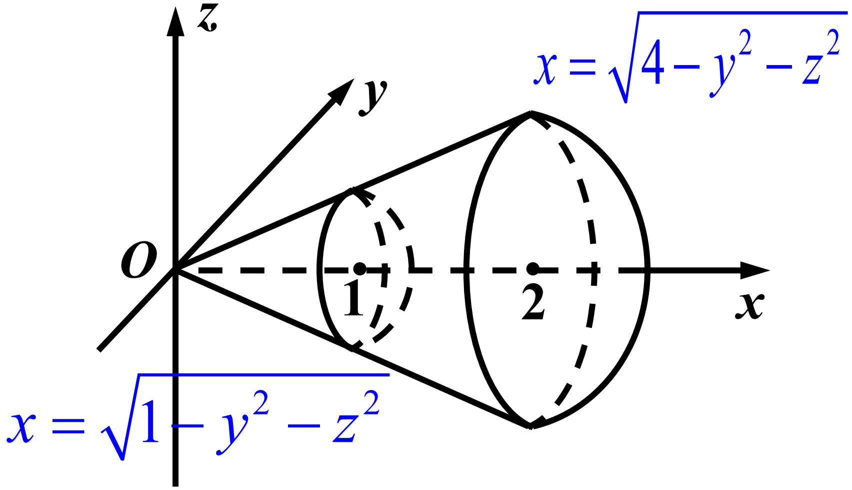
$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1}(-3)\,dxdy = 3\pi,$$

因此$I = 2\pi - 3\pi = -\pi.$

【例】设函数$f(u)$具有连续导数，计算

$$I=\iint_{S} x^{3}dydz+[y^{3}+yf(yz)]dzdx+[z^{3}-zf(yz)]dxdy,$$

其中S是锥面 $x=\sqrt{y^{2}+z^{2}}$ 和球面$x=\sqrt{1-y^{2}-z^{2}}$ 与 $x=\sqrt{4-y^{2}-z^{2}}$ 所围立体的表面外侧.



注 ① 应用Gauss 公式计算曲面积分时，要求曲面必须是封闭曲面，若不封闭，则需要添加一辅助曲面使其封闭，而在所添加的曲面上，曲面积分应是容易计算的，用Gauss 公式计算三重积分，最后减去所补曲面上的积分值，往往可使计算简化

② Gauss 公式要求曲面取外侧这一点也不容忽视，尤其是对非封闭曲面的曲面积分，所添加的辅助曲面的侧一定要和所给曲面的侧相容，若不满足外侧的要求，可利用反向性予以调整（相差一个负号）

$$\oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是曲面外侧上任一点处的外法向量的方向余弦.

斯托克斯(Stokes)公式

定理. 设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线, S 为以 L 为边界的分片光滑有向曲面, L 的正向与 S 的法向量构成右手系, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 S 内有一阶连续偏导数, 则有

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{dydz}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{dzdx}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{dxdy}$$

便于记忆形式

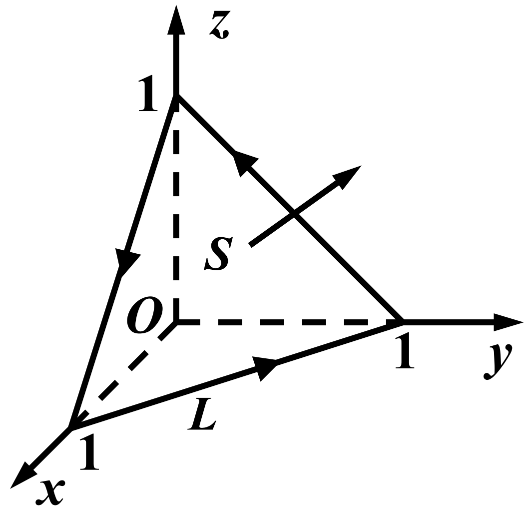
$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

