王泽洲　数强1901　201923079

1. 解：不一定可测，其反例如下：

我们可以取指标集为不可测集，并且取

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x=\alpha \\ 0 & x\neq\alpha \end{cases} \quad 则\ m(f_\alpha(x)=0)=0$$

且 $\sup\{f_\alpha(x):\alpha\in I\} = \begin{cases} 1 & x\in I \\ 0 & x\notin I \end{cases}$ 显然，$S(x)$ 不是可测函数。

2. 解：因为 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上的实值可测函数，所以存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 和 $\{\psi_k(x)\}$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=g_1(x)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(x)=g_2(x)$。

因为 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\varphi_k(x),\psi_k(x))=f(\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x),\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(x))$ $=f(g_1(x),g_2(x))$ 所以 $\{f(\varphi_k(x),\psi_k(x))\}$ 为简单可测函数列，故 $f(g_1(x),g_2(x))$ $[a,b]$ 上可测。

3. 解：因为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有右导数，则 $f(x)$ 的不连续点集可数，$f(x)$ 几乎处处连续，因此，$f(x)$ 是可测函数，进一步我们有 $f(x+\frac{1}{n})$ 也为可测函数，又因为：$f_+'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 又因为 $f_n(x)=\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$。 $f_n(x)$ 为可测函数。

故 $f(x)$ 的右导数可测。

4. 解：因为 $f(x)$ 为几乎处处有限的可测函数，存在简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$。

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}m(|\varphi_n(x)-f(x)|>0)=m(|\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n(x)-f(x))|>0)$ 即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，s.t.

$m(|\varphi_N(x)-f(x)|=0)<\varepsilon$。　取 $N=N(\varepsilon)$，

对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists g(x)=\varphi_{N(\varepsilon)}(x)$，s.t. $m(\{x\in E:|f(x)-g(x)|>0\})<\varepsilon$。

5. 证：对于 $\varepsilon_m=\frac{1}{2^m}$，存在 A 的可测子集 B_m，s.t. $m(A\setminus B_m)<\frac{1}{2^m}$，且 $f_n(x)$ 在 B_m 上一致收敛于 $f(x)$，记 $B=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=j}^{\infty}(A\setminus B_m)$，则 $m(B)\le m(\bigcup\limits_{m=j}^{\infty}(A\setminus B_m))\le\sum\limits_{m=j}^{\infty}m(A\setminus B_m)$ $<\sum\limits_{m=j}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{j-1}}$，$\forall j\in\mathbb{N}$，所以 $m(B)=0$。　$\forall x\in A\setminus B=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=j}^{\infty}B_m$，$\exists j_0\in\mathbb{N}$，s.t. $x\in\bigcap\limits_{m=j_0}^{\infty}B_m$。因为 f_n 在 B_m 上一致收敛，又 $m(B)=0$，故 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$。

6. 证：记 E^* 为不收敛的那部分点。

$$E^* = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E : |f_k(x)| \geq \tfrac{1}{m}\}$$

"$\Rightarrow$"

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, m(\{x\in E : \sup_{k\geq j}\{|f_k(x)|\} \geq \varepsilon\}) \leq \overline{\lim_{j\to\infty}}\, m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E : |f_k(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\})$$

$$= \lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E : |f_k(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) = m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E : |f_k(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \quad (m(E)<\infty)$$

$$\leq m(E^*) = 0.$$

故 $\lim_{j\to\infty} m(\{x\in E : \sup_{k\geq j}\{|f_k(x)|\} \geq \varepsilon\}) = 0$.

"$\Leftarrow$".

$$m(E^*) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E : |f_k(x)| \geq \tfrac{1}{m}\})$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E : |f_k(x)| \geq \tfrac{1}{m}\}) \quad (m(E)<\infty)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} m(\{x\in E : \sup_{k\geq j}\{|f_k(x)|\} \geq \tfrac{1}{m}\}) = 0.$$

故 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ a.e. $x\in E$.

7. 证明：

由 Егоров 定理，$\forall\, \delta = \frac{1}{n} > 0$，$\exists\, E_n \subset [a,b]$，s.t. $f_k(x)$ 在 E_n 上一致收敛。又 $m([a,b]\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < m([a,b]\setminus E_n) < \frac{1}{n}$，由 n 的任意性

$$\lim_{n\to\infty} m([a,b]\setminus E_n) = m([a,b]\setminus \lim_{n\to\infty} E_n) < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0. \quad \text{得证.}$$

8. 证明：

$\forall \varepsilon>0$，$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E : |f_k(x)-f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0$，$\lim_{k\to\infty}(\{x\in E : |g_k(x)-g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0$

又 $\{x\in E : |f_k(x)+g_k(x)-f(x)-g(x)| > \varepsilon\} \subset \{x\in E : |f_k(x)-f(x)| > \varepsilon\} \cup$
$\{x\in E : |g_k(x)-g(x)| > \varepsilon\}$ 故 $m(\{x\in E : |f_k(x)+g_k(x)-f(x)-g(x)| > \varepsilon\} \leq$
$m(\{x\in E : |f_k(x)-f(x)| > \varepsilon\}) + m(\{x\in E : |g_k(x)-g(x)| > \varepsilon\})$.

取极限有：$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E : |f_k(x)+g_k(x)-f(x)-g(x)| > \varepsilon\}) = 0$. 得证.

