第一章　集　合

1 集合的运算

一、集合的概念

定义 1　设有两个集合 A，B。

若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集或 B 包含 A，记为 $A\subset B$或$B\supset A$。

若 $A\subset B$，且存在 $x\in B$ 满足 $x\notin A$，则称 A 是 B 的真子集。

若 $A\subset B$且$B\subset A$，则称 A 与 B 相等或相同。

定义 2　设 Λ 是一个非空集合，对于每个 $\alpha\in\Lambda$，指定一个集合 A_α，于是得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$。

二、集合的运算

定义 3　设 A，B 是两个集合。

（1）称集合 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A或x\in B\}$ 为 A 与 B 的并集，即由 A 与 B 的全部元素构成的集合；

（2）称集合 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A且x\in B\}$ 为 A 与 B 的交集，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合；

定理 1（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

更一般地有

（4）$A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\left(A\cup B_\alpha\right)$；

（5）$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\left(A\cap B_\alpha\right)$；

（6）设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两集列，有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$。

定义 4　设 A，B 是两个集合，称集合 $A\backslash B=\{x\,|\,x\in A且x\notin B\}$ 是 A 和 B 的差集，即在集合中而不在集合 B 中的一切元素构成的集合。如果 $B\subset A$，则称 $A\backslash B$ 为 B 相对于 A 的补集或余集。

定理 2（1）$A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing, \left(A^c\right)^c=A, X^c=\varnothing, \varnothing^c=X$；

（2） $A\setminus B=A\cap B^c$；

（3）若 $A\subset B$，则 $A^c\supset B^c$；

（4）若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$；

（5） $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\setminus C),(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$。

$\boxed{\text{定理 3}}$ （D Morgan 法则）

（1） $X\setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}(X\setminus A_\alpha)$；

（2） $X\setminus \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(X\setminus A_\alpha)$；

特别的，若 X 为全集，有

（3） $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha{}^c$；

（4） $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha{}^c$。

定义 5　设 X 与 Y 是两个集合，称集合 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$ 是 X 与 Y 的直积集，简称 X 与 Y 的直积，其中 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 是指 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$。

三、集合列的极限集

定义 6　设 $\{A_k\}$ 是一列集合，分别称集合

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\{x\mid$ 存在无穷多个k，使 $x\in A_k\}$

$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\{x\mid$ 只有有限个k，使 $x\notin A_k\}$

是集合列 $\{A_k\}$ 的上极限集与下极限集。

注解：① $x\in\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k \Leftrightarrow$ 存在 $\{A_k\}$ 的子集列 $\{A_{k_i}\}$，使 $x\in A_{k_i}$， $i=1,2\cdots$；

② $x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k \Leftrightarrow$ 存在 $N>0$，当 $k>N$ 时， $x\in A_k$；

③ $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\subset\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$

$\boxed{\text{定理 4}}$ 设集列 $\{A_k\}$，则（1） $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$；（2） $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$。

注解：① $E\setminus\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$

② $E\setminus\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$

定理 5（1）若$\{A_k\}$是单调递增集列，则 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$

（2）若$\{A_k\}$是单调递减集列，则 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$

四、集类

定义 8 设 X 为一个集合，ζ 是 X 上的一个非空集类，如果对任何 $E_1,E_2\in\zeta$，都有

$$E_1\cup E_2\in\zeta,E_1\setminus E_2\in\zeta,$$

则称ζ为 X 上的一个环。如果还有 $X\in\zeta$，则称ζ为 X 上的一个代数或域。

如果对任何一列 $E_k\in\zeta$，均有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\in\zeta,E_1\setminus E_2\in\zeta$，

则称ζ为 X 上的σ 环，如果还有 $X\in\zeta$，则称ζ为 X 上的一个σ 代数或σ 域。

定理 6 若ζ为环，则

（1）$\varnothing\in\zeta$

（2）任意 $E_1,E_2\in\zeta$，有 $E_1\cap E_2\in\zeta$

（3）若$\zeta_\alpha(\alpha\in\Lambda)$是 X 上的环（或代数），则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\zeta_\alpha$是 X 上的环（或代数）。

定理 7 设ζ为σ 环，则

（1）ζ为环；

（2）对任意 $E_n\in\zeta,n=1,2,\cdots$，有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\zeta$；

（3）对任意 $E_n\in\zeta,n=1,2,\cdots$，有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\in\zeta,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\in\zeta$；

（4）$\zeta_\alpha(\alpha\in\Lambda)$为 X 上$\sigma$ 环（σ 代数），则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\zeta_\alpha$是 X 上$\sigma$ 环（σ 代数）。

定理 8 设 A 是由 X 的某些子集构成的集类，则存在唯一的环（或代数，σ 环，σ 代数）ζ，使

（1）$A\subset\zeta$；

（2）任何包含 A 的环（或代数，或 σ 环或 σ 代数）ζ^*，必有 $\zeta\subset\zeta^*$。

定义 9 定理 8 中的环（或代数，或 σ 环或 σ 代数）ζ 称为由集类 A 所张成的环（或代数，或 σ 环或 σ 代数），并用 $\zeta(A)$（或 $\Re(A)$ 或 $\zeta_\sigma(A)$ 或 $\Re_\sigma(A)$）来表示。

例题：设 X 为一非空集合，A 为 X 的单点集全体所成的集类，则由

① 集类 A 所张成的环 $\zeta(A)=\{B\,|\,B\text{是X的有限子集}\}$

若 X 为有限集，$\zeta(A)$ 也是代数、σ 环、σ 代数

② 若 $X=\{a_n\,|\,n\in N\}$，则 $\zeta(A)=\{B\,|\,B\text{是X的有限子集}\}$

$\zeta_\sigma(A)=\Re_\sigma(A)=2^A=\{B\,|\,B\subset X\}$

2 集合的势

一、映射

定义 1 有关映射的一些概念（舍）见教材 P9。

定理 1 设 $T:X\to Y$ 为映射，则

（1）当 $A_1\subset A_2\subset X$ 时，有 $T(A_1)\subset T(A_2)$；

（2）$T\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}T(A_\alpha)\,(A_\alpha\subset X,\alpha\in\Lambda)$；

（3）$T\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}T(A_\alpha)\,(A_\alpha\subset X,\alpha\in\Lambda)$；

（4）当 $B_1\subset B_2\subset Y$ 时，有 $T^{-1}(B_1)\subset T^{-1}(B_2)$；

（5）$T^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}T^{-1}(B_\alpha)\,(B_\alpha\subset Y,\alpha\in\Lambda)$；

（6）$T^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}T^{-1}(B_\alpha)\,(B_\alpha\subset Y,\alpha\in\Lambda)$；

（7）$T^{-1}(B^c)=\left(T^{-1}(B)\right)^c$

由此看出原像集的性质保持比像集的性质保持要好

注解：①、（3）中如：一个映射 f 把 X 全部映射成一个值，就可以造成左边为

空集即可;

②、一般$T^{-1}\left(T(A)\right)\supset A$，当T为单射时，有$T^{-1}\left(T(A)\right)=A$

③、一般$T\left(T^{-1}(B)\right)\subset B$，当T为满射时，有$T\left(T^{-1}(B)\right)=B$

定义 2 复合映射概念（舍）见教材 P10

二、集合的势

定义 3 设 A 和 B 为两集合，若存在从 A 到 B 的一一映射，则称集合 A 与 B 对等，记为 A~B

注解：①、对等关系是等价关系

②、设$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\},\{B_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$，其中$\{A_\alpha\}$两两互不相交，$\{B_\alpha\}$两两互不相交。若对任意的$\alpha\in\Lambda$，有$A_\alpha \sim B_\alpha$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \sim \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$

定义 4 如果集合 A 与 B 对等，则称 A 与 B 有相同的势或基数，记为$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$（其中$\overline{\overline{A}}$表示 A 的势或基数）

定义 5 设集合 A 与 B，记$\overline{\overline{A}}=\alpha,\overline{\overline{B}}=\beta$，

如果 A~ $B_1\subset B$，则称α不大于β，记为$\overline{\overline{A}}=\alpha\le\beta=\overline{\overline{B}}$，

如果$\alpha\le\beta$且$\alpha\ne\beta$，则α小于β，记为$\overline{\overline{A}}=\alpha<\beta=\overline{\overline{B}}$

注解：对于有限集来说，基数可以看作集合中元素个数，而对于无限集，其基数表示所有对等集合共同的属性。

结论：（1）映射 T 是从 A 到 B 的单射，则$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$

（2）映射 T 是从 A 到 B 的满射，则$\overline{\overline{A}}\ge\overline{\overline{B}}$

（3）设$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\},\{B_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$，其中$\{B_\alpha\}$两两互不相交，若对任意的$\alpha\in\Lambda$，有$A_\alpha \sim B_\alpha$，则$\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}}\le\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha}}$

引理 若$A_2\subset A_1\subset A$,且$A\sim A_2$，则$A\sim A_1\sim A_2$

定理 2（Bernstein）设 A、B 为两个集合，若$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$且$\overline{\overline{A}}\ge\overline{\overline{B}}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$

三、可数集

定义 6 凡是与自然数集 N 对等的集合称为可数集或可列集，它们的势（或基数）记作“阿列夫零”或 a，称为可数势或可数基数。

至多可数集的重要性质：

性质 1 任一无限集 A 必含有可数子集，即 a 为无限集中最小的势；（定理 3）

$\boxed{\text{性质 2}}$集合 A 是无限集的充要条件是 A 与其某一真子集对等; （定理 4）

$\boxed{\text{性质 3}}$(至多可数集的性质) （定理 5）

（1）可数集 A 的任一子集 B 为至多可数集;

（2）设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为至多可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 仍为至多可数集，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为可数集;

（3）设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为至多可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 仍为至多可数集，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可数集;

