☆

电磁学是研究有关电和磁现象的科学。

电磁学与生产技术的关系十分密切。
电能可以通过某些传感器很方便地转化为其他形式的能量；
电能便于远距离传输，而且效率很高；
电磁波的传播速度就是光速，用来远距离传递信息。

自从19世纪麦克斯韦建立电磁理论至今，
人类在电磁理论和应用方面已经取得了突飞猛进的发展。
随着科学的发展，电磁也越来越多地介入人类的生活，
电磁炉、微波炉，蓝牙、无线充电、卫星导航

如果说，电磁理论曾经为人类进入信息时代奠定了基础，
那么，未来科学技术的发展仍然无法离开电与磁。

第十一章　静电场 ☆

同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。

电荷与电荷之间存在相互作用这一事实表明，在电荷周围空间存在一种物质，这种物质称为电场。

静电场，是指电荷与观察者相对静止时电荷激发的电场。它是电荷周围空间存在的一种特殊形态的物质，它的基本特征是对置于其中的静止电荷有力的作用。

第一节　库仑定律 ☆

一　电荷

1747年，富兰克林根据一系列实验研究的结果，提出了电荷的概念。

1、电荷只有正、负两种

电荷有两种，一种是正电荷，一种是负电荷。而且，同种电荷相斥；异种电荷相吸。

阴极射线是电子流，电子带有负电荷；
原子核带有正电并且集中了原子的绝大部分质量。

中性原子和带电的离子都是由原子核与电子依靠电相互作用而构成的。

宏观物体的电磁现象实质上都来源于微观粒子的状态和运动。

2、电荷是物质的一种物理性质 ☆

带有电荷的物质称为“带电物质”，
电荷的多少称为**电荷量**。

电子的电荷量为$-1.602\,176\,6\times10^{-19}\,\text{C}$，

质子的电荷量为$+1.602\,176\,6\times10^{-19}\,\text{C}$。

当物体由于某种原因获得（或失去）某些电子时便处于**带电状态**

金属内部存在许多可以自由运动的电子，自由电子可以摆脱原子核的束缚而自由地在金属内部运动，**金属是导体**；

电解液内存在许多可以做宏观自由运动的正、负离子，**电解液可以导电**；

在绝缘体内部，由于电子受到原子核的束缚，基本上没有自由电子，因此呈**绝缘性质**。

3、电荷是量子化的 ☆

密立根（R.A.Millikan）带电油滴实验
（ 1906–1917 ,1923年诺贝尔物理奖）

基本电荷e =1.60217733(49)×10^{-19} C

质子和电子的电量分别为 $\pm e$

不仅电子和质子带有电荷，许多粒子也带有电荷。

实验表明，在自然界中，

电荷总是以一个基本单元的整数倍出现的。

夸克（quark）带分数电荷 $-e/3$ 和 $2e/3$

但实验未发现自由夸克（夸克囚禁）

电荷仍然是量子化的

基本电荷的数值应该更正为 $e/3$

○点电荷

☆

对于通常的宏观带电体，
由于所带电量比基本电荷大得多，
其电荷的增减及分布仍可以认为是连续的。

当一个带电体本身的线度
比我们所研究的问题中所涉及的距离小很多时，
该带电体的形状与电荷在其上的分布状况均无关紧要，
该带电体就可以看作一个带电的点，称为点电荷

4、电荷守恒

☆

在一孤立系统内发生的任何过程中总电荷数不变。

○宏观现象：静电感应现象和摩擦起电

正负电量的代数和仍为零

○微观现象：原子、原子核和基本粒子

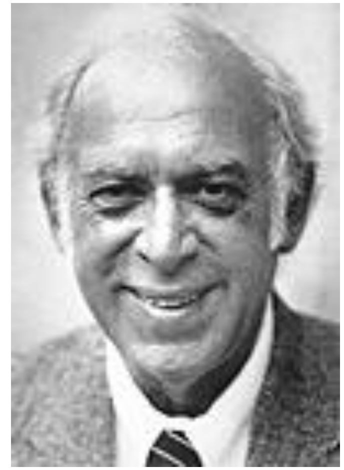
电荷守恒定律也都是严格成立的

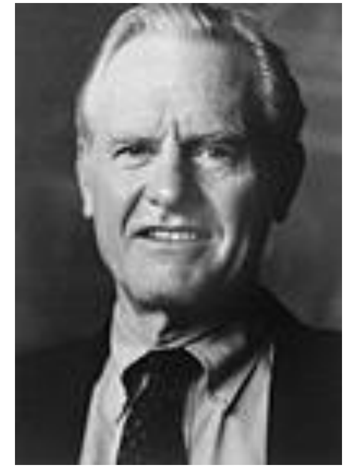
一个高能光子的消失，会产生正负电子对

5、电荷是一个洛仑兹不变量

一个电荷的电量与它的运动状态无关。

在不同惯性系中观测，同一带电粒子的电量相同。





密立根　理查德·泰勒　弗里德曼　肯德尔

密立根（Robert Andrews Millikan,1868-1953)
因对基本电荷和光电效应的研究，
获得了1923年度的诺贝尔物理学奖。

☆

弗里德曼(Jerome I. Friedman, 1930-)、
肯德尔(Henry W. Kendall, 1926-)
理查德·泰勒(Richard E. Taylor, 1929-)
因对电子与质子和束缚中子深度非弹性散射进行的先驱性研究
以及因此而对粒子物理学中夸克模型的发展起了重要作用，
共同分享了1990年度诺贝尔物理学奖。

二 库仑定律 ☆

相对于惯性参照系处在静止状态的两个点电荷
在真空中的相互作用力的大小
与每一个点电荷的电荷量成正比，
与两点电荷间的距离的二次方成反比；
作用力的方向沿着这两点电荷的连线。

$$\boldsymbol{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r}$$

$$\varepsilon_0=8.854\,187\,82\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$ 真空中的介电常量

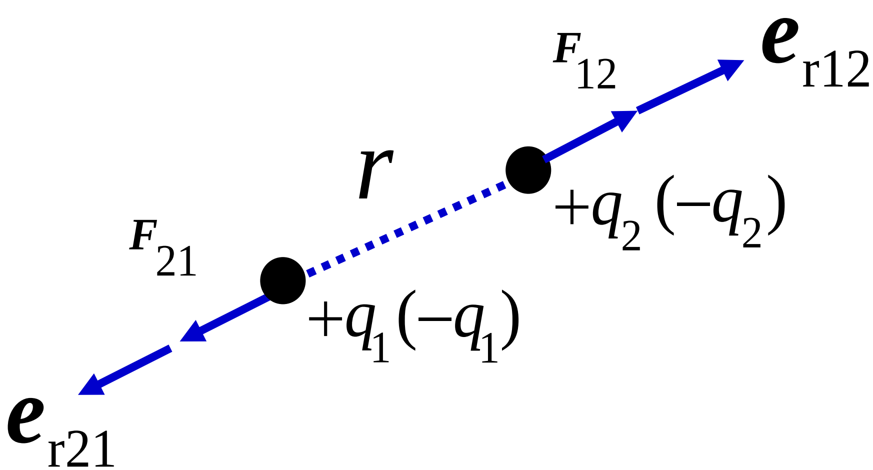
r 为两个点电荷之间的距离；

q_1 和 q_2 是两个点电荷的电荷量（正、负），

$\boldsymbol{e}_\mathrm{r}$ 是由施力点电荷指向受力点电荷的单位矢量。

带同号电荷时，
作用力是排斥力

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}12}$$

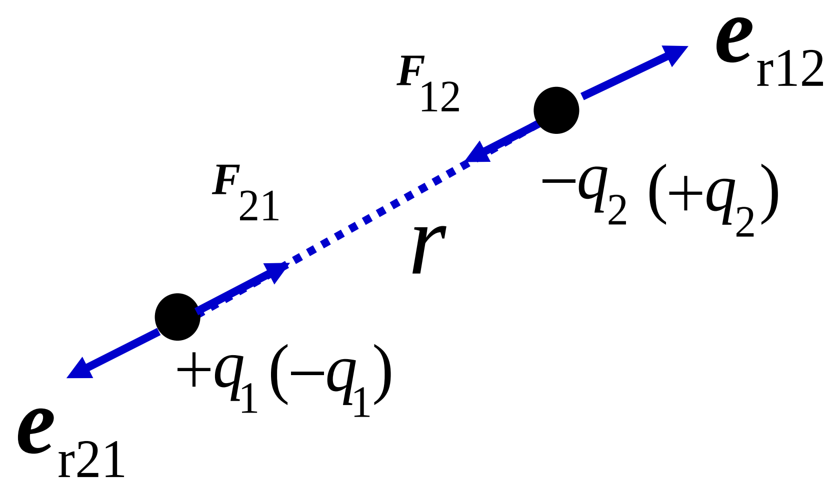


$$\boldsymbol{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}21}$$

☆

带异号电荷时，
作用力是吸引力

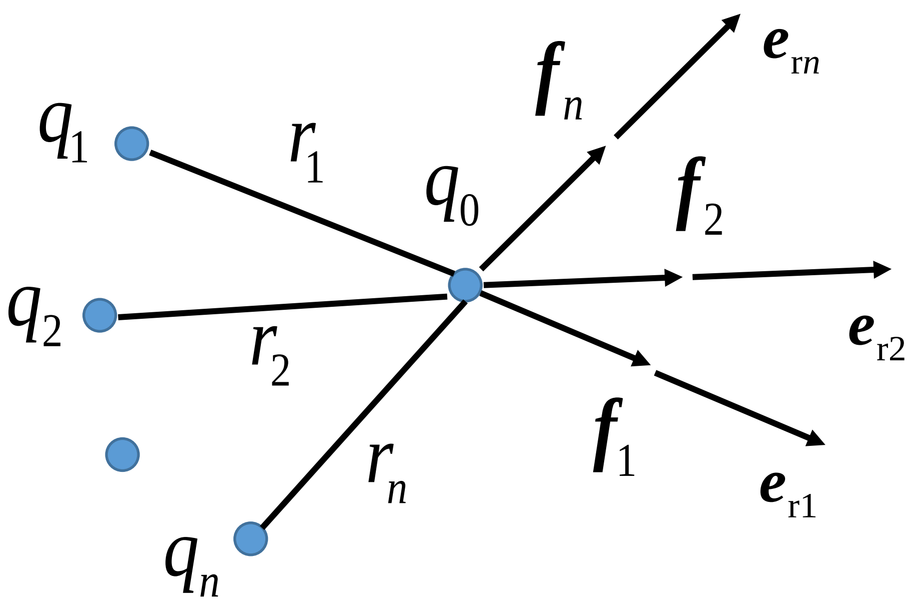
$$\boldsymbol{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}12}$$



$$\boldsymbol{F}_{21} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}21}$$

三　静电作用力的叠加原理 ☆

实验表明，当空间存在两个以上静止电荷时，作用在某一电荷上的静电作用力等于其他电荷单独与该点电荷存在时对该点电荷的静电作用力的矢量合。



$$\boldsymbol{f}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q_1}{r_1^{\,2}}\boldsymbol{e}_{r1}$$

$$\boldsymbol{f}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q_2}{r_2^{\,2}}\boldsymbol{e}_{r2}$$