另一种形式

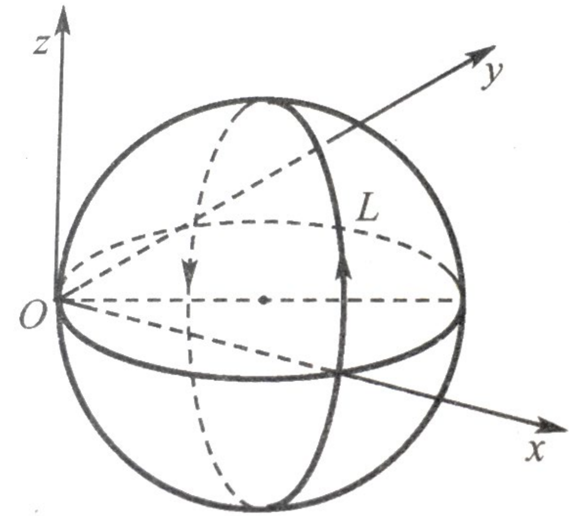
$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

其中$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

【例】计算曲线积分$I=\oint_L zdx+xdy+ydz$,其中L为平面 $x+y+z=1$被三个坐标面所截得的三角形S的整个边界，其正方向与这个三角形上侧的法向量成右手系. $\frac{3}{2}$



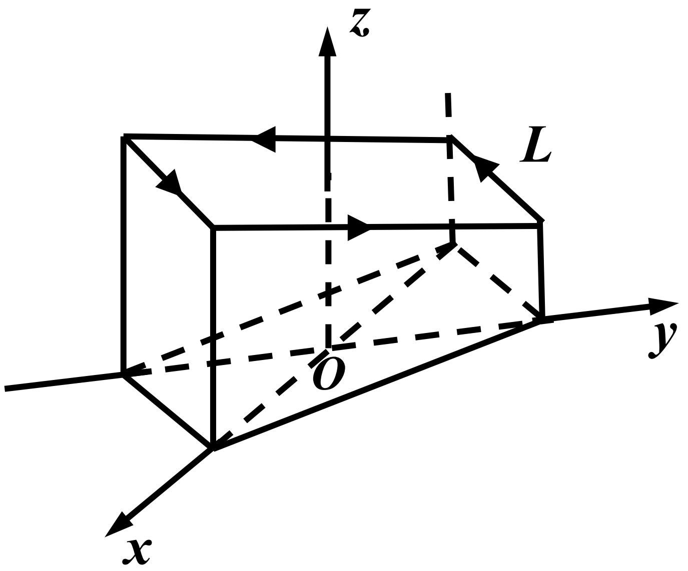
【例】计算曲线积分$\oint_L \ ydx+zdy+xdz$,其中$\boldsymbol{L}$为球面$x^2+y^2+z^2=2(x+y)$与平面$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{2}$的交线,$\boldsymbol{L}$的正向从原点看去是逆时针方向. $2\sqrt{2}\pi$



【例】计算

$$I=\int_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz,$$

其中L是平面 $x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去 L是逆时针. -24



作业:习题 8-3

5(2)(4)

6

8

10(2)(4)

8.5 场论简介

1. 向量场的散度

1. 通量的定义：

设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

沿场中某一有向曲面 S 的第二类曲面积分为

$$\Phi=\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}^0 dS$$

$$=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

称为向量场$\vec{A}(x,y,z)$通过有向曲面S指定侧的通量.

2. 散度:向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 在点M处的散度公式:

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_M$$

利用散度可将高斯公式表示成:

$$\iint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}(M)\mathrm{d}V$$

注：散度是一个数量，可以看作向量场产生的数量场，称为散度场。

高斯公式的物理意义：

$$\iint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{A}(M)\mathrm{d}V$$

高斯公式的左端表示单位时间内通过闭曲面S流向V外部液体的流量，如果规定从S内通过S流向外侧的流量为正流量，从S外通过S流向内侧的流量为负流量，则通过曲面S的总流量Φ等于通过S的正流量与负流量的代数和.

总流量$\boldsymbol{\Phi} > \mathbf{0}$, 在S内存在产生流体的**源**, 称在S内有**正源**.

总流量$\boldsymbol{\Phi} < \mathbf{0}$, 在S内有**洞**, 称在S内有**负源**.

总流量$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0}$, 在S内可能**无源**, 也可能同时存在正源和**负源**, **其代数和为零**.

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

$$\frac{1}{V}\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{V}\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\, dv$$

上式右端表示*V*内的“源”在单位体积内产生的流体总量的平均值，称为流速场*A*在*S*内的平均源强.

由积分中值定理，$\frac{1}{V}\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)}$

两边取极限，$\lim_{V\to M}\frac{1}{V}\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\boldsymbol{A}.$

散度div$\vec{A}$表示流体在点M处“正源”或“负源”的源头强度.