（4）设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为可数集，则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 为可数集。

（5）若集合 $A = \left\{ x_{a_1, a_2, \cdots, a_n} \mid a_i \in A_i, A_i \text{为可数集}, i = 1, \cdots, n \right\}$，则 A 为可数集。

<u>常用结论</u>: ①有理数集 Q 是可数集，R^n 中有理点集 Q^n 为可数集。

② R^1 中互不相交的开区间族是至多可数集。

$\boxed{\text{定理 6}}$若 A 为无限集，B 是至多可数集，则 $A \cup B \sim A$

由证明归纳出两种证明对等的方法:

（1）建立一一映射;

设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ 为可数集，$A \cap B = \varnothing$，由性质 1 知，A 存在可数子集 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}$，作映射 $f: A \cup B \to A$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} a_{2k-1}, x = a_k, k = 1, 2, \cdots \\ a_{2k}, x = b_k, k = 1, 2, \cdots \\ x, x \neq a_k, b_k, k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

（2）要证 A 与 B 对等，可将 A 和 B 都分解为不交并，即 $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$

再分别证明 $A_1 \sim B_1$，$A_2 \sim B_2$

$$A = (A \setminus A_1) \cup A_1, A \cup B = (A \setminus A_1) \cup \left[A_1 \cup (B \setminus A) \right]$$

四、不可数集

定义 7 不是至多可数集的集合称为不可数集。
定义 8 不可数集的基数称为连续基数，记作“阿列夫”或 c

定理 7（常用的基数为 c 的集合）

（1）$[0,1]=\{x\in R\,|\,0\le x\le 1\}$是不可数集;

（2）R 上任何区间的势均为 c;
（3）无理数集的势为 c;

（4）若 $\overline{\overline{X_k}}=c$，$k=1,2,\cdots$ 则 $\overline{\overline{\prod\limits_{k=1}^{\infty} X_k}}=c$；

$$\overline{\overline{\bigcup_{k=1}^{m} X_k}}=c,\ \overline{\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k}}=c$$

（5）若 $\overline{\overline{X_\alpha}}=c,\alpha\in\Lambda,$且$\overline{\overline{\Lambda}}=c,$则$\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha}}=c$

定理 8 集合为A不可数集$\Leftrightarrow A$为无限集，且对A的任何可数子集B, 有A¯A\B

定理 9 设 A 是任一无限集合，则 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{2^A}}$

注解: ①集合的基数中不存在最大基数

②不存在集合 A，使 2^A 为可数集

② $2^{\overline{\overline{A}}}=\overline{\overline{2^A}}$

定理 10 设集合 A 和 B，若 A¯B, 则 2^A ¯ 2^B

定理 11 可数集幂集的基数为连续基数，即 $2^a=c$。

连续统假设：基数 a 与 c 之间是否存在其它的势？（至今悬而未决）

3 R^n 中的开集、闭集和 Borel 集

一、R^n 中的距离、领域、区间

定义 1　满足正定性、对称性、三角不等式的称为距离空间。
定义 2　n 维欧式空间
定义 3　有界集定义
定义 4　开球、闭球、球面的定义

定义 5　R^n 中开区间、闭区间、半开半闭区间和体积的定义

二、R^n 中开集

定义 6　设 $G \subset R^n$，如果对任意 $x \in G$，有 $\delta > 0$，使 $B(x,\delta) \subset G$，则称 G 为 R^n 中开集。

定理 1　R^n 中开集构成的集族 τ 满足下述三条性质：

（1）$\varnothing, R^n \in \tau$；

（2）若 $G_1, G_2 \in \tau$，则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$；

（3）若 $G_\alpha \in \tau, \alpha \in \Lambda$，则 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \in \tau$；

称 τ 为 R^n 上的一个拓扑，(R^n, τ) 为拓扑空间。

注解：无穷多个开集的交集不一定为开集，例如 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ 为闭集

定义 7　（1）设 $x \in R^n$，若 G 为 R^n 中的开集且 $x \in G$，则称 G 为 x 的一个领域

（2）设 $E \subset R^n$，如果存在 x 的一个领域 G，使得 $G \subset E$，则称 x 为 E 的内点。

（3）设 $E \subset R^n$，$x \in R^n$，如果对 x 任意领域既含有 E 的点，又含有 E^c 的点，则称 x 为 E 的边界点。

常用结论：①、$\partial E = \partial\left(E^c\right)$；②、$E^0 \subset E$；③、$R^n = E^0 \cup \left(E^c\right)^0 \cup \partial E.$

定理 2 设 $E \subset R^n$，则

（1）E^0 为开集；

（2）E 为开集 $\Leftrightarrow E^0 = E$

三、R^n 中闭集

定义 8　设 $x^{(k)}, x \in R^n\ (k = 1, 2, \cdots)$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} d\left(x^{(k)}, x\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^{(k)} - x\right\| = 0$

则称点列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 收敛于 X，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$

两条收敛判定准则：

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow$ 对x的任何领域G，存在N>0，当k>N时，$x^{(k)} \in G.$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow$ 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$，有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i.$

定义 9 设 $E\subset R^n$，$x\in R^n$，如果对 X 的任意领域 G，必有 $\left(G-\{x\}\right)\cap E\neq\varnothing$，则

称 X 为 E 的聚点或极限点，聚点全体称为导集，记为 E'；

称 $\overline{E}=E\cup E'$ 为 E 的闭包。

相反，如果存在某个领域 G_0，使 $G_0\cap E=\{x\}$，则称 X 为 E 的孤立点。

常用结论：①、孤立点集为至多可数集；

②、有限集为孤立点集，但可数集不一定为孤立点集，如 Q。

③、内点一定是聚点，但聚点不一定是内点；孤立点一定是边界点，但边界点不一定是孤立点。

定理 3 设 $E\subset R^n$，$x\in R^n$，则以下为聚点等价性定义：

(1) x 为 E 的聚点；

(2) 任意 $\delta>0$，$\left(B(x,\delta)\setminus\{x\}\right)\cap E\neq\varnothing$；

(3) 存在 E 中互异点列 $\{x^{(k)}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$；

(4) 对 x 的任意领域 G，它必含有 E 的无穷多个点.

定理 4 设 E 是 R^n 中的有界无限点集，则 E 中至少有一个聚点。

定理 5 设 $E_k\subset R^n$，$k=1,2,\cdots$，则

$$(1)\ \bigcup_{k=1}^{m}E_k'=\left(\bigcup_{k=1}^{m}E_k\right)',\ \bigcup_{k=1}^{m}\overline{E_k}=\overline{\left(\bigcup_{k=1}^{m}E_k\right)}.$$

$$(2)\ \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k'\subset\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)',\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{E_k}=\overline{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)}.$$

定义 10 设 $F\subset R^n$，若 F^c 为 R^n 中的开集，则称 F 为 R^n 中的闭集。

定理 6 设 $\mu=\left\{F\subset R^n\mid F^c\text{为开集}\right\}$ 为所有闭集构成的闭集族，则 μ 具有下列性质：

(1) $\varnothing$，$R^n\in\mu$；

(2) 若 $F_1,F_2\in\mu$，则 $F_1\cup F_2\in\mu$；

(3) 若 $F_\alpha\in\mu\ (\alpha\in\Lambda)$，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha\in\mu$.

注解：无穷多个闭集的并集不一定为闭集，例如 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]=(0,1]$ 左开右闭集

定理 7 设 $E\subset R^n$，则下列叙述等价：

(1) E为闭集；

(2) $E' \subset E$；

(3) $\overline{E} = E$；

(4) 设$x^{(k)} \in E, k = 1, 2, \cdots$，若$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$，则$x \in E$。

定理 8（有限覆盖定理）

设F是有界闭集，$\Im$是一族领域，$\Im$覆盖了F，则在$\Im$中必有有限个领域覆盖F。

拓广：（Lindelof 定理）

设$E \subset R^n$，$\Im$为的一个开覆盖E，则在$\Im$中有至多可数个开集覆盖E。

定义 11

(1) 若$E' \subset E$，则E闭集（前面已证明）；

(2) 若$E' \supset E$，则称E为自密集；

(3) 若$E' = E$，则称E为完备集（或完全集）。

注解：①可数集为闭集；

②设 E 为非空点集，若 E 的任意子集都为闭集，则 E 不一定是有限集，如自然数集。

③有限个完全集的并集仍为完全集$\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k\right)' = \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k' = \bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k$

有限个完全集的交集不一定为完全集，如$[a,b] \cap [b,c] = \{b\}$

④若 E 为非空完全集，则 $\overline{\overline{E}} = c$

定义 12

(1) 如果$\overline{E} = R^n$，则称E为R^n中的稠密集；

(2) 如果在每个非空开集中存在非空开子集完全含于E^c中，则称E为R^n中的疏朗集。

常用结论：①集合 E 为稠密集的充要条件：任意非空开集 G，必有 $G \cap E \neq \varnothing$ 。

②集合 E 为疏朗闭集的充要条件：E 的余集为稠密开集。

疏朗集的余集为稠密集，但反之不成立，如有理数集与无理数集。

③有理数集和无理数集均为 R 中的稠密集；

自然数集和有限集均为 R 中的疏朗集。

重要例子：（Cantor 集）

将【0，1】每次挖掉剩余闭区间的中间三分之一长的开区间后，剩下的部分

设第n次剩余部分为F_n，记$F_1^n, F_2^n, \cdots, F_{2^n}^n$，挖去的开区间列为

$$\left\{I_1^1, I_1^2, I_2^2, \cdots, I_1^n, I_2^n, \cdots, I_{2^{n-1}}^n, \cdots\right\}, \text{作点集} P = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n.$$