$$\cdots$$

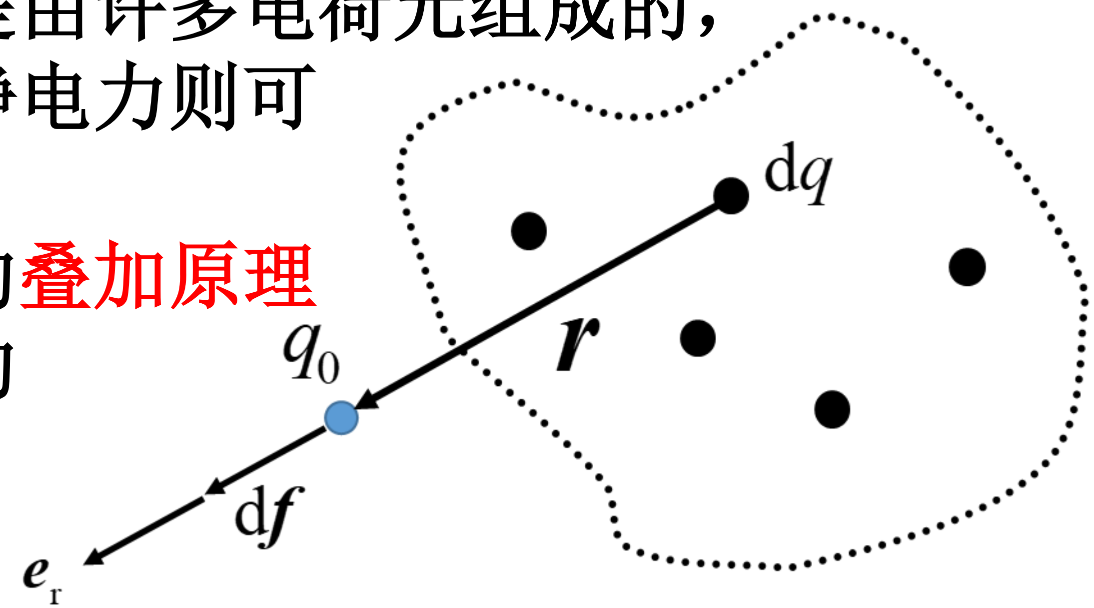
$$\boldsymbol{f}_n=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q_n}{r_n^{\,2}}\boldsymbol{e}_{rn}$$

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\cdots+\boldsymbol{f}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i$$

叠加原理

☆

对于带电体之间的相互作用力，
可分别将带电体看作是由许多电荷元组成的，
带电体电荷元之间的静电力则可
应用库仑定律求得，
最后根据静电作用力的叠加原理
而求出两带电体之间的
总静电作用力。



$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\mathrm{d}q}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\mathrm{d}q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{f}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q_0\mathrm{d}q}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q_0\mathrm{d}q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

第二节　静电场

☆

真空中两个没有接触的点电荷可以发生相互作用，
这就表明，电荷周围存在一种特殊的物质，
电荷周围存在的这种物质称为电场。

电场是物质存在的一种形态，
电场具有能量、动量等属性。

相对于观察者为静止的电荷
在其周围所激发的电场称为静电场。

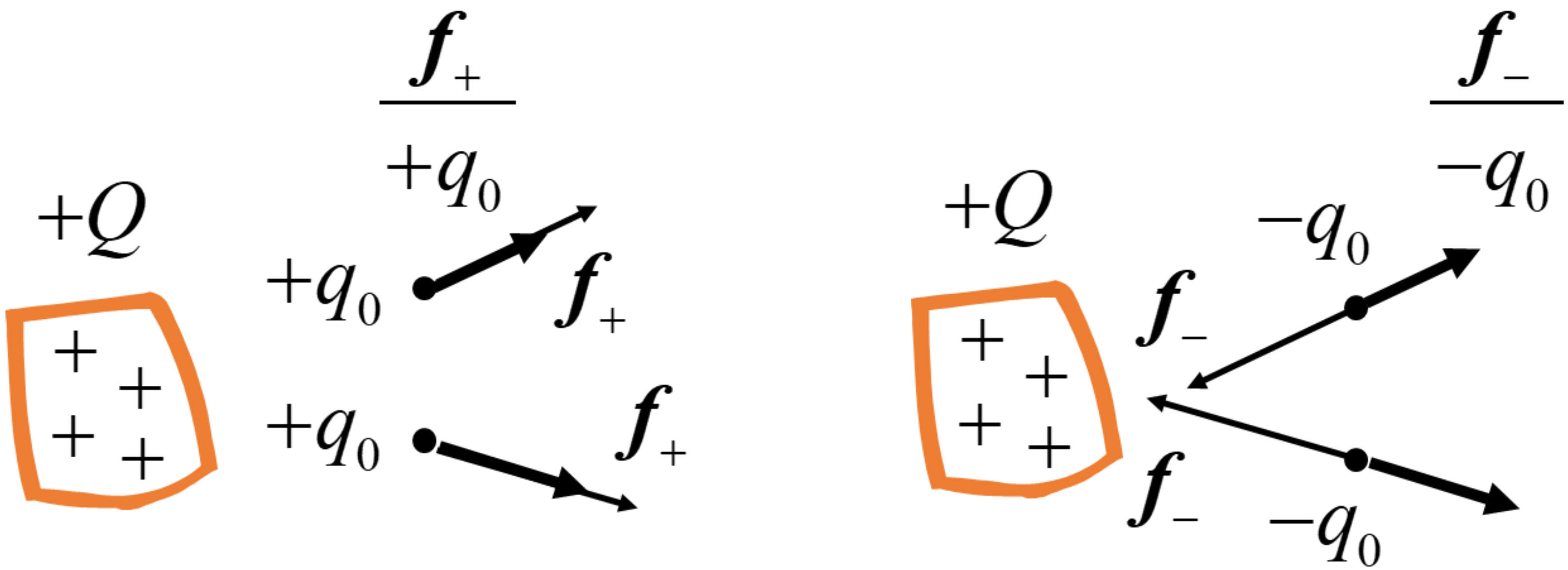
引入电场强度（简称电场）矢量这一基本物理量，
来定量地描述电荷周围存在的电场的物质性。

一 电场强度 ☆

实验上发现，

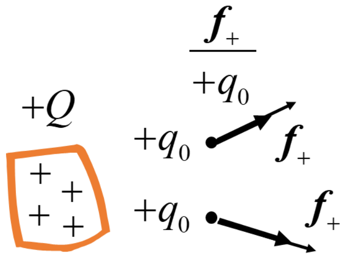
同样的试验电荷放置在不同的空间地点，

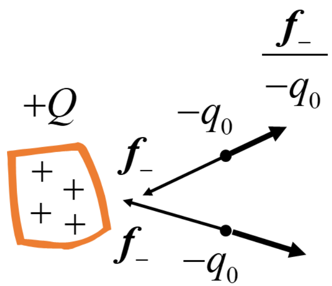
试验电荷受到的静电作用力大小和方向都可能不同

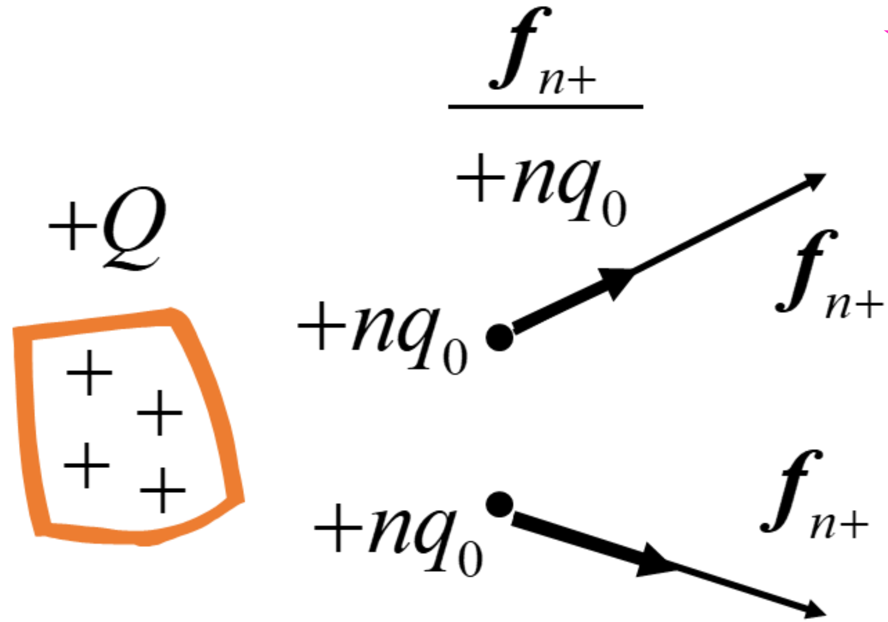


这说明带电量为Q的带电体所产生的

静电场是空间点函数，而且与空间方向有关。







如果将试验电荷$+q_0$换为$-q_0$，

试验电荷$-q_0$受到的静电作用力与试验电荷$+q_0$受到的静电作用力大小相等但方向相反；

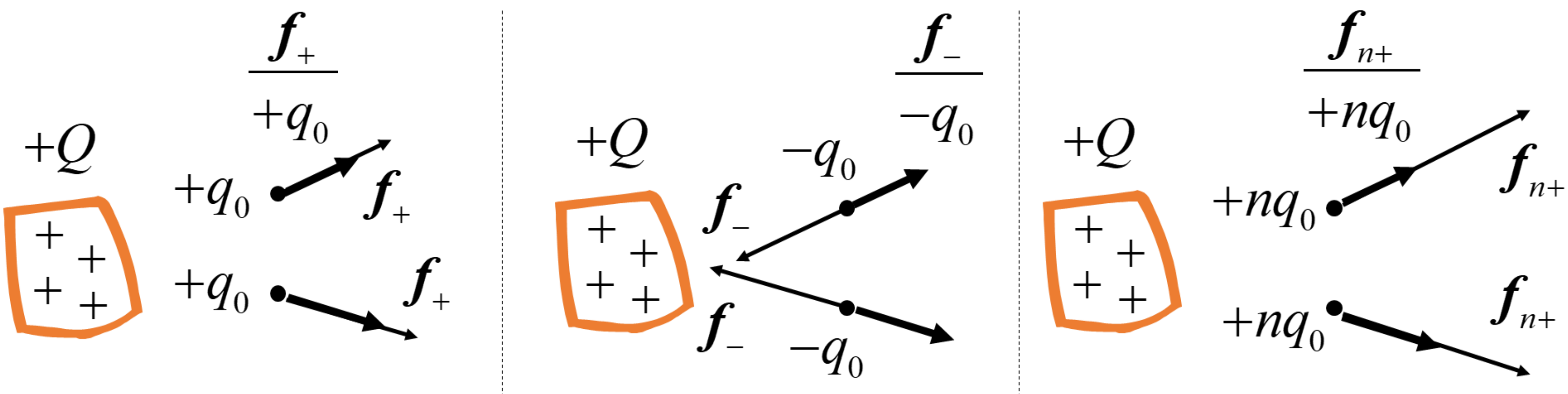
如果将试验电荷的带电量增加到n倍，$+nq_0$，则

试验电荷$+nq_0$受到的静电作用力也是试验电荷$+q_0$受到的静电作用力的n倍但方向相同。

试验电荷所受到的静电作用力不仅与带电量为 Q 的
带电体所产生的静电场有关，还与试验电荷有关，

☆

试验电荷所受到的静电作用力不能唯一地反映
带电量为 Q 的带电体所产生的静电场的性质。



试验电荷所受到的静电作用力与试验电荷带电量的比值
是一个与试验电荷无关（与试验电荷的空间位置有关）
而只与带电量为 Q 的带电体所产生的静电场有关的量。

比值反映了带电量为 Q 的带电体所产生的静电场本身的性质。

置于电场中某点的一个试验电荷 ☆

（体积和电荷量都充分小，不会改变原来的电荷分布），

它所受的力 $\boldsymbol{F}$ 与它的电荷量 q_0 的比值是一个

与试验电荷无关而仅取决于电场该点性质的量，

这个比值描述了电场该点的性质，称为**电场强度** $\boldsymbol{E}$

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}}$$

电场中某点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是矢量，

大小等于单位电荷在该点受力的大小，

方向为正电荷在该点受力的方向。

在国际单位制中，电场强度的单位是 N/C，

电场强度的单位也可以写成 V/m。

在电场中给定的任一点$\boldsymbol{r}(x,y,z)$处，

就有一确定的电场强度$\boldsymbol{E}$，

在电场中不同点处的$\boldsymbol{E}$一般不相同，

$\boldsymbol{E}$应是空间坐标的函数，在直角坐标系中

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y,z)$$

$$=E_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+E_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+E_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

