
大连理工大学
詹卫伸

第一章　　质点机械运动的描述

☆

物体最普遍也是最简单的运动是机械运动，
即宏观物体之间或物体内部不同部分之间
相对位置随时间改变的过程。

物体做机械运动时，其运动状态就会发生变化。
定量描述物体运动状态的物理量主要有：
位置矢量、速度矢量和加速度矢量以及运动轨道。

研究物体运动状态和运动状态随时间变化的
物理学方法称为运动学。

为了研究物体的运动，要对复杂的物体运动进行科学合理的抽象，即建立物理模型。

在物理学中，最简单的理想化模型是质点模型，
将宏观物体抽象为一个空间点。

☆

为了描述质点的运动状态，
需要建立物体运动的参考物体，即参考系；

选作参考的物体是多种多样的，
可以分为惯性参考系和非惯性参考系。

为了使用数学工具定量地描述物体机械运动状态
和研究机械运动状态随时间的变化，
还要在参考系上建立一个坐标系。

坐标系也有多种选择，主要有：
直角坐标系、柱坐标系和球坐标系。

第一节　　质点位置的描述

一、质点
二、参考系和坐标系
三、质点的位置矢量

☆

一、质点

忽略物体的大小、形状和内部结构，把它看成一个只有质量的物理意义上的几何点，称为质点

质点是物理学上一个十分有用的理想模型，
是从客观实际中抽象出来的理想模型。

一些实际的物体，可以把它们当作是由大量质点组成的，通过研究单个“质点”的机械运动，再把单个质点的机械运动整合起来，就有可能了解整个研究对象的运动规律。

把物体看作质点来处理的力学称为质点力学。

研究质点运动状态及运动状态随时间变化的质点力学称为质点运动学；
研究质点运动状态变化物理机制的质点力学称为质点动力学

在客观物质世界中，质点是不存在的。
一个物体可以被看作质点的条件为，
在研究这个物体的运动规律时，
其体积大小和形状对问题的研究没有影响，
但质量却是影响运动的主要因素。

质点这一理想化模型，
突出了实际物体的质量和空间位置等主要的物理特征。

一个做机械运动的物体是否能够被抽象为一个质点，
取决于物体本身尺寸和那些对于所研究的问题具有
最重要意义的运动区域的大小，以及物体的运动特性。

☆

物体在运动过程中不变形、不作转动，
物体上各个点的速度和加速度都相同，
物体上任何一点都可以代表所有点的机械运动，
即物体上所有点的运动规律相同，
只研究物体上的一个小部分（点）的机械运动就可以了。
我们可以将做这样机械运动物体的全部质量集中在质心处，
而把物体看作一个物理上的几何点，
研究质心的机械运动，就代表了整个物体的机械运动。

物体本身的线度与它的运动范围相比小得很多，
此时物体的形变及转动显得并不重要，
可以将物体看作质点。

二、参考系和坐标系

☆

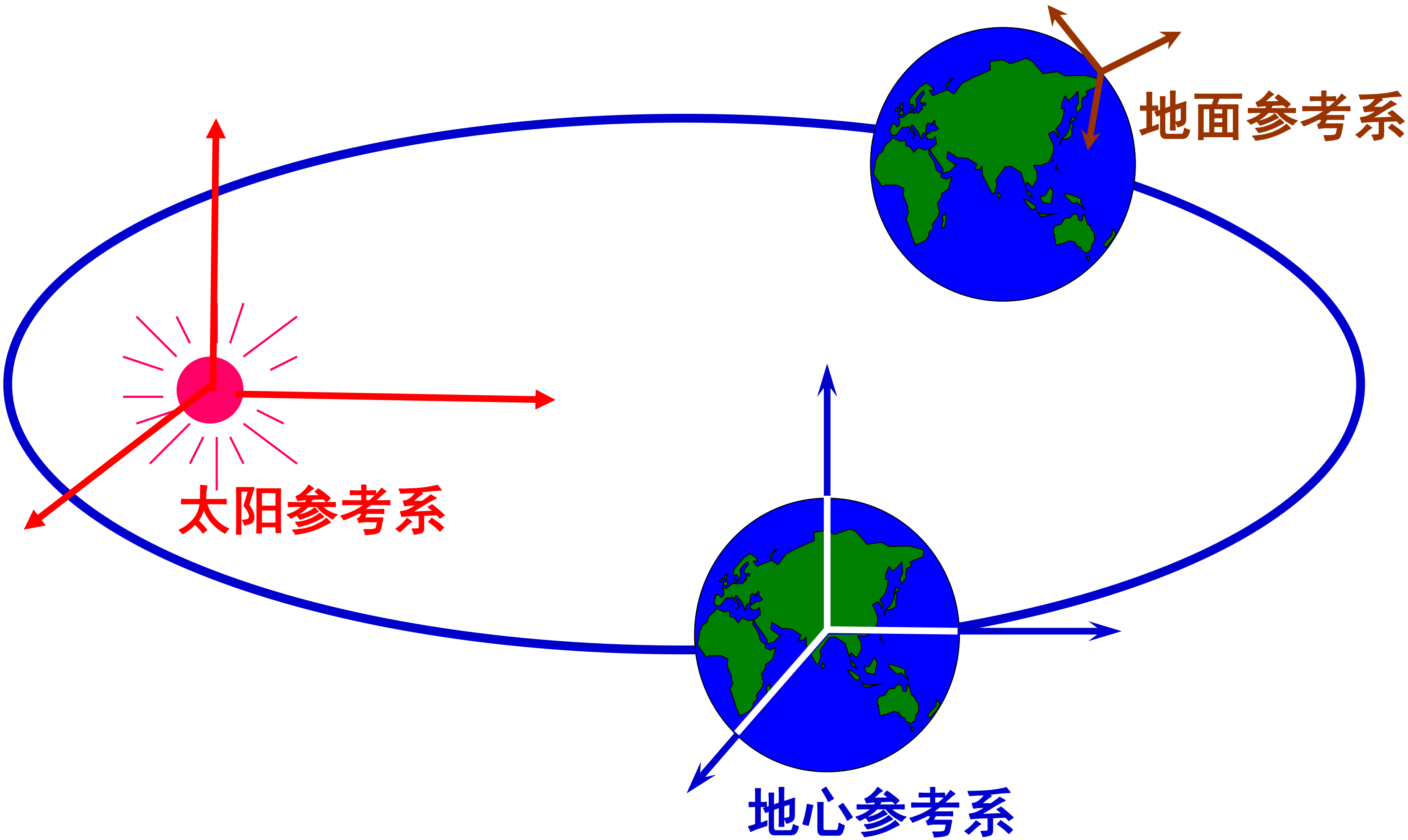
物体的机械运动指的是物体的位置随时间的改变。任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。因此，在研究物体间的相对位置的变化时，必须事先选定某一个参考物体，以便确定其他物体相对于这个物体的位置的变化。如果对于某个参考物体而言，物体在空间的位置随时间而变动，则说物体相对于这个参考物体是运动的，否则是静止的。

这个为了描述物体的位置以及位置随时间变化而被事先所选定的物体称为参考体。
与参考体固连在一起的整个延伸空间称为参考系。

常见的参考系有：

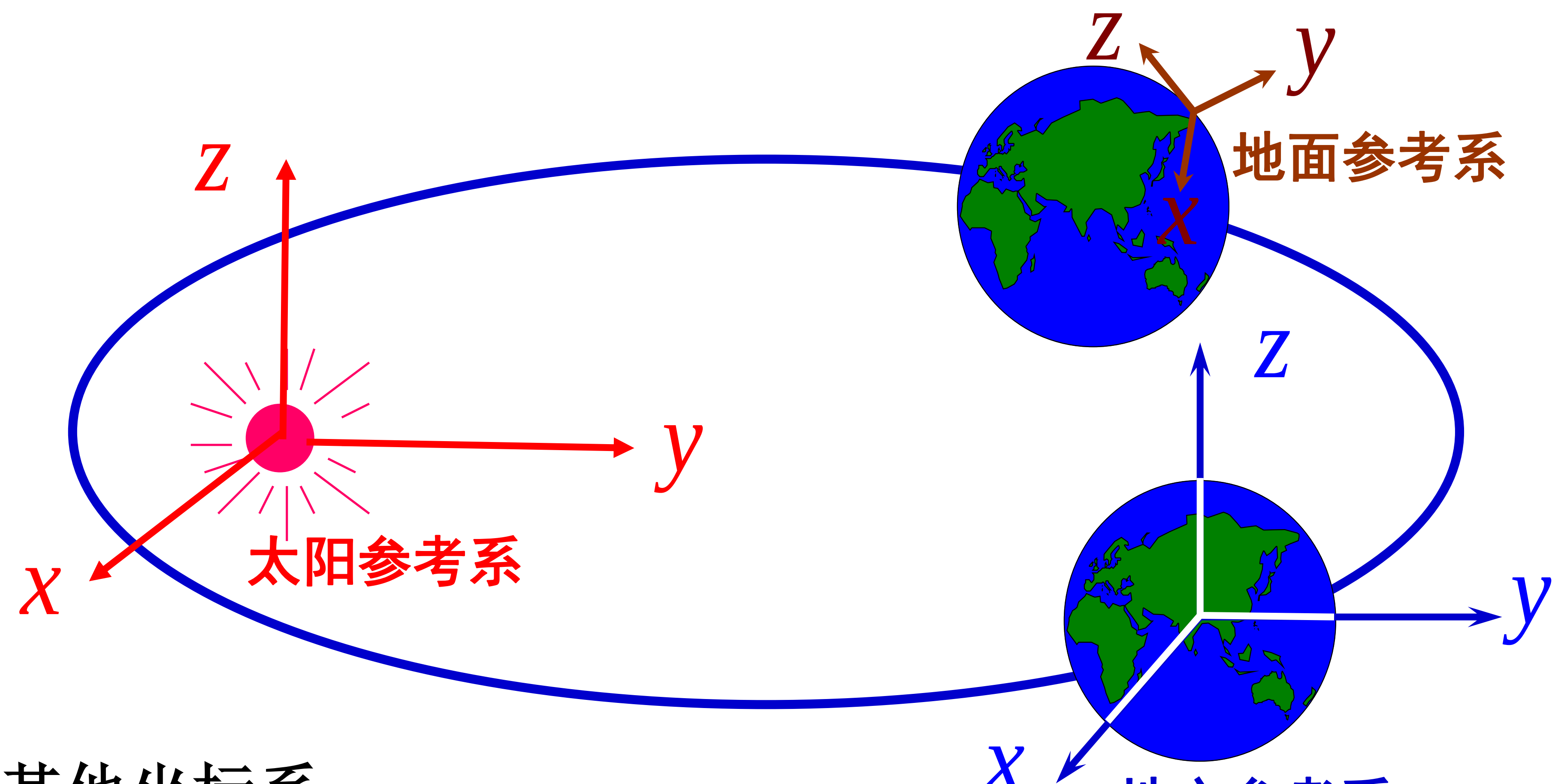
☆

地球（面）参考系、地心参考系和太阳参考系。



在日常生活和工程实际中通常都选地球为参考体。

在参考系上建立一个固定的坐标系，用坐标值来表示质点的位置以及物体的机械运动。坐标系是参考系的数学定量表述，是由实际物体构成的参考系的数学抽象。



其他坐标系：

平面极坐标系、球坐标系或柱坐标系

平面极坐标系

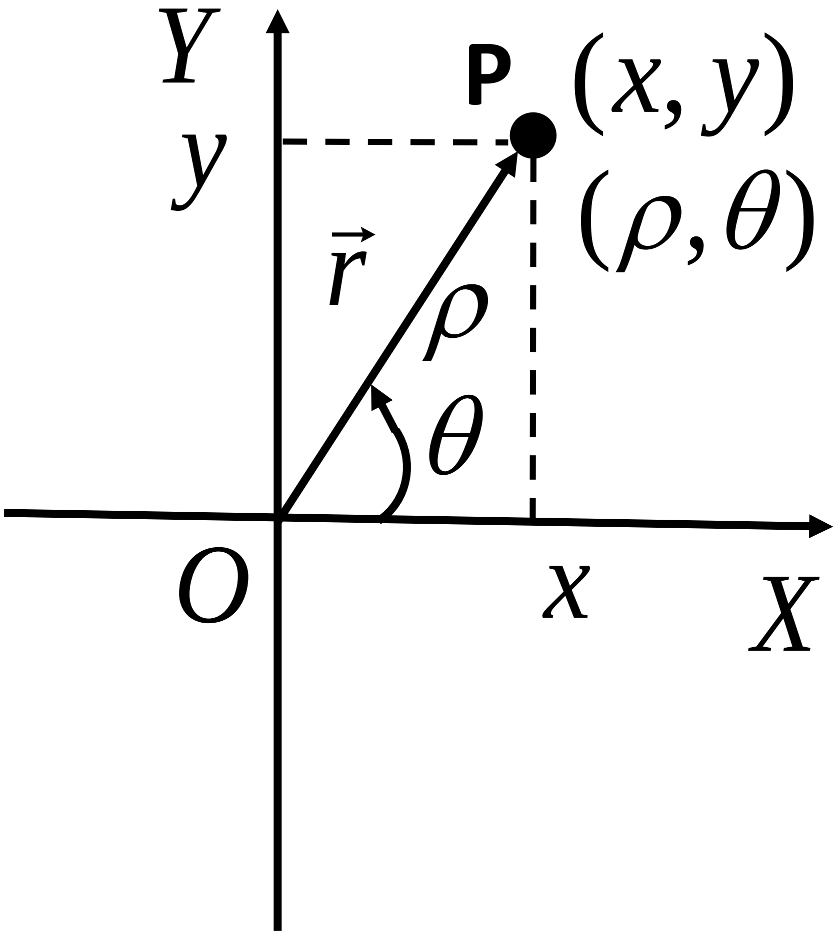
☆

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



球坐标系 ☆

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

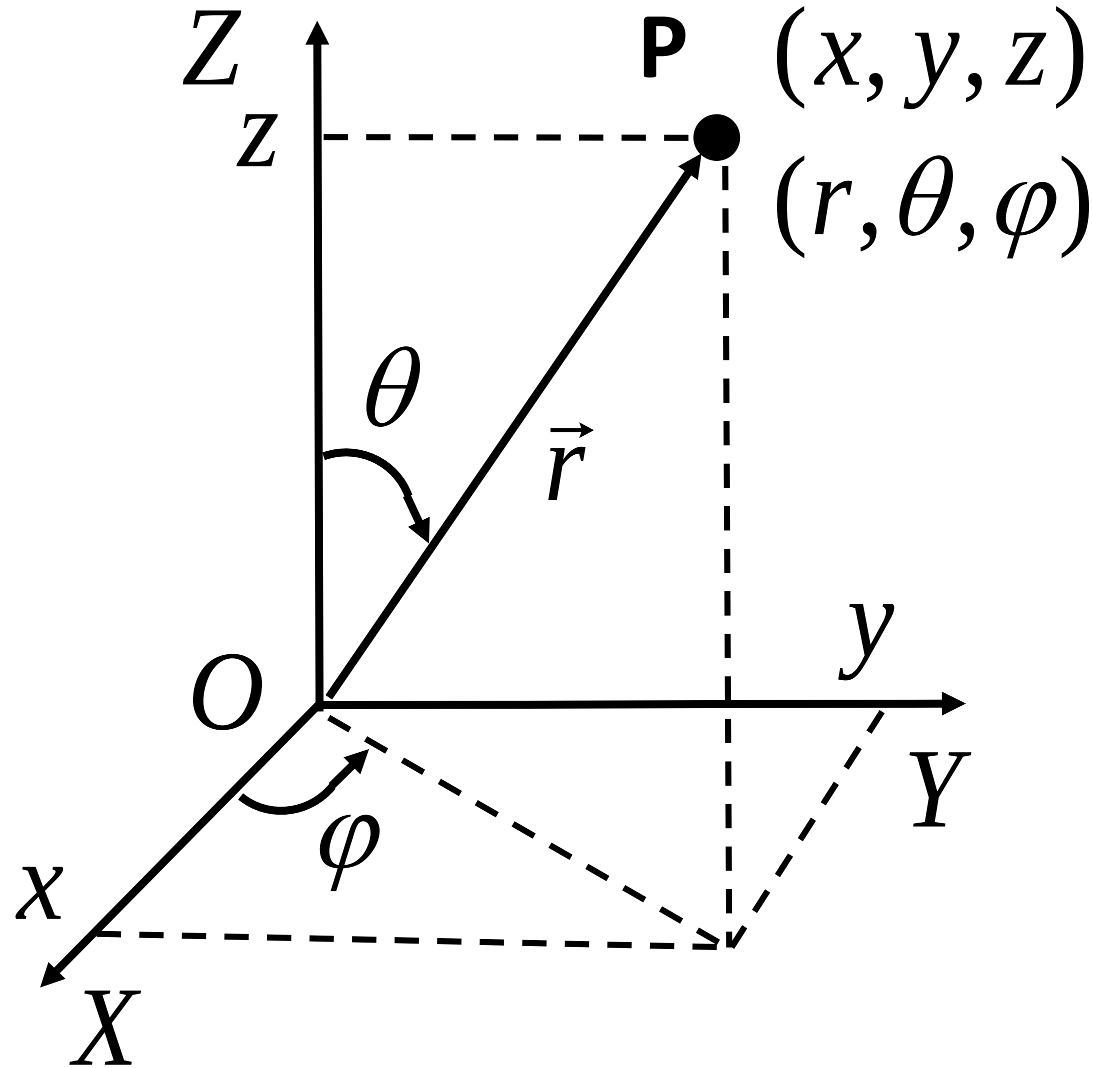
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$



柱坐标系 ☆

$$x = \rho\cos\varphi$$

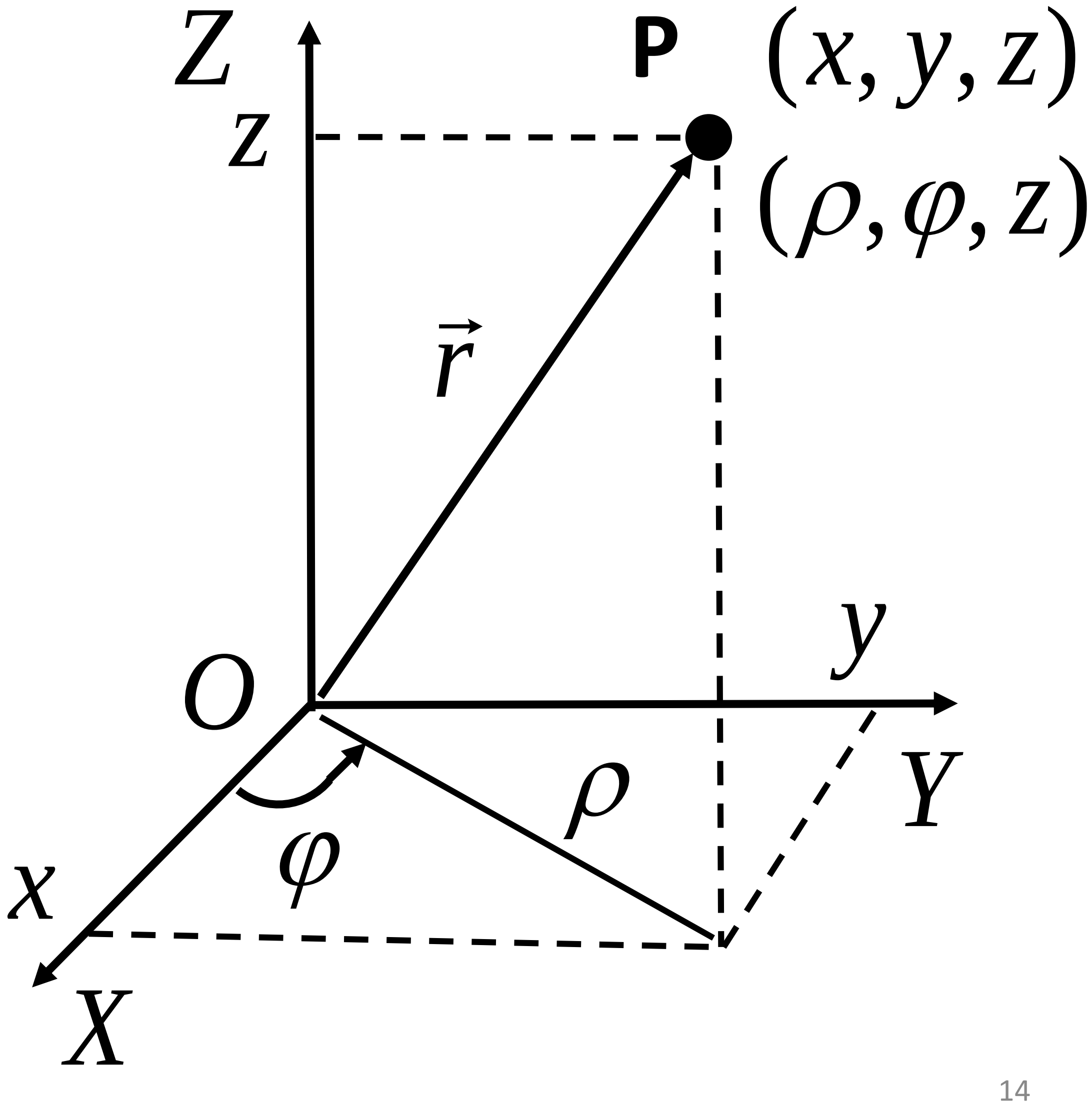
$$y = \rho\sin\varphi$$

$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

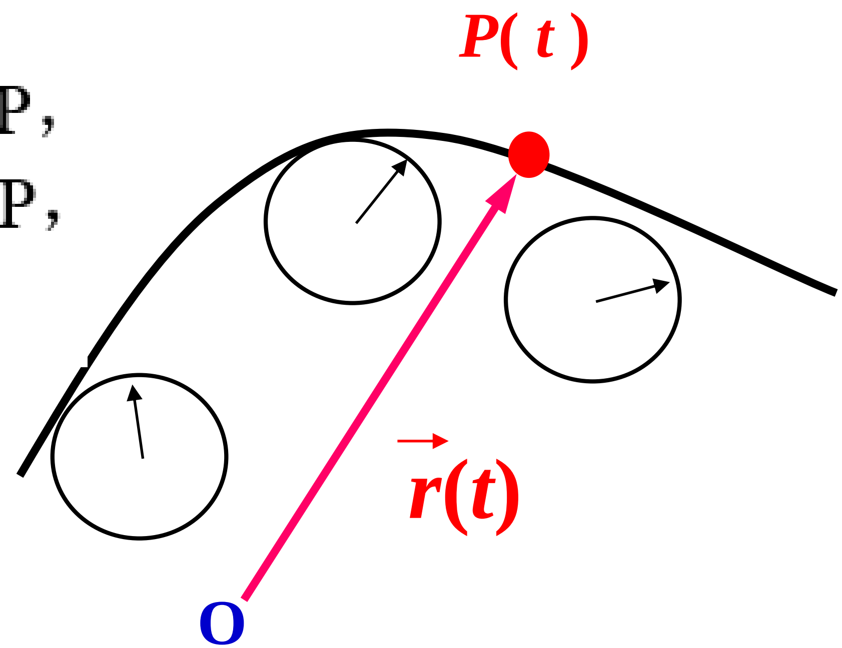
$$z = z$$



三、质点的位置矢量

☆

为了表示质点在时刻 t 的位置 P，从原点向此点引一有向线段 OP，并记作矢量 $\vec{r}(t)$。



$\vec{r}(t)$ 的方向说明了 P 点相对于坐标轴的方位，

$\vec{r}(t)$ 的大小(即它的模)表明了原点到 P 点的距离。

质点的空间位置与矢量 $\vec{r}(t)$ 一一对应，

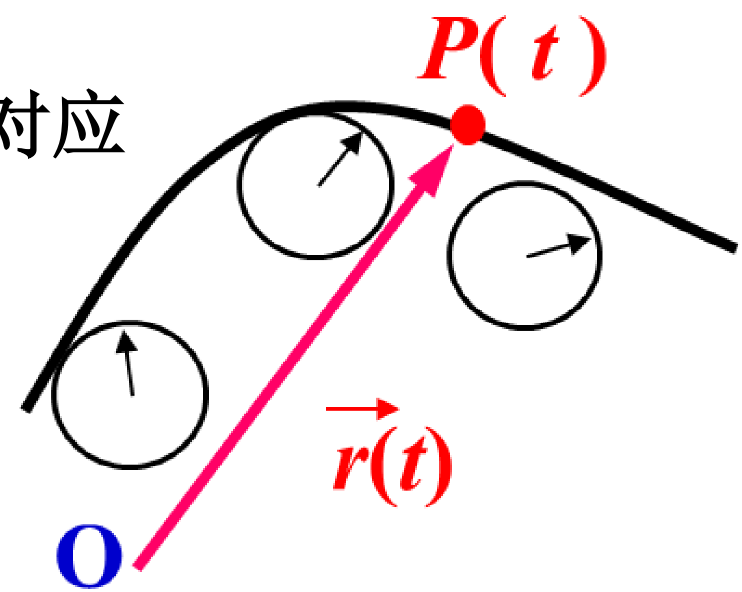
$\vec{r}(t)$ 可以唯一地描述质点的空间位置。

用来确定质点空间位置的这一矢量$\vec{r}(t)$叫做质点的**位置矢量**，简称**位矢**，也叫**径矢**。

质点运动的每一时刻，
均有一个确定的位置矢量与之相对应

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}(t)}$$

质点的运动方程



给出了机械运动的质点在任意时刻的位置，
是对质点机械运动过程的数学描述。

隐含了质点机械运动几何性质的全部信息。

在**直角坐标系**中表示质点的位置

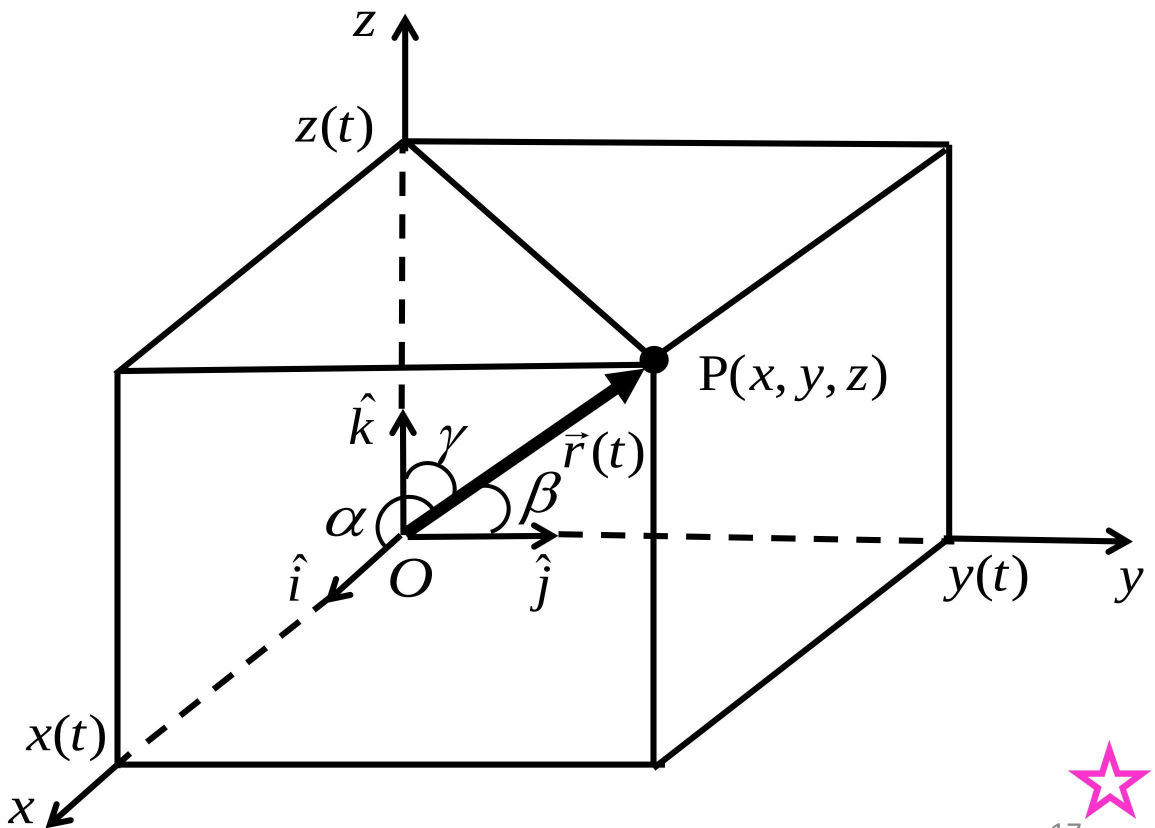
$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}}$$

$$r(t)=\left|\vec{r}(t)\right|=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2+[z(t)]^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}$$