$\mathrm{div}\vec{A} > 0$, 表示该点处有“正源”

$\mathrm{div}\vec{A} < 0$, 表示该点处有“负源”

$\mathrm{div}\vec{A}$在场内处处为零，则称向量场A为无源场

例 设向量场$A(x,y,z)=(xy,ye^{z},xz)$,求$A(x,y,z)$在点$(0,1,0)$处的散度$\mathrm{div}A$.

例 置于原点的点电荷q产生的静电强度为

$$\vec{E}=\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

求静电场中点M处的散度$div\vec{E}$

点电荷产生的静电场强度E在原点外的区域上是无源场

1. 向量场的旋度

3. 环流量的定义：

设向量场

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

则沿场$\vec{A}$中某一封闭的有向曲线C上的曲线积分

$$\Gamma = \int_C \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

称为向量场$\vec{A}$沿曲线C按所取方向的环流量．

利用stokes公式，有

环流量 $\Gamma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdot d\vec{s}$

4. 旋度的定义：

称向量 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ 为向量场的旋度 $(rot\vec{A})$.

旋度 $rot\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

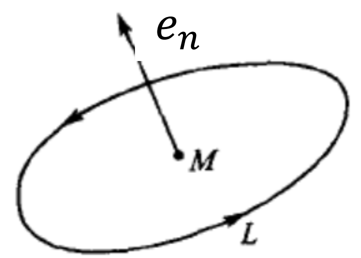
$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

斯托克斯公式的向量形式

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{s}=\iint_S rot\,\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

设点$\boldsymbol{M}$是向量场$\boldsymbol{A}$ 中的一点，在点$\boldsymbol{M}$ 处取定一个方向，用单位向量$\boldsymbol{e_n}$ 表示，过点$\boldsymbol{M}$ 作一个小平面块$\Delta \boldsymbol{S}$,其面积也记为$\Delta \boldsymbol{S}$,并以$\boldsymbol{e_n}$ 代表点$\boldsymbol{M}$ 处$\Delta \boldsymbol{S}$ 的法向量.设$\Delta \boldsymbol{S}$ 的边界为$\boldsymbol{L}$,且$\boldsymbol{L}$ 走向与$\boldsymbol{e_n}$ 的方向符合右手法则，由斯托克斯公式和曲面积分的中值定理，有

$$\frac{1}{\Delta S}\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\Delta S}\iint_{\Delta S} rot\vec{A}\cdot d\vec{S}$$



$$= \frac{1}{\Delta S}\iint_{\Delta S} rot\vec{A}\cdot \overrightarrow{e_n} dS$$

$$= (rot\vec{A}\cdot \overrightarrow{e_n})_{M^*}$$

$\frac{1}{\Delta S}\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{s}$是环量对面积的变化率，称为$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{L}$上沿方向$e_n$的平均环量密度.

令ΔS向M处收缩, 得

$$\lim_{\Delta S \to M} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \ \vec{A} \cdot d\vec{s} = \lim_{\Delta S \to M} (rot\vec{A} \cdot \overrightarrow{e_n})_{M^*}$$

$$= (rot\vec{A} \cdot \overrightarrow{e_n})_M$$

称为***A***在点*M*处沿方向e_n的环量密度.

旋度：方向是向量场A取得最大环量密度的方向，模为最大环量密度。

【例】求向量场 $\boldsymbol{A}=x^2yz\boldsymbol{i}+xy^2z\boldsymbol{j}+xyz^2\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}|_{(1,-1,2)}$.

$$(3,3,0)$$

8.5.3 几类特殊的场

1. 无源场：若散度 $\operatorname{div}\vec{A}(M)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0, \forall M\in G$

则称 $\vec{A}=(P,Q,R)$为无源场.

2. 无旋场: 旋度 $\operatorname{rot}\vec{A}(M)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0, \forall M\in G$

3. 有势场: $\vec{A}=(P,Q,R)$为某函数 u 的梯度, 即 $\vec{A}=\nabla u$;

称$\vec{A}$是有势场, u 为 $\vec{A}$ 的势函数.

4. 调和场：$\operatorname{div}\vec{A}(M)=0, \operatorname{rot}\vec{A}(M)=0, \forall M\in G$.

【例】证明向量场 $A = -2yi - 2xj$ 为平面调和场.

作业:习题 8-5

2

3

4(1)

9

10