$\|\cdot\|$ 向量范数　　迹 特 变更　　矩阵范数

$R^n \to R^+$　$\forall x \in R^n$

① $\|x\| \geq 0$，$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$

② $\alpha \in R$　$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

③ $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$　　$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

l_p　$p \geq 1$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$p = 1, 2, \infty$

$\|\cdot\|$　$R^{m\times n} \to R^+$　$A \in R^{m\times n}$, B

① $\|A\| \geq 0$　$\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$

② $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

③ $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$

④ $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ 相容性

算子范数（向量诱导的矩阵范数）　$a_{:i} \; e_i$

$\|\cdot\|_v$　$S(A)$　$\|A\| = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v = \max_{x\in R^n} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$

可证 $\max_{\|x\|_v=1} \|(A+B)x\| \leq \|Ax\|+\|Bx\|$

$\|ABx\|_v \leq \|A\| \cdot \|Bx\|_v \leq \|A\| \cdot \|B\|$

SVD　$A^{m\times n} = U \Sigma V^T$　$U^{m\times m}$, $V^{n\times n}$　时间复杂
奇异值分解

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \sigma_n \\ & 0 & \end{pmatrix}$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$　闭集

定理 $\|A\|$ 是由 l_p 范数导出的矩阵范数

(1) $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$　　$A = [\,|\,|\,|\,|\,|\,]$

(2) $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$　　$A = [\,\equiv\,]$

(3) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sigma_1$　作业②

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$?

$\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$?

核范数
shatten 范数

$\|A\|_2$　酉不变性
$\|A\|_F$

$\|QA\|_{*,2,F} = \|AU\|_{*,2,F}$

正交阵

证(1) $A = [a_1\ a_2, \cdots a_n]$　　$\|x\|_1 = 1$

$\sum |x_i| = 1$

$\|Ax\|_1 = \|\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\|_1$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i a_i\|_1$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|a_i\|_1 \leq \max_{i=1,\dots,n} \|a_i\|_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\leq \max \|a_i\|_1$

$\max \|Ax\|_1 \leq$

找出 x 使等式成立即可.

$A^TA = Q\Lambda Q^T$

$x = e_i$，$Ax = a_i$

$\|x\|_2 = 1 = \|y\|_2$

(3) $\|A\|_2 \to$　$\|Ax\|_2^2 = x^TA^TAx = x^TQ\Lambda Q^Tx$

$y = Q^Tx$　$\sum^n$　$y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

(3) $\|A\|_2 \to$

$$y = Q^T x$$

$$= y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

$$A = U \Sigma V^T$$

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T$$

$$= \underset{n\times n}{V} \underline{\Sigma^T \Sigma} V^T$$

$$= V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^T$$