性质：①P 为非空有界闭集；

②P 为完全集；

③P 为疏朗集；

④ $\overline{\overline{P}} = c$

四、R^n 中的 Borel 集。

定义 13 至多可数个开集的交集为 G_δ 型集；至多可数个闭集的并集为 F_σ 型集。

<u>常用结论</u>：①开集为 G_δ 型集，闭集为 F_σ 型集；

②集合 E 为 G_δ 型集充要条件：E 的余集为 F_σ 型集；

③至多可数个 G_δ 型集的交仍为 G_δ 型集；至多可数个 F_σ 型集的并仍为 F_σ 型集。

④任一至多可数集 E 为 F_σ 型集，特别的

有理数集和有理点集为 F_σ 型集；无理数集和无理点集为 G_δ 型集

定义 14 由 R^n 中一切开集构成开集族 τ 生成 σ 代数称为 Borel 代数，简记 $\Re$

$\Re$ 中元素成为 Borel 集。

<u>常用结论</u>：①开集、闭集、G_δ 型集与 F_σ 型集皆为 Borel 集；

②Borel 集的余集为 Borel 集；

③Borel 集的并、交、上（下）极限皆为 Borel 集。

五、开集的构造

定理 9（R^n 开集的构造）（详细原理见教材 P31）

(1) R^1中非空开集G是至多可数个互不相交的开区间$\left((-\infty,a),(a,b),(b,+\infty),(-\infty,+\infty)\right)$的并集，反之亦真；

(2) $R^n\,(n \geq 2)$中非空开集G是至多可数个互不相交的半开半闭区间的闭集。

六、点集间的距离

定义 15 设 $x \in R^n, E_1, E_2$ 为 R^n 非空集合，称 $d(x,E_1) = \inf\left\{d(x,y) \mid y \in E_1\right\}$

为点 X 到集合 E_1 的距离。称 $d(E_1,E_2)=\inf\{d(x,y)\mid x\in E_1,y\in E_2\}$

为集合 E_1 到集合 E_2 的距离。

常用结论:
$$\begin{aligned}&(1)x\in E\Rightarrow d(x,E)=0,\text{反之不成立};\\&(2)\text{若}E\text{为闭集，则}x\in E\Leftrightarrow d(x,E)=0;\\&(3)E_1\cap E_2\neq\varnothing\Rightarrow d(E_1,E_2)=0,\text{反之不成立。}\end{aligned}$$

引理 设 E 为非空集合，则函数 $f(x)=d(x,E)$ 在 R^n 上一致连续

推论 1 函数 $f(x)=d(x,x_0)$ 在 R^n 上一致连续。

定理 10 设 F 为 R^n 中非空闭集，$x\in R^n$，则存在 $y\in F$，使得

$$d(x,F)=d(x,y)$$

定理 11 设 F_1,F_2 为 R^n 中非空闭集，且其中至少有一个集合是有界的，则存在 $x\in F_1,y\in F_2$，使得 $d(F_1,F_2)=d(x,y)$

注解: 定理 11 中“至少有一个集合是有界集”不能缺少，如

$$E_1=\{(x,0)\mid x\in R^1\}\subset R^2,E_2=\left\{\left(x,\frac{1}{x}\right)\mid x\neq 0,x\in R^1\right\}\subset R^2$$

定理 12（隔离性定理）若 F_1,F_2 为 R^n 中非空闭集，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$，则存在 R^n 中开集 G_1,G_2，使得 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2,\text{且}G_1\cap G_2=\varnothing$。

例：若 F 为 R^n 中闭集，则 F 为 G_δ 型集；若 G 为 R^n 中开集，则 G 为 F_σ 型集

定理 13（连续延拓）若 F 是 R^n 闭集，$f(x)$ 在 F 上的连续函数 $|f(x)|\le M\ (x\in F)$ 则存在 R^n 上连续函数 $g(x)=f(x)(x\in F),|g(x)|\le M\ (x\in R^n)$

4 集合与函数

一、特征函数

定义 1 X 是非空集合，$A\subset X$，称 $\chi_A(x)=\begin{cases}1,x\in A,\\0,x\notin A\end{cases}$ 为集合 A 特征函数

注解: 显然 $\chi_A(x)=\chi_B(x)(x\in X)\Leftrightarrow A=B$

定理 1

(1) $A = X \Leftrightarrow \chi_A(x) \equiv 1$; $A = \varnothing \Leftrightarrow \chi_A(x) \equiv 0$;

(2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \le \chi_B(x)(\forall x \in X)$;

(3) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$, 特别的$A\cap B = \varnothing$时；

(4) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;

(5) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)\left[1 - \chi_B(x)\right]$;

(6) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}(x) = \max\limits_{\alpha\in\Lambda} \chi_{A_\alpha}(x)$, $\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}(x) = \min\limits_{\alpha\in\Lambda} \chi_{A_\alpha}(x)$;

(7) 设$\{A_k\}$是任一集列，则

$$\chi_{\overline{\lim\limits_k} A_k}(x) = \overline{\lim_k}\chi_{A_k}(x), \chi_{\underline{\lim\limits_k} A_k}(x) = \underline{\lim_k}\chi_{A_k}(x);$$

(8) $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)(任意 x \in X)$存在，且

极限$\chi_{\lim\limits_k A_k}(x) = \lim\limits_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)(x \in X)$

二、集合与函数

归纳的一些重要集合等价式:（仅列举部分）

(1) 设$f(x)$定义在$E \subset R^n$的实值函数，

则$E\left[x \mid f(x) \ne 0\right] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left[x \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\right]$;

(2) $\{f_n(x)\}$定义在E, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_n(x) = f(x)$

则$\lim\limits_{k\to\infty} E\left[x \mid f_k(x) > \alpha\right] = E\left[x \mid f(x) > \alpha\right]$;

(3) 设$f(x)$定义在开集$E \subset R^n$的实值函数，则$f(x)$在E上

连续 $\Leftrightarrow$ $E\left[x \mid f(x) > c\right]$与$E\left[x \mid f(x) < c\right]$开集$(\forall c \in R)$.

定义 2

设函数$f(x)$定义在集合$E \subset R^n$上，$x^0 \in E$若$f(x)$在

$B_E(x^0, \delta_0) = E \cap B(x^0, \delta_0)$上有定义，我们称

$$\omega_E(x^0) = \lim_{\delta\to 0^+}\omega_E(x^0, \delta) = \lim_{\delta\to 0^+}\sup\left\{\left|f(x') - f(x'')\right| x', x'' \in B_E(x^0, \delta_0)\right\}$$

为$f(x)$在x^0出的振幅, $0 < \delta < \delta_0$, 当E为开集，简记$\omega(x^0)$

从而得到一些常用结论:

（1）连续的等价条件:

$f(x)$在x^0出连续 $\Leftrightarrow$ $\omega_E(x^0) = 0$

（2）函数连续点集结构

设$f(x)$定义在开集$G \subset R^n$的实值函数，则$f(x)$的连续点集为G_δ集

第二章　测度论

实变函数论的核心问题是对数学分析中的黎曼积分进行推广，即 Lebesgue 积分。

数学分析中黎曼积分的缺陷：一方面被积函数的连续性要求太强，以至于著名的 Dirichlet 函数这样一种非常简单的函数不可积；另一方面应用有局限，表现在可积函数项级数的逐项积分以及可积函数列的积分与极限的可交换性，一般要求函数列与函数项级数具有一致收敛性。

改进两方面：一方面是积分范围划分的改进，由此产生了集合的测度；另一方面是对被积函数进行改进，由此产生了可测函数。

本章介绍 Lebesgue 测度，它是通常意义下“面积或体积”的推广，即能保持其特性：①非负性；②当集合为区间时，其测度即为区间的体积；③完全可加性，即当$\{E_i\}$为一列互不相交的有测度集合时，$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的测度恰好为每个集合的测度之和。

1　外测度

一、外侧度定义

定义 1　设$E \subset R^n$，$\{I_i\}$是R^n中覆盖 E 的任一列开区间，即$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，记

$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$（$\mu$ 可以取$+\infty$），称所有这样的所成数集的下确界为 E 的

Lebesgue 外侧度，记为m^*E，即$m^*E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \,\middle|\, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$

注解：对任意$E \subset R^n$，m^*E均存在。

二、外测度的基本性质

定理　外测度具有如下性质：

（1）对任意$E \subset R^n$，都有$m^*E \geq 0$且$m^*\varnothing = 0$（非负性）

（2）设$B \subset A \subset R^n$，则$m^*B \leq m^*A$（单调性）

（3）设$A_i \subset R^n$，则$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*A_i$（次可加性）

（4）设$A, B \subset R^n$，若$d(A,B) > 0$，则$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$（隔离）

注解：①、任何可数点集的外测度为零；

②、若$m^*A = 0$，则对任意$E \subset R^n$，总有$m^*(E \cup A) = m^*E$；

③、零测集的任意子集仍为零测集；
至多可数个零测集的并集仍为零测集；

④、对任何区间 $I \subset R^n$，总有 $m^* I = |I|$；

常用结论：1、若 E 有界，则 $m^* E < +\infty$；若 $m^* E = +\infty$，则 E 无界。

2、Cantor 集 P、至多可数集、连续（可积）函数对应的图像的点组成的集合均为零测集，从而是可测集；

3、若 $E \subset R^1$ 为有界集，且 $m^* E > 0$，则对所有 $0 \le \mu \le m^* E$，存在 $E_1 \subset E$，使 $m^* E_1 = \mu$（推广的介值性定理）。

2 可测集

外测度是否是通常意义下的“体积”的拓广，需满足完全可加性，而对外测度而言，只有当 $d(A,B)>0$ 时，才有 $m^*(A \cup B) = m^* A + m^* B$，仅当 $A \cap B = \varnothing$ 时，可能有
$d(A,B)=0$，完全可加性不一定成立，所以需改进。