空间中各点的电场强度$\boldsymbol{E}(x,y,z)$的总体形成一个矢量场

静电场对放入静电场的电荷有静电作用，称为电场力

带电量为q的点电荷在静电场中各点所受到的电场力

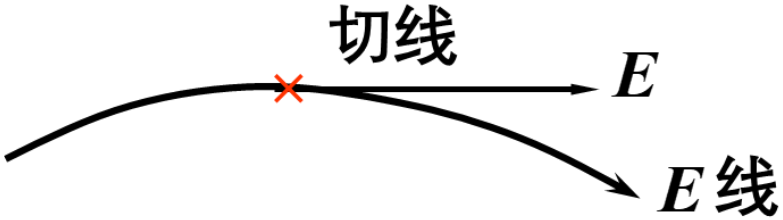
$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=q\boldsymbol{E}(x,y,z)$$

二 电场线

☆

用几何图形形象地描述电场强度在空间的分布

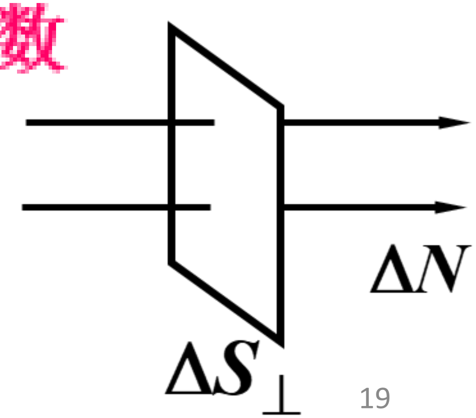
电场线是这样一簇曲线：曲线上面每一点的切线方向都与该点处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致；曲线的疏密表示该点电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小。

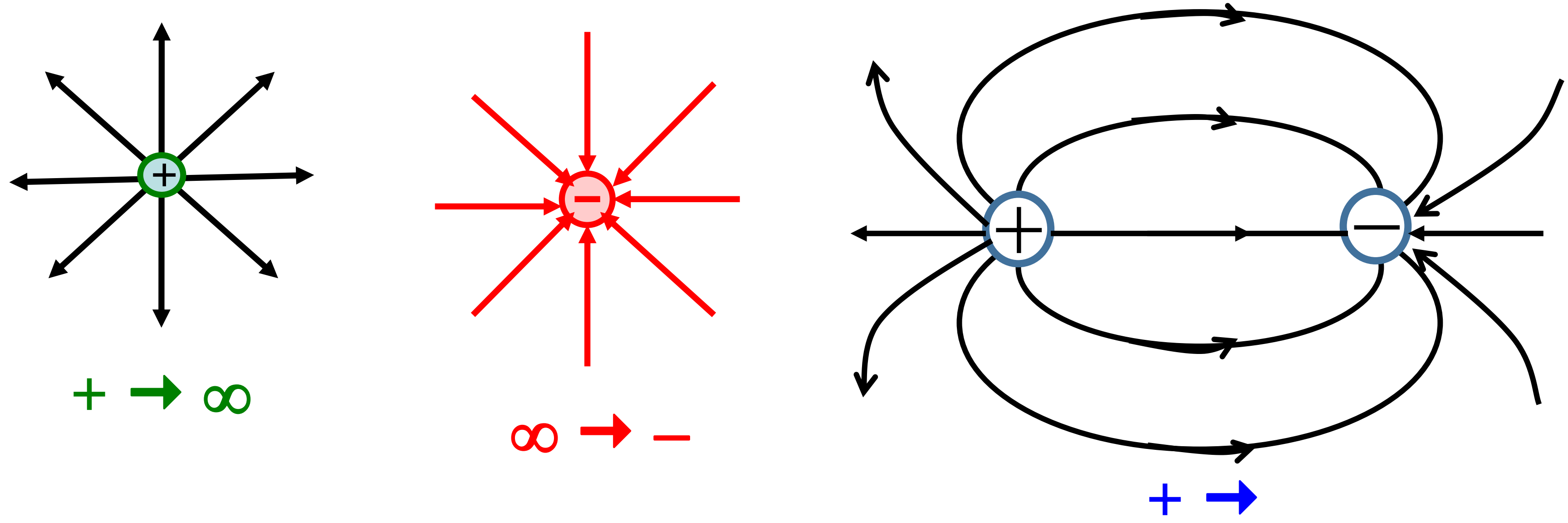


$\Delta S_{\perp}$： 垂直于电场方向的小面积元

ΔN： 穿过这一小面积元的电场线的条数

$$E = \lim_{\Delta S_{\perp} \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$





（a）正电荷　（b）负电荷　（c）电偶极子

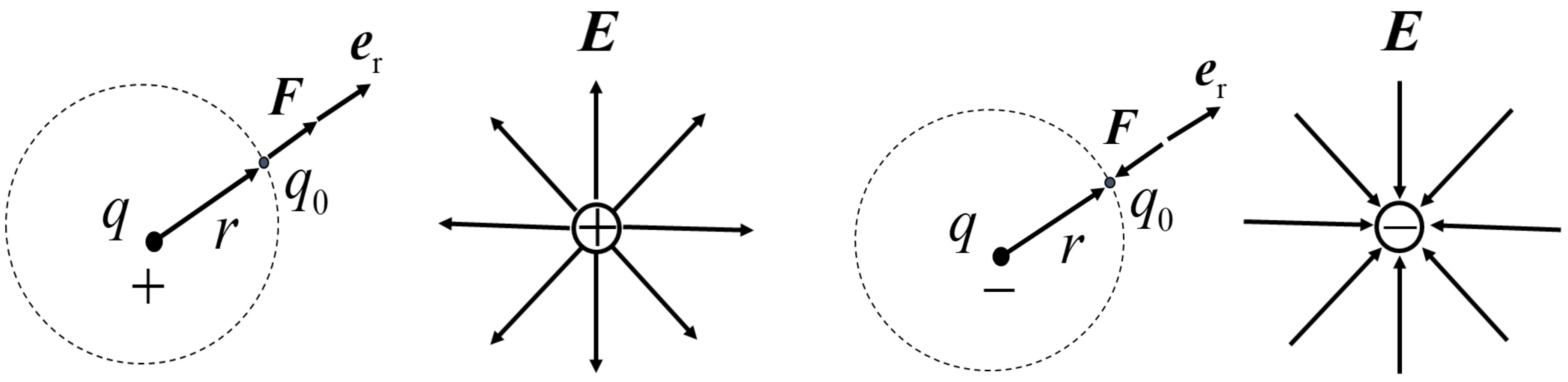
静电场是有源场：电场线起自正电荷终止于负电荷，或从正电荷延伸到无限远处，或来自无限远处终止于负电荷处，不会在没有电荷的地方中断。

静电场是无旋场：电场线不能形成闭合曲线。

静电场中任意两条电场线不会相交：

静电场中每一点处的电场强度具有确定方向。

三 点电荷的电场强度 ☆



在只有一个点电荷 q 产生的静电场中，

试验电荷 q_0 受到的静电场作用力为 $\boldsymbol{F}$

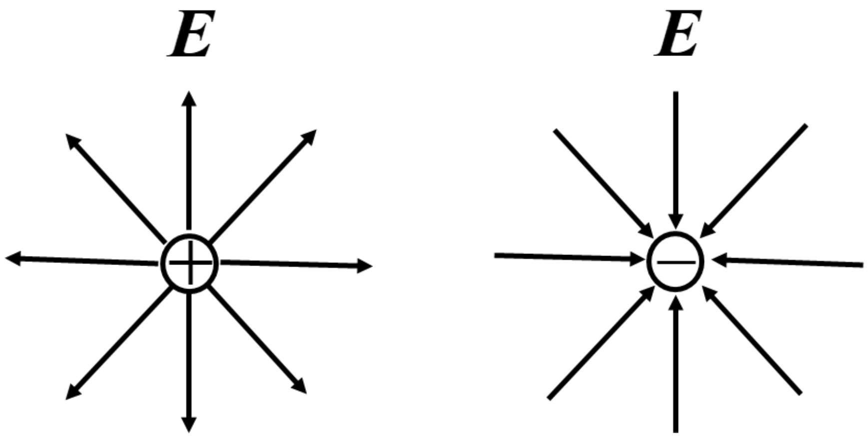
$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$$

点电荷 q 产生的电场强度

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r}$$

r 为场源点电荷 q 到场点的距离，

$\boldsymbol{e}_r$ 为场源点电荷 q 指向场点的单位矢量



☆

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$$

点电荷在空间任一点所激发的电场强度大小，

与场源点电荷的电荷量q 成正比，

与场源点电荷到场点距离的平方成反比。

如果场源点电荷q 为正电荷，

电场强度的方向与$\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$ 的方向一致，由场源点电荷指向场点；

如果场源点电荷q 为负电荷，

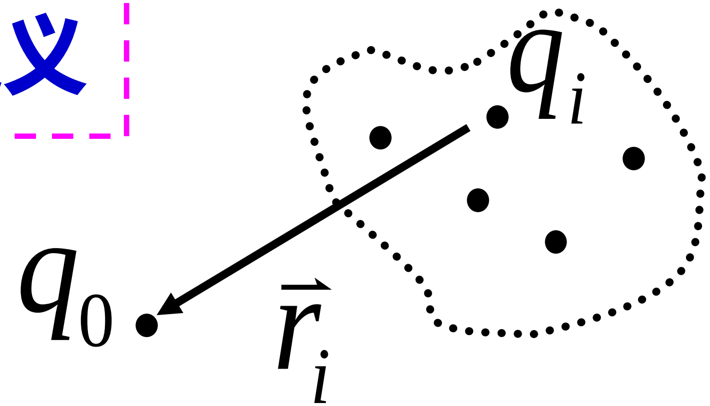
电场强度的方向与$\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$ 的方向相反，由场点指向场源点电荷。

孤立点电荷的静电场场强分布具有球对称性

四 点电荷系统的电场强度和电场强度叠加原理

如果带电体由 n 个点电荷组成

根据电力叠加原理和场强定义



由电场力叠加原理

$$\vec{f}=\sum_{i=1}^{i=n}\vec{f}_i$$

由场强定义

$$\vec{E}=\frac{\vec{f}}{q_0}=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\vec{f}_i}{q_0}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\vec{f}_i}{q_0}$$

