数学分析拓展 1 大作业

题目：请您尝试利用所学数学分析的内容，例如极限等，编写一份教学案例，诱导小牛顿给出严格的导数定义，从而避免第二次数学危机。

要求：

1. **该教案要逻辑清晰，易于学习。**
2. **要给出一些严格的定义和定理，并配有相关证明和简单的例题和答案。**
3. **结合中国传统数学，让牛顿感受中华文化的博大精深。**
4. **以牛顿的聪明才智，该教学案例不用超过三页。**
5. **正式作业以 A4 纸打印，填写页眉处姓名、大工学号和班级（例如数理 2001）。所有公式请以 word 的公式编辑器编辑。正式教案编写除保留页眉和标题“数学分析拓展 1 大作业”外，题目和要求请删除。**
6. **请各位同学在 2021 年 12 月 21 日之前交给我。**
7. **严禁抄袭，一旦发现双方都将判定为 0 分。**

数学分析拓展 1 大作业

案例问题：导数是什么？导数用来做什么？如何定义导数？

1. 引出导数：

- 导数描述了函数在某一处的变化率，同时也是该处切线的斜率（比较片面的说法，但是有利于快速理解导数）

如果函数在一个区间的内部有一个极值，那么它的切线必须是水平的。我们怎样才能找到这样的点？我们如何找到切线？是否所有的函数在所有点上都有切线？对于切线的斜率我们可以通过差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

得到 $f(x)$和 $f(x+h)$，$h\neq 0$ 的割线斜率。现在让 h是无穷小的数，使得 $f(x+h)$ 逐渐趋近 $f(x)$，并且割线的斜率接近切线的斜率。

定义 1.1（我们将在定义 2.2 改进）：一个函数 $f(x)$的在x点处的导数为

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\text{，}\boldsymbol{h}\text{为无穷小}$$

此外经过$f(x)$且斜率为$f'(x)$的直线称其为切线。

例题 1.1：求出$f(x)=x^2$的导数。

解：

$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^2-x^2}{(x+h)-x}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

因为h是无穷小，所以令$h=0$得

$$f'(x)=2x$$

2. h是不是0?

若h不为0那么为什么可以说$2x+h=2x$？若h是0那么为什么可以除以h？

为了避免这种歧义，我们用更严谨的方式定义极限（对h来说是无穷小）

定义 2.1：设函数$y=f(x)$在点x_0的某个去心领域中有定义，如果存在实数 A，对于任意给定的$\varepsilon>0$，可以找到$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，成立

$$\boldsymbol{|f(x)-A|<\varepsilon,}$$

则称 A 是函数$f(x)$在点x_0的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

所以$h \neq 0$但是$\lim_{h \to 0} h = 0$，因此我们说h不是“等于0”而是说他“趋向于 0”。注意，ε和δ的顺序非常重要：我们通过证明无论ε有多小都有$\delta, |x-\xi| < \delta$使得$|f(x)-A| < \varepsilon$。在证明中我们一般由ε决定δ的取值。

现在我们重新严谨的定义导数！

定义 2.2：一个函数 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ 如果在 $x \in (a,b)$ 可导，那么

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在。在这个情况下，我们称此极限为 f 在 x 上的导数，记为

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{。}$$

例题 2.1：　证明$\lim_{h \to 0} h = 0$。

证：令$f(h) = h$

$$\forall \varepsilon > 0, |f(h)-0| < \varepsilon, \exists \delta > 0, |h-0| < \delta$$

令$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$有

$$|f(h)-0| = |h-0| = \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

■

例题 2.2：求出$f(x) = x^2$的导数。

解：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{n}.$$

因为$h \neq 0$，所以$\frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$

因此$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n \to 0} 2x+h = 2x$

3. 连续性

定义 3.1：令函数$f: D \to \mathbb{R}$和$C \in \mathbb{R}$，存在$p > 0$使得$(c-p, c+p) \in D$。若存在

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

则称函数f在c点连续。

现有函数$f(x)=\begin{cases}x-1,x<0\\x+1,x\geq 0\end{cases}$。当$x=0$，$f(0)=1$因此右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)+1-1}{h}=1$$

但是左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+n)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h-2}{h}$$

不存在。因此$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$也不存在。

定理 3.1：如果函数f在x点可导则函数f在x点连续。

证：如果$x\neq 0$则

$$f(x+h)-f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h$$

$$\lim_{h\to 0}f(x+h)-f(x)=\lim_{h\to 0}f'(x)\cdot\lim_{h\to 0}h=0$$

因此$\lim_{n\to 0}f(x+h)=f(x)$所以f在x点连续。

■

4. 总结

导数是函数$f(x)$在连续的一点x上满足$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。其中$h$是一个变量，代表了一个趋向于0的趋势。**早在公元 3 世纪，中国数学家刘徽将极限的思想用在计算圆的面积时建立的“割圆术”，具体做法是作半径为1圆的内接多边形，只要边数越多圆内接正多边形与圆面积之差越小，因此与圆周率的误差则越小，即“割之弥细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆和体,而无所失矣”。**这就是割圆术所反映的朴素的极限思想。应用到导数上。利用ε-δ语言，则可以严谨的定义极限$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，对比的定义 1.1 我们将$h$定义成一个趋向0的变量，描述了一个“运动着”的过程，其中包含着自变量与函数值之间的关系。