一、可测集的定义及等价条件

定义 1 设 $E \subset R^n$，如果对任意 $T \subset R^n$，总有 $m^* T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$，

则称 E 为 Lebesgue 可测集，或称 E 是可测的，此时，E 的外测度 $m^* E$ 称

为 E 的 Lebesgue 测度，记为 mE。

注解：与外测度不同的是，并非每个集合都是可测的。

定理 1 设 $E \subset R^n$，则下列三种说法是等价的：

（1） E 是可测集；

（2） E^c 是可测集；

（3） 对任意 $A \subset E, B \subset E^c$，总有 $m^*(A \cup B) = m^* A + m^* B$

注解：由（3）零测集为可测集，再由（2）推出 R^n 可测。

二、可测集的基本性质

定理 2 （1） E_1, E_2 可测 $\Rightarrow E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \setminus E_2$ 均可测；

（2）$E_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 可测 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} E_i, \bigcap_{i=1}^{m} E_i$ 可测，并且当 E_i 两两不交时，

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} mE_i$$，（对于可数个可测集列也同样成立）。

注解：（1）定理 2 中（2）说明了测度具有完全可加性；

（2）$\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ 可测。由于 $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$。

（3）综上所述，可测集对集合的至多可数并、交、差（余）及极限运算是封闭的，若 μ 表示 R^n 中可测集全体，则显然 μ 是一个 σ 域。

（4）$\overline{\overline{\mu}} = 2^c$

三、单调可测集列的性质

$\boxed{\text{定理}}$3 设 $E_n\,(n=1,2,\cdots)$ 为单调上升的可测集列，记 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$，则 $\lim_{n\to\infty} mE_n = mS$。即$\boxed{\text{极限集测度=测度极}}$$\boxed{\text{限}}$。

$\boxed{\text{定理}}$4 设 $E_n\,(n=1,2,\cdots)$ 为单调下降的可测集列，记 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$，若存在某个 E_{n_0}，使 $E_{n_0} < +\infty$，则 $\lim_{n\to\infty} mE_n = mE$

注解：①、定理 4 中条件“若存在某个 E_{n_0}，使 $E_{n_0} < +\infty$”不能去掉，否则结论不一定成立，

如取 $E_n = (n, +\infty), (n=1,2,\cdots)$，$\lim_{n\to\infty} mE_n = +\infty \neq 0 = mE = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\varnothing$。

②、由定理 3 有 $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$，$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$ 中单调上升，有

$m\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right)$；

③、由定理 4 有，$\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ 中 $\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ 单调下降，若存在 $\bigcup_{k=n_0}^{\infty} E_k$，使 $m\left(\bigcup_{k=n_0}^{\infty} E_k\right) < +\infty$，则 $m\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right)$

考虑到 $E_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$，则有 $mE_n \le m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right)$ 两边取极限有，

$\overline{\lim}_{n\to\infty} mE_n \le m\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right)$

④、$m\left(\varliminf_{n\to\infty} E_n\right) \le \varliminf_{n\to\infty} mE_n \le \varlimsup_{n\to\infty} mE_n \le m\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right)$从而设 E_n 为可测集，

且 $\lim_{n\to\infty} E_n = E$，$\boxed{\text{若} E_n \text{有界}}$，则 $\lim_{n\to\infty} mE_n = mE$

⑤对任意可测集 A、B，有（1）若 $B \subset A$，则 $mA = m(A\setminus B) + mB$

（2）若 $mB < +\infty$，则 $mA - mB \le m(A\setminus B)$

（3）若 $B \subset A$，且 $mB < +\infty$，则 $mA - mB = m(A\setminus B)$

3　可测集类及可测集的结构

一、可测集类

$\boxed{\text{定理 1}}$（1）零测集为可测集；

（2）零测集的子集为零测集，从而为可测集；

（3）至多可数个零测集的并集为零测集，从而为可测集。

$\boxed{\text{定理 2}}$ R^n 中任何区间 I 都是可测集，$mI = |I|$。

注：区间包括开区间、闭区间、左闭右开区间、左开右闭区间

$\boxed{\text{定理 3}}$ R^n 中的开集、闭集、Borel 集都是可测集。

注：Borel 集是 G_δ 集（至多可数个开集的交集）与 F_σ 集（至多可数个闭集的并集）但并非每个可测集都是 Borel 集

二、可测集与 Borel 集的关系

$\boxed{\text{定理 4}}$设 $E \subset R^n$，则存在 G_δ 集 G，使 $E \subset G$，且 $mG = m^*E$

$\boxed{\text{定理 5}}$设 $E \subset R^n$，则下列关系等价：

（1）E 为可测集；

（2）对任意 $\varepsilon > 0$，存在开集 G，使 $E \subset G$，且 $m(G\setminus E) < \varepsilon$；

（3）存在 G_δ 型集 G，使 $E \subset G$，且 $mG = mE, m(G\setminus E) = 0$。

注解：$E = G\setminus(G\setminus E)$ 表明任意可测集可以表示成一 G_δ 型集与一零测集的差集。

$\boxed{\text{定理 6}}$设 $E \subset R^n$，则下列关系等价：

（1）E 为可测集；

（2）对任意 $\varepsilon > 0$，存在闭集 F，使 $F \subset E$，且 $m(E\setminus F) < \varepsilon$；

（3）存在 F_σ 型集 F，使 $F \subset E$，且 $mF = mE, m(E\setminus F) = 0$。

注解：①、$E=F\cup(E\setminus F)$

②、以上两个定理表明，只要有了全部的 G_δ 和 F_σ 和全部的零测集，一切可测集都可以通过 G_δ 型集与一零测集的差集或 F_σ 型集与一零测集的并集获得。

定理 7 设 A、B 分别为 R^p 和 R^q 中的可测集，若 $E=A\times B$，则 E 为 R^{p+q} 中的可测集，且 $mE=mA\bullet mB$

注解：定理证明中所用到的结论：

① R^n 开集的构造：$R^n\ (n\geq 2)$ 中非空开集 G 是可数个互不相交的半开半闭区间的并集；

② E 是可测集，则存在一列单调递减的开集列 $\{G_n\}$，使得 $E\subset G_n$，且 $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\setminus E\right)=0$；或存在一列单调递增的闭集列 $\{F_n\}$，使得 $F_n\subset E$，且 $m\left(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=0$。（见教材 P64 课后习题 20、21 题）

③ 当可测集 A、B 无界时，A、B 分别都可以表示成一列互不相交的有界可测集的并集，即 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i, B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$，其中 A_i, B_j 都是有界可测集。

④ 思路：由定理 5(3)存在 G_δ 集 G_1, G_2，使 $A\subset G_1, B\subset G_2$ 且 $mA=mG_1$，$mB=mG_2, m(G_1\setminus A)=0, m(G_2\setminus B)=0$ 记 $A^*=G_1\setminus A, B^*=G_2\setminus B$

$E=A\times B=(G_1\times G_2)\setminus(A^*\times B^*)\setminus(A^*\times B)\setminus(A\times B^*)$

第三章　可测函数

1 可测函数的定义及简单性质

一、可测函数的定义及等价定义

1、简单函数

定义 1 设 E 为可测函数，$f(x)$为定义在 E 上的函数，如果

（1）$E=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$，其中 E_i 为两两不交的可测集；

（2）在每个 E_i 上，$f(x)=c_i$，即

$$f(x)=\begin{Bmatrix} c_1, x\in E_1 \\ \vdots \\ c_m, x\in E_m \end{Bmatrix}$$

亦即，$f(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i\chi_{E_i}(x)$则 $f(x)$称为 E 上的简单函数。

<u>注解</u>：①、可测集 E 上的两个简单函数的和、差、积仍为 E 上的简单函数；若

$g(x)\neq 0$时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$也是 E 上的简单函数。

②、复合函数中内函数为简单函数，则复合函数为简单函数。

定义 2 设 $f(x)$为 E 上非负实函数，集合$\{(x,y)\mid x\in E,0\leq y<f(x)\}\subset R^{n+1}$称为

$f(x)$在 E 上的下方图形，记为$G(E,f)$。

注解：$G(E,f)$为可测集，且$mG(E,f)=\sum_{i=1}^{m}c_i mE_i$。

2、非负可测函数

定义 3 设 E 为可测集，$f(x)$为定义在 E 上非负函数，如果存在一列单调递增的

非负简单函数$\{\varphi_m(x)\}$，即$0\leq\varphi_1(x)\leq\cdots\leq\varphi_n(x)\leq\cdots$，使 $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)$，

则称 $f(x)$为 E 上的非负可测函数或称 $f(x)$在 E 上非负可测。

下面定理刻画了非负可测函数的特性：

定理 1 设 $f(x)$为可测集 E 上的非负函数，则 $f(x)$在 E 上非负可测充要条件：

对任意实数 a，$E[x\mid f(x)<a]$都是 R^n 中可测集。

3、一般可测函数

定义 4 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上实函数，如果对任意实数 a，$E[x\mid f(x)<a]$

都是可测的，则称 $f(x)$为 E 上的可测函数，或称 $f(x)$在 E 上可测。

下面给出可测函数的几种等价定义：

定理 2 设 $f(x)$ 是可测集 E 上实函数，则下列各条件是等价的：

$\forall a\in R$，$E[x\mid f(x)>a]$ 或 $E[x\mid f(x)\ge a]$ 或 $E[x\mid f(x)<a]$ 或 $E[x\mid f(x)\le a]$

是可测集，如果之一成立，则 $f(x)$ 为 E 上可测函数。

常用结论：①区间上的连续函数和单调函数都是可测函数；

②可测集 E 上连续函数为可测函数；

③ $f(x)$ 为 E 可测函数充要条件：$\forall r\in Q, E[x\mid f(x)>r]$ 可测；

而 $\forall r\in Q, E[x\mid f(x)=r]$ 可测得不出 $f(x)$ 可测，设 A 不可测集，

$$f(x)=\begin{cases} x, x\in A \\ -x, x\in[0,1]\setminus A \end{cases}$$，$E[x\mid f(x)=r]$ 为单点集或空集，而有

$E[x\mid f(x)\ge 0]=A$ 为不可测集。

<u>推论</u>：若 $f(x)$ 在可测集 E 上为可测函数，则

（1）$E[x\mid f(x)=+\infty], E[x\mid f(x)=-\infty], E[x\mid |f(x)|=+\infty]$ 均可测；

（2）对任意实数 $a\le b, E[x\mid a\le f(x)<b]$ 和 $E[x\mid f(x)=a]$ 均可测。

二、可测函数的简单性质

定义 6 设 $\pi(x)$ 是一个与集合 E 中的点 x 有关的命题，如果存在 $F\subset E$，使 $mF=0$

且 $\pi(x)$ 在 $E\setminus F$ 上恒成立，则称 $\pi(x)$ 在 E 上几乎处处成立，记为

$\pi(x)$ 成立 $a.e.$ 于 E。

例如：①对于【0，1】上的蒂尼克雷函数，即在有理点处取 1 在无理点处取 0.