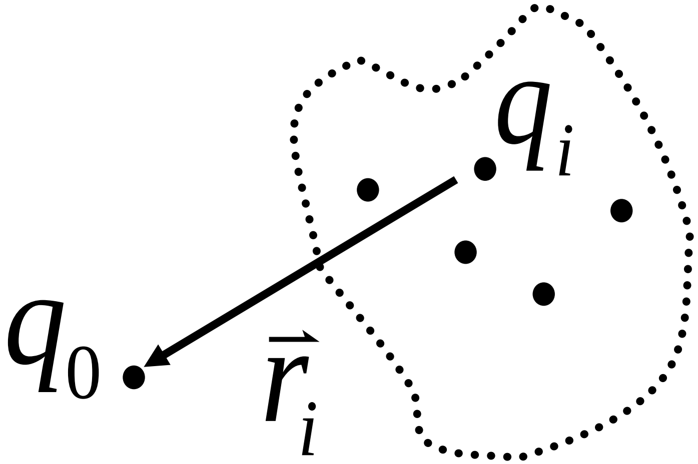
☆

整理后得

$$\boxed{\vec{E}=\sum_{i=1}^{i=n}\vec{E}_i}$$

或

$$\boxed{\vec{E}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i}$$



$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{i=n}\boldsymbol{E}_i \qquad \boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{e}_i$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i \qquad \boldsymbol{E}_i=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{e}_i$$

点电荷激发电场 $\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$ ☆

电场强度叠加原理

静止点电荷系统产生的静电场在空间某点的电场强度，等于每一个点电荷单独存在时激发的电场在该点的电场强度矢量和。

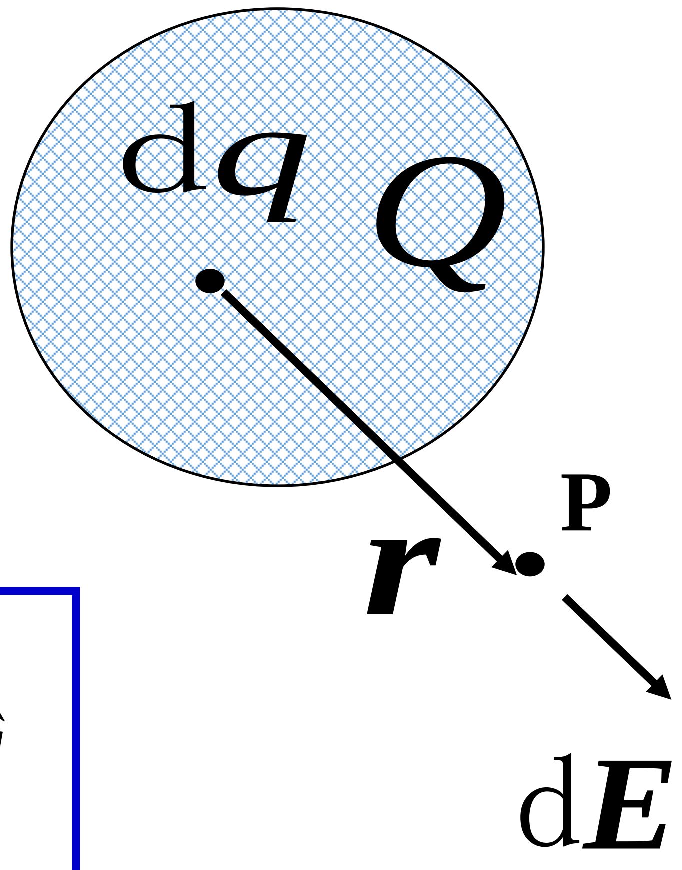
五 电荷连续分布的带电体的电场强度 ☆

把带电体看作是由许多个电荷元组成

然后利用场强叠加原理求解

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

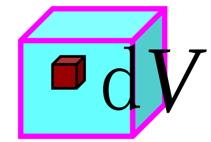
$$\boldsymbol{E} = \int_{(Q)} \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{(Q)} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



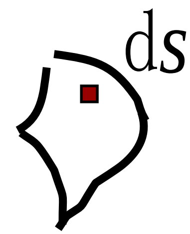
电荷密度

$$\boldsymbol{E}=\int_{(Q)}\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int_{(Q)}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

体电荷密度 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$ $\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V$



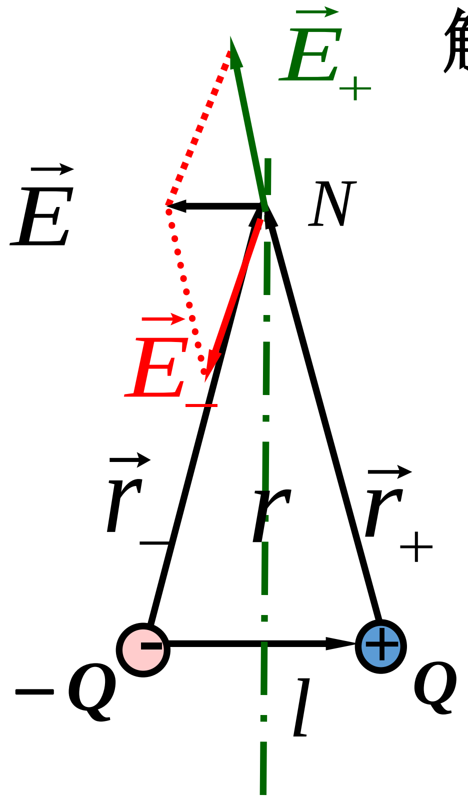
面电荷密度 $\sigma=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$ $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}s$



线电荷密度 $\lambda=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$ $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$

有了点电荷的场强公式和场强叠加原理，
原则上从电荷分布求场强的问题已经解决

例1　求：电偶极子中垂面上任意点的场强 ☆



解

$$\vec{E}_+ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_+}{r_+^3}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{-Q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$r >> l$

$$r_+ = r_- \approx r$$

$$\vec{l} + \vec{r}_+ = \vec{r}_-$$

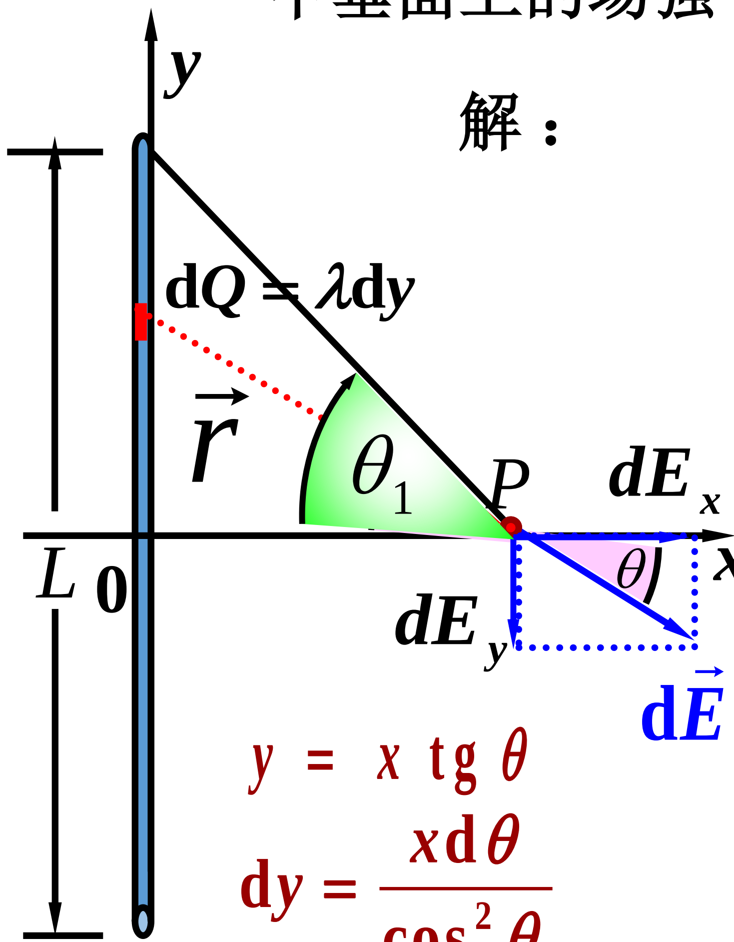
$$\vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l}$$

定义：偶极矩

$$\vec{p}_e = Q\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-\vec{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

例2 均匀带电细棒，长 L，电荷线密度λ，求：中垂面上的场强 。☆



解：

$$d\vec{E} = \frac{\vec{r}\,dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{r}\,\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$d\vec{E} = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j}$$

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \vec{i}\int_L dE_x + \vec{j}\int_L dE_y$$

由对称性知$\int_L d\vec{E}_y = 0$

$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$$

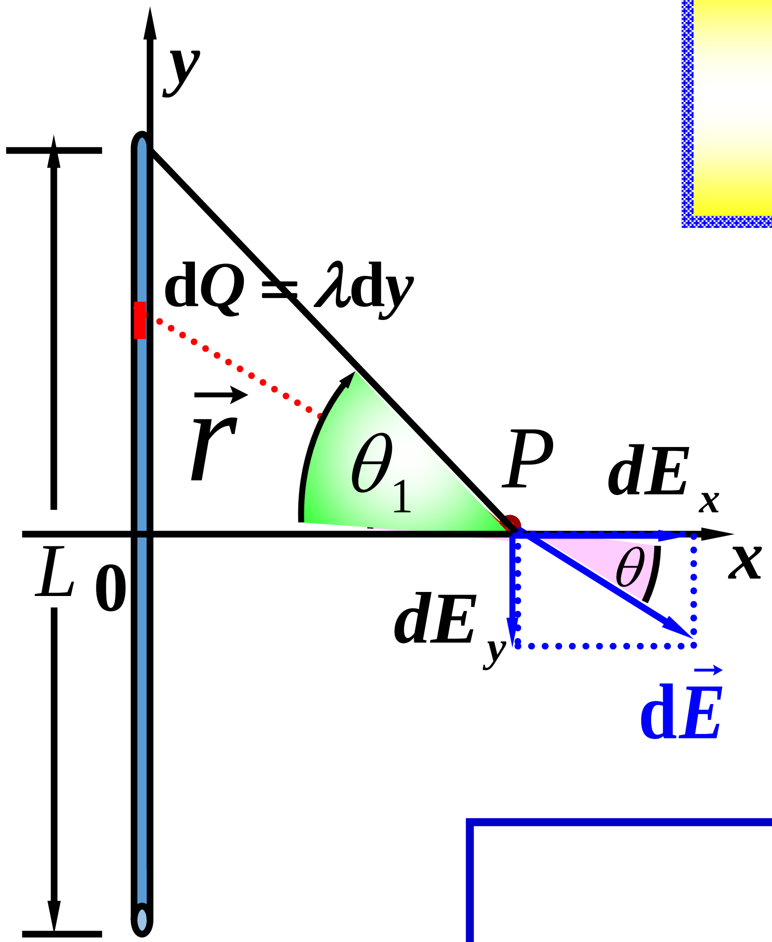
$$dy = \frac{x\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$r\cos\theta = x$$