9. 证明:

"$\Rightarrow$"

若 $\{f_k(x)\}$ 在E上依测度收敛于 $f(x)$, $\forall \varepsilon>0$. $\alpha<\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists N>0$. $\forall k\geq N$.
$m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\frac{\varepsilon}{2}$ 故. $\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\varepsilon$.
则 $\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}<\varepsilon$. 即:

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}=0.$$

"$\Leftarrow$"

记 $b_k=\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}$, 假设 $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$. $\exists \alpha_k>0$.
s.t. $b_k\leq \alpha_k+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha_k\})\leq b_k+\frac{1}{k}$. 同时取极限有:
$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=0$. $\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha_k\})=0$. $\forall\varepsilon>0$. $\exists K_0>0$. $\forall k>k_0$
有 $\alpha_k<\varepsilon$. 从而 $m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\to 0$ $(k\to\infty)$. 即 $\{f_k(x)\}$ 在E上依测度收敛于 $f(x)$.

10. 证明:

由 x_0 为 $f(x)$ 的连续点可知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, s.t.
$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{18}$. 因 $f_n\Rightarrow f$. 故. $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in[0,1]: |f_n(x)-f(x)|>\frac{\varepsilon}{9}\})<\frac{\delta}{2}$.
$\exists x_1\in(x_0-\delta, x_0)$. $x_2\in(x_0, x_0+\delta)$, s.t. $|f_n(x_1)-f(x_1)|\leq\frac{\varepsilon}{9}$, $|f_n(x_2)-f(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{9}$.
故. $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leq|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f_n(x_2)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$. 因
f_n 在 $[0,1]$ 上递增, 故. $|f_n(x_1)-f_n(x_0)|\leq|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$
故. $|f_n(x_0)-f(x_0)|\leq|f_n(x_0)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$.
即. $f_n(x_0)\to f(x_0)$. $(n\to\infty)$.

11. 证明: 对每个自然数 n, 取此时开集为 $G_n\subset\mathbb{R}^n$. s.t. $f\in C(\mathbb{R}^n\setminus G_n)$ 令 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. 则有 $m(G)=0$. $\forall t\in\mathbb{R}^1$. $\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)>t\}=\{x\in G: f(x)>t\}\cup$
$\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G: f(x)>t\}=\{x\in G: f(x)>t\}\cup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G_n: f(x)>t\})$.
因 $m^*(\{x\in G: f(x)>t\})\leq m^*(G)=0$. 故 $\{x\in G: f(x)>t\}$ 是零测集.
又 $f(x)\in C(\mathbb{R}^n\setminus G_n)$. 故 $\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G_n: f(x)>t\}$ 是可测集. 从而 $\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)>t\}$
是可测集. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数.

12、证明：因为 $\{x\in E: |f_k(x)\cdot g_k(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in E: |f_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\}\cup\{x\in E: |g_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\}$.

由 $f_k(x)$ 与 $g_k(x)$ 依测度收敛于零可知，$\forall\varepsilon>0$，

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\})=0 \quad \lim_{k\to\infty} m(\{x\in E: |g_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\})=0.$$

$$m(\{x\in E: |f_k(x)\cdot g_k(x)|>\varepsilon\})\leq m(\{x\in E: |f_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\})+m(\{x\in E: |g_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\}).$$

两边对 k 取极限，有：

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)\cdot g_k(x)|>\varepsilon\})=0.$$

得证.

14. 证明：

由题意可知，取 $\frac{1}{n}$，$\exists$ 闭集 F_n，$m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$，s.t. $f(x)$ 在 F_n 上连续，记 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，$E_0=E\setminus F$，则有 $m(E_0)=m(E\setminus F)\leq m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$，由 n 的任意性知，$m(E_0)=0$.

$\forall t\in\mathbb{R}^1$，$\{x\in E: f(x)>t\}=\{x\in E_0: f(x)>t\}\cup\{x\in F\ f(x)>t\}$

$=\{x\in E_0: f(x)>t\}\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in F_n: f(x)>t\})$ 因 $m(\{x\in E_0: f(x)>t\})\leq m(E_0)=0$.

$\{x\in E_0: f(x)>t\}$ 是零测集，而 f 在 F_n 上连续，$\{x\in F_n: f(x)>t\}$ 是可测集，从而 $\{x\in E: f(x)>t\}$ 是可测集，故 $f(x)$ 是 E 上之可测函数.

15、证明：

记 $E_{n_k}(k)=\{x\in[a,b]: |f_{n_k}(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\}$，由题意可知：$\forall k\in N$，$\exists n_k>0$ s.t. $m^*(E_{n_k}(k))<\frac{1}{2^k}$. 令 $E=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_{n_k}(k)$ 则 $m(E)=0$. $\forall x\in[a,b]\setminus E=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}\{x\in[a,b]: |f_{n_k}(x)-f(x)|\leq\frac{1}{k}\}$ $\exists N_0>0$. s.t. $|f_{n_k}(x)-f(x)|\leq\frac{1}{k}$. $\forall k\geq N_0$

故 $\lim_{n\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$ a.e. $[a,b]$. 故 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

16. 证明：

取正数列 $\frac{1}{i}$ ($i=1,2,\cdots$) 对 $\forall\delta>0$，$\exists j_i$. s.t. $m(\bigcup_{k=j_i}^{\infty}\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|\geq\frac{1}{i}\})<\frac{\delta}{2^i}$

令 $E_\delta=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=j_i}^{\infty}\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|\geq\frac{1}{i}\}$. 就有：$m(E_\delta)\leq\sum_{i=1}^{\infty}m(\bigcup_{k=j_i}^{\infty}E_k(\frac{1}{i}))\leq\delta$.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists i$. s.t. $\frac{1}{i}<\varepsilon$. $\forall x\in E\setminus E_\delta$. 当 $k\geq j_i$，有

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}<\varepsilon.$$

故 $f_k(x)$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$，证毕.