由于有理点集为零测集，所以 $D(x)=0, a.e.$ 于 $[0,1]$。

②设 $\{f_n(x)\}, f(x)$ 均为可测集 E 上的实函数，若

$mE[x\mid f_n(x)\text{不收敛于}f(x)]=0$，则称 $\{f_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$。

③设 $f(x)$ 为定义在可测集 E 上实函数，若 $mE[x\mid |f(x)|=+\infty]=0$，则称

$f(x)$ 在 E 上几乎处处有限。

<u>注解</u>：① $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限，则 $f(x)$ 在 E 上可测充要条件：对任意实数

a，b，$E\left[x \mid a \le f(x) < b\right]$为可测集。

证明：（必要性）根据上述推论已得证。

（充分性）$E\left[x \mid f(x) \ge \mathrm{a}\right] = E\left[x \mid a \le f(x) < +\infty\right] \cup E\left[x \mid f(x) = +\infty\right]$，而

$E\left[x \mid a \le f(x) < +\infty\right] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E\left[x \mid a+n-1 \le f(x) < a+n\right]$且根据上述推论知

$E\left[x \mid f(x) = +\infty\right]$为可测集，从而$E\left[x \mid f(x) \ge \mathrm{a}\right]$可测。

② $\forall a < b, E\left[x \mid a \le f(x) < b\right]$可测推不出$f(x)$在 E 上可测。

反例：设$mE > 0 \Rightarrow \exists E_1 \subset E$使$E_1$为不可测集取$f(x) = \begin{cases} +\infty, x \in E_1 \\ -\infty, x \in E \setminus E_1 \end{cases}$则

$\forall a < b, E\left[x \mid a \le f(x) < b\right] = \varnothing$可测但$\forall a \in R, E\left[x \mid a \le f(x)\right] = E_1$不可测。

定理 3 若$f(x)$，$\mathrm{g}(x)$在 E 上几乎处处相等，则当其中一个在 E 上可测，另一个也在 E 上可测。（$E\left[x \mid f(x) > a\right]$与$E\left[x \mid g(x) > a\right]$只相差一零测集）

注解：此定理表明任意改变$f(x)$在一个零测集上的函数值不改变$f(x)$的可测性。

定理 4（1）若$f(x)$在 E 上可测，E_0为 E 的可测子集，则$f(x)$在E_0上可测； （2）若$f(x)$在可测集$E_m(m=1,2\cdots)$上可测，则$f(x)$在$E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m$上可测。

引理 设$f(x)$，$\mathrm{g}(x)$在 E 上可测，则$E\left[x \mid f(x) > \mathrm{g}(x)\right]$是可测集

证明：全体有理数集$\{r_1, r_2, \cdots\}$，有分解

$$E\left[x \mid f(x) > \mathrm{g}(x)\right] = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E\left[x \mid f(x) > r_m\right] \cap E\left[x \mid g(x) < r_m\right]。$$

定理 5 若$f(x)$，$\mathrm{g}(x)$在 E 上可测，则下列函数（假定它们都在 E 上有定义或几乎处处有定义）均在 E 上可测： $(1) cf(x);(2) f(x)+g(x);(3) \lvert f(x) \rvert;(4) f(x)g(x);(5)\dfrac{1}{f(x)}$。

设$f(x)$定义在 E 上，令$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$，分别称为$f(x)$的正部和负部。有$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \lvert f(x) \rvert = f^+(x) + f^-(x)$。

定理 6 设$f(x)$定义在可测集 E 上，则$f(x)$在 E 上可测的充要条件：$f^+(x), f^-(x)$

均在 E 上可测。

定理 7 若$\{f_m(x)\}$是上可测函数列，则

(1)$h(x)=\sup\limits_{m\ge1} f_m(x), l(x)=\inf\limits_{m\ge1} f_m(x)$在E上可测；

(2)$\mu(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k\ge m} f_k(x)=\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} f_m(x), \lambda(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\inf\limits_{k\ge m} f_k(x)=\underline{\lim\limits_{m\to\infty}} f_m(x)$在E上可测。

证明：(1) $E[x|h(x)\le a]=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E[x|f_m(x)\le a]$；$E[x|l(x)\ge a]=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E[x|f_m(x)\ge a]$。

(2) $\mu(x)=\inf\limits_{m\ge1}\left\{\sup\limits_{k\ge m} f_k(x)\right\}, \lambda(x)=\sup\limits_{m\ge1}\left\{\inf\limits_{k\ge m} f_k(x)\right\}$。

注解: ①特别的，若$\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$存在，或几乎处处存在，则$\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$在 E 上可测。

②若 $f(x)$在 (a, b) 上可导，则 $f'(x)$在 (a, b) 上可测。

证明：因为 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right], x\in(a,b)$，而

$n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$在 (a, b) 上连续，从而可测，由注解①得证。

三、可测函数与简单函数关系

定理 8 $f(x)$在 E 上可测充要条件：$f(x)$总可表示成一列简单函数列$\{\varphi_m(x)\}$的极限，且还可要求$|\varphi_1(x)|\le|\varphi_2(x)|\le\cdots\le|\varphi_m(x)|\le\cdots$。

证明：（充分性）由定理 7 注解①得证

（必要性）$f(x)$在 E 上可测得$f(x)$的正部与负部均可测，由定义有，

$f^+(x)=\begin{cases} f(x), f(x)\ge0 \\ 0, f(x)<0 \end{cases}, f^-(x)=\begin{cases} -f(x), -f(x)\ge0 \\ 0, -f(x)<0 \end{cases}$，存在 E 上简单函数列$\{\varphi_m(x)\}$和$\{\psi_m(x)\}$，使$\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)=f^+(x), \lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(x)=f^-(x)$，则从而$\{\varphi_m(x)-\psi_m(x)\}$即为所求。

注解：此定理表明可测函数也可由简单函数的极限来刻画，若$f(x)$有界，还可要求此简单函数列$\{\varphi_m(x)\}$一致收敛于$f(x)$。

2 可测函数的几种收敛性关系

一、几乎处处收敛与一致收敛的关系

可测函数列收敛或几乎处处收敛不一定推出一致收敛，但在测度意义下，只要去掉一个测度很小的集合，就可以保证该函数列在剩下的集合上一致收敛。

定理 1(Egoroff 定理)设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数列，

$f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的函数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), a.e.于E$，

则 $\forall\delta>0, \exists可测子集E_\delta\subset E, 使mE_\delta<\delta, 而在E\setminus E_\delta, f_n(x)\rightrightarrows f(x)$。

注解：（1）若“$mE<+\infty$”改为“$mE=+\infty$”结论不一定成立，例如

$$f_n(x)=\begin{Bmatrix} 0,[0,n] \\ 1,(n,+\infty) \end{Bmatrix}，其中 E=[0,+\infty)。$$

（2）定理 1 逆定理：设 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上可测函数列，$f(x)$ 为 E 可测函数，如果 $\forall\delta>0, \exists可测子集E_\delta\subset E, 使mE_\delta<\delta, 而在E\setminus E_\delta, f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), a.e.于E$。也成立！

（3）设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的函数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), a.e.于E$，则存在 E 的一单调递增的可测集列 $\{E_k\}$，使在每个 E_k 上 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，而 $\lim\limits_{k\to\infty} mE_k=mE$。

二、几乎处处收敛与依测度收敛的关系

定义 1 设 E 为可测集，$\{f_n(x)\}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数，如果对任意 $\delta>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} mE[x||f_n-f|\geq\delta]=0$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，记为 $f_n(x)\Rightarrow f(x), x\in E$。

依测度收敛的简单性质：

性质 1（唯一性）如果 $f_n(x)\Rightarrow f(x)(x\in E), f_n(x)\Rightarrow g(x)(x\in E)$，则

$$f(x)=g(x), a.e.于E。$$

性质 2(子集性) $f_n(x)\Rightarrow f(x)(x\in E)$，可测集 $E_1\in E$，则 $f_n(x)\Rightarrow f(x)(x\in E_1)$。

性质 3（运算）如果 $f_n(x)\Rightarrow f(x)(x\in E), g_n(x)\Rightarrow g(x)(x\in E)$，则

① $f_n(x)\pm g_n(x)\Rightarrow f(x)\pm g(x), (x\in E)$；

② $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x),(x\in E)$；

③ $\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)},(x\in E),g_n(x)\neq 0,g(x)\neq 0,a.e.$于$E$。

依测度收敛的柯西收敛准则:

定理 2 设$\{f_n(x)\}$为 E 上几乎处处有限的可测函数列，则在$\{f_n(x)\}$E 上依测度收敛充要条件：$\forall\delta>0$，有 $\lim\limits_{n,m\to\infty} mE\left[x\,\middle|\,|f_n-f_m|\geq\delta\right]=0$，

反例：（1）存在依测度收敛的可测函数列，但不几乎处处收敛。

将$[0,1)$分成 K（$k=1,2,\cdots$）等分，定义第 K 组的第 i 个函数为

$$f_i^k(x)=\begin{cases}1,x\in[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})\\0,x\notin[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})\end{cases}(i=1,2,\cdots,k)$$，即第 i 等分的示性函数。

（2）存在几乎处处收敛的可测函数列，但不依测度收敛。

取$E=[0,+\infty)$，定义函数列：$f_n(x)=\begin{cases}0,[0,n]\\1,(n,+\infty)\end{cases}(n=1,2,\cdots)$。

定理 3（Lebesgue 定理）设$mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$为 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$为 E 上几乎处处有限的函数，如果$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),a.e.$于$E$，则 $f_n(x)\Rightarrow f(x),x\in E$。

注解：其逆定理不一定成立，反例为上述（1）。既然如此，但逆命题中存在一子列几乎处处收敛于 $f(x)$。

定理 4（F Riesz 定理）设$\{f_n(x)\}$为 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$为 E 上几乎处处有限的可测函数，如果 $f_n(x)\Rightarrow f(x),x\in E$，则存在 $f_n(x)$ 的子列 $f_{n_k}(x)$，使$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x),a.e.$于$E$。

例题：设$F(x)$在$G\subseteq R^n$上连续，$E\subseteq R^n,mE<+\infty$，$\{g_n(x)\}$为 E 上几乎处处有限的可测函数列，若$g_n(x)\Rightarrow g(x),x\in E$，且$g_n(E)\subseteq G,n=1,2,\cdots$

则① $F[g(x)]$为 E 上可测函数；② $F[g_n(x)]\Rightarrow F[g(x)],x\in E$。

3 可测函数的结构

本章介绍可测函数与连续函数的关系，连续函数一定可测；但可测函数不一定连续（如 Dirichlet 函数），在测度意义下，只要去掉一测度很小的集合，可以保证在剩下的集合上连续。

定理 1（Lusin 定理）设 f（x）是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\varepsilon>0$，存在闭子集 $F_\varepsilon\subseteq E$，使 f（x）在 F_ε 上连续，且 $m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$。

Lusin 定理揭示了可测函数与连续函数的关系，它的逆命题也成立，即

定理 2 设 E 为可测集，f(x)为 E 上实函数，如果对任意 $\varepsilon>0$,，存在闭子集 $F_\varepsilon\subseteq E$，使 f（x）在 F_ε 上连续，且 $m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$，则 f（x）在 E 上可测。

注解：设 f（x）是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数，则存在一列单调增的闭子集 $\{F_n\}$，使得 f（x）在每个 F_n 上连续，而 $m\left(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)<\varepsilon$。

下面给出 R 上的 Lusin 定理：

定理 3 设 E 为 R 上的可测集，f（x）是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\varepsilon>0$，存在闭子集 $F_\varepsilon\subseteq E$ 及 R 上的连续函数 $\varphi(x)$，使

（1）在 F_ε 上，$\varphi(x)=f(x)$。

（2）$m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$。若 E 上 $|f(x)|\le M$，还可要求 $|\varphi(x)|\le M, x\in R$。

注解：设 E 为 R 上可测集,，f（x）是 E 上几乎处处有限的实函数，则 f（x）在 E 上可测的充要条件：存在 E 上一列连续函数 $\varphi_n(x)$，使得

$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x), a.e.$ 于 E。

第四章 Lebesgue 积分

1 非负简单函数的 Lebesgue 积分

定义 1 设 E 为可测集，$\varphi(x)$ 是 E 上非负简单函数，即 $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{E_k}(x),(x\in E)$，

其中 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$，E_k 是互不相交的可测集，$c_k(k=1,\cdots,n)$ 是非负实数，记

$\int_E\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k mE_k$，称 $\int_E\varphi(x)dx$ 为 $\varphi(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分。

注解：①零测集 E 上的任何非负简单函数的 Lebesgue 积分为 0;
②Dirichlet 函数在[0,1]上的 Lebesgue 积分为 0，据定义求。

③几何意义为下方图形测度，即$\int_E \varphi(x)dx = mG(E,\varphi)$。

性质 1 设$\varphi(x),\psi(x)$是可测集 E 上非负简单函数，如果$\varphi(x)=\psi(x)(x\in E)$，则

$$\int_E \varphi(x)dx = \int_E \psi(x)dx(x\in E)。$$

注解:上述定理说明非负简单函数的 Lebesgue 积分与简单函数的表示形式无关。

性质 2 设$\varphi(x),\psi(x)$是可测集 E 上非负简单函数，则

（1）对任何非负实数 c，有$\int_E c\varphi(x)dx = c\int_E \varphi(x)dx$；

（2）$\int_E [\varphi(x)+\psi(x)]dx = \int_E \varphi(x)dx + \int_E \psi(x)dx$；

（3）若$\varphi(x)\le\psi(x)(x\in E)$，则$\int_E \varphi(x)dx \le \int_E \psi(x)dx$，特别的，

$$\int_E \varphi(x)dx \le \max\varphi(x)\cdot mE \text{（经常用）};$$

（4）若 A，B 是 E 的两个不交子集，则$\int_{A\cup B}\varphi(x)dx = \int_A \varphi(x)dx + \int_B \varphi(x)dx$。

证明要点:（2）$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x), \psi(x)=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}(x), a_i, b_j \ge 0, E=\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$，

且$\{A_i\}$与$\{B_j\}$均互不相交，则$\varphi(x)+\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\chi_{A_i\cap B_j}(x)$。

注解：设$\varphi(x)$是可测集 E 上非负简单函数，A 是 E 的可测子集，则

$$\int_A \varphi(x)dx = \int_E \varphi(x)\chi_A(x)dx。$$

设 E 的有限不交分解为$E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$，则$E=\bigcup_{k=1}^{n}(E_k\cap A)$为 A 的有限不交分解。

2 非负可测函数的 Lebesgue 积分

定理 1 设$\{\varphi_n(x)\},\{\psi_n(x)\}$是 E 上单调增的非负简单函数列，如果

$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$，那么$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E \psi_n(x)dx$。

证明：令$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=f(x)$，则$f(x)\ge 0$且在 E 上可测。由于$\{\varphi_n(x)\}$

$\{\psi_n(x)\}$是 E 上单调增，$G(E,f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,\varphi_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,\psi_n)$。下证

$G(E,\varphi_n)$,是单增集合列，$\forall(x,y)\in G(E,\varphi_n)$,有$x\in E, 0\le y\le\varphi_n\le\varphi_{n+1}$ 从

而$(x,y)\in G(E,\varphi_{n+1})$。再用集合间互相包含证明$G(E,f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,\varphi_n)$。

所以$mG(E,f)=\lim_{n\to\infty}mG(E,\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_n dx$。

定义 1 设 f（x）是可测集 E 上的非负可测函数，$\{\varphi_n(x)\}$是 E 上的单调增且收敛于 f（x）的非负简单函数列，记$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_n(x)dx$，称$\int_E f(x)dx$为 f（x）在 E 上的 Lebesgue 积分。

注解：如果$\int_E f(x)dx<+\infty$，则称 f（x）在 E 上 Lebesgue 可积。由定理 1 有非负可测函数的 Lebesgue 积分值与非负简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$的选取无关。

性质　设 f（x），g（x）是 E 上的非负可测函数，则

（1）对任何非负实数 c，有$\int_E c\varphi(x)dx=c\int_E\varphi(x)dx$；

（2）$\int_E[\varphi(x)+\psi(x)]dx=\int_E\varphi(x)dx+\int_E\psi(x)dx$；

（3）若$f(x)\le g(x)(x\in E)$，则$\int_E f(x)dx\le\int_E g(x)dx$；

（4）若 A，B 是 E 的两不交可测子集，则$\int_{A\cup B}f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx$；

（5）若$f(x)=g(x),a.e.于E$，则$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$；

（6）若 A，B 是 E 的可测子集，且$A\subseteq B$，则$\int_A f(x)dx\le\int_B f(x)dx$。

定理 2（Levi 单调收敛定理）设$\{f_n(x)\}$是 E 上非负可测函数列，满足

（1）$f_n(x)\le f_{n+1}(x),a.e.于E,n\ge 1$;

（2）$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),a.e.于E$。

则$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$。

定理说明在满足上述两个条件前提下，极限与积分可互换。

定理 3（逐项积分定理）设$\{f_n(x)\}$是 E 上非负可测函数列，则

$$\int_E\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx。$$

推论：设$\{E_n\}$是互不相交的可测集列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，如果 f（x）是 E 上的非负可

测函数，则$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)dx$。

定理 4 设 f（x）是 E 上几乎处处有限的非负可测函数，$mE<+\infty,\{y_n\}\subseteq[0,+\infty)$，满足$0=y_0<y_1<\cdots<y_n<\cdots(y_n\to+\infty,n\to\infty)$，其中$y_{n+1}-y_n<\delta$，令$E_n=E\left[x\mid y_n\le f(x)\le y_{n+1}\right](n=0,1,\cdots)$，则 f（x）在 E 上 Lebesgue 可积充要条件：$\sum_{n=0}^{\infty}y_n mE_n<\infty$。此时$\lim_{\delta\to0}\sum_{n=0}^{\infty}y_n mE_n=\int_E f(x)dx$。

注解：此处和尼曼积分不同的是对 y 轴进行分割、求和、取极限。

定理 5（Fatou 定理）设$\left\{f_n(x)\right\}$是 E 上非负可测函数列，则$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\le\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx$。