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\lambda\cos\theta\,dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\cos\theta\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

$$E = E_x = 2\int_0^{\theta_1}\frac{\lambda\cos\theta\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda\sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 x}$$



$$\vec{E}=\frac{\lambda\sin\theta_1}{2\pi\varepsilon_o x}\vec{i}$$

☆

如果 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$ 则

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}\vec{i}$$

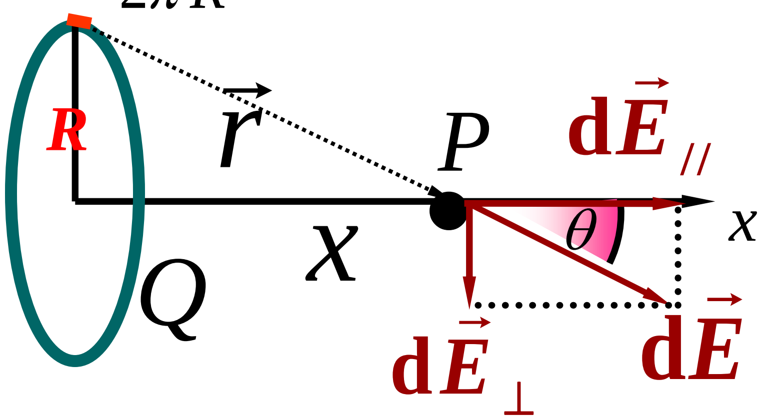
$$E_x=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x} \qquad E_y=0$$

这就是无限长均匀带电直线的场强公式

例3 已知：总电量Q；半径R。 ☆

求： 均匀带电圆环轴线上的场强。

$$dQ=\frac{Qdl}{2\pi R}$$



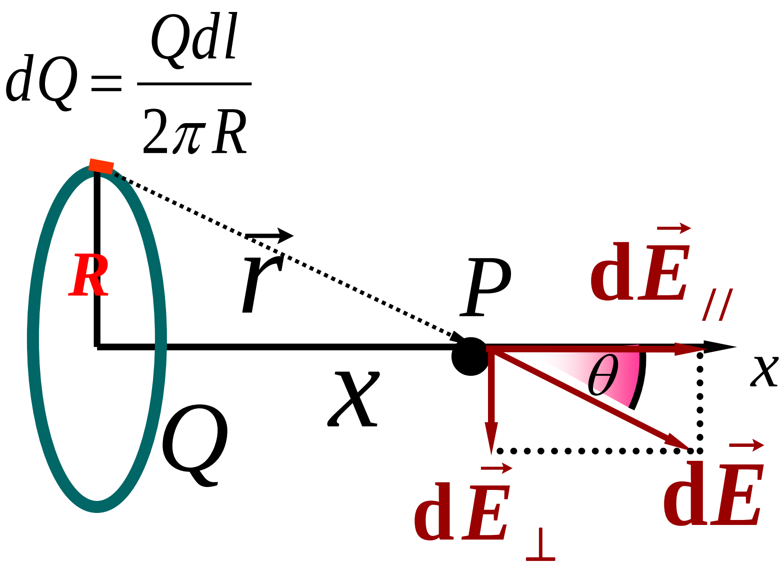
$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\qquad \mathrm{d}\vec{E}=\mathrm{d}\vec{E}_{//}+\mathrm{d}\vec{E}_{\perp}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_{//}+\vec{E}_{\perp}$$

$$E_{\perp}=\oint_L \mathrm{d}E_{\perp}=0$$

$$E_{//}=\oint_L \mathrm{d}E_{//}=\oint_L \cos\theta\,\mathrm{d}E=\oint_L\frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$$=\frac{\oint_L x\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_o r^3}=\frac{x\oint_L \mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_o r^3}=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$



$$\vec{E} = \vec{E}_{//} = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} \vec{i}$$

均匀带电细圆环轴线上任一点的场强 计算公式

（1） 在圆环中心处，场强为零 $x = 0$ $\vec{E} = 0$

（2） $R << x$ $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \vec{i}$

此时带电圆环可以看作一个点电荷

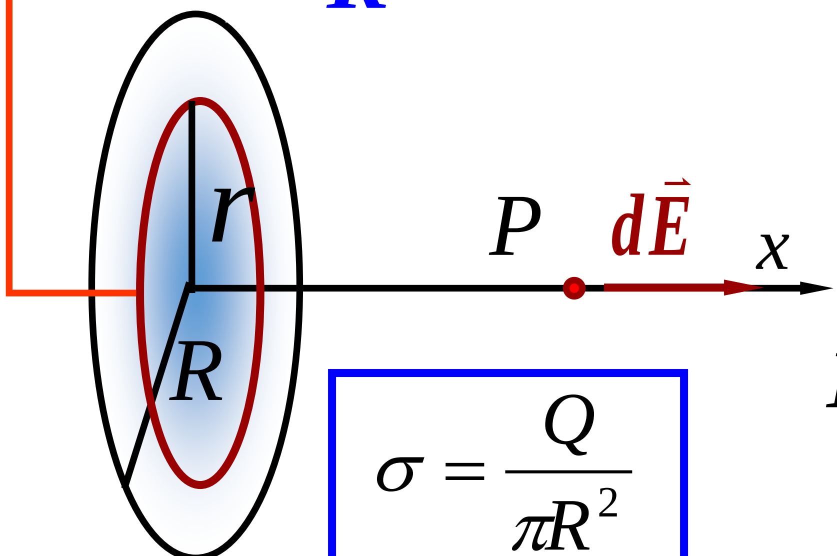
☆

例4 已知：总电量Q；半径R。

求： 均匀带电圆盘轴线上的场强。☆

圆环看作矩形 $dS = 2\pi r\, dr$

$$\mathrm{d}Q = \frac{2Q r \mathrm{d}r}{R^2}$$



$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

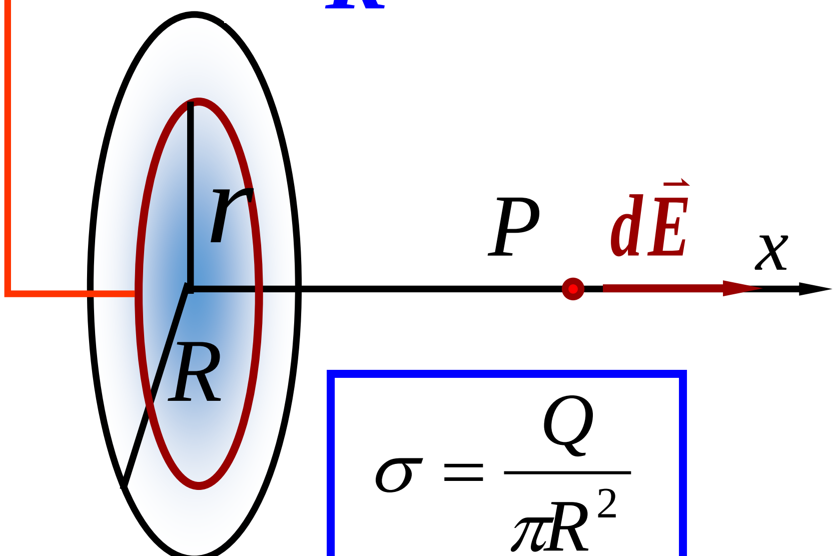
$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{x \mathrm{d}Q \vec{i}}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{xQ}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{i}\int_0^R \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{i}\int_0^R \frac{\mathrm{d}(x^2 + r^2)}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\vec{i}\int_0^R \frac{\mathrm{d}(x^2+r^2)}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\vec{i}\quad Q}{2\pi\varepsilon_o R^2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

$$\mathbf{d}Q=\frac{2Q r \mathbf{d} r}{R^2}$$



$$\sigma=\frac{Q}{\pi R^2}$$

当 $R>>x$

$$\vec{E}=\frac{Q\quad\vec{i}}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma\vec{i}}{2\varepsilon_o}$$

无 限 大

带电平面场强

☆

第三节　静电场的高斯定理 ☆

静电场的高斯定理是静电场的基本方程之一。

在静电场中，穿过任一闭合曲面S的电场强度通量与该闭合曲面所包围的电荷量之间存在量值上的关系。

一　电场强度通量

穿过空间曲面 S 的电场强度通量 Φ_e 被定义为穿过曲面 S 的电场线条数。

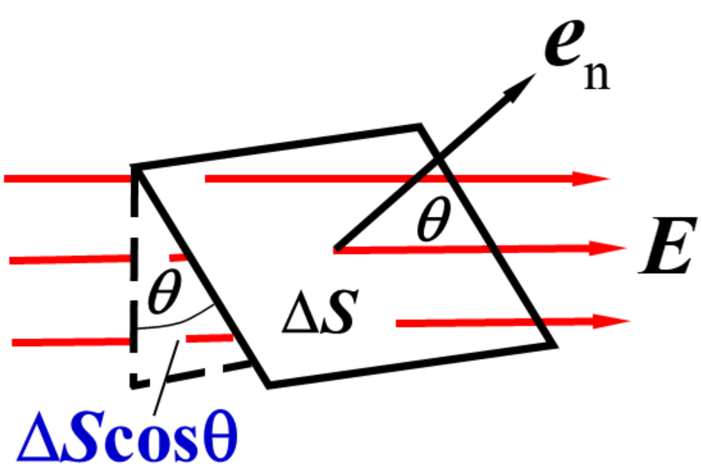
$\boldsymbol{e}_n$ 为平面 ΔS 法线方向的单位矢量

对于均匀电场，

穿过平面 ΔS 的电场强度通量为

$$\Delta\Phi_e = E\Delta S_{\perp}$$

$$= E\Delta S\cos\theta = \boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

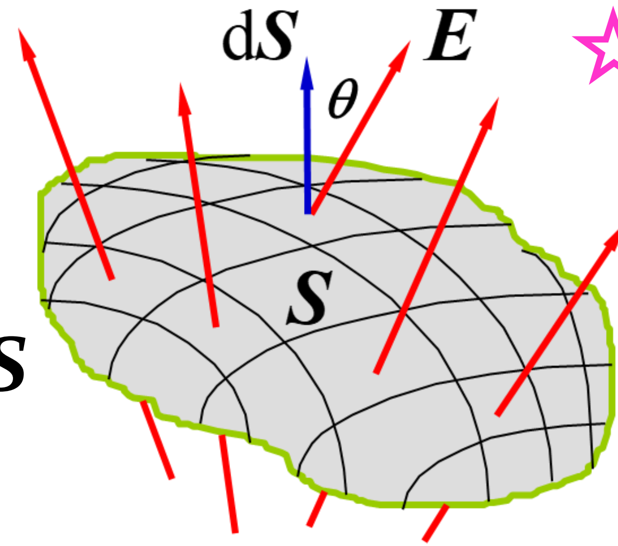


对于非均匀电场和曲面 S，

在曲面 S 上任取一个面积元 $\mathrm{d}S$ ，

穿过面积元 $\mathrm{d}S$ 的电场强度通量为

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = E\mathrm{d}S\cos\theta = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



穿过整个曲面 S 上的电场强度通量为

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \iint_{S}\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \iint_{S}E\mathrm{d}S\cos\theta = \iint_{S}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \iint_{S}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