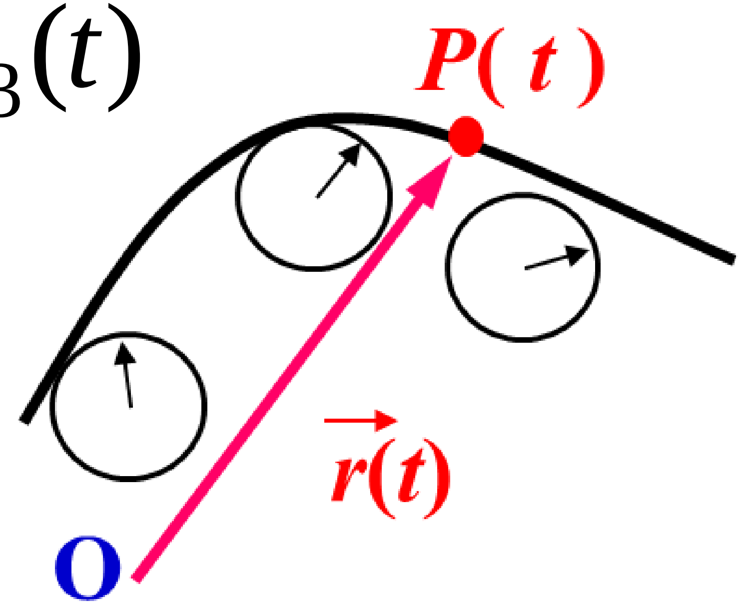
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}$$



质点运动时所经过的路线叫做**轨迹**，质点运动的轨迹（道）所满足的空间坐标曲线方程，称为**轨迹方程**。

$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}}$$

$$\{x=f_1(t),y=f_2(t),z=f_3(t)$$

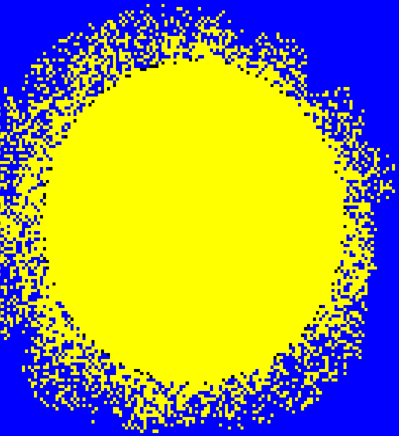


$$f(x,y,z)=C$$

质点机械运动的轨迹就是

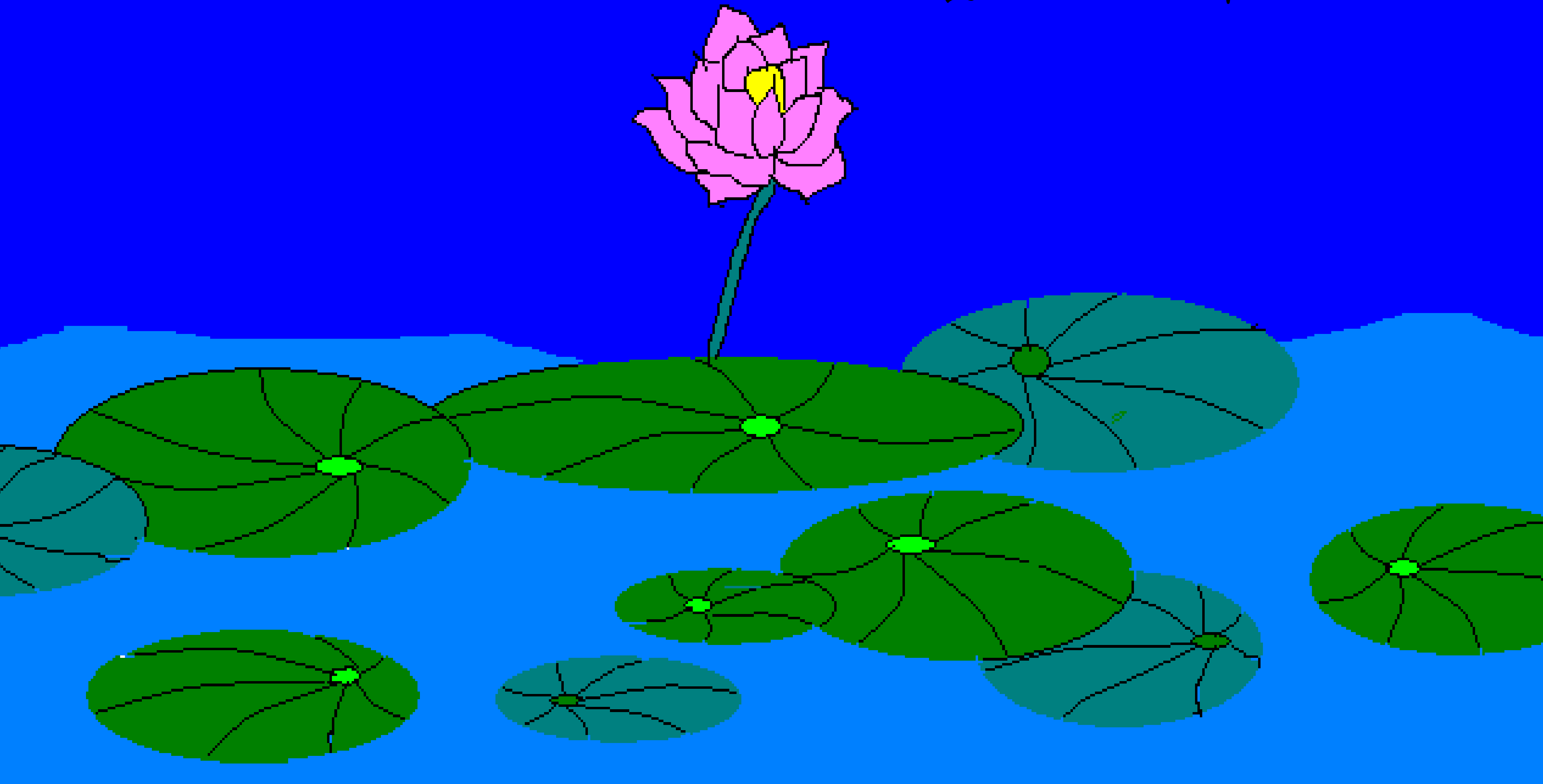
质点位置矢量的矢端在空间画出的曲线。

☆



大连理工大学

詹卫伸



第二节　质点运动的一般描述

☆

质点做机械运动，在空间中的位置就会发生变化，
表现为位置矢量随时间的变化，
位置矢量的变化用位移这一物理量表示；
描述质点位置矢量变化快慢的物理量是速度；
描述质点运动速度变化的物理量是加速度。

质点的位置矢量、位移、速度、加速度等
称为描述质点机械运动状态的基本物理量

一、位移
二、速度
三、加速度

一、位移

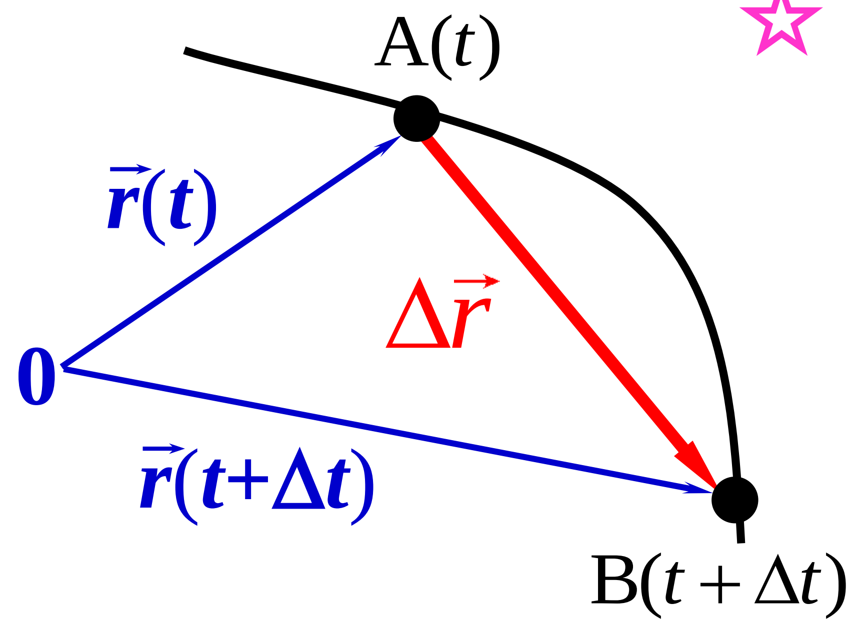
☆

t 时刻质点运动到 A 点，

位置矢量为$\vec{r}(t)$；

$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 B 点，

位置矢量为$\vec{r}(t+\Delta t)$



质点在这一时间间隔 Δt 内的位移 $\Delta\vec{r}$ 为

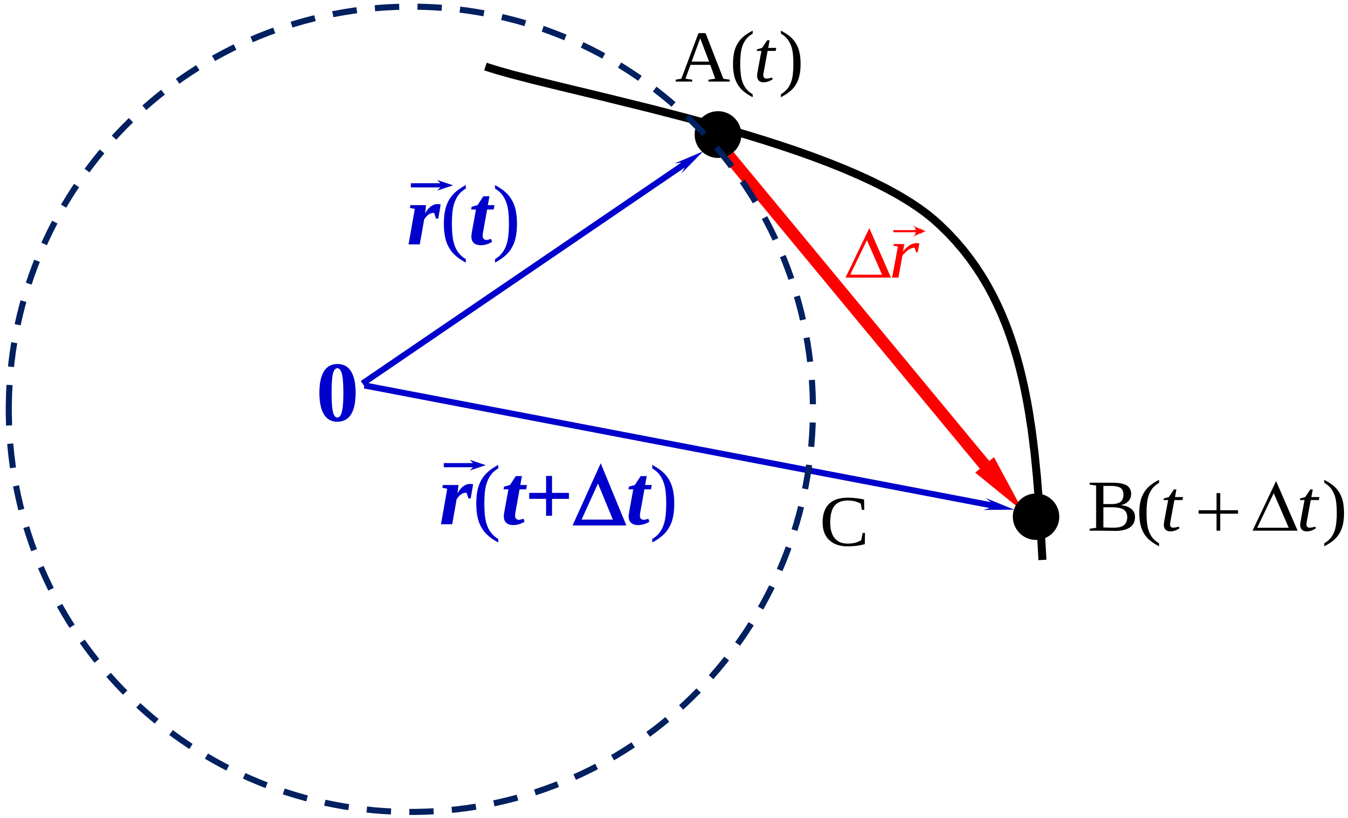
$$\boxed{\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}$$

质点在某一时间段内的位移

等于这段时间内质点位置矢量的增量

位移 $\Delta\vec{r}$ 是矢量，既有大小又有方向。

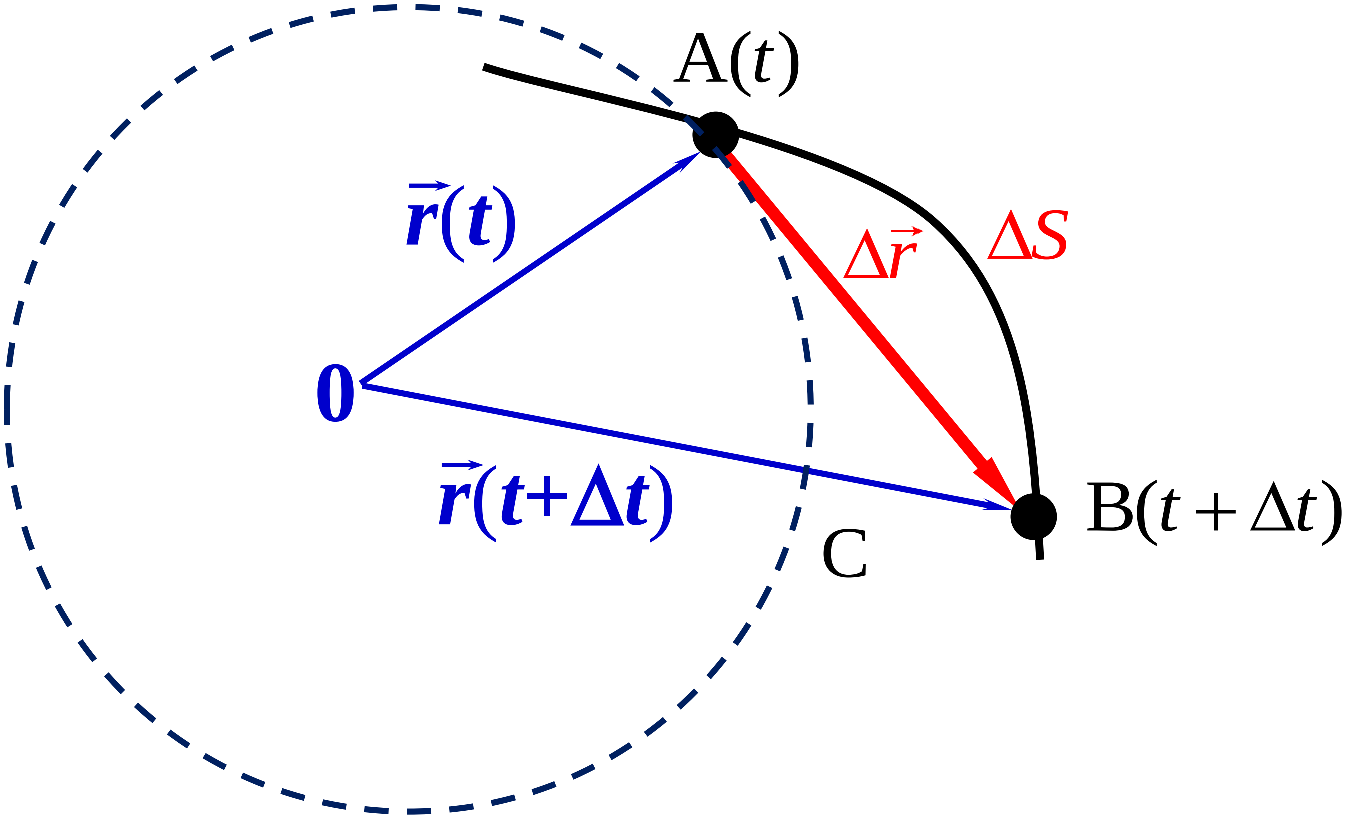
讨论（1）：位移矢量的大小与位置矢量大小的增量



位移矢量 $\Delta\vec{r}$ 的大小 $|\Delta\vec{r}|$ 与位置矢量大小的增量一般是不相等的。

$$\Delta r = |\vec{r}(t+\Delta t)| - |\vec{r}(t)| \neq |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)| = |\Delta\vec{r}|$$ ☆

讨论（2）：位移与路程 ☆



位移是矢量，而路程是标量；
位移矢量的大小也不等于路程。

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta S$$

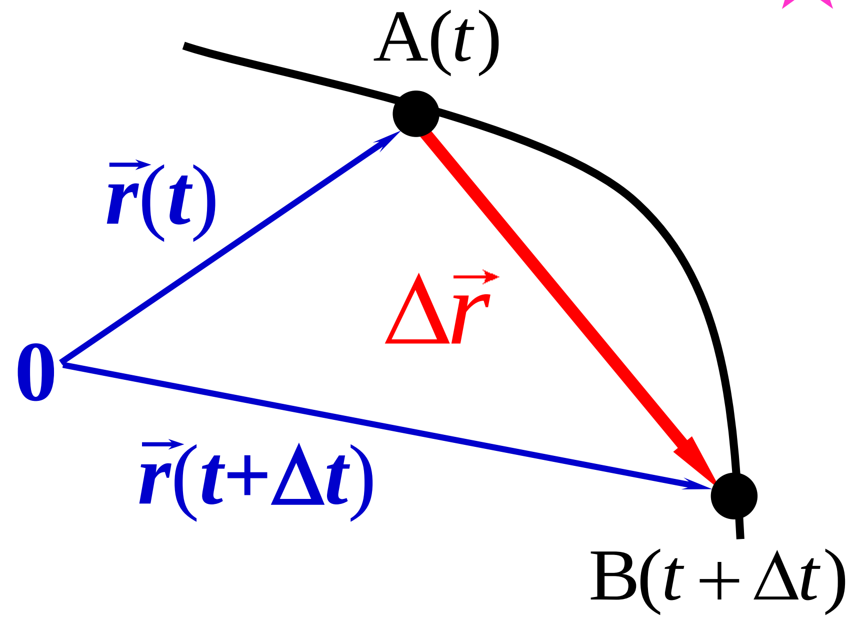
二、速度

☆

在$t \to t+\Delta t$时间间隔内

质点运动的平均速度为

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$



平均速度大小为：

$$\bar{v} = \left|\vec{\bar{v}}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \frac{\left|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right|}{\Delta t}$$

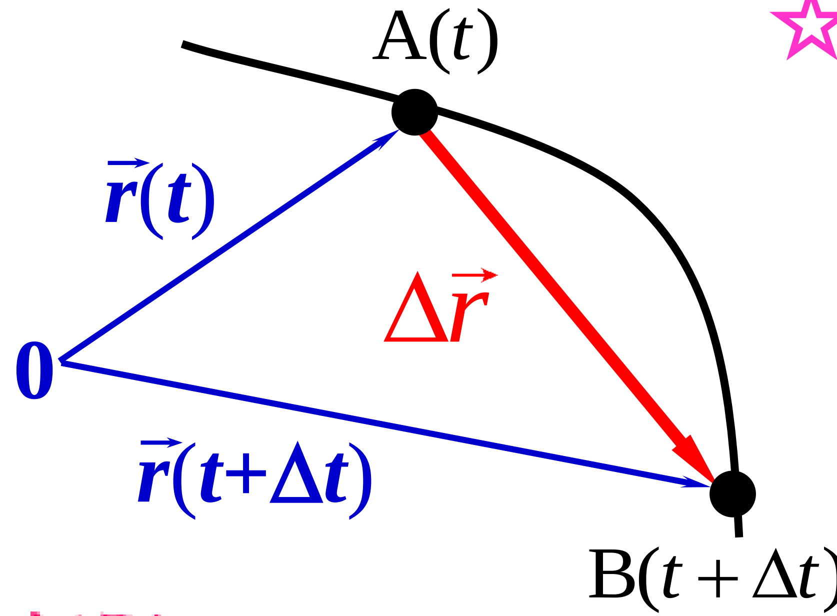
平均速度方向为：

质点在$t \to t+\Delta t$时间间隔内位移的方向

在 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内

质点运动的平均速度为

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



当 Δt 趋于零时，平均速度的极限，

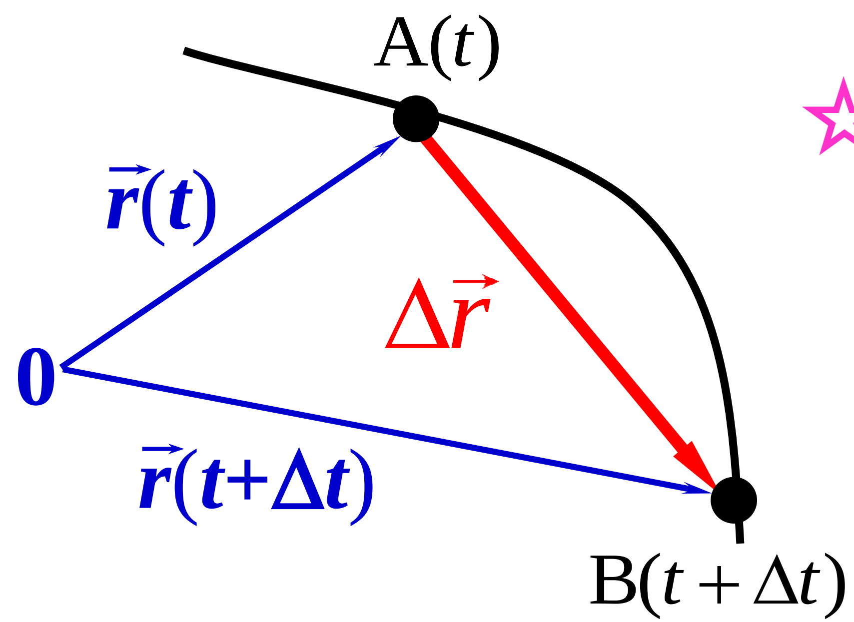
即质点位置矢量对时间的变化率，

在数学上即为位置矢量对时间的一阶导数，

称为质点在时刻 t 的瞬时速度，简称速度。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}}$$



☆

速度矢量的大小称为**速率**

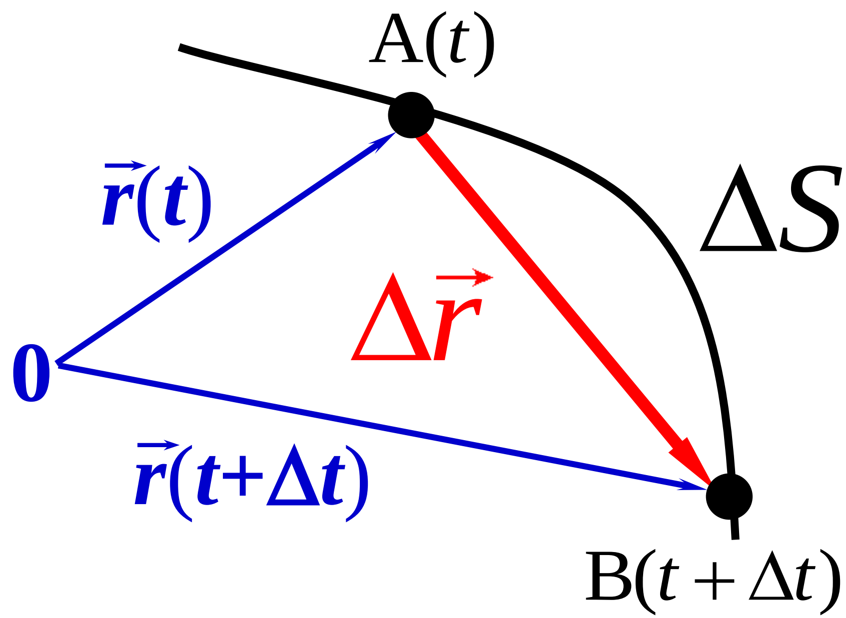
$$\boxed{v=\left|\vec{v}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|}$$