注解：Fatou 定理中严格不等式有可能成立，例如$f_n(x)=\left\{\begin{array}{l} n,x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0,x\in[0,1]-\left[0,\frac{1}{n}\right]\end{array}\right\}$，

易知$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\int_{[0,1]}f_n(x)\,dx=1$，则$\int_{[0,1]}\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=0<\varliminf_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\,dx=1$。

3 一般可测函数的 Lebesgue 积分

定义 1 设 f（x）是 E 上可测函数，如果积分$\int_E f^+(x)dx,\int_E f^-(x)dx$中至少有一个是有限值，记$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$，则称$\int_E f(x)dx$为 f（x）在 E 上的 Lebesgue 积分。

注解：①由于$(+\infty)-(+\infty)$无意义，故要求积分$\int_E f^+(x)dx,\int_E f^-(x)dx$中至少有一个是有限值，因此并不是每个可测函数都存在 Lebesgue 积分的；

② $-\infty\le\int_E f(x)dx\le+\infty$；

③如果上式右端两个积分值均有限，则称 f（x）在 E 上 Lebesgue 可积，即$\int_E f(x)dx<+\infty$，记为$f(x)\in L(E)$。

④ $f(x)\in L(E)\Leftrightarrow f^+(x)\in L(E),f^-(x)\in L(E)$；其中

$$\int_E f^+(x)\,dx=\int_E f^+(x)\,dx-\int_E 0dx,\int_E f^-(x)\,dx=\int_E f^-(x)\,dx-\int_E 0dx。$$

<u>Lebesgue 可积的条件：</u>

定理 1（1） $f(x)\in L(E)\Leftrightarrow|f(x)|\in L(E)$，此时$\left|\int_E f(x)dx\right|\le\int_E|f(x)|dx$；

（2） $f(x)\in L(E)\Rightarrow|f(x)|<+\infty$；

（3） $f(x)\in L(E)+f(x)=g(x),a.e.于E\Rightarrow g(x)\in L(E),\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$。

证明要点:（2）集合分解: $E\left[x\mid f(x)=+\infty\right]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq E_n$，$E_n=E\left[x\mid f(x)\ge n\right]$；

$$\int_E f^+(x)dx\ge\int_{E_n}f^+(x)dx=\int_E f(x)dx\ge n\cdot mE_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}mE_n=0。$$

（3） $f(x)=g(x),a.e.于E\Rightarrow f^+(x)=g^+(x),f^-(x)=g^-(x),a.e.于E$。

注解: 由（1）知，要证一函数可积可以转化为证其绝对值可积; 由（2）有，一个非几乎处处有限的函数一定不可积;（3）告诉我们，Lebesgue 可积性和积分值大小与零测集无关。

定理 2 设 $f(x),g(x)\in L(E)$，则

（1）对 $\forall c\in R$，$cf(x)\in L(E)$，且$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx$；

（2） $f(x)+g(x)\in L(E)$，且$\int_E\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$。

证明要点:（1）当 c<0 时，注意有$\left[cf(x)\right]^+=-cf^-(x),\left[cf(x)\right]^-=-cf^+(x)$。

（2） $|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$，转化为证$|f(x)+g(x)|$可积。

定理 3 设 $f(x)\in L(E)$，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n$是互不相交的可测集，则 $f(x)\in L(E_n)$，

且$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)dx$。（关于积分区间的可加性）

证明要点: 根据非负可测函数积分的可数可加性

定理 5（积分的绝对收敛性） $f(x)\in L(E)\Rightarrow$对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对 E 的任何可测子集 A，只要$mA<\delta$，就有$\left|\int_A f(x)dx\right|<\varepsilon$。

证明要点: 因为有 $f(x)\in L(E)\Leftrightarrow|f(x)|\in L(E)$，可不妨假设非负可积，根据非负可测函数积分的绝对连续性: 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对 E 的任何可测子集 A，只要 $mA<\delta$，就有 $\int_A|f(x)|dx<\varepsilon$。又$\left|\int_E f(x)dx\right|\le\int_E|f(x)|dx$。

注解: 这和“一致连续”的概念很类似。

4 Rieman 积分与 Lebesgue 积分

（1）、Lebesgue 积分与 Rieman 正常积分关系

定理 1 设 f(x) 是 [a,b] 上的有界函数，如果 f(x) 在 [a,b] 上 Rieman 可积，则 f(x) 在 [a,b] 上 Lebesgue 可积，且 $(L)\int_a^b f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx$。

注解：1、由 Lebesgue 可积推不出 Rieman 可积，如 Dirichlet 函数在 [0,1] 上 Lebesgue 可积，且 $(L)\int_0^1 D(x)dx=0$，但 $D(x)\notin R([0,1])$，由于 $D(x)$ 在 [0,1] 上处处不连续。

2、L-积分是 R-正常积分的推广。

（2）、Lebesgue 积分与 Rieman 反常积分关系

定理 2 设 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上非负，且 $\forall A\ge a, f(x)\in R([a,A])$，则 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上 Rieman 可积和 Lebesgue 可积，且 $(L)\int_a^{+\infty} f(x)dx=(R)\int_a^{+\infty} f(x)dx$。

定理 3 设 f(x) 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的实函数，如果 $(R)\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，则 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上 Lebesgue 可积，且 $(L)\int_a^{+\infty} f(x)dx=(R)\int_a^{+\infty} f(x)dx$。

注解：1、Lebesgue 积分不是条件收敛的 Rieman 积分的推广，例如

$$(R)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2} \quad 但 \quad (R)\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right|\notin L(E) \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x}{x}\notin L(E)\Rightarrow(L)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\ne(R)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx。$$

2、综上 L-积分是非负的 R-反常积分和绝对收敛的 R-反常积分的推广。

（3）、函数 Rieman 可积的充要条件

定理 4 设 f(x) 是 [a,b] 上的有界函数，则 f(x) 在 [a,b] 上 Rieman 可积的充要条件：f(x) 在 [a,b] 上几乎处处连续。（R-可积与连续的本质关系）

例题：Dirichlet 函数在 [0,1] 上 Riemann 不可积，因为在 [0,1] 上处处不连续；Riemann 函数在 [0,1] 上 Riemann 可积，因为连续点为（0，1）中无理点。

5 重积分与累次积分

一、Fubini 定理

定理 1（Tonelli）设 f(x,y) 是 $R^p\times R^q$ 上的非负可测函数，则

（1）对几乎所有的 $x\in R^p, f(x,y)$ 作为 $y\in R^q$ 的函数是非负可测的；

（2）$F(x)=\int_{R^q} f(x,y)dy$ 作为 $x\in R^p$ 的函数是非负可测的；

（3）$\int_{R^p\times R^q} f(x,y)dxdy=\int_{R^p}dx\int_{R^q} f(x,y)dy$。

提示：分五种情形证明

定理 2（Fubini 定理）设 f(x,y) 是 $R^p\times R^q$ 上的 L 可积函数，则

（1）对几乎所有的 $x\in R^p$, $f(x,y)$ 作为 $y\in R^q$ 的函数是 L 可积的；

（2）$F(x)=\int_{R^q} f(x,y)dy$ 作为 $x\in R^p$ 的函数是 L 可积的；

（3）$\int_{R^p\times R^q} f(x,y)dxdy=\int_{R^p}dx\int_{R^q} f(x,y)dy$。

二、Fubini 定理的应用

引理 设 f(x) 是 R^n 上的可测函数，则 f(x-y) 是 $R^n\times R^n=R^{2n}$ 上的可测函数。

定义 1 设 f(x)，g(x) 是 R^n 上的可测函数，如果对几乎所有的 $x\in R^n$，积分

$\int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$ 存在，则称 $(f*g)(x)=\int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$ 为 f(x) 与 g(x) 的卷积。

应用 1 设 f(x)，g(x) 是 R^n 上的 L 可积函数，则对几乎所有的 $x\in R^n$，$(f*g)(x)$ 存在，并且 $\int_{R^n}|(f*g)(x)|dx\le\int_{R^n}|f(x)|dx\int_{R^n}|g(x)|dx$。

应用 2 设 $E\subseteq R^n$ 是可测集，f(x) 是 E 上几乎处处有限的的可测函数，对每个 $\lambda>0$，令 $F(\lambda)=m(\{x\in E\,|\,|f(x)|>\lambda\})$，称 $F(\lambda)$ 为 f(x) 分布函数，则当 $1\le p<\infty$ 时，$\int_E|f(x)|^p=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}F(\lambda)d\lambda$。

第五章　微分与积分

本章目的是在 Lebesgue 积分意义下，就 Riemann 积分中的“微积分基本定理”和“定积分中的 Newton-Leibniz 公式”进行推广。

1 有界变差函数

回忆：有界变差数列：设 $\{a_n\}$ 为一数列，则 $V(a_n)=\sum_{i=1}^n|a_{i+1}-a_i|$ 称为变差数列，

若 $\{V(a_n)\}$ 有界，则称为有界变差数列。

定义 1 设 f(x) 是定义在 [a, b] 上的函数，任取 [a, b] 的分割 D:

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令 $V_a^b(f,D)=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$，称 $V_a^b(f,D)$ 为 f(x) 关于分割 D 的变差。如果 $\exists M>0$ 对一切分割 D，$V_a^b(f,D)\le M$，则称 f(x) 是 [a, b] 上有界变差函数，记为 $f(x)\in BV([a,b])$。

令$V_a^b(f)=\sup V_a^b(f,D)$，称$V_a^b(f)$为 f(x)在[a, b]上的全变差或总变差。

例：（1）[a, b]上的单调函数 f(x)必为有界变差函数;

（2）f(x)在[a, b]上满足 Lipschitz 条件，则 f(x)是[a, b]上有界变差函数;

有界变差函数性质:

(1) $f(x)\in BV([a,b])\Rightarrow |f(x)|\in BV([a,b])$;

注解: 反之不成立，例如 $f(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1]\text{上有理数}\\ -1, x\in[0,1]\text{上无理数}\end{cases}$，易知$|f(x)|\in BV([0,1])$，

取分割 D_n： $0=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=1$，其中 $x_2,\cdots,x_{2n-2}$ 为[0, 1]上有理数，

$x_1,\cdots,x_{2n-1}$为[0, 1]上无理数，则$V_0^1(f,D_n)=4n$无界，故 $f(x)\notin BV([a,b])$。

(2) $f(x)\in BV([a,b]), a<c<b\Rightarrow f(x)\in BV([a,c]), f(x)\in BV([c,b])$且

$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$;

(3) $f(x),g(x)\in BV([a,b])$，α,β为常数$\Rightarrow \alpha f(x)+\beta g(x)\in BV([a,b])$且

$V_a^b(\alpha f+\beta g)\le|\alpha|V_a^b(f)+|\beta|V_a^b(g)$;

(4) $f(x),g(x)\in BV([a,b])\Rightarrow f(x)g(x)\in BV([a,b])$;

(5) $\{f_n(x)\}\in BV([a,b])$ +$\{V_a^b(f_n)\}$有界且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\Rightarrow f(x)\in BV([a,b])$。

(Jordan 分解定理) $f(x)\in BV([a,b])\Leftrightarrow$ f(x)恒可表示为两单增函数之差。

提示: $\varphi(x)=\frac{1}{2}[V(x)+f(x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[V(x)-f(x)],V(x)=V_a^x(f)$，任取

$x_1<x_2(\in[a,b])$有$|f(x_1)-f(x_2)|\le V_{x_1}^{x_2}(f)=V_a^{x_2}(f)-V_a^{x_1}(f)$。

注解: Jordan 分解的方法不唯一，在此基础上同时加一个常数或同时加上一个单调增函数仍为它的分解。

推论: 有界变差函数的间断点是第一类的且间断点全体构成至多可数集，即有界变差函数$\Rightarrow$连续函数(必要性)。

注解: 闭区间上连续函数不一定是有界变差函数，例如:

$f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{\pi}{2x}, x\in(0,1]\\ 0, x=0\end{cases}$是[0, 1]上连续函数，但存在分割$D_n$:

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{2}<1$$，则 $V_0^1(f)\geq\sup_{n\in N}V_0^1(f,D_n)=\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty$。

定义 3 设 r(x) 为 [a, b] 上连续有界变差函数且不恒为常数，如果 $r'(x)=0,a.e.[0,1]$，那么称 r(x) 为奇异函数。

有界变差函数的另外一种分解:

设 f(x) 为连续有界变差函数，由于 $f'(x)$ 存在且 Lebesgue 可积，作函数

$g(x)=f(a)+\int_{[a,x]}f'(t)dt\leq f(x)$， r(x)= f(x)- g(x)， $r'(x)=0,a.e.[a,b]$， 则 r(x) 可能是奇异函数或零，从而: f(x) = g(x)+ r(x)， r(a)=0， 其中 g(x) 为绝对连续函数， r(x) 为奇异函数或零。且此分解唯一。

2 导数与原函数

定义 1 设 $E\subseteq R^1$， $\mu=\{I\}$ 是长度为正的闭区间集，如果对 $\forall x\in E$ 及 $\forall\varepsilon>0$，存在 μ 中闭区间 I，使 $x\in I$，且 $mI<\varepsilon$，那么称 μ 依 Vitali 意义覆盖 E。

定理 1 (Vitali 覆盖定理) 设 $E\subseteq R^1$ 是有界集， μ 为 E 的 V-覆盖，则可从 μ 中选出有限个或可数个互不相交的闭区间 $\{I_i\}$，使得 $m^*\left(E\setminus\bigcup_i I_i\right)=0$。

注解: Vitali 覆盖定理的意义在于，从 μ 中选出的闭区间列 $\{I_i\}$ 不一定能覆盖 E，但就测度而言，盖不住的点集为零测集。在应用上，改为下列形式:

推论: 设 $E\subseteq R^1$ 是有界集， μ 为 E 的 V-覆盖，则 $\forall\varepsilon>0$，从 μ 中可选出有限个互不相交的闭区间 $\{I_1,\cdots,I_n\}$，使得 $m^*\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}I_i\right)<\varepsilon$。

定义 2 对于给定的函数 f(x)， x_0 为定义域内一点，我们定义

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{h\to0_+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},D_+f(x_0)=\underline{\lim_{h\to0_+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^-f(x_0)=\overline{\lim_{h\to0_-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},D_-f(x_0)=\underline{\lim_{h\to0_-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$，分别为 f(x) 在点 x_0 的右上、右下、左上、左下导数。四个导数相等时，则称 f(x) 在点 x_0 出可微，导数仍记为 $f'(x_0)$。

注解: 四个导数可能有限，可能无限，可能相等，也可能不等。若右上等于右下，则称为右导数；若左上等于左下，则成为左导数。

例： $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, 0<x\le 1 \\ 0, x=0 \\ \frac{1}{2}x\sin\frac{1}{x}, -1\le x<0 \end{cases}$ 在 x=0 处有 $D^{+}f(0)=1, D_{+}f(0)=-1$，

$D^{-}f(0)=\frac{1}{2}, D_{-}f(0)=-\frac{1}{2}$。

定理 2 设 f(x) 为 [a, b] 上的严格增函数，常数 $p\ge 0$，如果 $\forall x\in E\subset[a,b]$ 四个导数，至少有一个导数 $Df(x)\le p$（$Df(x)\ge p$），那么必有 $m^*f(E)\le pm^*E$（$m^*f(E)\ge pm^*E$）。

定理 3 (Lebesgue) 若 f(x) 在 [a, b] 上为单调函数，则 f(x) 在 [a, b] 上几乎处处存在有限导数。

定理 4 设 f(x) 在 [a, b] 上单增，则 $f'(x)\in L([a,b])$，$\int_{[a,b]} f'(x)dx\le f(b)-f(a)$。

注解：定理中严格不等式可能成立，甚至连续增函数都可能成立严格不等式。

推论：(1) 有界变差函数是几乎处处可微的；（由于 Jordan 分解定理）

(2) 在 [a, b] 上有界变差函数 f(x) 的导函数 $f'(x)\in L([a,b])$。

下面研究原函数问题

设 $f(x)\in L([a,b])$，定义函数 $F(x)=\int_{[a,x]} f(t)dt\,(a\le x\le b)$。则

① F(x) 为 [a, b] 上连续函数；

由于 $F(x)-F(x_0)=\int_{[a,x]} f(t)dt-\int_{[a,x_0]} f(t)dt=\int_{[x_0,x]} f(t)dt$，由 L 积分的绝对连续性，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $m[x_0,x]=|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$。

② F(x) 为有界变差函数。

由于 $f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$，且 $\int_{[a,x]} f^{+}(t)dt, \int_{[a,x]} f^{-}(t)dt$ 都是单增函数，根据 Jordan 分解定理知 F(x) 为有界变差函数。

从而 F(x) 几乎处处可微。

引理 若 $f(x)\in L([a,b])$，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $\int_{[a,x]} f(t)dt=0$ 则 $f(x)=0, a.e.[a,b]$。

定理 5 若 $f(x)\in L([a,b])$，则 $\frac{d}{dx}\int_{[a,x]} f(t)dt = f(x), a.e.[a,b]$。

3 绝对连续函数与不定积分

定义 1 设函数 f(x) 定义于 [a, b]，如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使对于 [a, b] 上的任意有限个互不相交的开区间集 $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$，当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ 时，有 $\sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i) - f(a_i)\right| < \varepsilon$ 成立，那么称 f(x) 为 [a, b] 上的绝对连续函数。

例：满足 Lipschitz 条件的函数是绝对连续函数。($\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$)

注解：绝对连续函数是一致连续函数的推广。

定理 1 绝对连续函数 $\Rightarrow$ 有界变差函数

推论：绝对连续函数几乎处处存在有限导数，且其导函数是 Lebesgue 可积的。

定义 2 设 $f(x)\in L([a,b])$ 令 $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt + C$ (C 为任意常数)，则称 F(x) 为 f(x) 的不定积分。

定理 2 可积函数的不定积分是绝对连续函数。

对于单增函数 F(x)，一般有 $\int_{[a,b]} F'(x)dx \le F(b) - F(a)$，而要求等式成立，还须对 F(x) 作一定要求。

定理 3(Newton-Leibniz 公式) $\int_{[a,x]} F'(t)dt = F(x) - F(a)\left(x\in[a,b]\right)$ 成立 $\Leftrightarrow$ F(x) 为 [a, b] 上绝对连续函数

推论：F(x) 为 [a, b] 上的绝对连续函数 $\Leftrightarrow$ F(x) 为某个 Lebesgue 可积函数的不定积分。

小结：本章从两类函数：有界变差函数与绝对连续函数，分别去解决 Rinemann 积分中的微积分基本定理(导函数存在定理)和 Newton-Leibniz 公式。

绝对连续函数 $\Rightarrow$ 有界变差函数 $\Rightarrow$ 连续函数。原函数可能是 $\int_{[a,x]} f(t)dt$，而它刚好是连续的有界变差函数，根据有界变差函数的 Jordan 分解为两单增函数的差，从而研究单增函数，步骤：

①闭区间上单增函数几乎处处可导，且导函数 Lebesgue 可积，且满足 $\int_{[a,b]} f'(x)dx \le f(b) - f(a)$；

②有界变差函数几乎处处可导(解决前者)，且导函数 Lebesgue 可积。

③绝对连续函数几乎处处可导，且导函数 Lebesgue 可积(解决后者)。