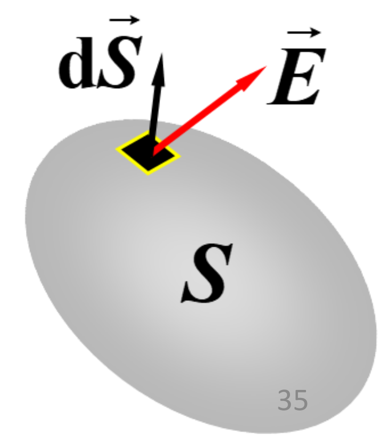
Φ_{e} 的正负依赖于面元指向的定义

对于闭合曲面

规定曲面的外法线方向为面积元 $\mathrm{d}S$ 的正方向

穿过这个闭合曲面的电场强度通量为

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint\!\!\!\oint_{S}\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \oint\!\!\!\oint_{S}E\mathrm{d}S\cos\theta = \oint\!\!\!\oint_{S}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



二 高斯定理 ☆

(K.F.Gauss——德国物理学家、数学家、天文学家)

在真空中的静电场内，通过任意闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的电量的代数和的 $1/\varepsilon_0$ 倍

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S)} q \qquad \oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V} \mathrm{d}q$$

$\sum\limits_{(S)} q$ 是对闭合曲面 S 所包围的源电荷（点电荷系统）量取代数和，

$\int_V \mathrm{d}q$ 是对闭合曲面 S 所包围连续分布的源电荷取代数和（积分）。

其中S为任意闭合曲面——高斯面。

静电场高斯定理的积分形式 ☆

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S)} q \qquad \oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V} \mathrm{d}q$$

静电场的高斯定理微分形式

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

真空中某点的静电场的散度与

该点的电荷量的体密度成正比，比例系数依然为$1/\varepsilon_0$。

实际上，高斯定理是电磁学的一条基本假设。

它的正确性，由实践来检验。

讨论

☆

- 高斯面必须是封闭曲面 。
- 穿过高斯面的电通量与面内电荷分布无关，与面外电荷无关。
- 高斯面上各点的场强是空间全部电荷产生的总场强。
- 高斯定理给出了穿过高斯面的电通量与面内电荷的代数和的直接关系；不是高斯面上电场强度与面内电荷的代数和的直接关系。

高斯定理的应用

☆

对于具有某种对称性的电场，
用高斯定理求场强简便。

- 点对称

点电荷、均匀带电球面或球体、均匀带电同心球面 。

- 轴对称

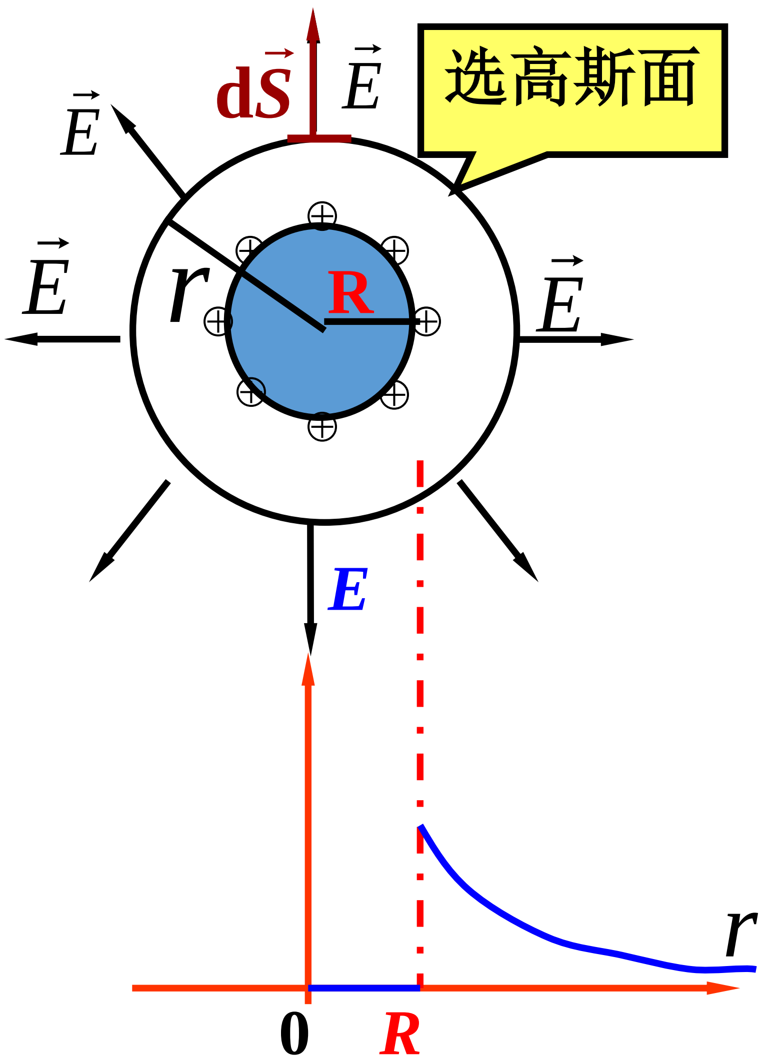
无限长均匀带电直线、无限长均匀带电圆柱体或圆柱面、
无限长均匀带电同轴圆柱面。

- 面对称

均匀带电无限大平面或平板、
若干个均匀带电无限大平行平面。

例5 求电量为Q、半径为R的**均匀带电球面**的场强分布。 ☆

解： 源球对称 → 场球对称



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r>R) \end{cases}$$

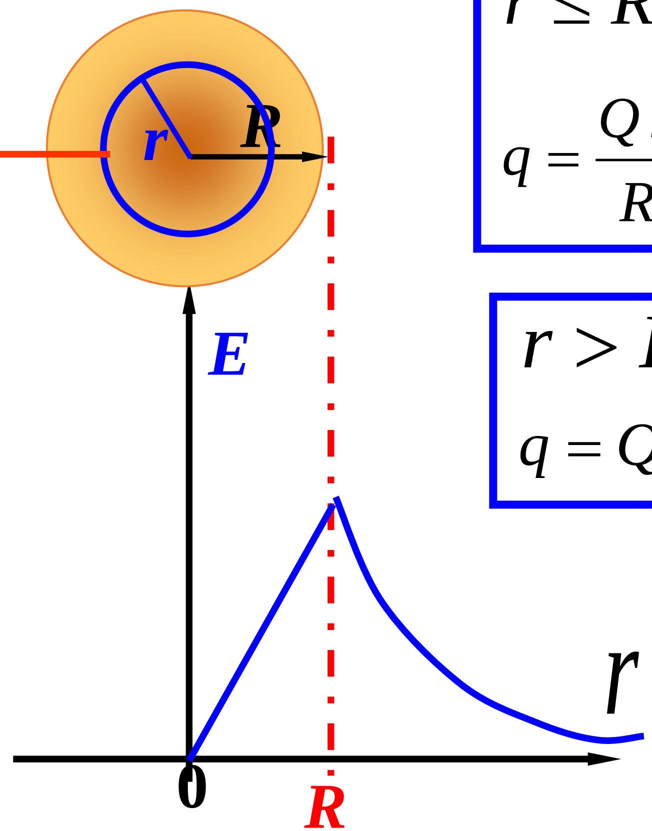
$$= E\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2$$

$$\boxed{E = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R) \end{cases}}$$

例6 求：电量为Q、半径为R 的均匀带电球体的场强分布。☆

解： 选择高斯面——同心球面

$$\Delta Q = \frac{Qr^3}{R^3}$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3} & (r<R) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r>R) \end{cases}$$

$$= E\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2$$

$r \le R$

$$q = \frac{Qr^3}{R^3}$$

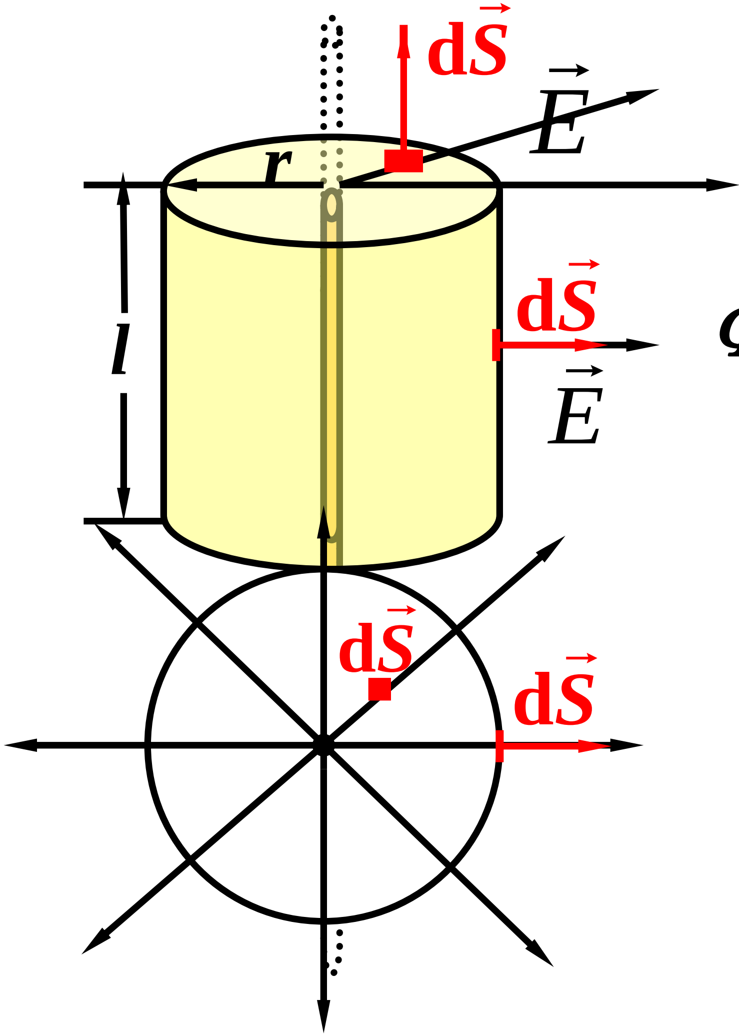
$r > R$

$$q = Q$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \le R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

例7　求：电荷线密度为λ 的无限长带电直线的场强分布。☆

解：选择高斯面——同轴柱面



上下底面 $\vec{E} \perp d\vec{S}$

侧面 $\vec{E} \,/\!/\, d\vec{S}$

且同一柱面上E 大小相等

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{l\lambda}{\varepsilon_o}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{底} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E \cdot 2\pi r l \quad +0$$