反映了t时刻质点机械运动的快慢

速度矢量的方向反映了t时刻质点运动的方向

讨论（1）：速率 ☆

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|}$$



当 Δt 趋于零时，

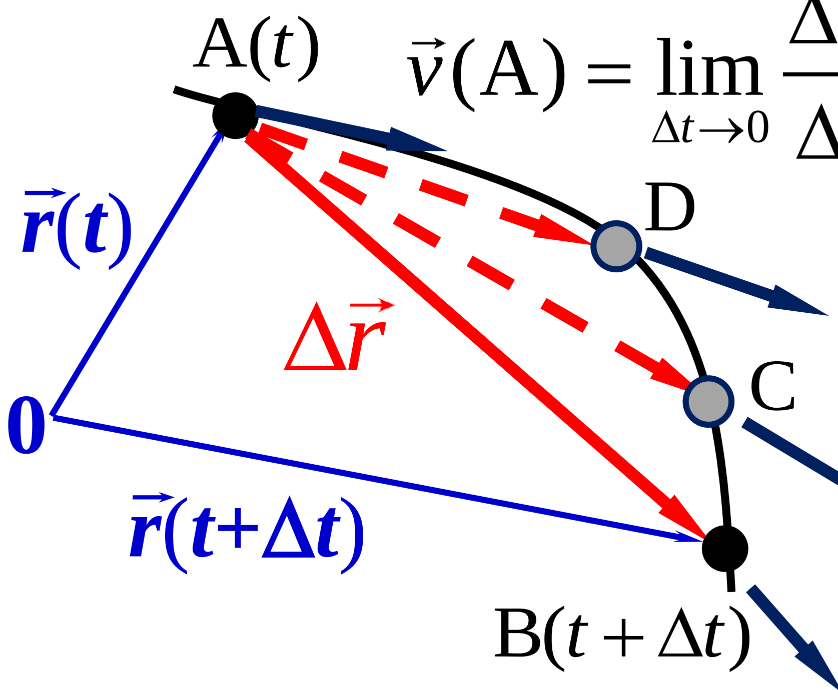
质点位移矢量的大小 $|\Delta\vec{r}|$

与路程 ΔS 趋于相同

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

速率又等于质点所走过的路程对时间的变化率

讨论（2）：速度方向 ☆



$$\vec{v}(\mathrm{A}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

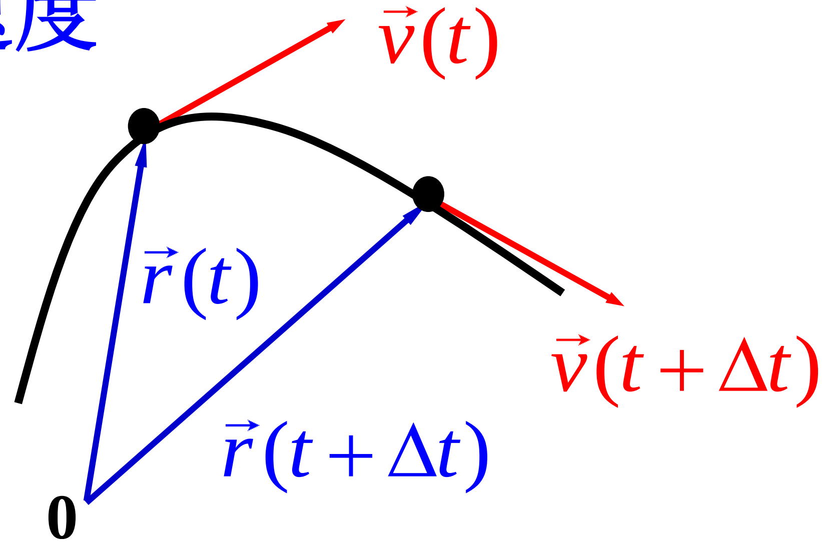
$$\vec{v}(\mathrm{AD}) = \frac{\Delta \vec{r}(\mathrm{AD})}{\Delta t(\mathrm{AD})}$$

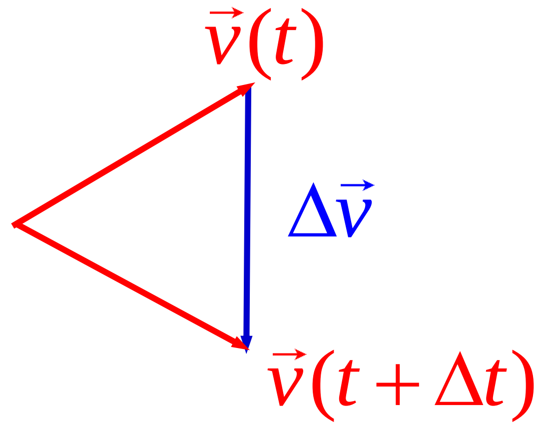
$$\vec{v}(\mathrm{AC}) = \frac{\Delta \vec{r}(\mathrm{AC})}{\Delta t(\mathrm{AC})}$$

$$\vec{v}(\mathrm{AB}) = \frac{\Delta \vec{r}(\mathrm{AB})}{\Delta t(\mathrm{AB})}$$

t 时刻质点机械运动速度的方向，
沿着该时刻质点运动轨迹的
切线方向并指向质点运动的一方。

三、加速度





t 时刻质点运动速度为 $\vec{v}(t)$

$t+\Delta t$ 时刻质点运动速度为 $\vec{v}(t+\Delta t)$

在 $t \rightarrow t+\Delta t$ 时间间隔内，质点运动速度的增量为 $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

在 $t \rightarrow t+\Delta t$ 时间间隔内质点运动的平均加速度为

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零时平均加速度的极限，

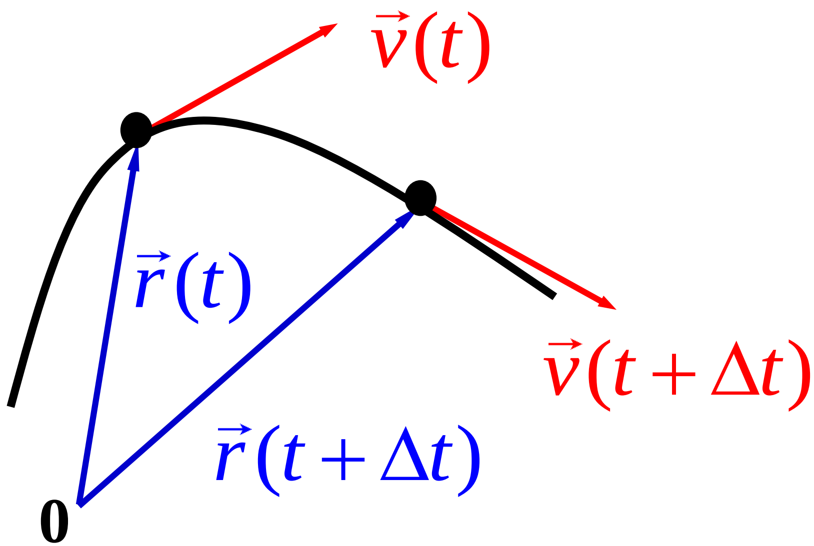
即质点运动速度对时间的变化率，

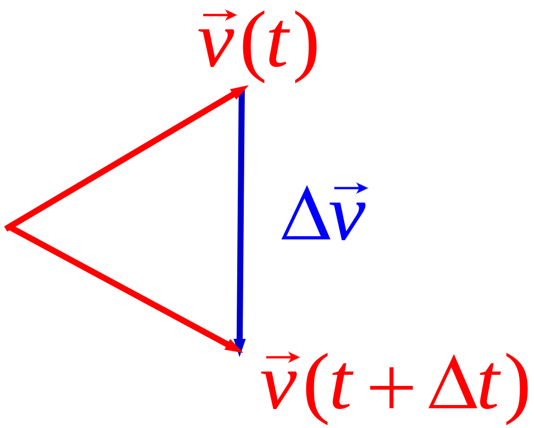
在数学上即为速度矢量对时间的一阶导数，

或位置矢量对时间的二阶导数，

称为质点在 t 时刻的瞬时加速度，简称加速度.

$$\boxed{\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}}$$






大连理工大学
詹卫伸

第三节　质点运动的直角坐标系描述

☆

质点的机械运动状态，可以用坐标值及其随时间的变化描述质点的机械运动状态。
质点的机械运动状态在坐标系中表示也称为运动状态在坐标系中沿坐标轴的投影或称为在坐标轴方向的分量。
最直观的坐标系是笛卡尔直角坐标系

一、质点的位移矢量
二、质点运动的速度
三、质点运动的加速度

一、质点的位移矢量

☆

t_1 时刻位置矢量 $\vec{r}(t_1)$ 的坐标值 $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$，

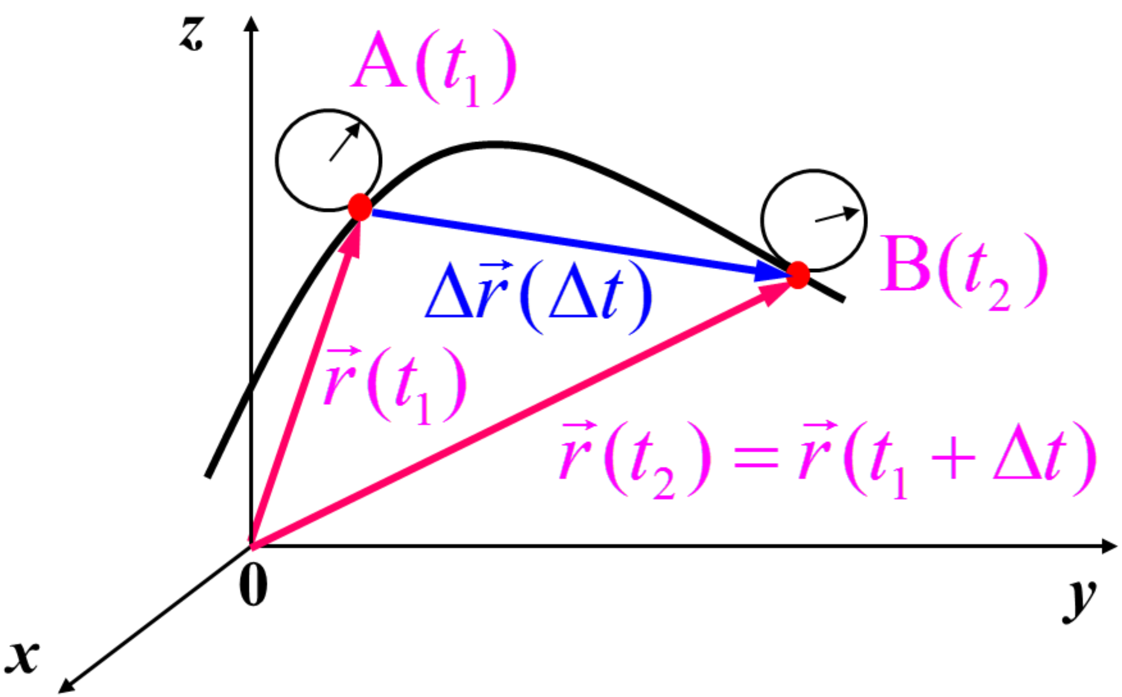
t_2 时刻位置矢量 $\vec{r}(t_2)$ 的坐标值 $(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$，

在时间间隔 $t_1 \to t_2 = t_1 + \Delta t$ 内三个坐标值之差

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

$$\Delta y = y(t_2) - y(t_1)$$

$$\Delta z = z(t_2) - z(t_1)$$

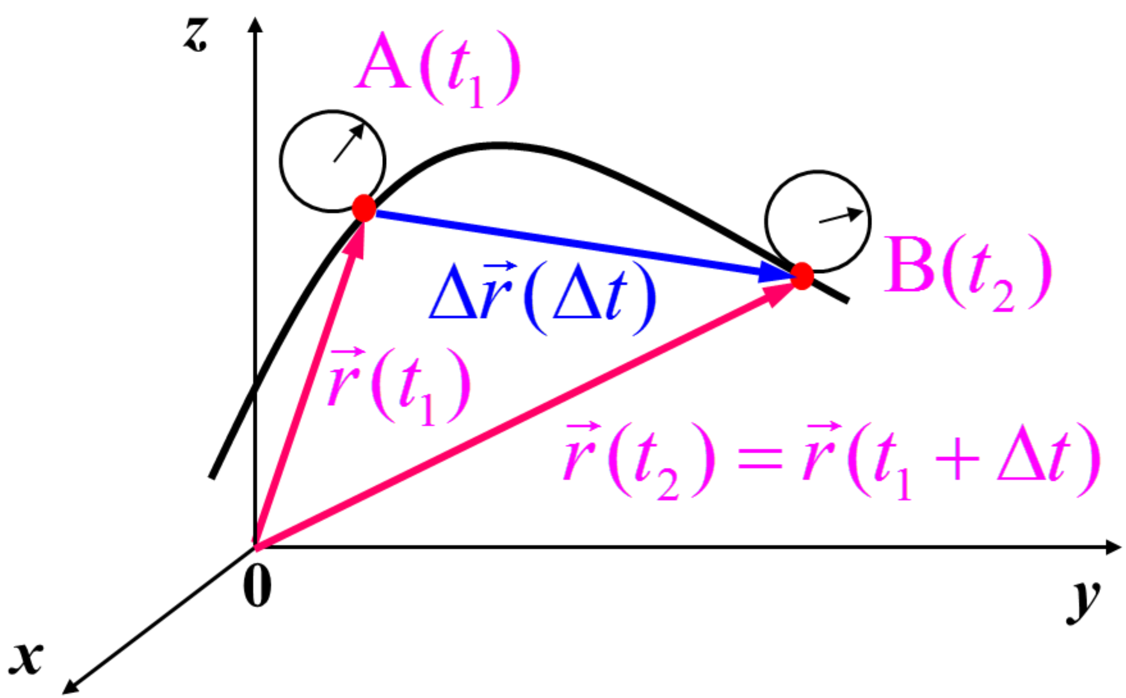


称为位移位移矢在直角坐标系Oxyz中三个坐标轴方向的分量或投影

质点时间间隔 $t_1 \rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t$ 内的 ☆

位移矢量 $\Delta\vec{r}(\Delta t)$ 在直角坐标系中表示为

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{r}(\Delta t) &= [x(t_2)-x(t_1)]\hat{i}+[y(t_2)-y(t_1)]\hat{j}+[x(t_2)-z(t_1)]\hat{k}\\ &= \Delta x(\Delta t)\hat{i}+\Delta y(\Delta t)\hat{j}+\Delta z(\Delta t)\hat{k}\end{aligned}}$$



质点的位移矢量等于位移矢量在直角坐标系Oxyz中三个坐标轴方向**分量的矢量和**

位移矢量的大小在直角坐标系中表示为 ☆

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{[x(t_2)-x(t_1)]^2+[y(t_2)-y(t_1)]^2+[x(t_2)-z(t_1)]^2}$$
$$= \sqrt{[\Delta x]^2+[\Delta y]^2+[\Delta z]^2}$$

位移矢量的方向在直角坐标系中表示为

$$\begin{cases}\cos\alpha_1 = \dfrac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} \\ \cos\beta_1 = \dfrac{\Delta y}{|\Delta\vec{r}|} = \dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}} \\ \cos\gamma_1 = \dfrac{\Delta z}{|\Delta\vec{r}|} = \dfrac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\end{cases}$$

α_1、β_1、γ_1 表示 $\Delta\vec{r}$ 与坐标轴 x、y、z 的夹角

二、质点运动的速度 ☆

在直角坐标系中，质点机械运动的速度 $\vec{v}$ 表示为

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z}$$

$\vec{v}_x$、$\vec{v}_y$、$\vec{v}_z$ 表示沿坐标轴 x 、y 、z 方向的分速度。

质点速度 $\vec{v}$ 沿直角坐标系三个坐标轴的投影为

$$\boxed{v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}、\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}、\ v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}$$

在直角坐标系中，质点运动速率表示为 ☆

$$\boxed{v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2+(v_z)^2}}$$

质点运动速度的方向表示为

$$\begin{cases}\cos\alpha_2=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}}=\dfrac{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}}\\[2ex]\cos\beta_2=\dfrac{v_y}{v}=\dfrac{v_y}{\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}}=\dfrac{(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}}\\[2ex]\cos\gamma_2=\dfrac{v_z}{v}=\dfrac{v_z}{\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}}=\dfrac{(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^2}}\end{cases}$$

α_2、β_2、γ_2 表示 $\vec{v}$ 与坐标轴 x、y、z 的夹角

三、质点运动的加速度

☆

在直角坐标系中，质点机械运动的加速度表示为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{y}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{z}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{y}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\hat{z}$$
$$=a_x\hat{x}+a_y\hat{y}+a_z\hat{z}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z$$

$\vec{a}_x$、$\vec{a}_y$、$\vec{a}_z$ 表示沿 3 个坐标轴方向的分加速度

质点运动加速度沿 3 个坐标轴的投影分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}、\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}、\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中，质点运动的加速度大小表示为

$$\boxed{a=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$

质点运动加速度的方向表示为

$$\begin{cases}
\cos\alpha_3=\dfrac{a_x}{a}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}=\dfrac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}}\\[2ex]
\cos\beta_3=\dfrac{a_y}{a}=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}=\dfrac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}}\\[2ex]
\cos\gamma_3=\dfrac{a_z}{a}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}=\dfrac{\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}}
\end{cases}$$

☆

式中，α_3、β_3、γ_3 表示 $\vec{a}$ 与三个坐标轴 x、y、z 的夹角


大连理工大学
詹卫伸

第四节　质点平面运动的自然坐标系描述 ☆

如果质点在一平面内运动并且已知质点运动的轨迹，使用自然坐标系描述质点的机械运动状态，可以揭示质点运动状态的更详细的信息，对质点作曲线运动时的加速度的描述更为透彻。

一、自然坐标系描述质点的位置
二、自然坐标系描述质点运动的速度
三、自然坐标系描述质点运动的加速度

一、自然坐标系描述质点的位置 ☆

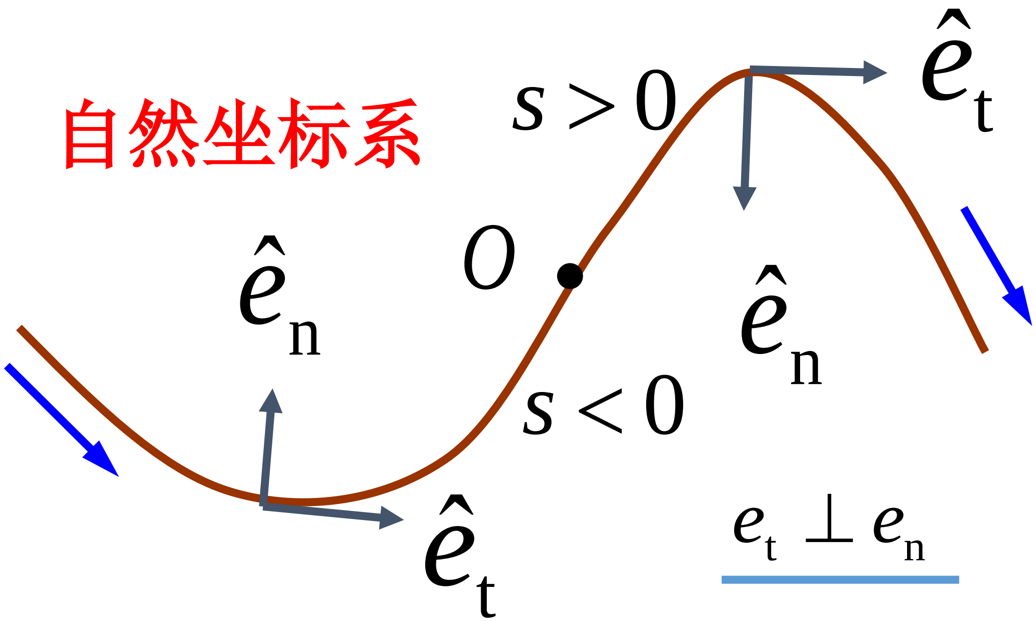
质点在一个平面内作曲线运动。

沿质点运动轨迹建立一个弯曲的“坐标轴”，

选择轨迹上一点O为“原点”，

并用由原点到质点所在位置的曲线弧长 s 作为坐标值

自然坐标系



$\hat{e}_t$ 称为切向单位矢量：

沿运动轨迹的切线方向并指向质点运动方向

$\hat{e}_n$ 称为法向单位矢量：

指向运动曲线的曲率中心

再建立两个单位矢量 $\hat{e}_t$ 和 $\hat{e}_n$

原点 O、坐标值 s 和单位矢量 $\hat{e}_t$、$\hat{e}_n$ 构成了自然坐标系

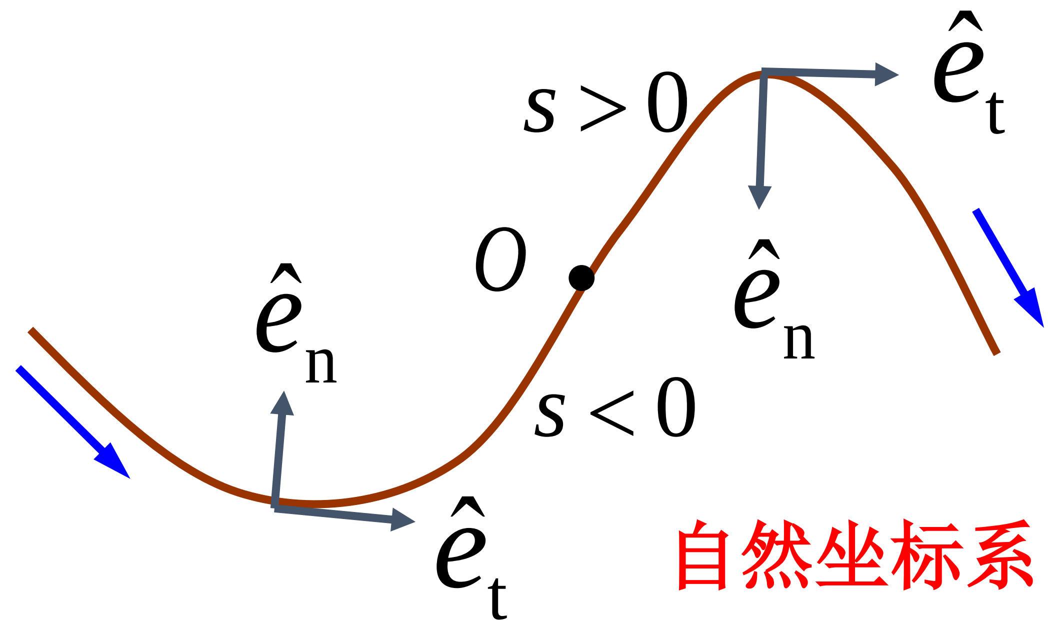
在自然坐标系中，质点位置是随时间变化的 ☆

自然坐标值

$$s = s(t)$$

描述了质点的位置

称为质点运动学方程



值得注意的是，这里的弧长（自然坐标值）s 是可正可负的。

一般规定沿质点运动方向为 s 的正方向，

以原点 O 为界，如果质点位于运动的前方，s 为正；

如果质点位于运动的后方，s 为负。

二、自然坐标系描述质点运动的速度 ☆

质点沿曲线运动，

t 时刻质点位于 A 点，

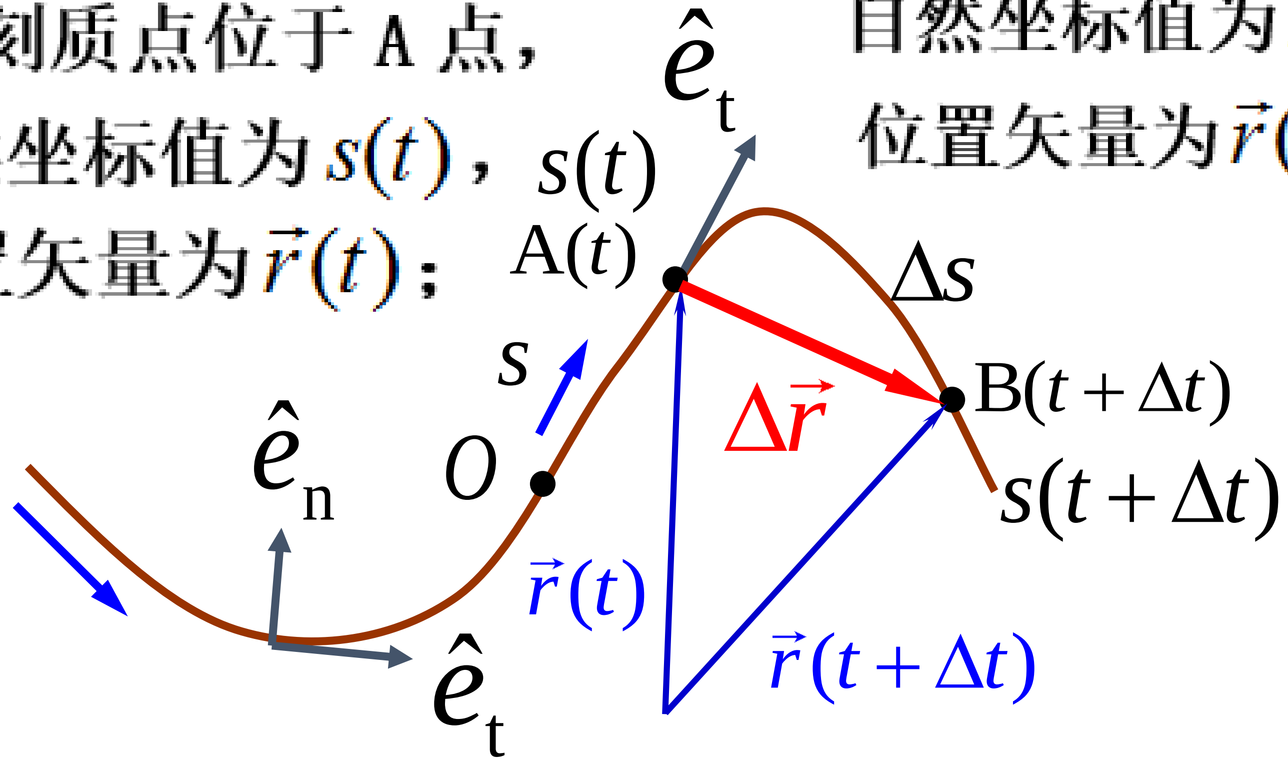
自然坐标值为 $s(t)$，

位置矢量为 $\vec{r}(t)$；

$t+\Delta t$ 时刻质点位于 B 点，

自然坐标值为 $s(t+\Delta t)$，

位置矢量为 $\vec{r}(t+\Delta t)$。



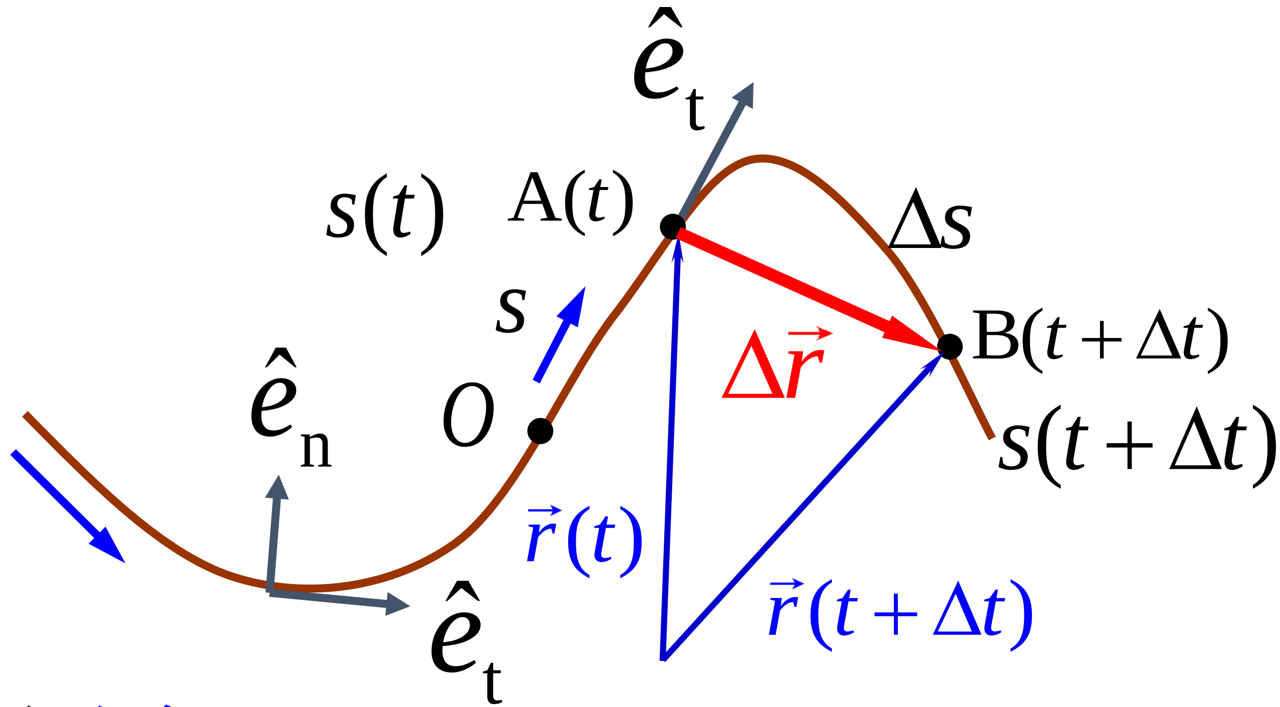
在 $t\rightarrow t+\Delta t$ 时间间隔内质点的**位移**为

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$$

在 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内质点的位移为 ☆

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \qquad \Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

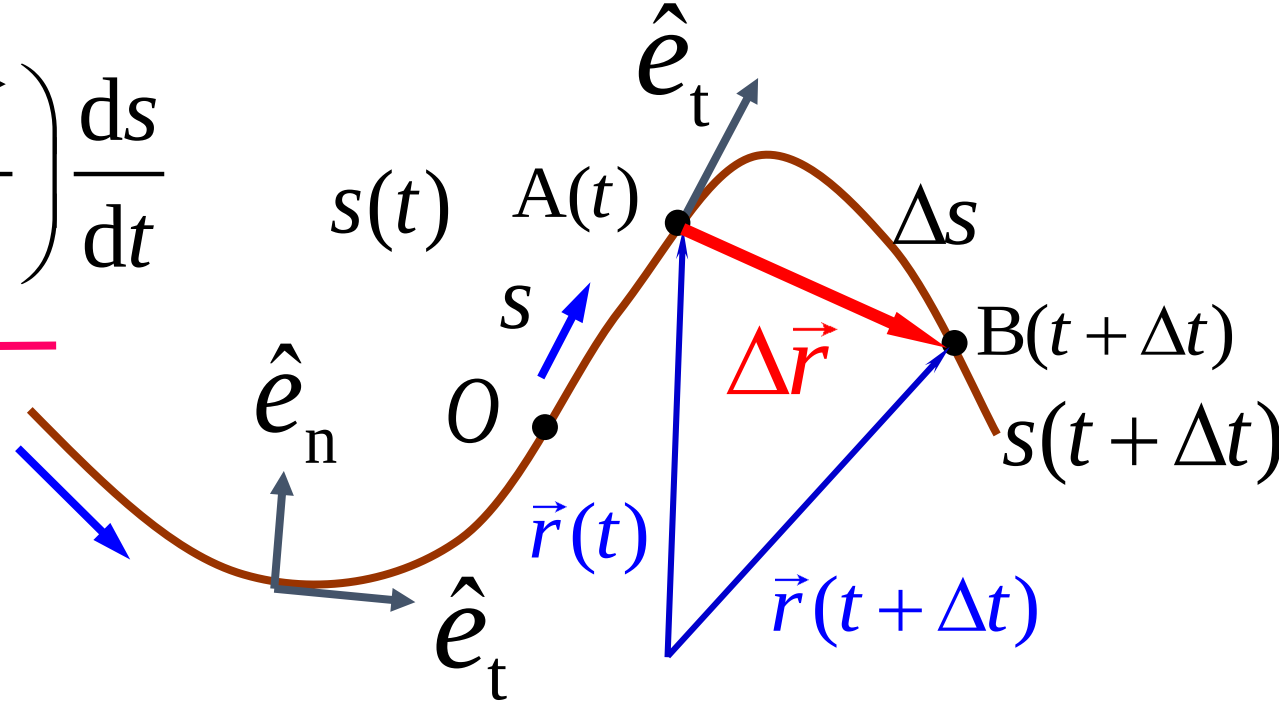


质点运动速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\frac{ds}{dt}$$

质点运动速度

$$\vec{v}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\frac{ds}{dt}$$



当 $\Delta t\to 0$ 时，B 点趋近于 A 点，因此 $|\Delta\vec{r}|\to\Delta s$；

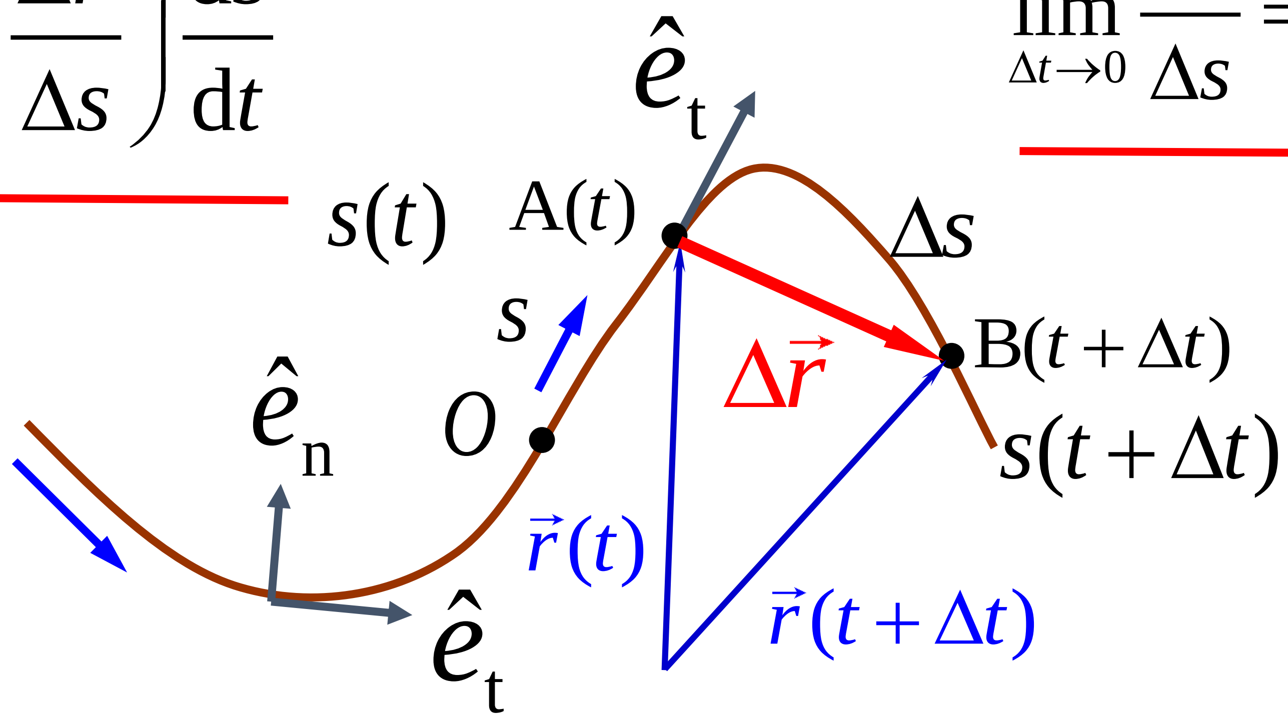
质点的位移 $\Delta\vec{r}$ 矢量的方向也趋近于

A 点处质点运动轨迹的切线方向 $\hat{e}_t$。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right|\hat{e}_t=\hat{e}_t$$

$$\vec{v} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \hat{e}_{\mathrm{t}}$$



☆

质点运动速度

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \hat{e}_{\mathrm{t}} = v \hat{e}_{\mathrm{t}} \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

三、自然坐标系描述质点运动的加速度 ☆

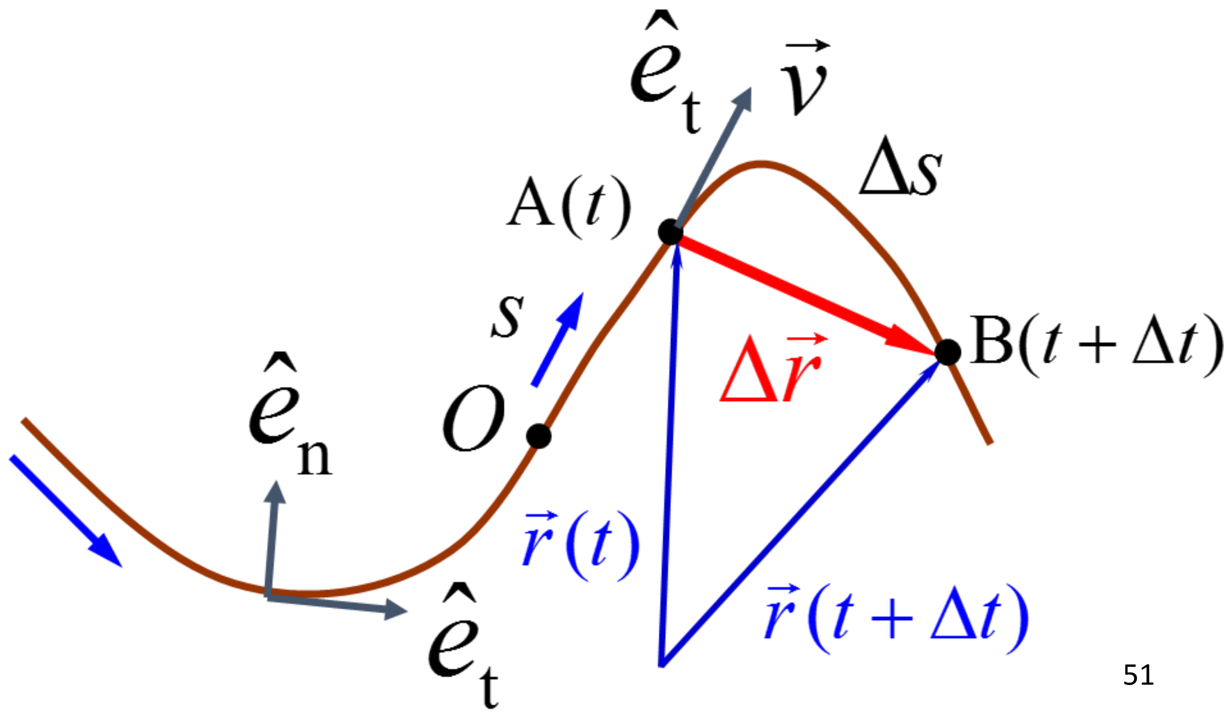
加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\hat{e}_{\mathrm{t}})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_{\mathrm{t}}+v(t)\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$$

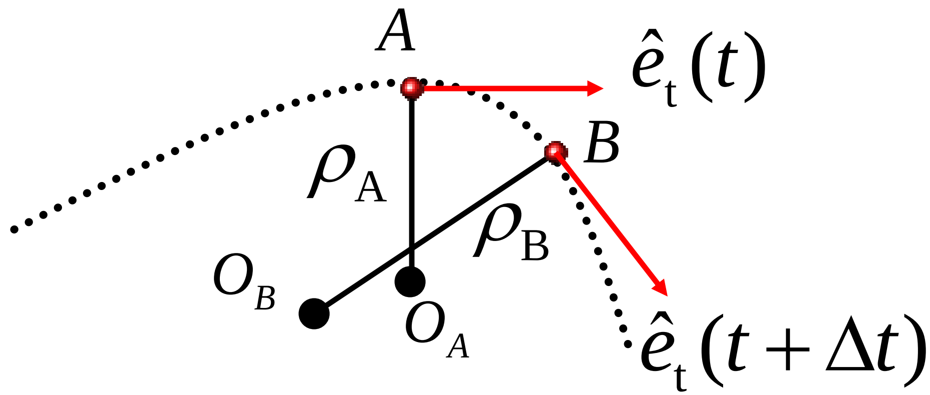
切向单位矢量 $\hat{e}_{\mathrm{t}}$ 是随质点位置变化的，不是恒定矢量。

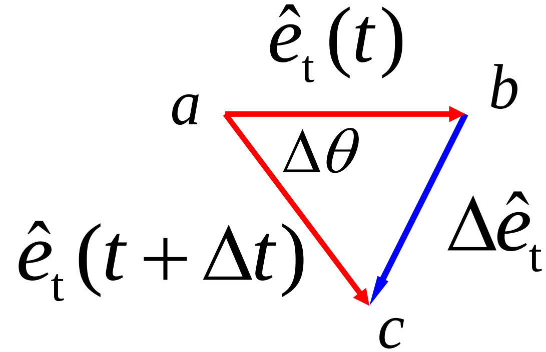
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{e}_{\mathrm{t}}=v\hat{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=?$$



$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=?$$





设 t 时刻质点运动到 **A** 点，运动速度为 $\vec{v}(t)=v(t)\hat{e}_{\mathrm{t}}(t)$；

$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 **B** 点，$\vec{v}(t+\Delta t)=v(t+\Delta t)\hat{e}_{\mathrm{t}}(t+\Delta t)$。

$\hat{e}_{\mathrm{t}}(t)$、$\hat{e}_{\mathrm{t}}(t+\Delta t)$ 的方向沿着 **A**、**B** 点的**切线方向**，大小均为 **1**。

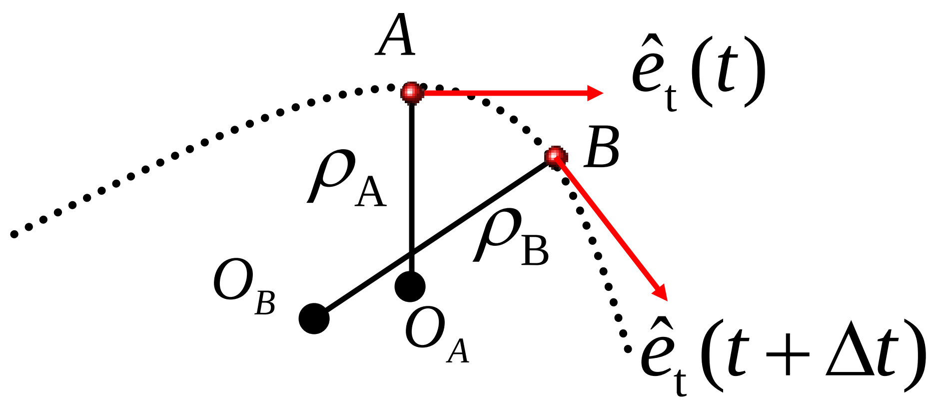
设 $\hat{e}_{\mathrm{t}}(t)$、$\hat{e}_{\mathrm{t}}(t+\Delta t)$ 的夹角为 $\Delta\theta$，在 $t\to t+\Delta t$ 内，

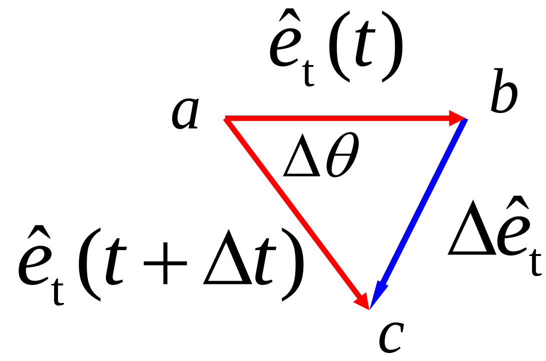
$\Delta\hat{e}_{\mathrm{t}}=\hat{e}_{\mathrm{t}}(t+\Delta t)-\hat{e}_{\mathrm{t}}(t)$，则三角形 abc 是**等腰三角形**

设运动轨道上 **A** 点的**曲率中心**为 O_A，**B** 点的**曲率中心**为 O_B，

A、**B** 点的**曲率半径**分别为 $\rho_{\mathrm{A}}=\rho(t)=\mathrm{O_AA}$、$\rho_{\mathrm{B}}=\rho(t+\Delta t)=\mathrm{O_BB}$。

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=?$$

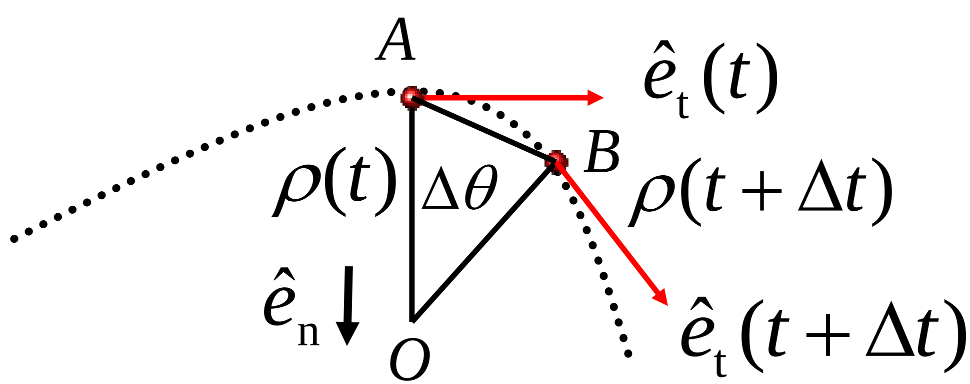


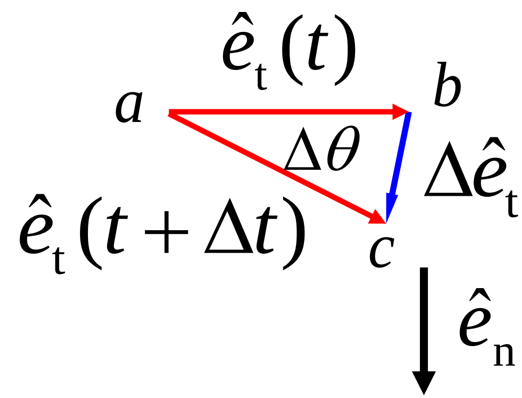


设运动轨道上A点的曲率中心为O_A，B点的曲率中心为O_B，

A、B点的曲率半径分别为 $\rho_{\mathrm{A}}=\rho(t)=\mathrm{O_A A}$ 、 $\rho_{\mathrm{B}}=\rho(t+\Delta t)=\mathrm{O_B B}$。

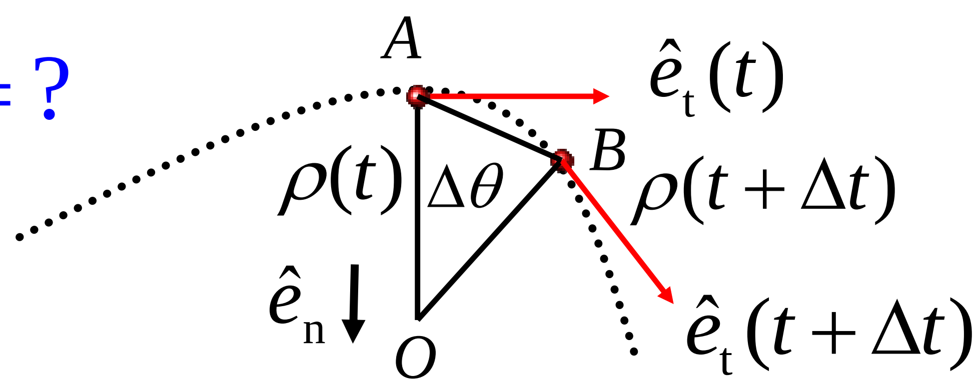
当Δt很小时， $\rho(t)\approx\rho(t+\Delta t)$， $O_A\to O_B\to O$

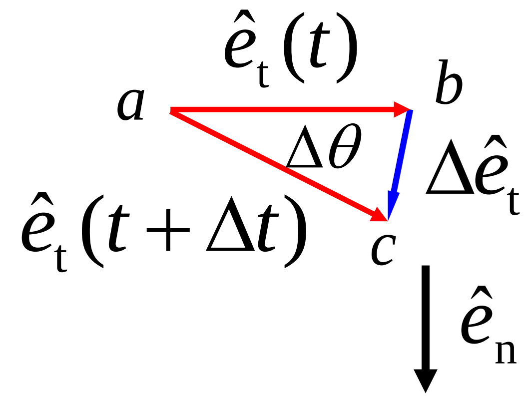




三角形 OAB 也是等腰三角形

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = ?$$





三角形 **OAB** 也是等腰三角形

由于 $\overrightarrow{\mathrm{O_A A}} \perp \hat{e}_{\mathrm{t}}(t)$、$\overrightarrow{\mathrm{O_B B}} \perp \hat{e}_{\mathrm{t}}(t+\Delta t)$，

使得 $\angle AOB = \angle bac = \Delta\theta$。

因此这两个三角形相似

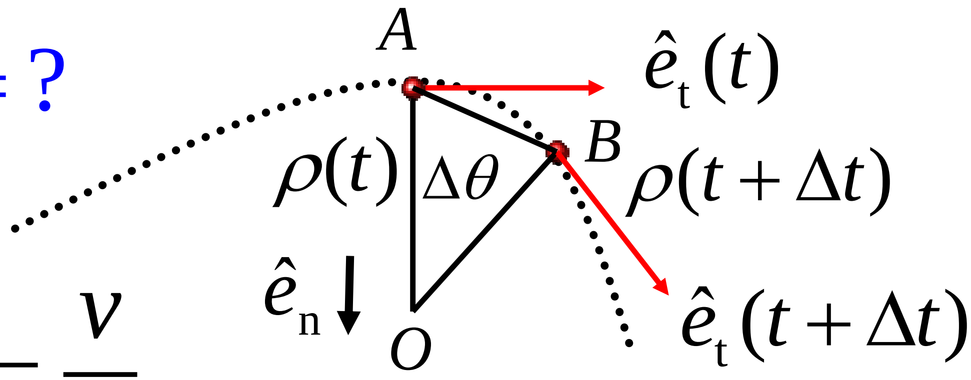
$$\frac{AB}{\rho(t)} = \frac{bc}{ab} \approx \left|\Delta\hat{e}_{\mathrm{t}}\right|$$

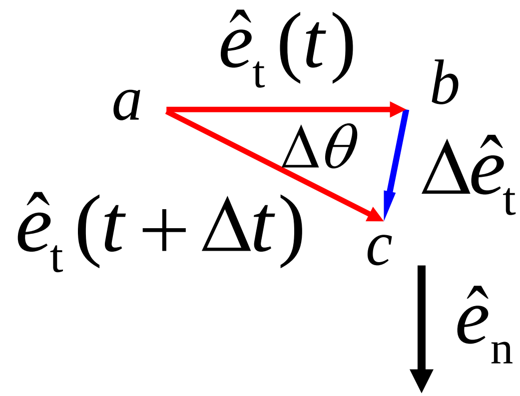
质点运动方向单位矢量随时间变化率的大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\hat{e}_{\mathrm{t}}\right|}{\Delta t} = \frac{1}{\rho(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{AB}{\Delta t} = \frac{v(t)}{\rho(t)} = \frac{v}{\rho}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{v}{\rho}$$





三角形 **OAB** 也是等腰三角形

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\hat{e}_{\mathrm{t}}=\hat{e}_{\mathrm{t}}(t+\Delta t)-\hat{e}_{\mathrm{t}}(t)$ 的方向为 $A\to O$，