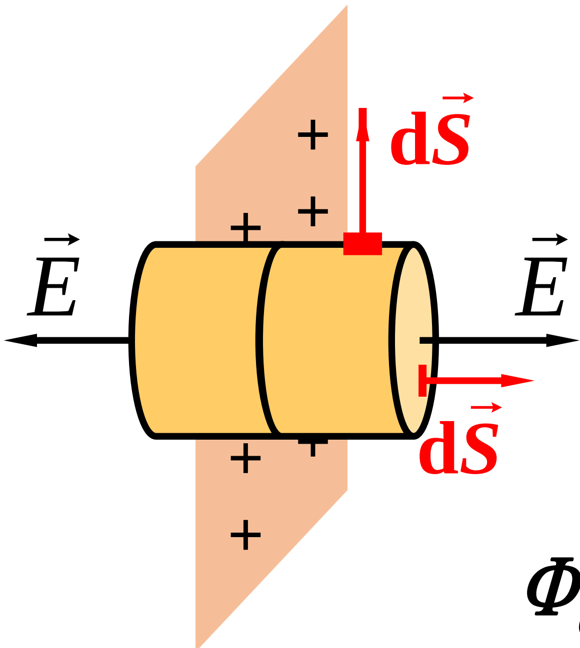
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}}$$

$$\boxed{q = l\lambda}$$

思考：如果线粗细不可忽略，空间场强分布如何？

例8

求：电荷面密度为σ的无限大均匀带电平面的场强分布。



解： 选择高斯面——与平面正交对称的柱面

$$\begin{cases} \text{底面} \quad \vec{E} \uparrow\uparrow \mathrm{d}\vec{S} \text{ 且大小相等；} \\ \text{侧面} \quad \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$$

$$q = \Delta S \sigma$$

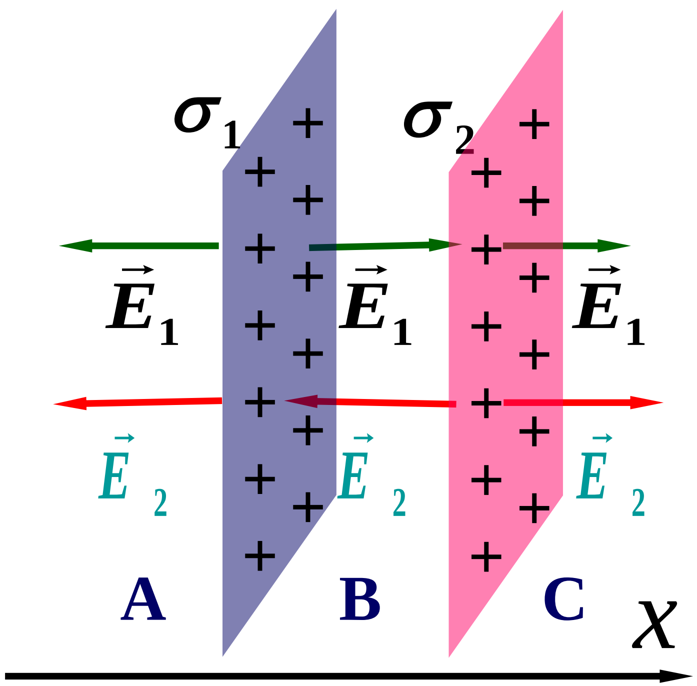
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$= 2\Delta S E$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

当场源是几个具有对称性的带电体时，可用高斯定理分别求各带电体单独存在时的场强，再作矢量叠加。☆

例9 求：电荷面密度分别为σ_1 、σ_2 两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布。

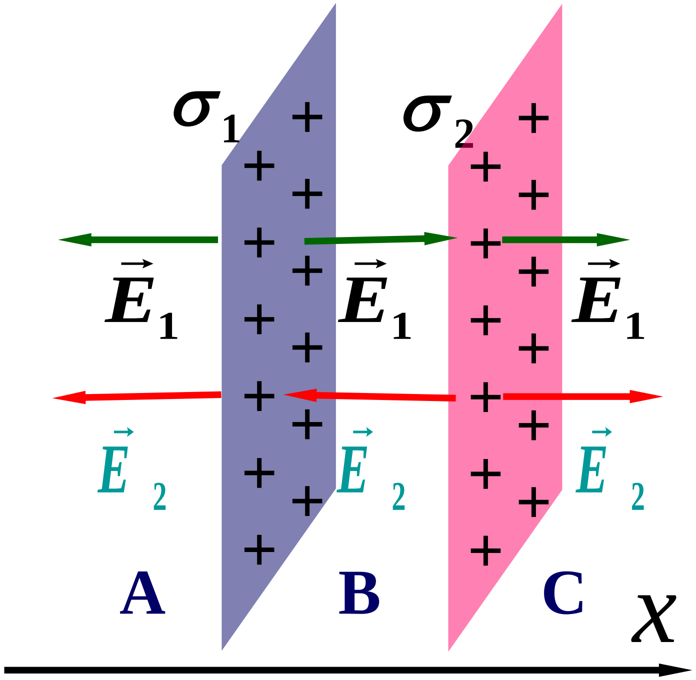


解：$E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$ $\qquad E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$



$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

当 $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$

$$E_A = E_C = 0$$

带电平板电容器间的场强

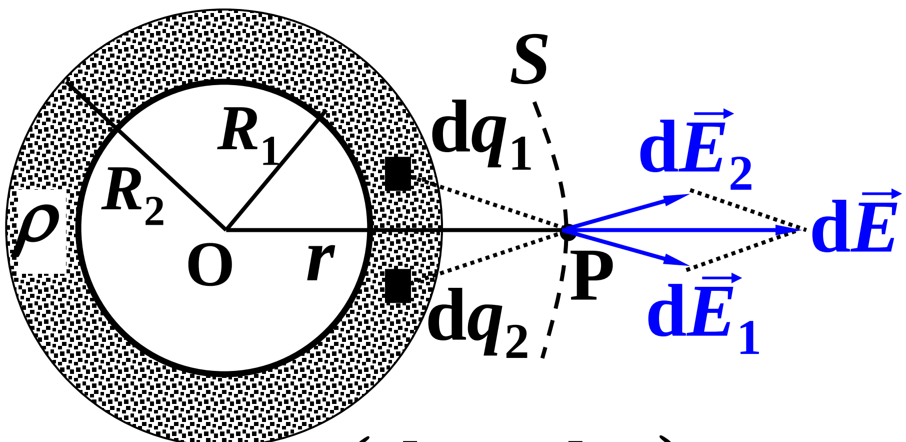
$$\boxed{E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

[例10] 已知： 均匀带电球壳的ρ（或 q） 及R_1、R_2

求： 电场强度的分布。 ☆

解： 分析$\vec{E}$的对称性： $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$

$$dE_1 = dE_2$$

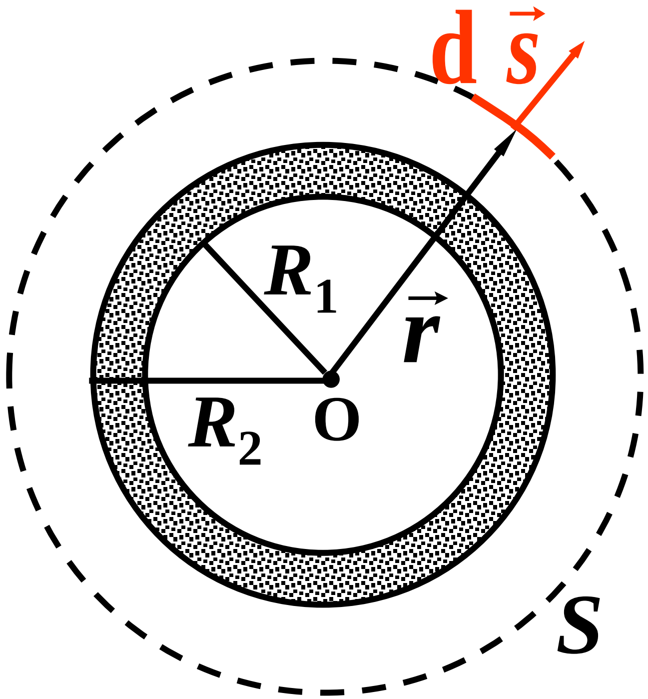


方向是关于OP 对称的

球对称

$$\vec{E} = E_{(r)} \cdot \vec{e}_r$$

选高斯面S为与带电球壳同心的球面 ☆



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

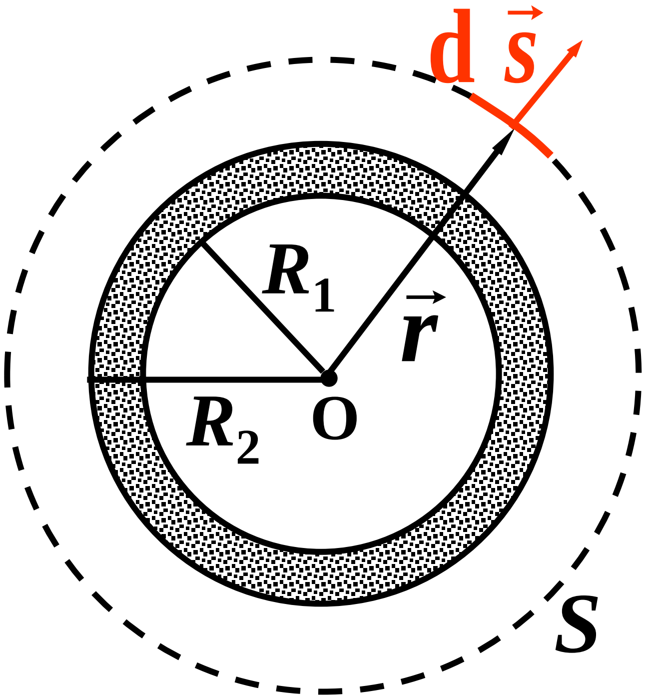
$$= \oint_S E(r)\,\mathrm{d}s = E \oiint_S \vec{S}$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

又 $$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

所以 $$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

· $r < R_1$，$q_{内} = 0$，有 $E = 0$ ；



☆

● $R_1 < r < R_2$，

$$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho,$$

有 $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(r - \dfrac{R_1^3}{r^2})\vec{e}_r$

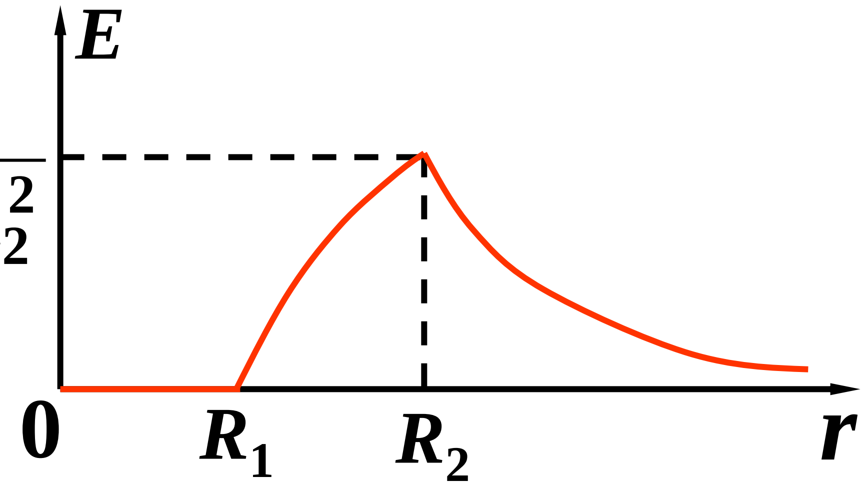
● $r > R_2$，$q_{内} = \dfrac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q$，