即沿运动轨道法线方向指向该点运动轨迹的曲率中心，该方向就是自然坐标系中的法向单位矢量 $\hat{e}_{\mathrm{n}}$。

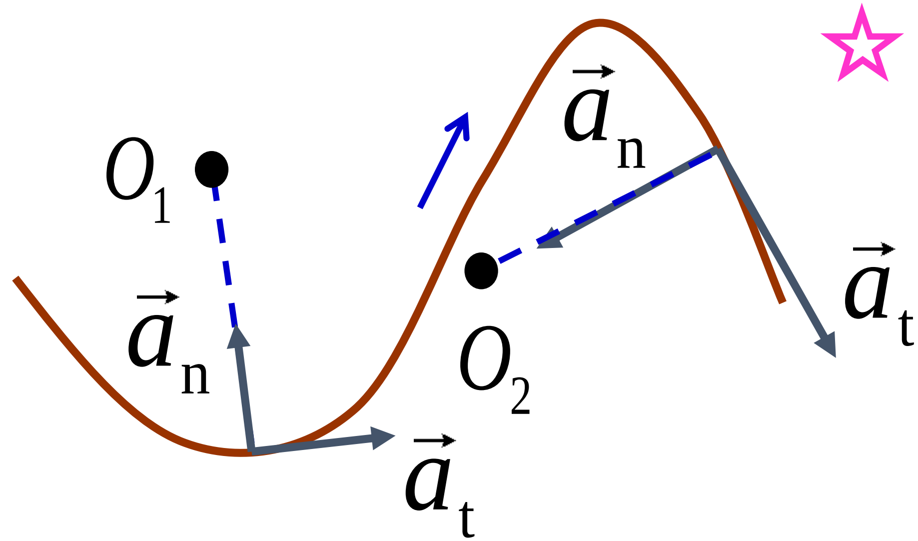
因此

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|\hat{e}_{\mathrm{n}}=\frac{v(t)}{\rho(t)}\hat{e}_{\mathrm{n}}=\frac{v}{\rho}\hat{e}_{\mathrm{n}}$$

☆

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\mathrm{t}+v(t)\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\rho}\hat{e}_\mathrm{n}$$



☆

在自然坐标系中，质点平面运动的**加速度**可以表示为

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\mathrm{t}+\frac{v^2}{\rho}\hat{e}_\mathrm{n}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\hat{e}_\mathrm{t}+\frac{v^2}{\rho}\hat{e}_\mathrm{n}=\vec{a}_\mathrm{t}+\vec{a}_\mathrm{n}}$$

切向加速度 $\vec{a}_\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\hat{e}_\mathrm{t}$

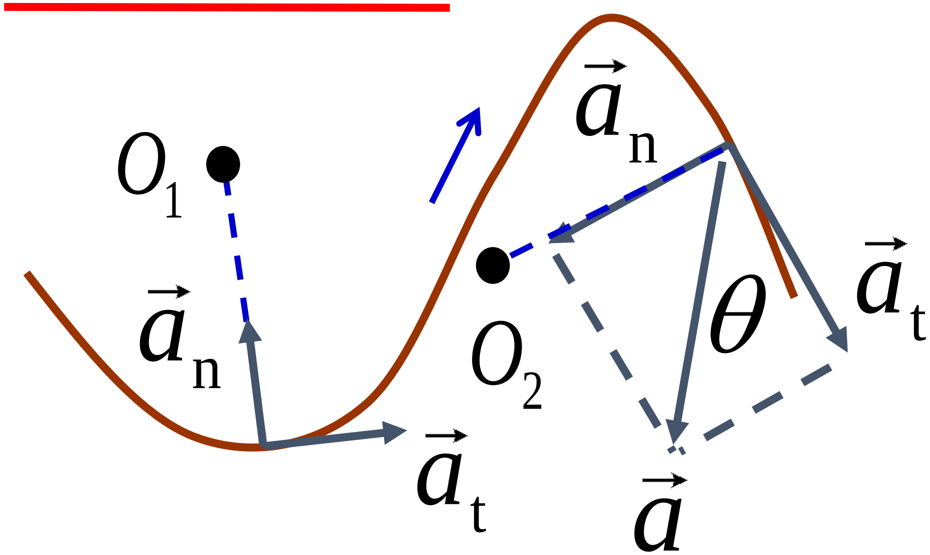
法向加速度 $\vec{a}_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{\rho}\hat{e}_\mathrm{n}$

☆

$$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\hat{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{n}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_{\mathrm{n}}$$



加速度的两个分量是正交的，加速度的大小和方向为

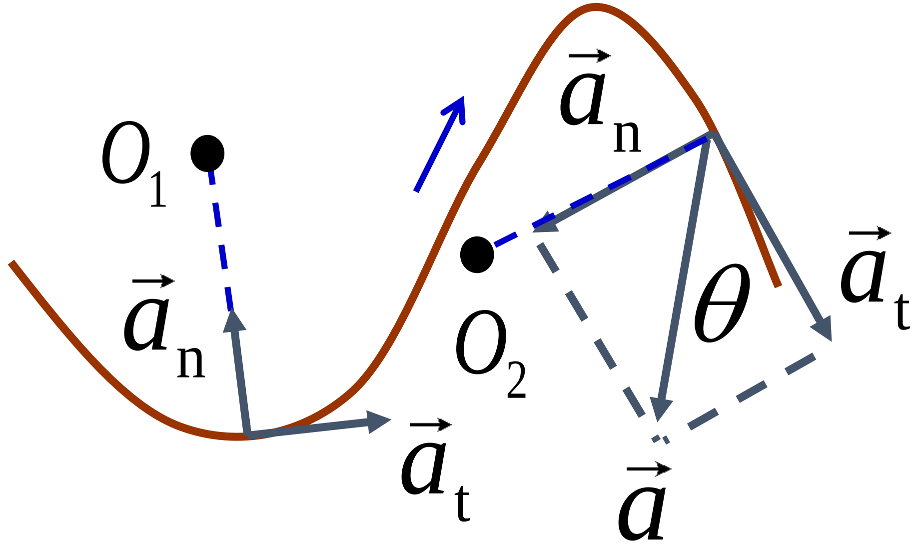
$$\boxed{a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^{\ 2} + a_{\mathrm{n}}^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}}$$

θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}_{\mathrm{t}}$ 之间的夹角

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$$



☆

质点平面运动切向加速度的大小等于质点运动速度矢量对时间的一阶导数，或等于质点运动的弧长对时间的二阶导数。

切向加速度大小明确地反映了速率对时间的变化率，

代表了速率的变化，它的作用是改变速度矢量的大小。

质点平面运动法向加速度不涉及速率对时间的变化率，因此它不能改变质点运动的速率，即质点运动速度的大小。

法向加速度明确地反映了速度的方向对时间的变化率，

代表了速度方向的变化，它的作用就是改变速度的方向。

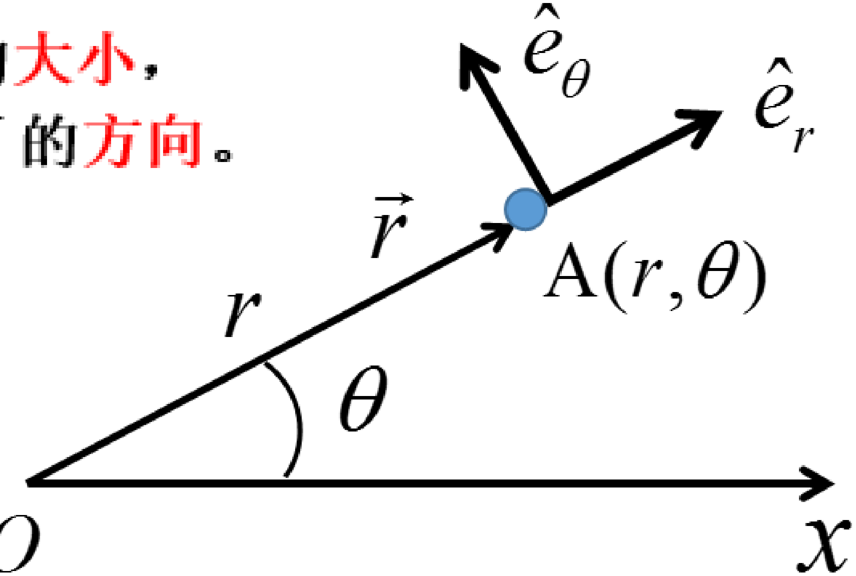

大连理工大学
詹卫伸

第五节　质点平面运动的极坐标描述 ☆

用平面极坐标系中两个独立坐标(r,θ)来确定质点的位置。

极径r表示质点位置矢量$\vec{r}$的大小，

角坐标θ表示质点位置矢量$\vec{r}$的方向。



沿径向方向所引单位矢量$\hat{e}_r$

称为径向单位矢量；

沿横向方向的单位矢量$\hat{e}_\theta$

称为横向单位矢量。

任何平面矢量均可在$\hat{e}_r$和$\hat{e}_\theta$方向上进行正交分解。

一、速度的平面极坐标系描述

二、加速度的平面极坐标系描述

三、质点运动状态的角量描述

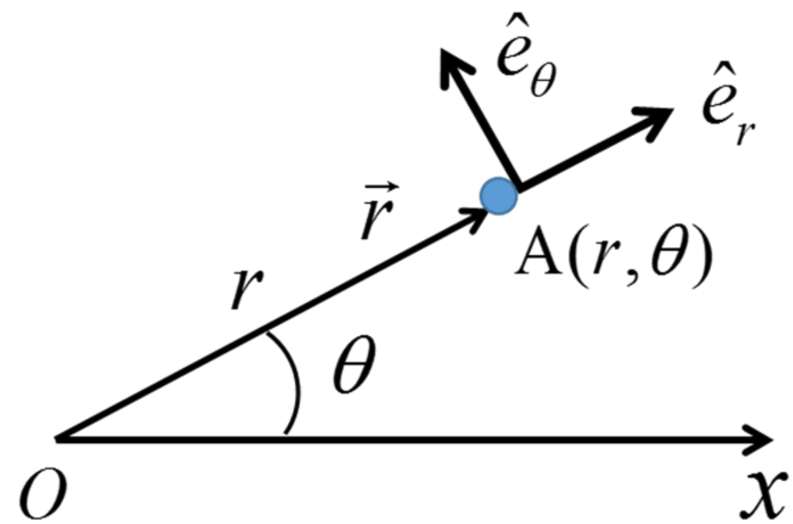
四、圆周运动

一、速度的平面极坐标系描述

$$\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{r} = r(t)\hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{e}_r) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}$$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta}$$

$$= v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta$$

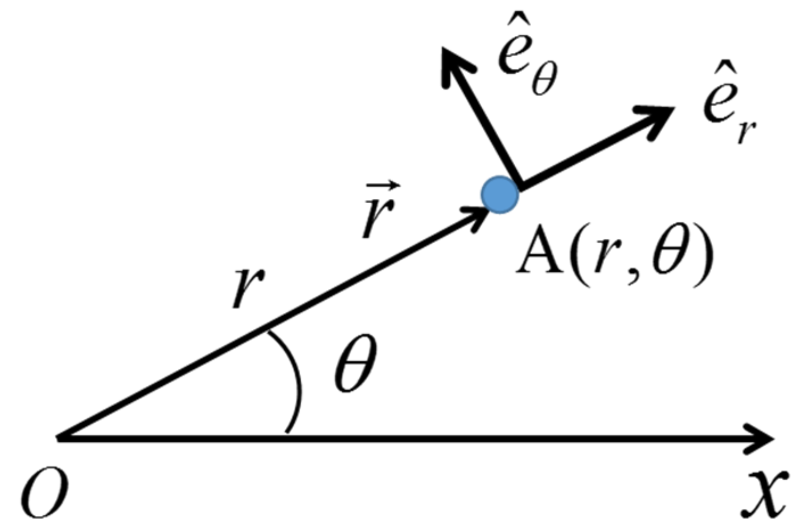
$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$v_r\hat{e}_r$ 和 $v_\theta\hat{e}_\theta$ 分别称为径向速度和横向速度

☆

二、加速度的平面极坐标系描述 ☆

$$\boxed{\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta}$$



$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta\right)$$

$$\boxed{\vec{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{e}_r+\left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\hat{e}_\theta}$$

$a_r\hat{e}_r$ 称为**径向加速度**

$$a_r=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$a_\theta\hat{e}_\theta$ 称为**横向加速度**

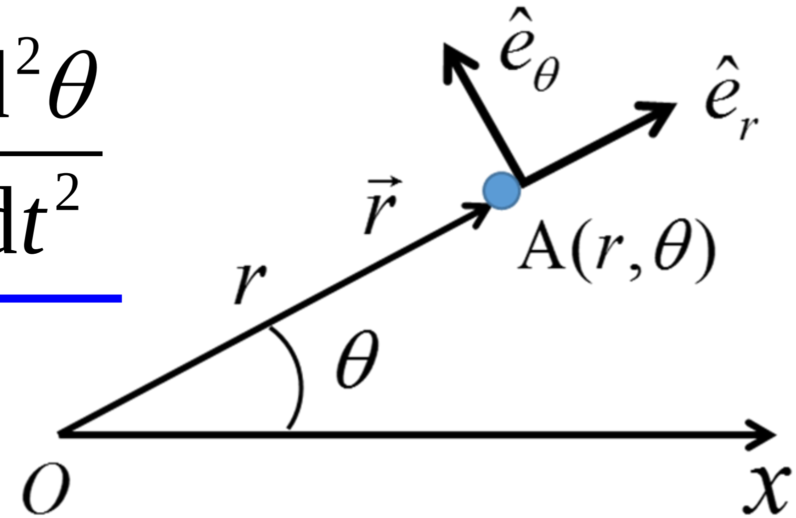
$$a_\theta=r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

三、质点运动状态的角量描述 ☆

质点在平面内的曲线运动，可以看作是绕过平面内某一点的轴的转动，可用角量来描述质点的运动状态。

定义质点运动的角速度和角加速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



在平面极坐标系中

$$\vec{a} = \left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} - r\omega^2\right]\hat{e}_r + \left(r\beta + 2v_r\omega\right)\hat{e}_\theta$$

四、圆周运动 ☆

圆周运动是一种特殊的平面曲线运动：

运动轨迹曲线的曲率中心不变，这就是圆心。

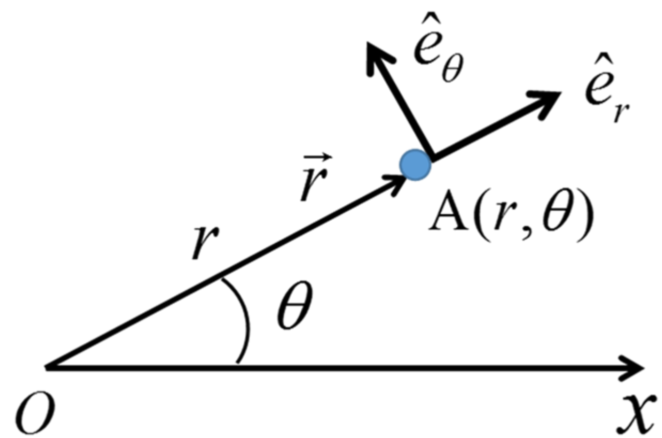
既可以用平面极坐标系也可以用自然坐标系

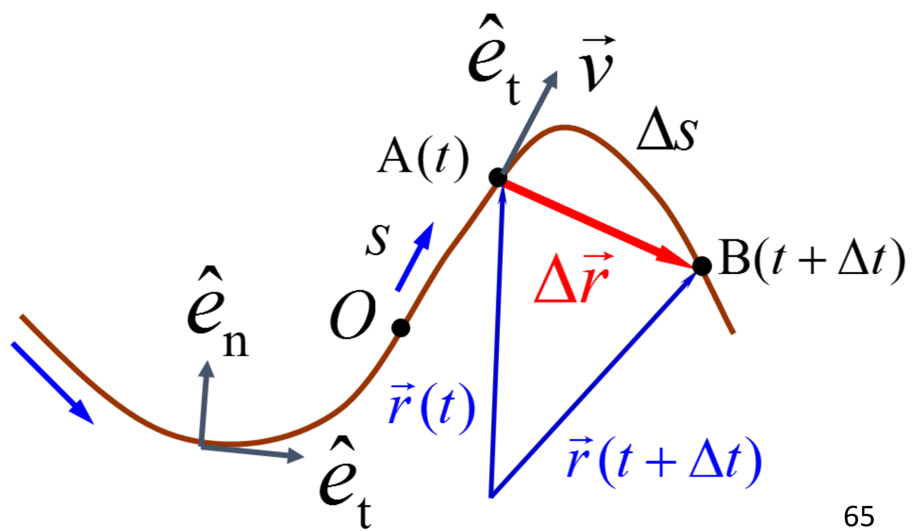
来描述质点的运动状态。

如果选圆心为原点，

则质点的位置矢量的大小（矢径、曲率半径）不变，

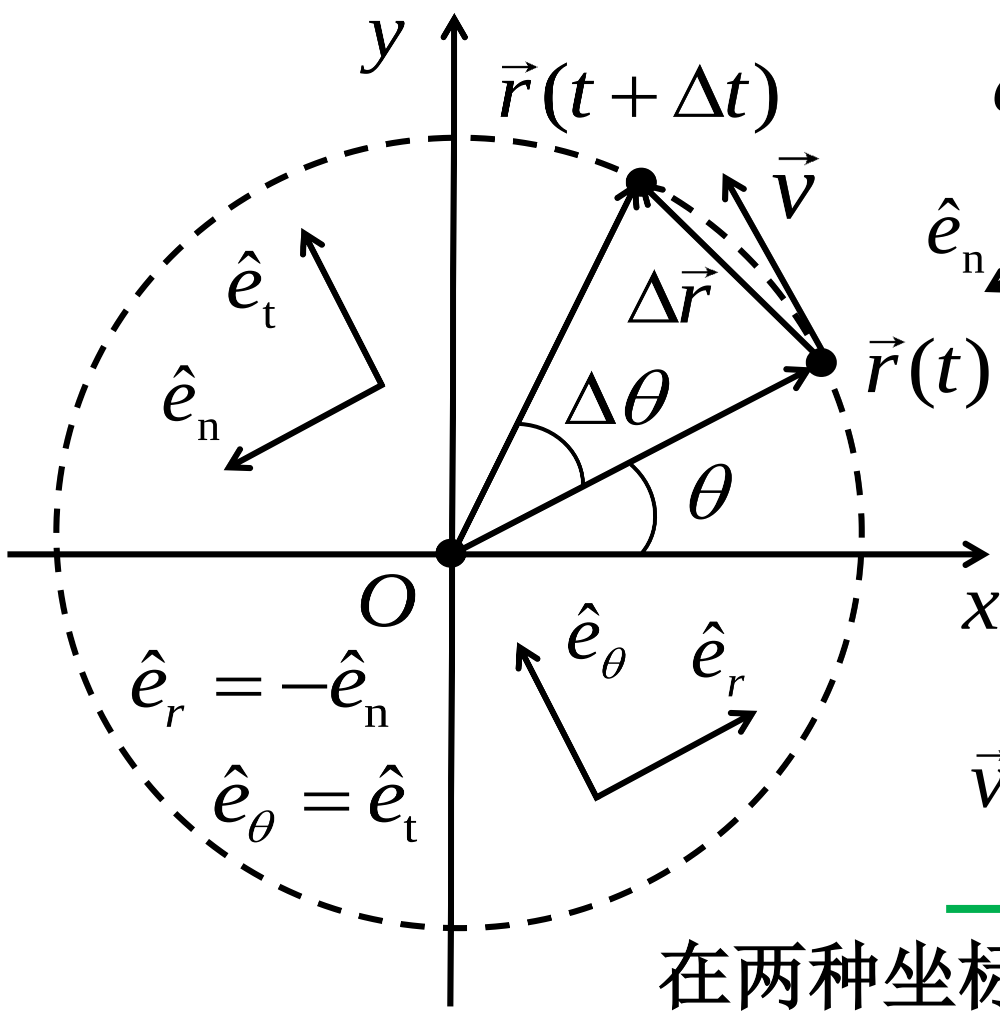
为圆的半径。

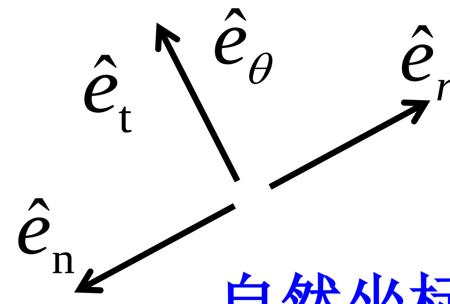




如果质点作圆周运动的轨道半径为R，

速度





自然坐标系速度表示为

$$\vec{v}(t)=v(t)\hat{e}_{\mathrm{t}}=R\omega\hat{e}_{\mathrm{t}}$$

平面极坐标系速度表示为

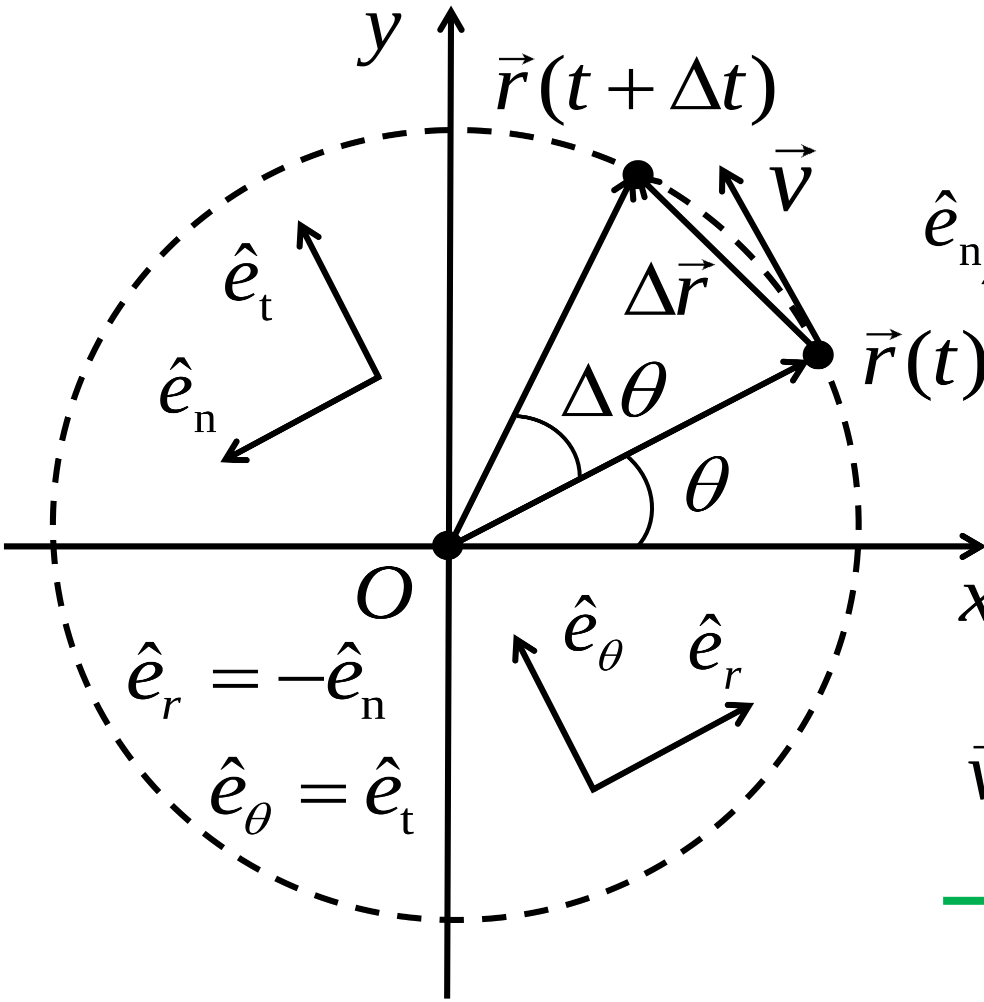
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta=R\omega\hat{e}_\theta$$

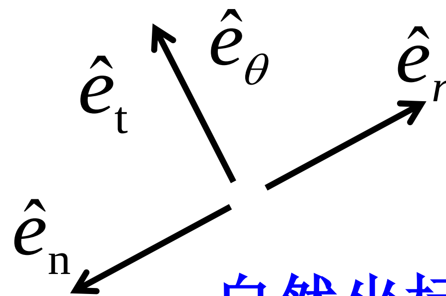
在两种坐标系中，速度的表述一致

速度沿圆周的切线方向

如果质点作圆周运动的轨道半径为R，

速度 ☆





自然坐标系速度分表示为

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{e}_{\mathrm{t}} = R\omega\hat{e}_{\mathrm{t}}$$

平面极坐标系速度表示为

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta = R\omega\hat{e}_\theta$$

质点作圆周运动时的

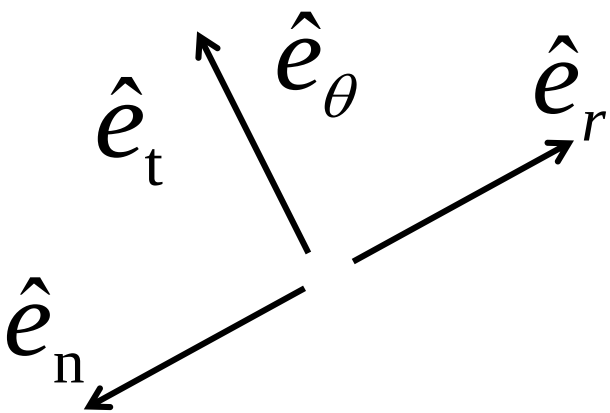
线速度（速率）与角速度的关系为

$$\boxed{v = R\omega}$$

加速度 ☆

在平面极坐标系中，质点作圆周运动时的加速度为

$$\vec{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{e}_r+\left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\hat{e}_\theta=-R\omega^2\hat{e}_r+R\beta\hat{e}_\theta$$



加速度的两个正交分量：

径向加速度 $\vec{a}_r=-R\omega^2\hat{e}_r$

沿径向指向圆心；

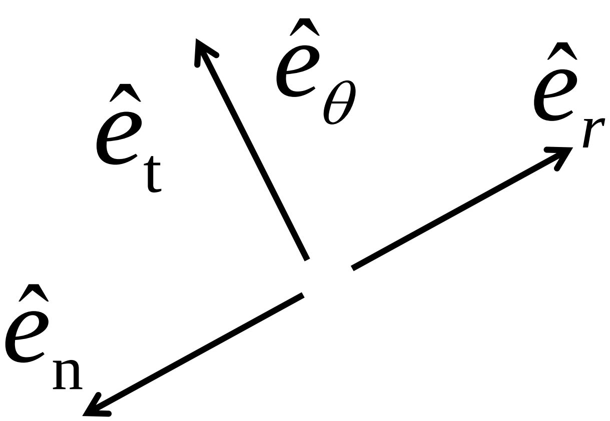
横向加速度 $\vec{a}_\theta=R\beta\hat{e}_\theta$

加速度

☆

在自然坐标系中，质点作圆周运动时的加速度为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^{2}}{\rho}\hat{e}_{\mathrm{n}}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\hat{e}_{\mathrm{t}}+\frac{(R\omega)^{2}}{R}\hat{e}_{\mathrm{n}}=\underline{R\beta\hat{e}_{\mathrm{t}}+R\omega^{2}\hat{e}_{\mathrm{n}}}$$



加速度的两个正交分量：

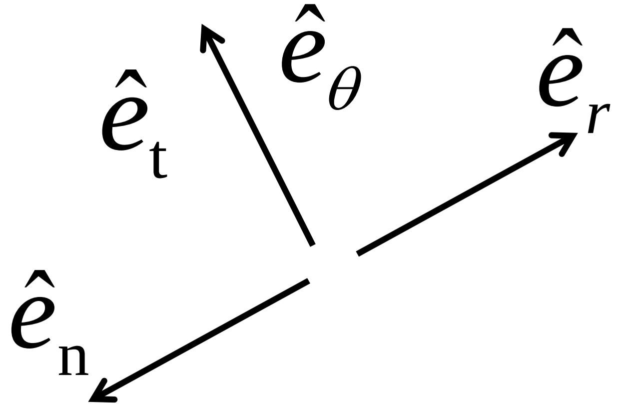
切向加速度 $\vec{a}_{\mathrm{t}}=R\beta\hat{e}_{\mathrm{t}}$ 沿圆的切线方向；

法向加速度 $\vec{a}_{\mathrm{n}}=R\omega^{2}\hat{e}_{\mathrm{n}}$ 沿径向指向圆心。

加速度

径向加速度 $\vec{a}_r = -R\omega^2\hat{e}_r$

法向加速度 $\vec{a}_\text{n} = R\omega^2\hat{e}_\text{n}$



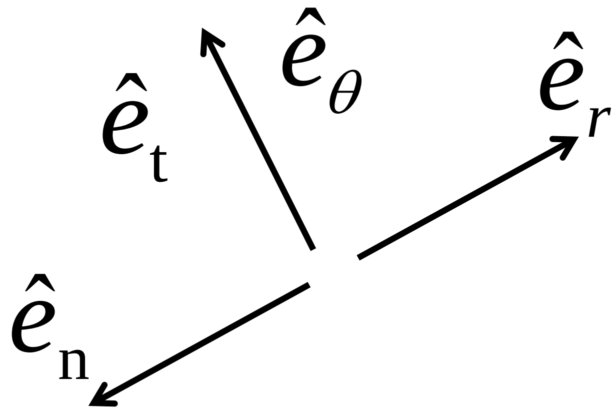
横向加速度 $\vec{a}_\theta = R\beta\hat{e}_\theta$

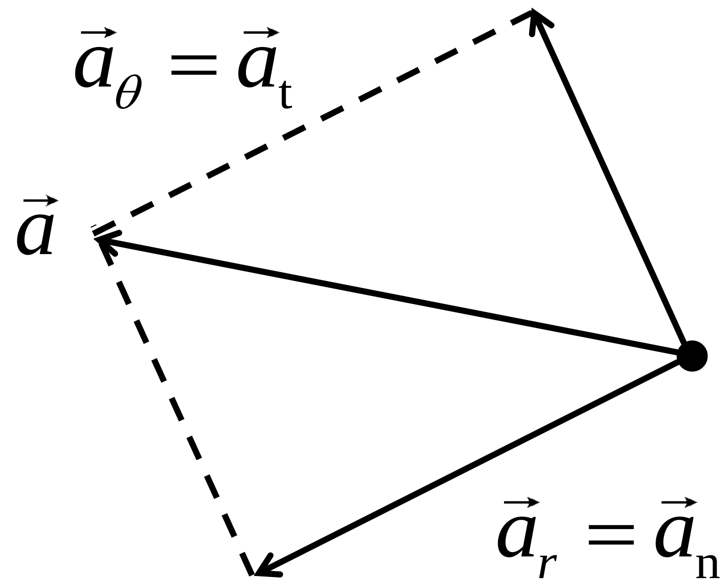
切向加速度 $\vec{a}_\text{t} = R\beta\hat{e}_\text{t}$

径向加速度与法向加速度相同，$\vec{a}_r = \vec{a}_\text{n}$，沿径向指向圆心；
一般称为法向加速度或向心加速度，负责速度矢量方向的变化。

横向加速度与切向加速度相同，$\vec{a}_\theta = \vec{a}_\text{t}$，
一般称为切向加速度，负责速度矢量大小的变化。

加速度 ☆





径向加速度 $\vec{a}_r = -R\omega^2 \hat{e}_r$

法向加速度 $\vec{a}_n = R\omega^2 \hat{e}_n$

横向加速度 $\vec{a}_\theta = R\beta \hat{e}_\theta$

切向加速度 $\vec{a}_t = R\beta \hat{e}_t$

质点作圆周运动时，加速度的大小为

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}} = \sqrt{a_\theta^{\ 2} + a_r^{\ 2}} = R\sqrt{\omega^4 + \beta^2}}$$


大连理工大学
詹卫伸

☆

第六节　质点机械运动的积累

如果质点的速度矢量已知，则速度对时间的积累就是质点位置矢量的变化（位移）；

如果质点的加速度矢量已知，则加速度对时间的积累就是质点运动速度矢量的变化。

一、速度的时间积累

二、加速度的时间积累

一、速度的时间积累

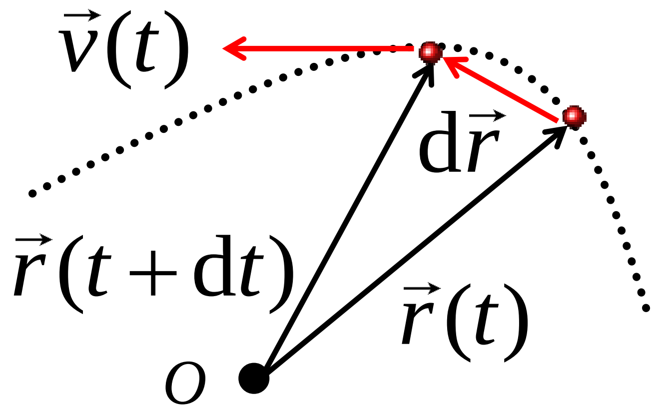
☆

质点沿曲线运动，

在无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ （$t \to t+\mathrm{d}t$）内

质点的位置矢量由 $\vec{r}(t)$ 变化到 $\vec{r}(t+\mathrm{d}t)$，

在这微小的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内质点的位移为



$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}(t+\mathrm{d}t) - \vec{r}(t)$$

由于 $\mathrm{d}t$ 可以无限小，认为在时间间隔 $t \to t+\mathrm{d}t$ 内，

质点运动速度矢量 $\vec{v}(t)$ 的大小和方向都不变化，

即质点在此时间间隔内作匀速度直线运动，

因此在无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内质点的位移为 $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\mathrm{d}t$

在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内质点的位移，即速度对时间的积累为

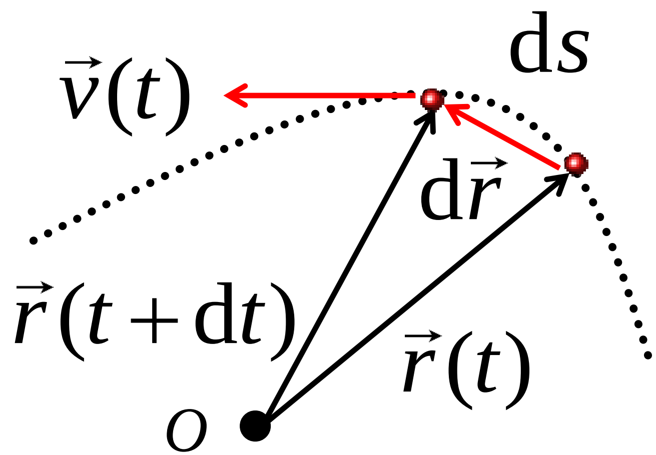
$$\boxed{\Delta\vec{r} = \int \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\mathrm{d}t}$$

路程

如果已知质点运动的速率 $v(t)$，

认为在时间间隔 $t \to t+\mathrm{d}t$ 内，

质点运动速率不变化，



即质点在此时间间隔内作匀速度直线运动，

因此在无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ （$t \to t+\mathrm{d}t$ ）内质点经历的路程为

$$\mathrm{d}s = v(t)\mathrm{d}t$$

☆

在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内

质点的经历的路程，

即速率对时间的积累为

$$\boxed{s = \int \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t}$$

二、加速度的时间积累 ☆

如果已知质点运动的加速度 $\vec{a}(t)$，

由于 $\mathrm{d}t$ 可以无限小，可以认为在时间间隔 $t \to t+\mathrm{d}t$ 内，

质点运动加速度矢量 $\vec{a}(t)$ 的大小和方向都不变化，

即质点在此时间间隔内作匀加速度运动，

因此在无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内质点运动速度的增量为

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}(t)\mathrm{d}t$$

在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内

质点运动速度的增量，

即加速度对时间的积累为

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \int \mathrm{d}\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\mathrm{d}t}$$


大连理工大学
詹卫伸

第七节　伽利略变换 ☆

质点的运动是相对的，即相对于参考系的运动。

在不同的参考系中，描述质点运动状态的物理量是不同的。

同一个质点的运动状态在不同的参考系中描述之间的关系称为变换，即描述质点运动状态的物理量从一个参考系变换到另一个参考系去描述的数学上关系。

在经典力学体系中，这一关系称为伽利略变换。由于是数学变换式，所以要对不同的参考系选取不同的坐标系。

为了描述清楚质点的位置，除了空间的3个坐标值外，还需要时刻这一坐标值，我们称为时空坐标。

伽利略变换就是在经典力学中，同一个物理事件时空坐标以及坐标随时间的变化在不同参考系或坐标系中的数学关系。

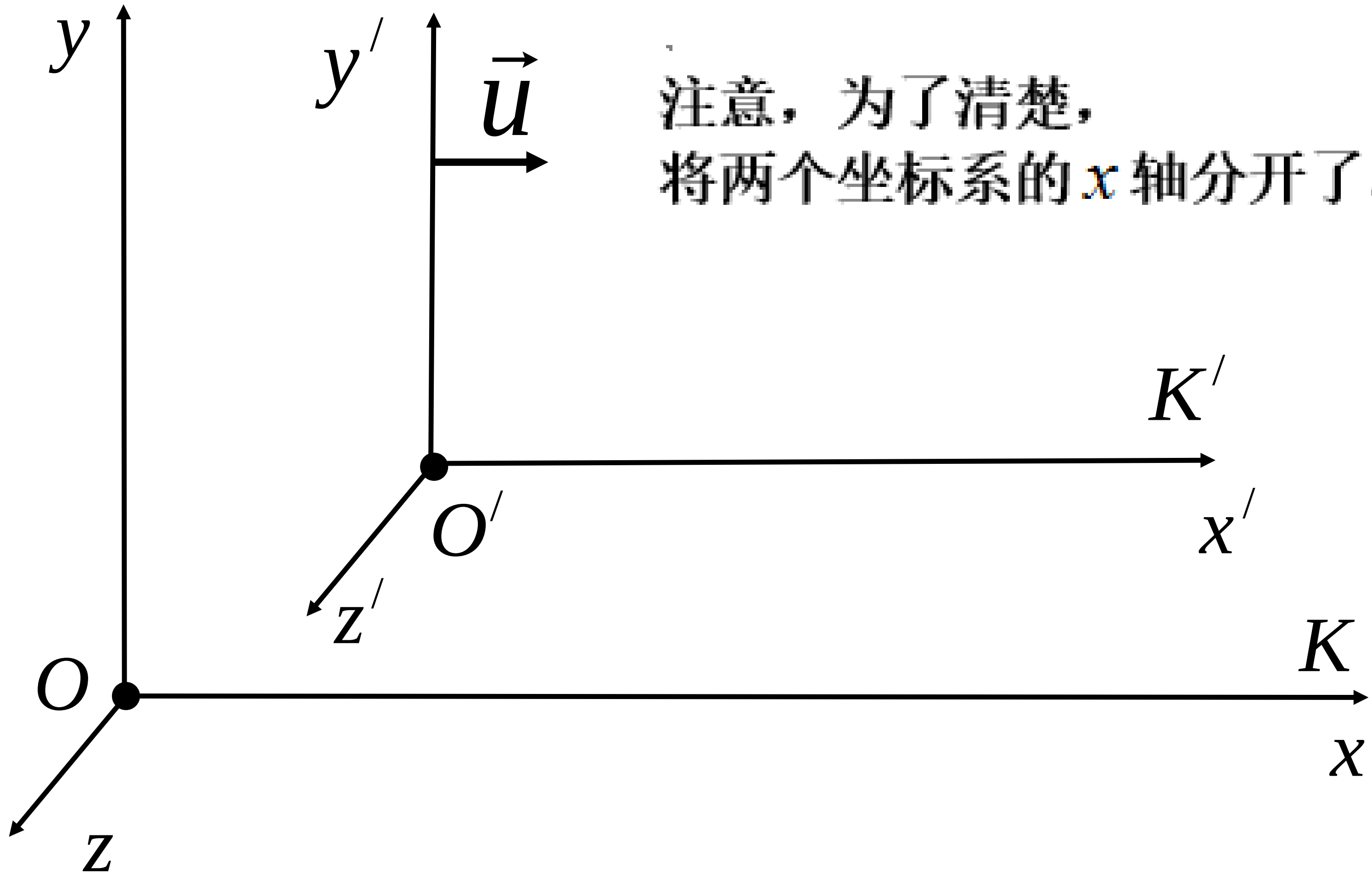
一、伽利略坐标变换

二、伽利略速度变换

三、伽利略加速度变换

四、牛顿的绝对时空观

一、伽利略坐标变换 ☆

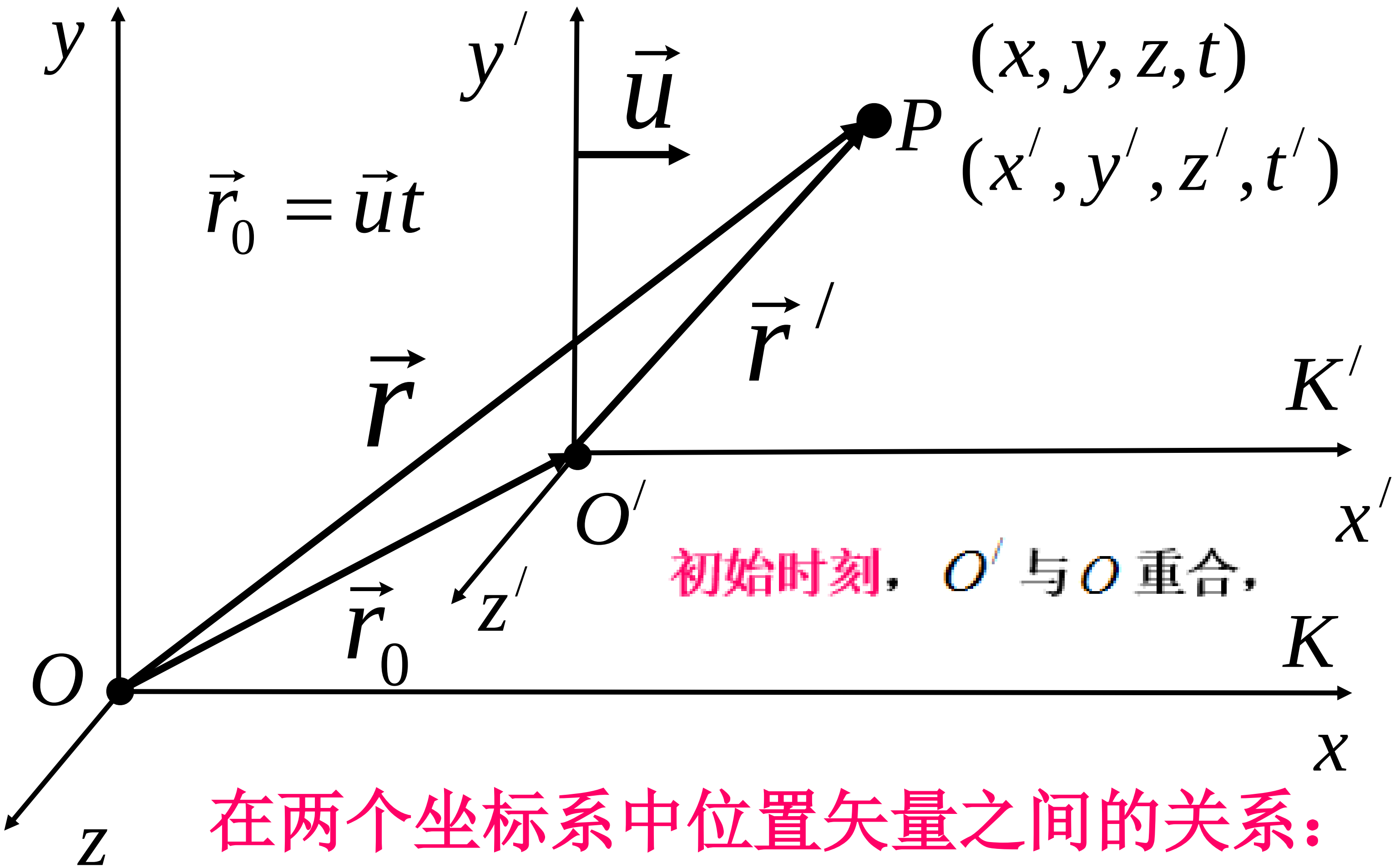


注意，为了清楚，将两个坐标系的 x 轴分开了。

两个以速度“互相平动的坐标系 xOy 和 $x'O'y'$，它们的 x 轴重合，y 轴和 z 轴分别平行，K' 系沿 x 轴方向相对于 K 系运动速度为 $\vec{u}$。

质点于某时刻在K'系中的位置矢量为$\vec{r}'$，时空坐标为(x', y', z', t')；

在K系中的位置矢量为$\vec{r}$，时空坐标为(x, y, z, t)。

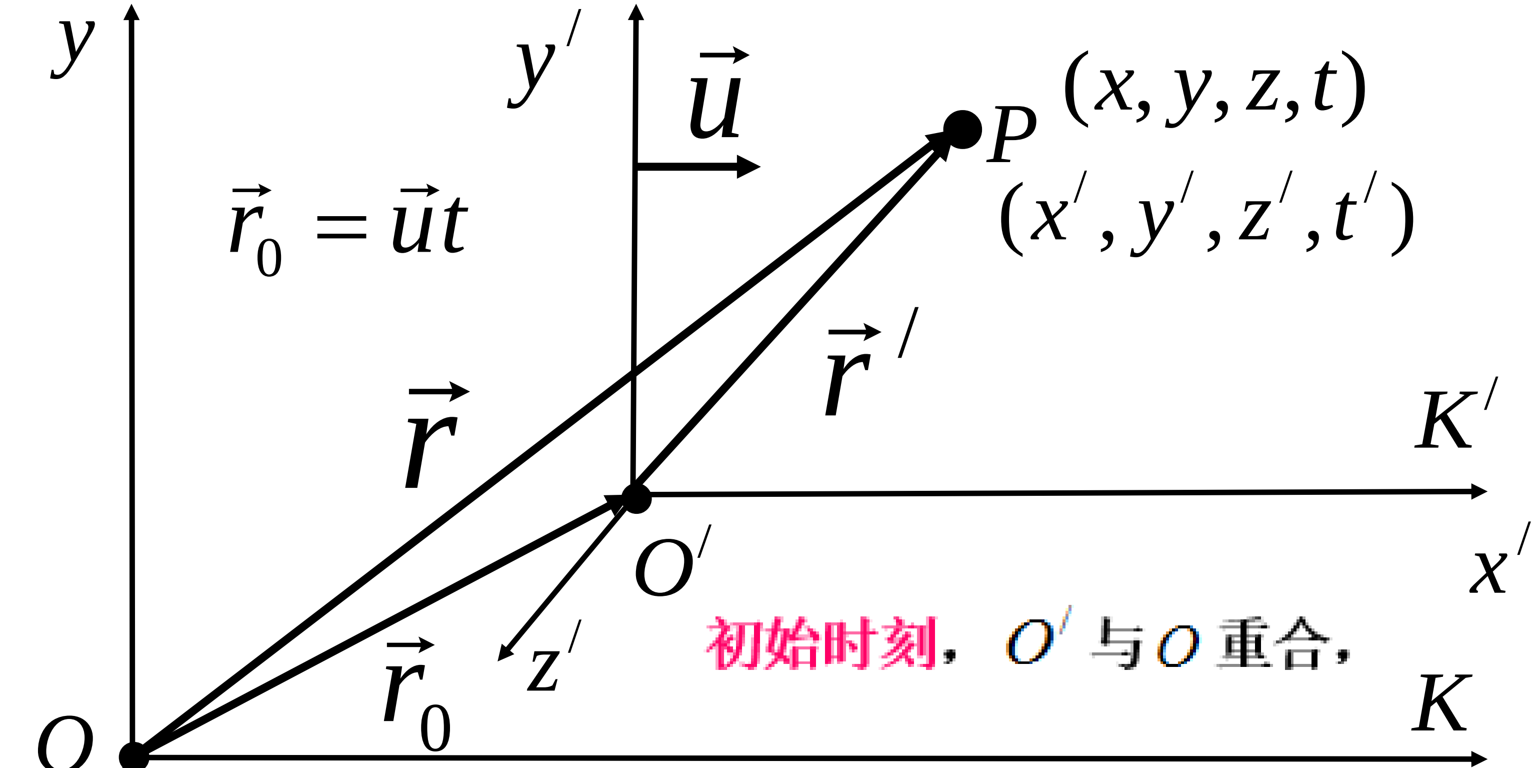


在两个坐标系中位置矢量之间的关系：

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad t' = t}$$

位置矢量变换式

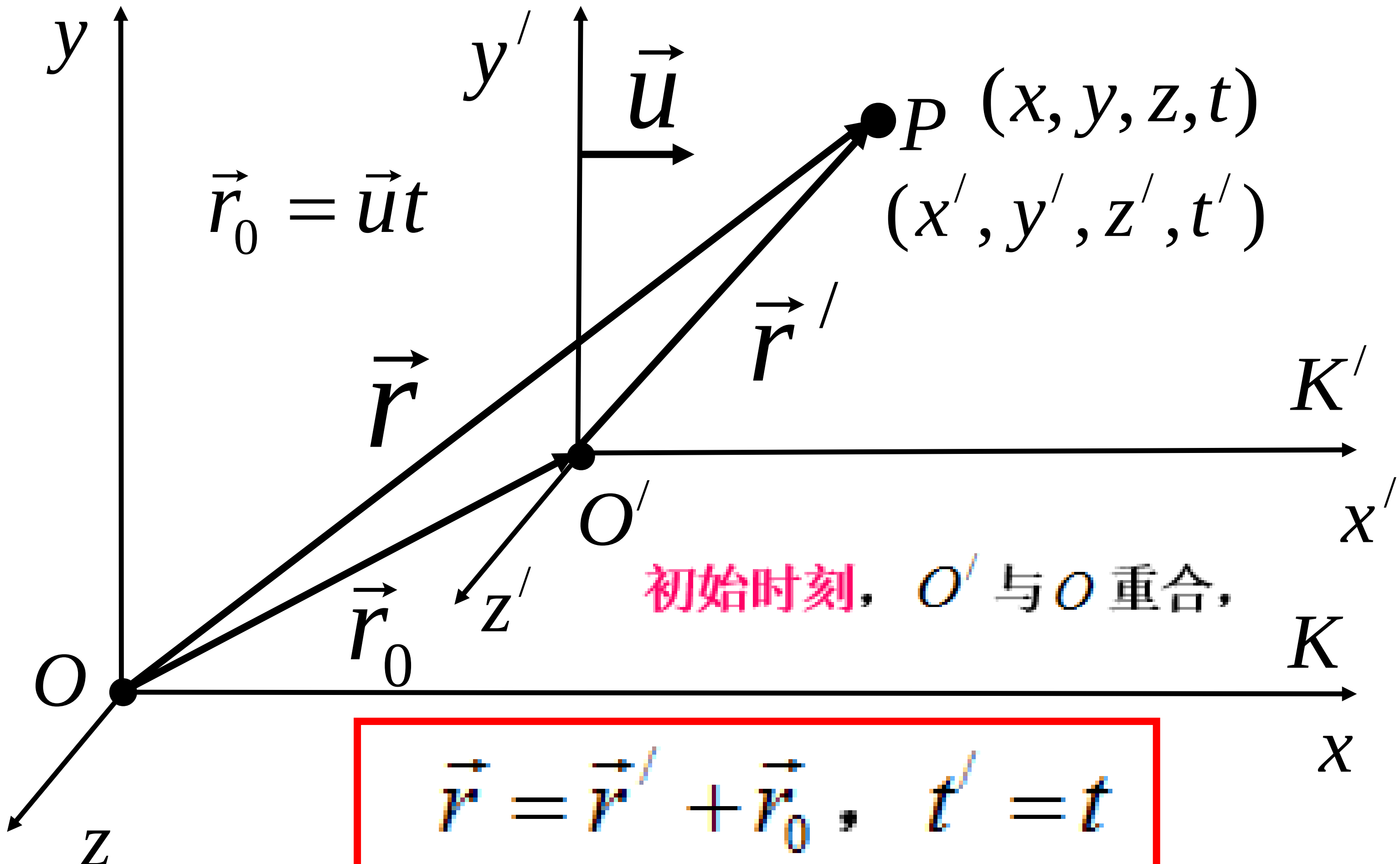
☆



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad t' = t}$$

伽利略坐标变换：

$$\boxed{x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t}$$



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 ，\quad t' = t}$$

伽利略坐标变换逆变换：

$$\boxed{x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'}$$

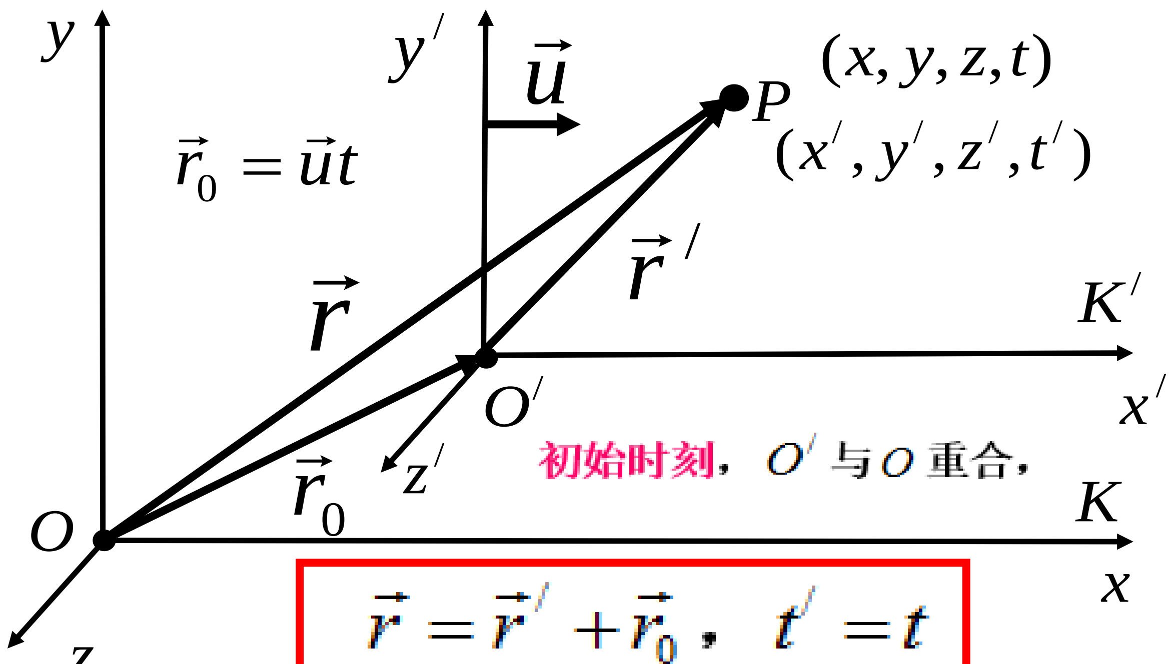
伽利略坐标变换：

☆

$$\boxed{x' = x - ut,\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = t}$$

伽利略坐标变换逆变换：

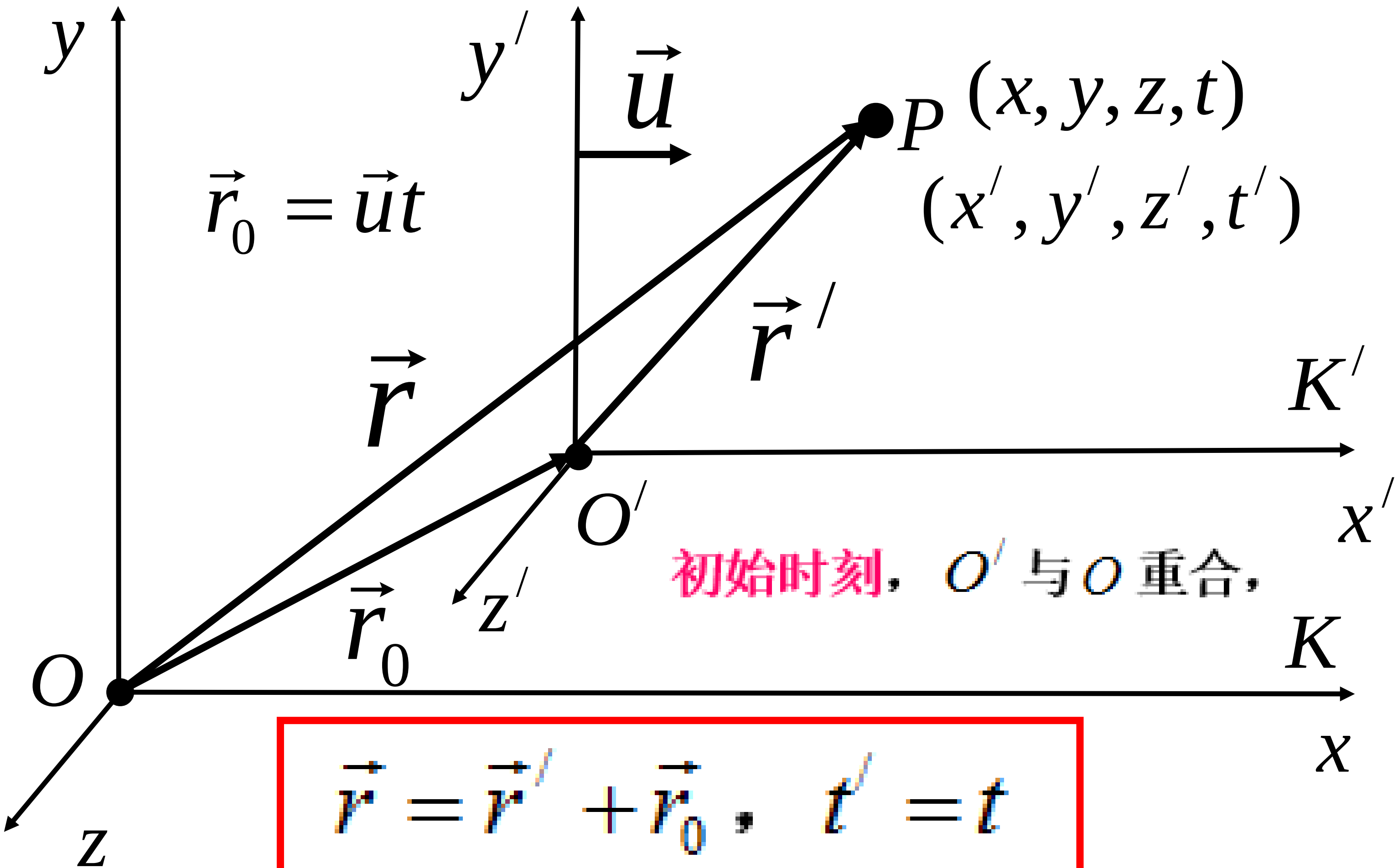
$$\boxed{x = x' + ut,\quad y = y',\quad z = z',\quad t = t'}$$



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0,\quad t' = t}$$

同一个质点的位置在两个坐标系的时空坐标值之间的关系

二、伽利略速度变换 ☆



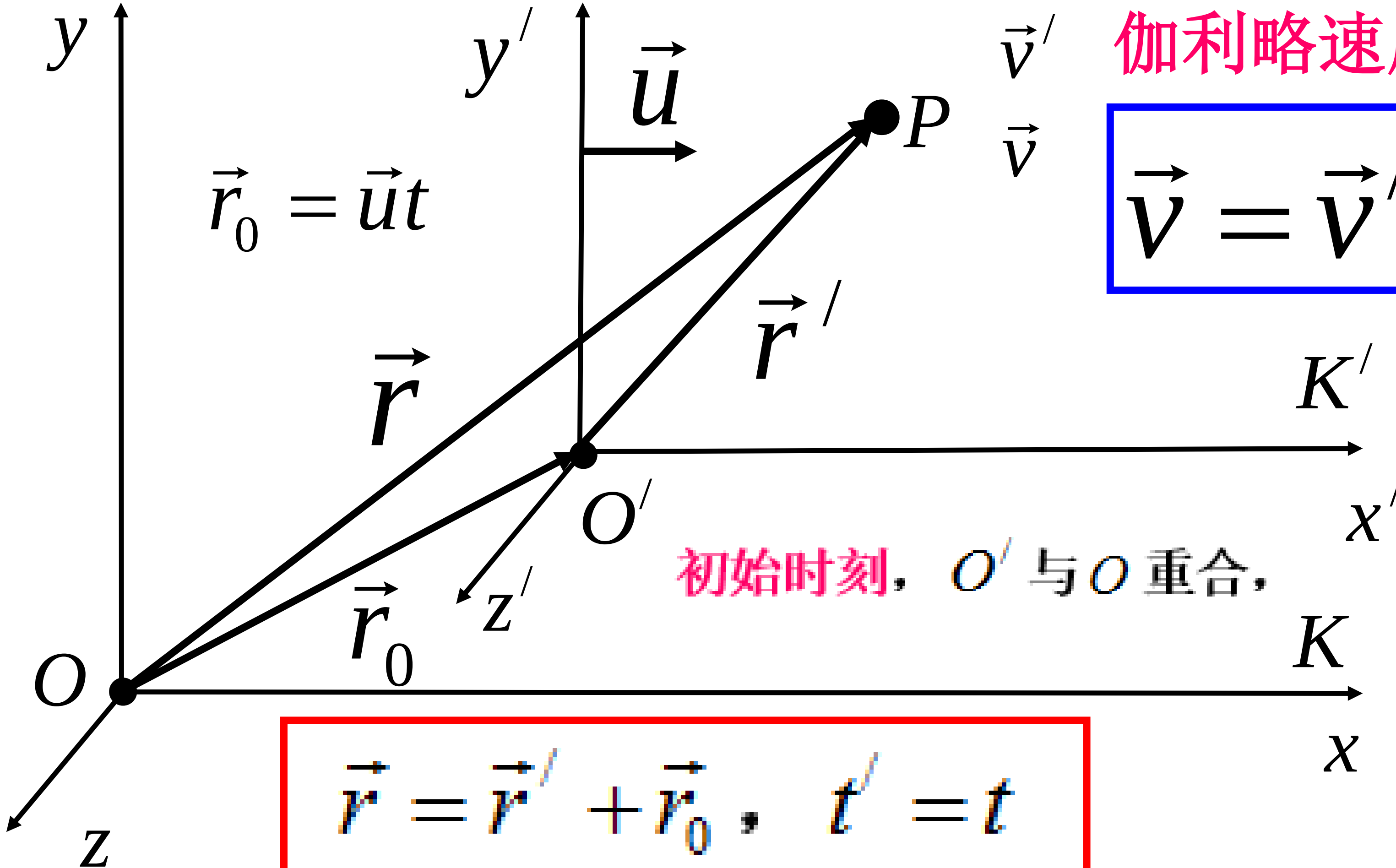
$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{r}_0,\quad t'=t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}}$$

伽利略速度变换：

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0\text{，}\quad t' = t}$$

$\vec{v}'$ 表示质点相对 K' 系的速度，称为相对速度；

$\vec{v}$ 表示质点相对 K 系的速度，称为绝对速度；

$\vec{u}$ 为 K' 系相对 K 系的速度，称为牵连速度。

☆

三、伽利略加速度变换 ☆

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}^{\prime} + \vec{u} \\ t^{\prime} &= t\end{aligned}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}^{\prime}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}^{\prime}}{\mathrm{d}t^{\prime}} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

伽利略加速度变换

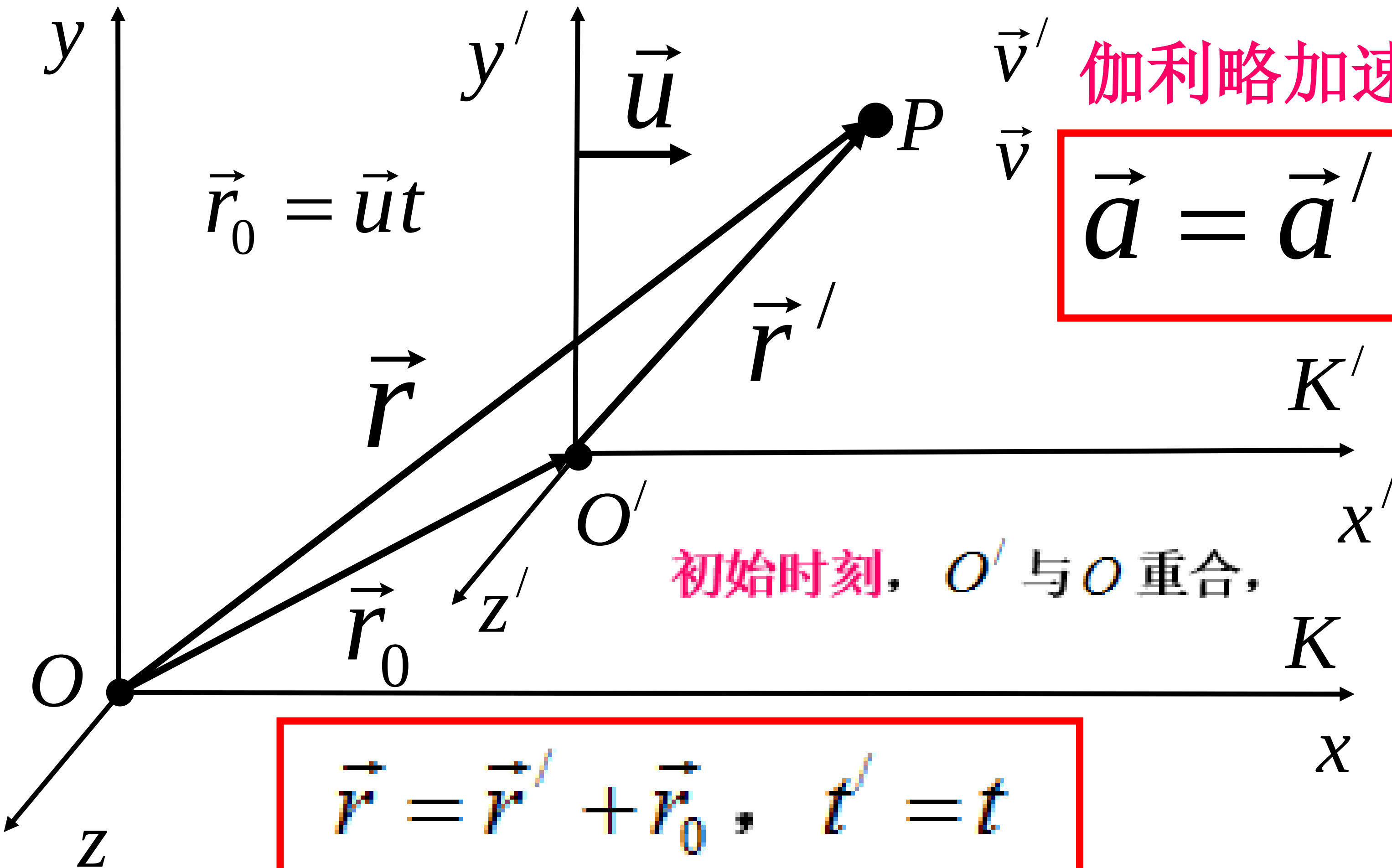
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}^{\prime} + \vec{a}_0}$$

$\vec{a}$ 表示质点相对 K 系的加速度，称为绝对加速度；

$\vec{a}^{\prime}$ 表示质点相对 $K^{\prime}$ 系的加速度，称为相对加速度；

$\vec{a}_0$ 为 $K^{\prime}$ 系相对 K 系的加速度，称为牵连加速度。

同一质点相对两个互相平动的参考系的加速度之间的变换关系，质点运动的绝对加速度等于质点运动的相对加速度与牵连加速度的矢量合



伽利略加速度变换

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad t' = t}$$

☆

若 $\vec{a}_0 = 0$，则

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

同一个质点，在相对两个相互作匀速直线运动的参考系中的加速度是相等的

四、牛顿的绝对时空观 ☆

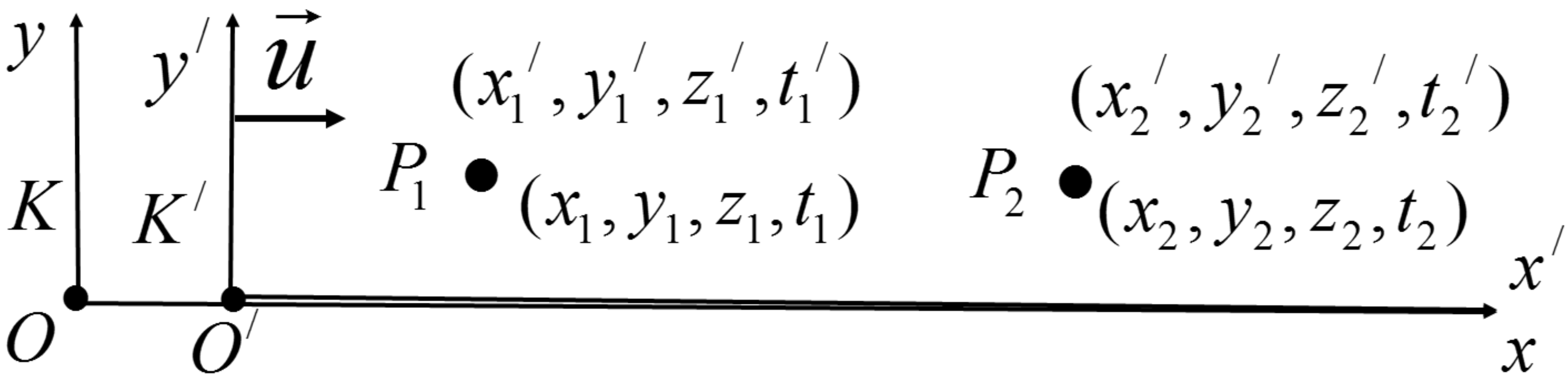
伽利略坐标变换清晰地体现了经典力学的时空观。

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

1. 同时性的绝对性
2. 时间间隔的测量是绝对的
3. 长度的测量是绝对的

1. 同时性的绝对性 ☆

$$\boxed{x' = x - ut,\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = t}$$



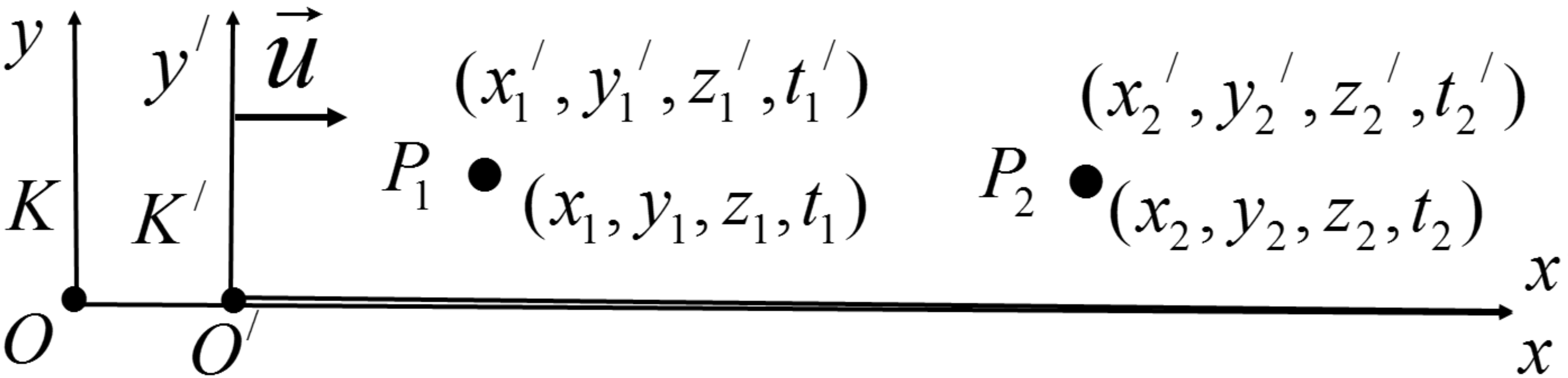
如果这两个物理事件在 K 系中是同时发生的 $\underline{t_1 = t_2}$ ➡ $\underline{t_1' = t_2'}$

无论两个物理事件是否发生在同一空间地点，

只要在 K 系中这两个物理事件是同时发生的，

那么在 K' 系中，这两个物理事件也是同时发生的。

如果这两个物理事件在K系中是同时发生的 $t_1 = t_2$ ⇒ $t_1' = t_2'$



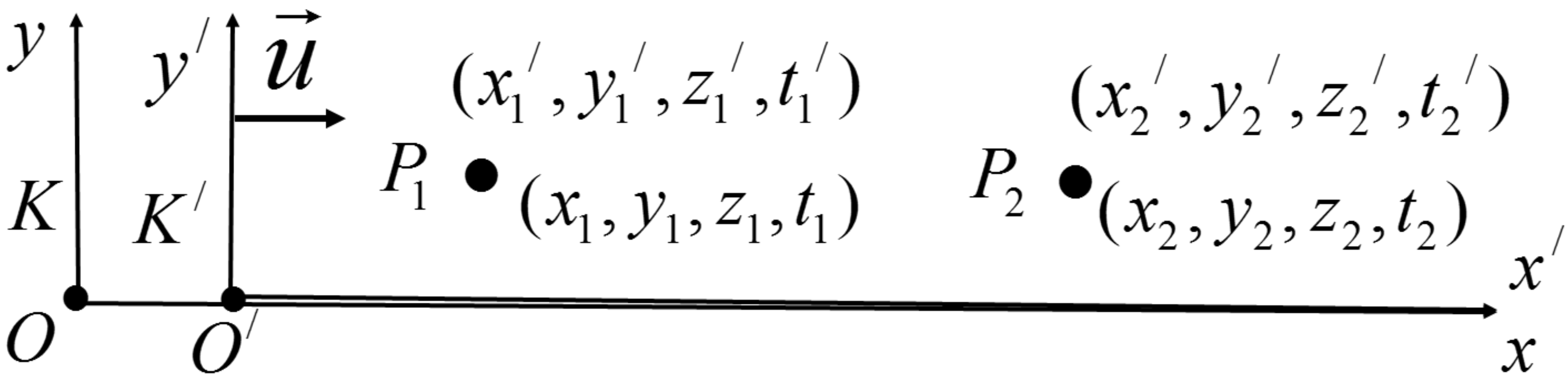
“同时”这一物理概念与参考系无关，“同时”的描述不依赖于测量者是否相对于物理事件的运动。

在一个参考系中是“同时”的，在任何相对于这个参考系作匀速直线运动的参考系中也是“同时”的。

“同时性”是绝对的 ☆

2. 时间间隔的测量是绝对的 ☆

$$\boxed{x' = x - ut,\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = t}$$



如果这两个物理事件在 K 系中发生的**时间间隔**为 $\Delta t = t_2 - t_1$

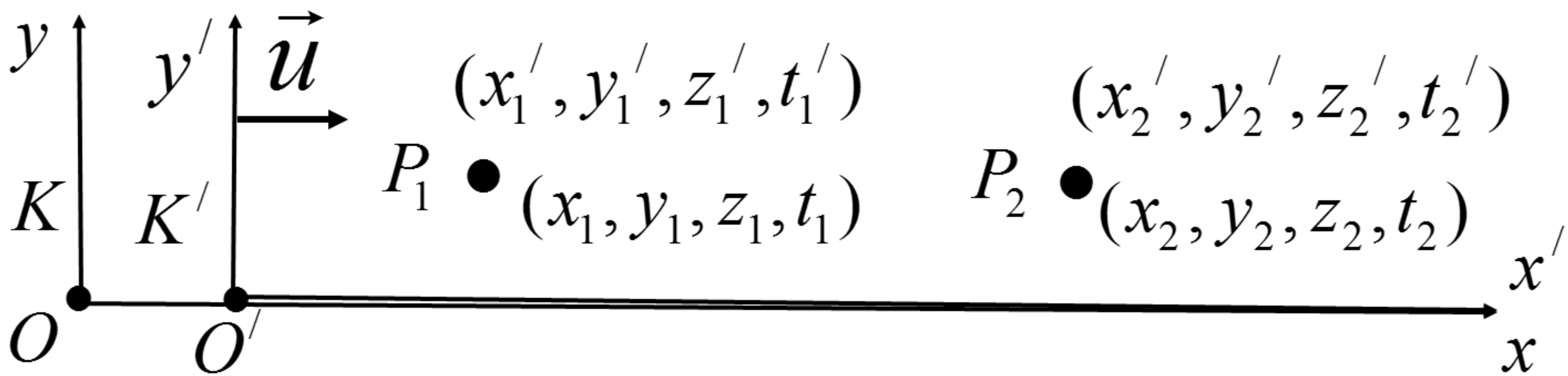
由伽利略坐标变换，这两个物理事件在 K' 系中发生的**时间间隔**

$$\underline{\Delta t'} = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \underline{\Delta t}$$

无论两个物理事件是否发生在同一空间地点，

在 K 系和 K' 系中测量这两个物理事件发生的**时间间隔**是相同的。

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t$$ ☆



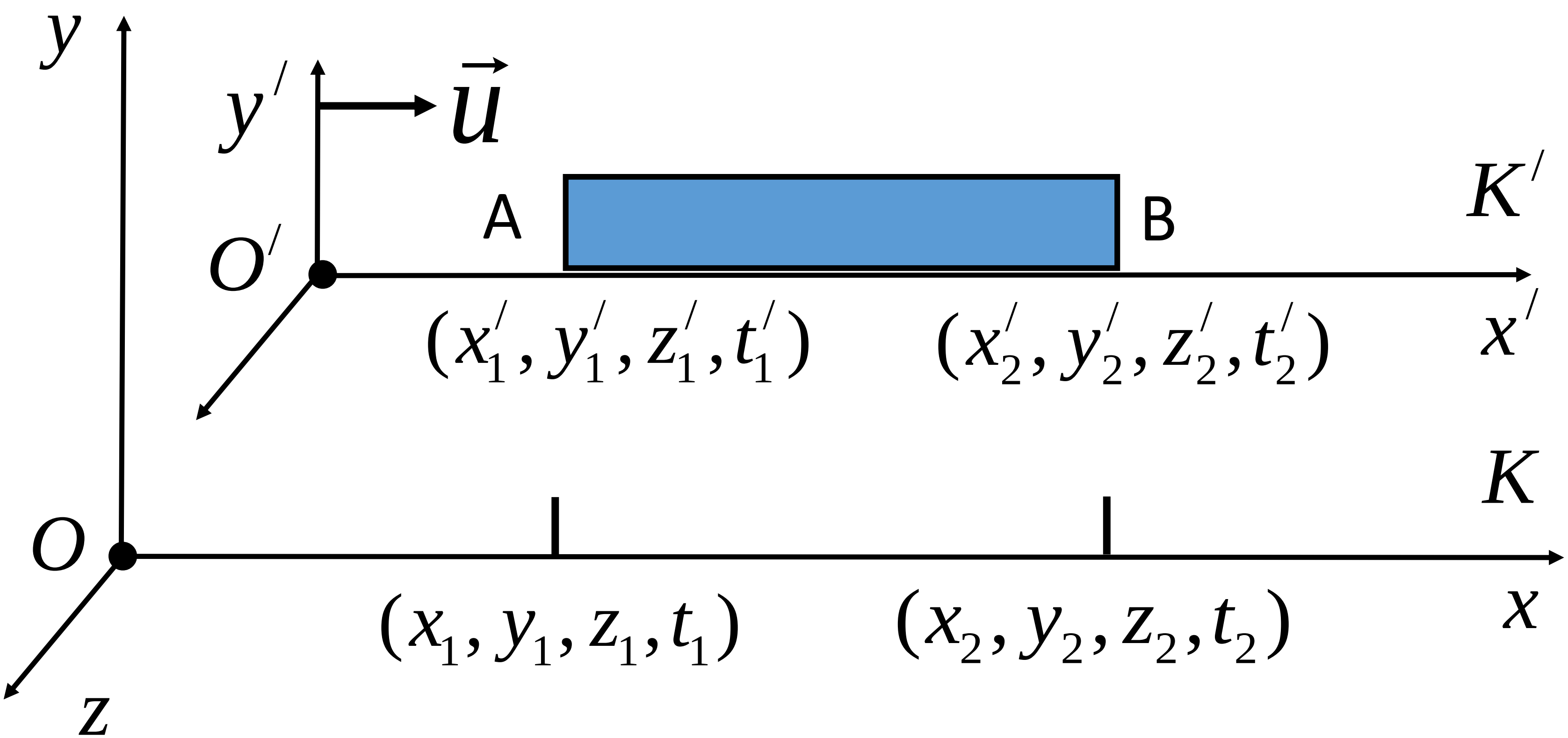
“时间间隔”这一物理量的测量与参考系无关，
“时间间隔”的测量不依赖于测量者是否相对于物理事件的运动。

在一个参考系中测得了两个物理事件发生的时间间隔，在任何相对于这个参考系作匀速直线运动的参考系中测量这两个物理事件发生的时间间隔也是这个值。

“时间间隔”的测量是绝对的

3. 长度的测量是绝对的 ☆

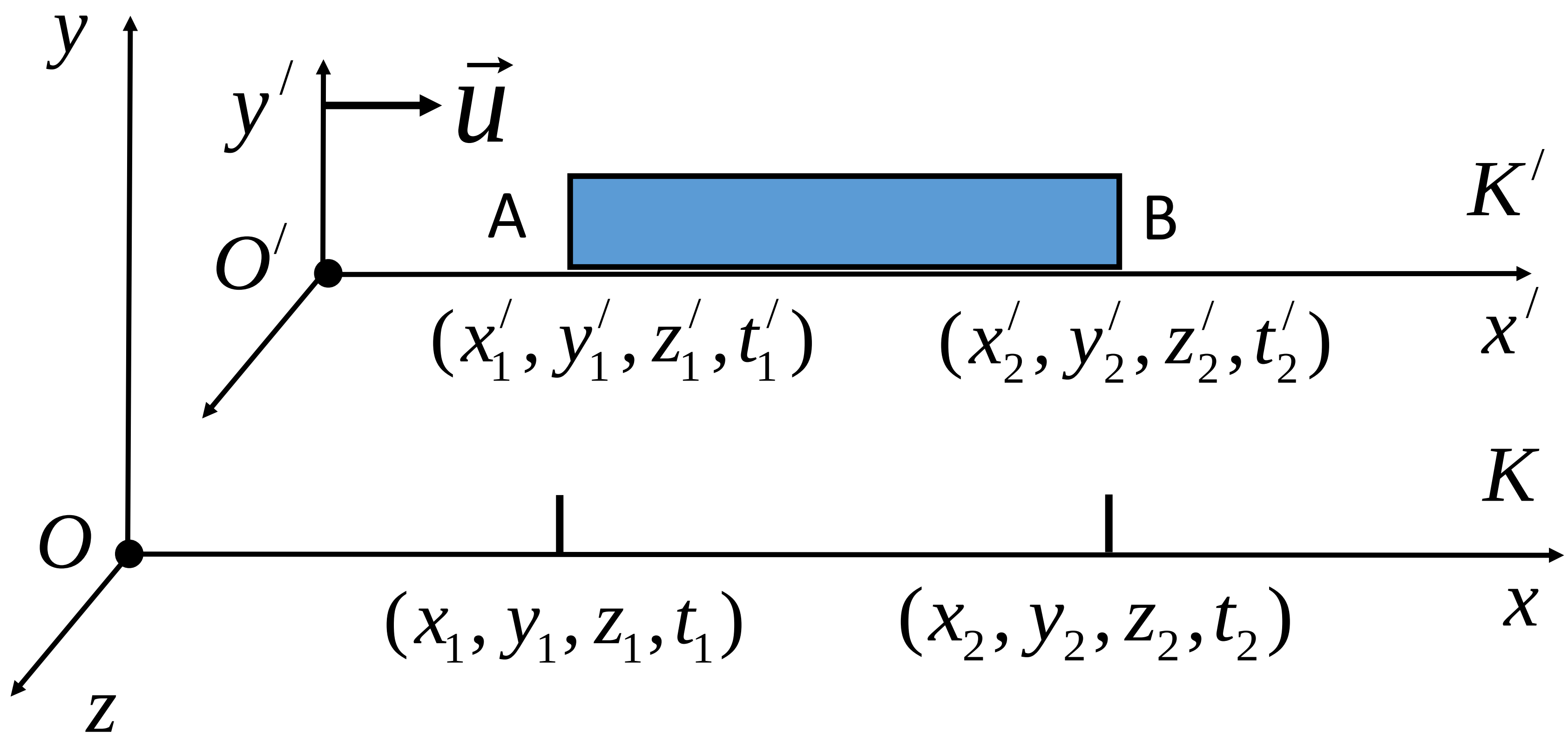
在坐标系中测量物体的长度实际上是测量物体两端的空间坐标值，两个空间坐标值之差被定义为物体的长度。



在 K 系中测量物体的长度 Δx 和

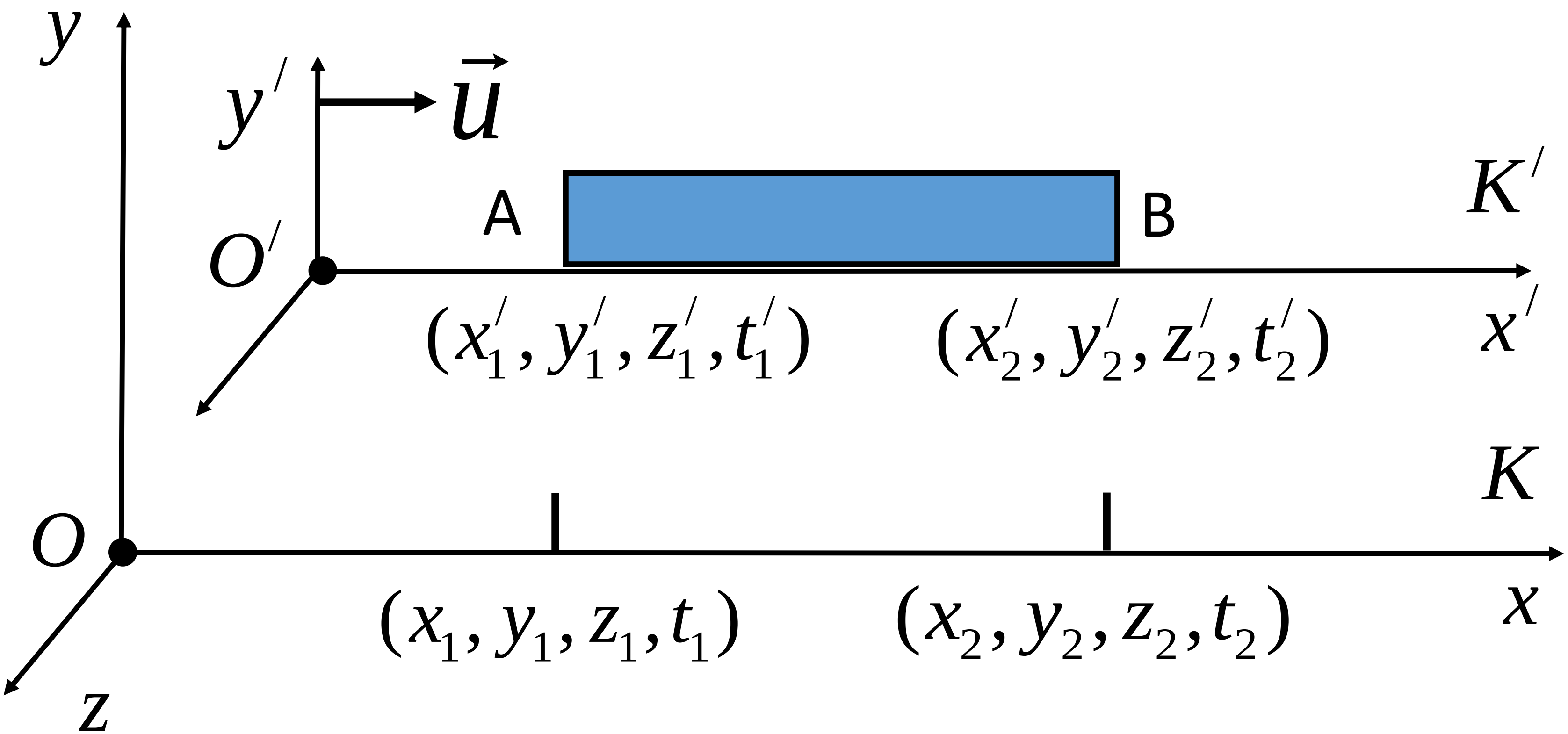
在参考系 K' 中测量物体的长度 $\Delta x'$ 分别表示为

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta x' = x_2' - x_1'$$



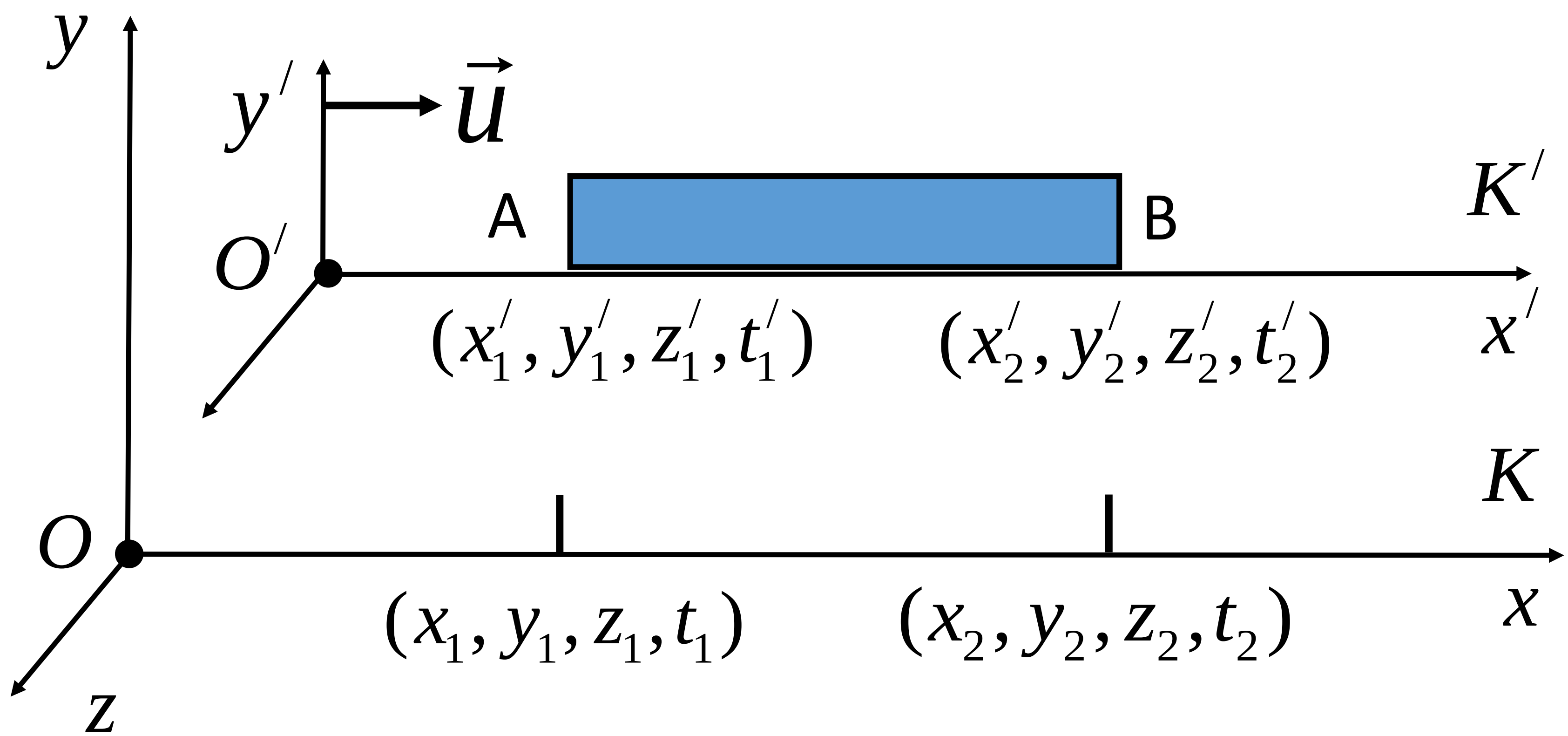
在 K' 系中，物体 A B 是静止的， A 和 B 的坐标值是不随时间变化的，没有必要同时测量 A 和 B 的坐标值 x_1' 和 x_2'，差值就代表了物体 A B 的长度。

而在 K 系中，物体 A B 是运动的，如果不同时测量 A 和 B 的坐标值，则坐标值 x_2 与 x_1 之差不能代表在 K 系中测量物体的长度。



如果要坐标值 x_2 与 x_1 之差代表在 K 系中测量物体的长度，必须同时测量 A 和 B 的坐标值 x_1 和 x_2 。

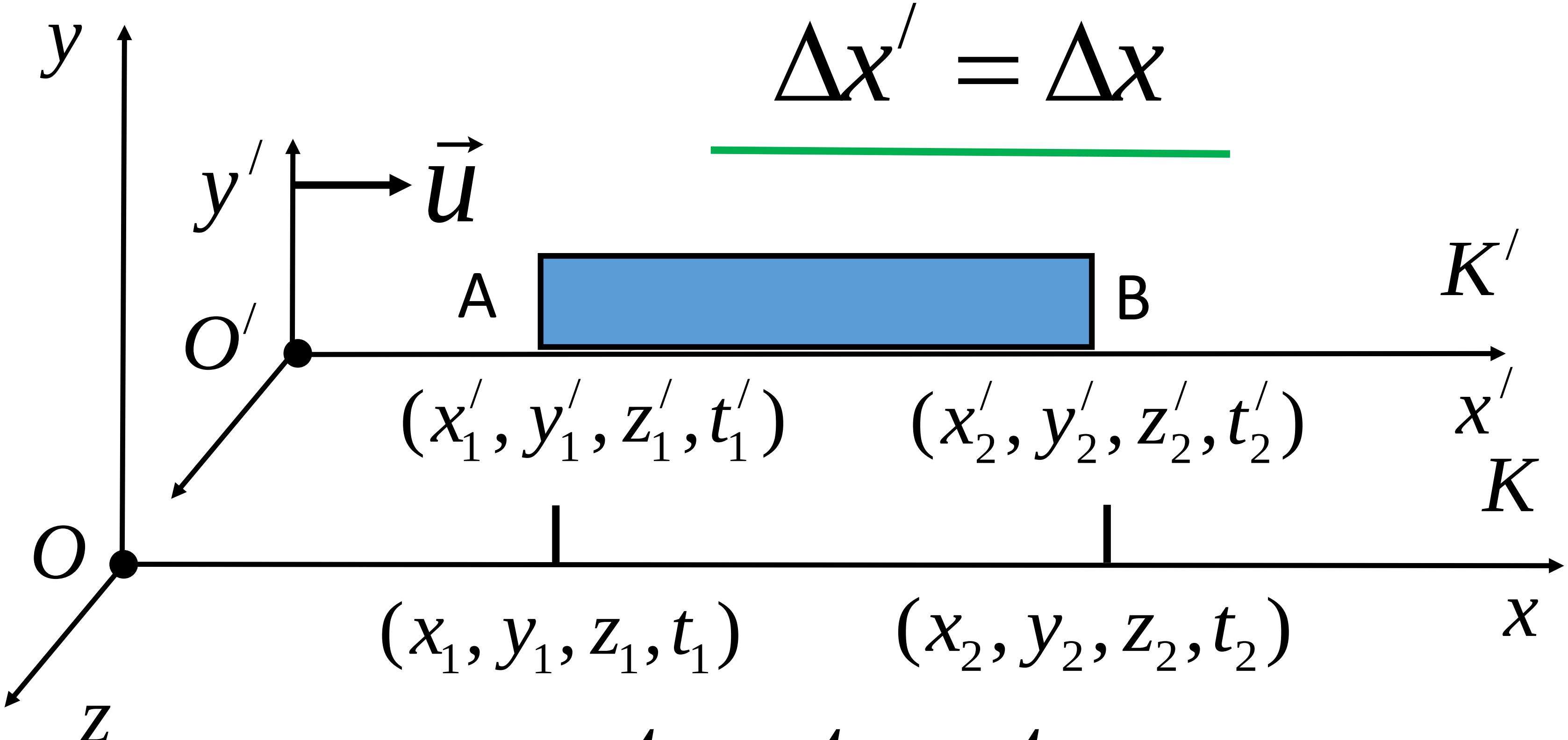
$$t_1 = t_2 = t$$



$$\boxed{x' = x - ut,\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = t}$$

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \left(x_2 - ut_2\right) - \left(x_1 - ut_1\right) = x_2 - x_1 = \Delta x$$

$$\Delta x' = \Delta x$$



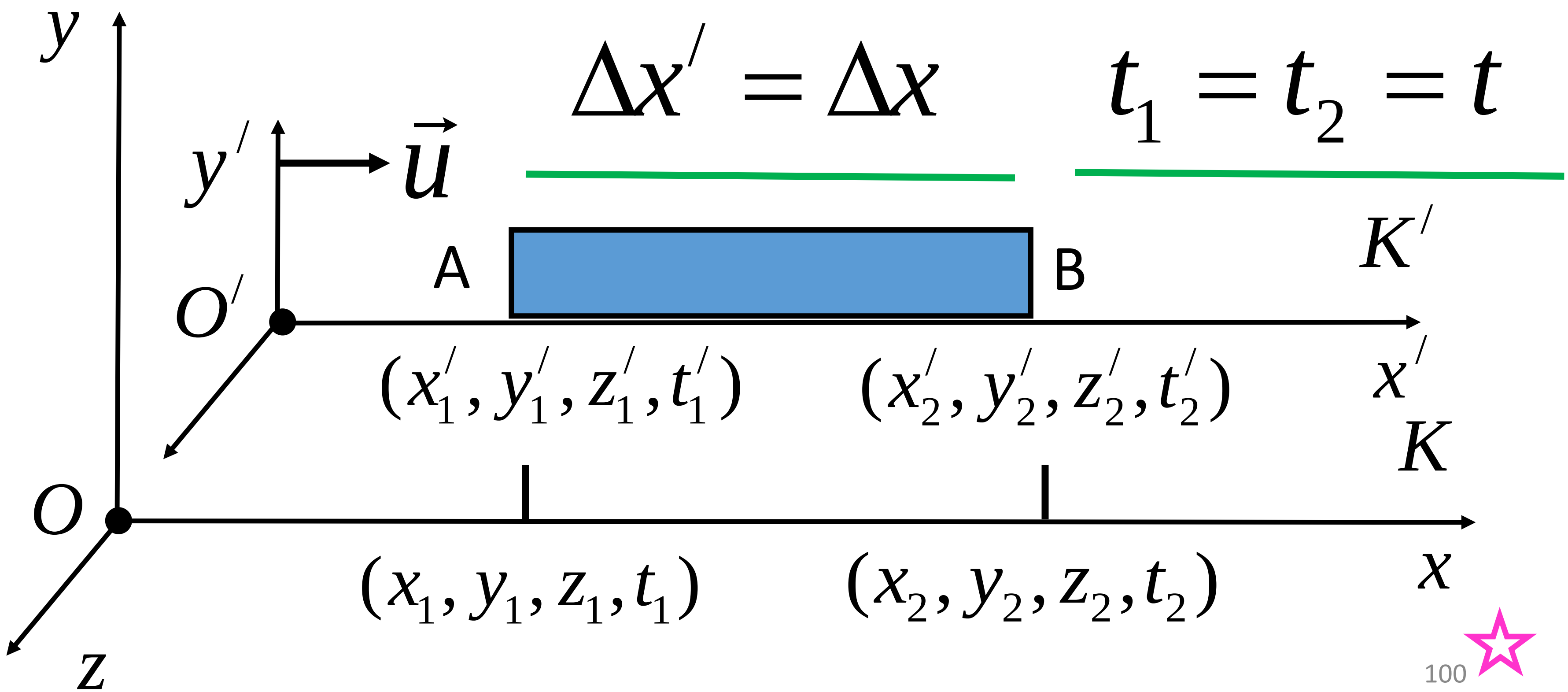
$$t_1 = t_2 = t$$

在正确测量物体的长度（两个物理事件的空间间隔）的前提下，

在 K 系和 K' 系中测量物体的长度是相同的。

“长度（空间间隔）”这一物理量的测量与参考系无关，

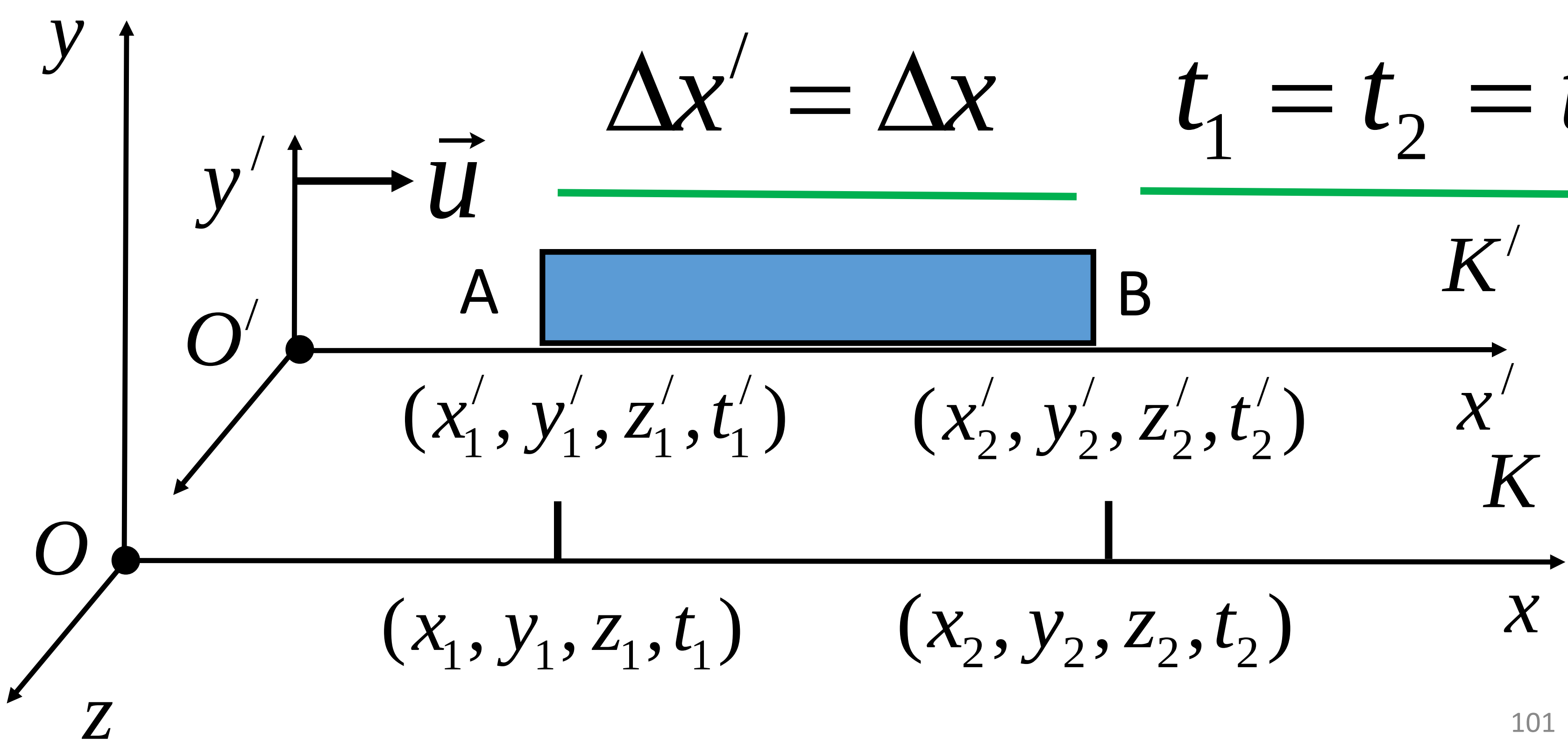
“长度”的测量不依赖于测量者是否相对于物体的运动。



如果在一个参考系中测得了物体的长度，☆
那么在任何相对于这个参考系作匀速直线运动的参考系中测量物体的长度也是这个值。

“空间间隔（长度）”的测量是绝对的

$$\Delta x' = \Delta x \qquad t_1 = t_2 = t$$



☆

在伽利略变换下，

时间测量和空间测量与参考系的运动状态无关，

长度（空间间隔）和时间间隔的测量是绝对的，

而且时间和空间也是不相关的。

这是经典力学对时间和空间的看法，

也就是经典力学的时空观。

经典力学的时空观是绝对的时空观，

也称为牛顿的绝对时空观。

要特别注意的是，

这里的参考系指的是所谓的“惯性系”。

从现代的观点来看，
牛顿的绝对时空观是错误的。

爱因斯坦相对论认为，时空是相关的，
时间和空间与物质和运动是相关的。

牛顿的绝对时空观和伽利略变换是
在物体运动速度远远小于光速的必然结果。

在物体高速运动时，
伽利略变换要被洛伦兹变化所取代，
牛顿的绝对时空观也会过渡到
爱因斯坦的相对时空观。

☆