有 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ （同点电荷的电场）

讨论

☆

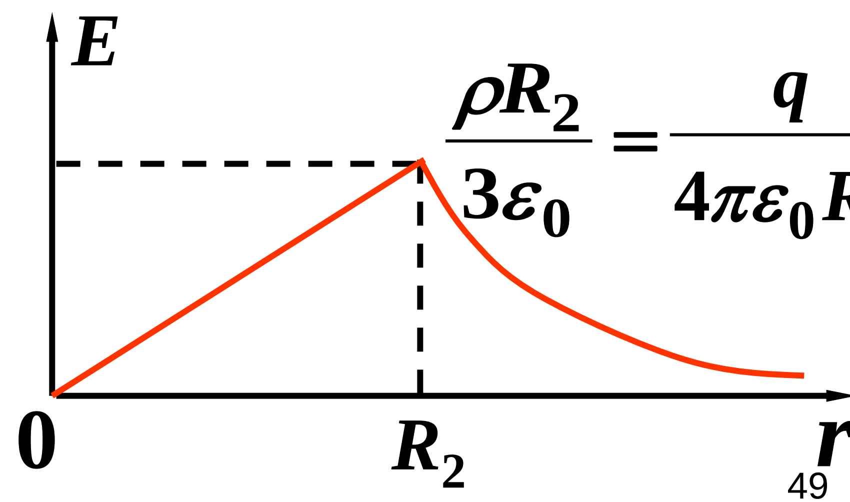
1. E 的分布



2. 特殊情况

1）令$R_1=0$，得均匀带电球的情形：

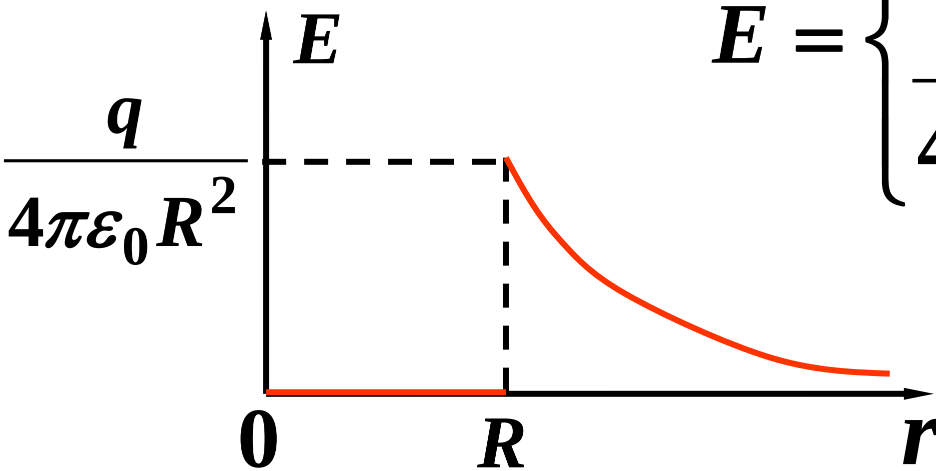
$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & （球内）\\[2ex] \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & （球外）\end{cases}$$



2）令 $R_1 = R_2 = R$，且 q 不变，☆

得均匀带电球面的情形：

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \quad , & （球面内） \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & （球面外） \end{cases}$$



在 $r = R$ 处 E 不连续，

这是因为忽略了电荷厚度所致。

$\boxed{\text{小结}}$ 应用高斯定理求场强的要点： ☆

适用对象： 有球、柱、平面对称的某些电荷分布。

方法要点： （1）分析 $\vec{E}$ 的对称性；

（2）选取高斯面的原则：

1）需通过待求 $\vec{E}$ 的区域；

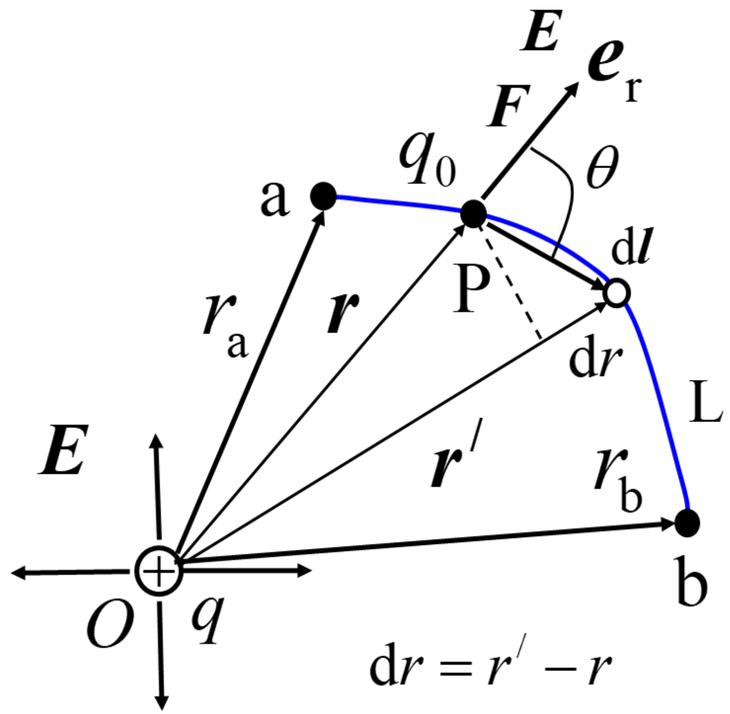
2）在 S 上待求 $\vec{E}$ 处，$\vec{E} \mathbin{/\!/} \mathrm{d}\vec{s}$ 且等大，

使得 $\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\int \mathrm{d}s$，

其余处必须有 $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \begin{cases} \text{或} \quad E = 0, \\ \text{或} \ \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{s}\text{。} \end{cases}$

第四节　静电场的环路定理

一　静电场力做功



$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$$

$\mathrm{d}l \to 0$

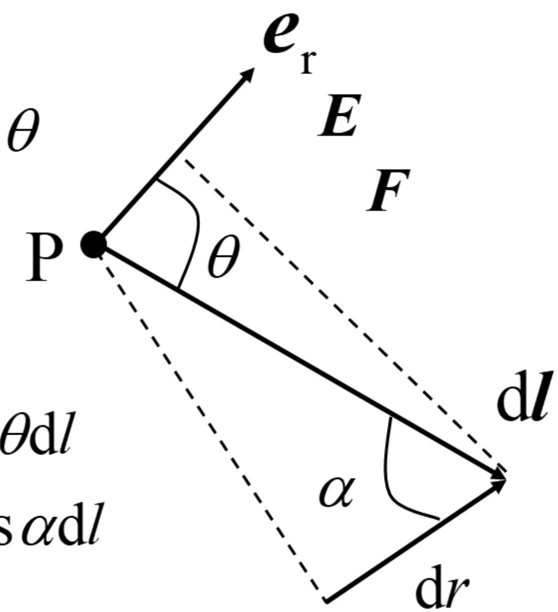
$\alpha \to \theta$

$\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$= \cos\theta \mathrm{d}l$

$\to \cos\alpha \mathrm{d}l$

$\to \mathrm{d}r$



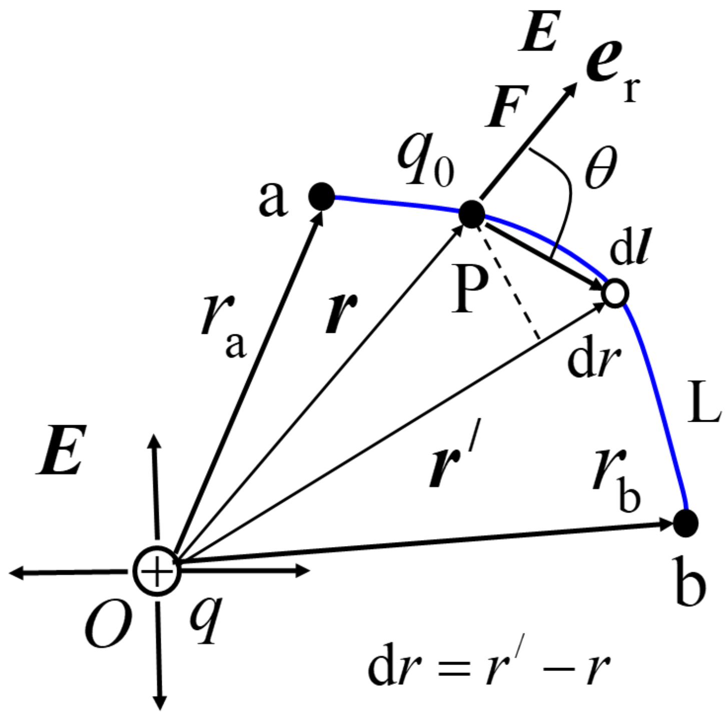
静止电荷 q 在空间激发静电场的电场强度分布为 $\boldsymbol{E}$，

试验电荷 q_0 在静止电荷 q 在空间激发静电场中受到的静电场力为

$$\boldsymbol{F} = q_0\boldsymbol{E} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

点电荷产生的电场

点电荷产生的电场 ☆



$\mathrm{d}l \to 0$

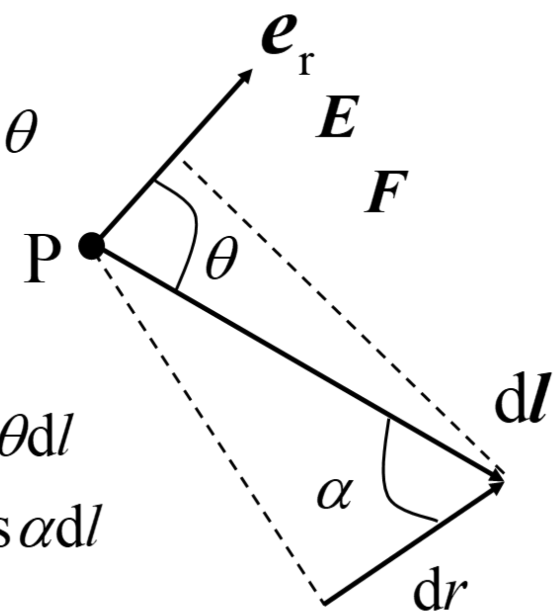
$\alpha \to \theta$

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$= \cos\theta \mathrm{d}l$

$\to \cos\alpha \mathrm{d}l$

$\to \mathrm{d}r$

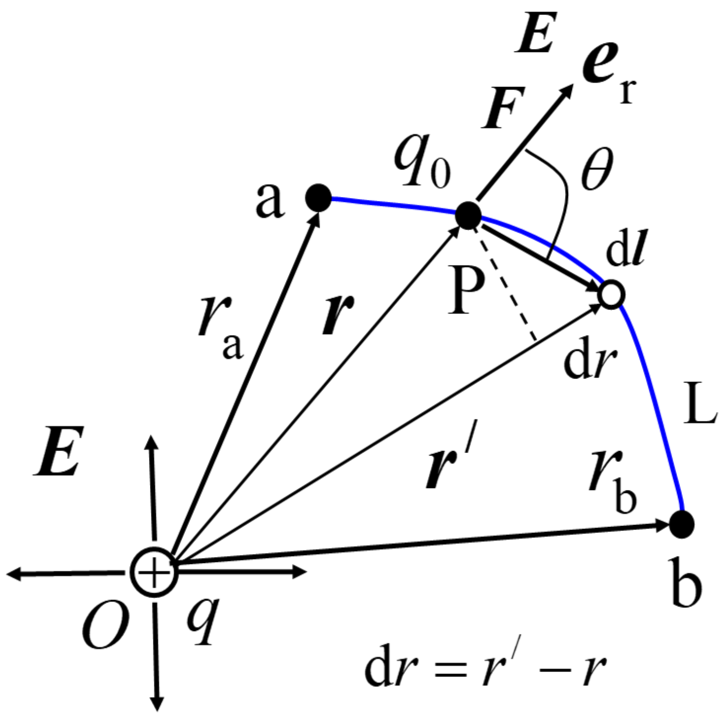


$$\boldsymbol{F} = q_0\boldsymbol{E} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$$

电场力做的元功为

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

点电荷产生的电场 ☆



$\mathrm{d}l \to 0$

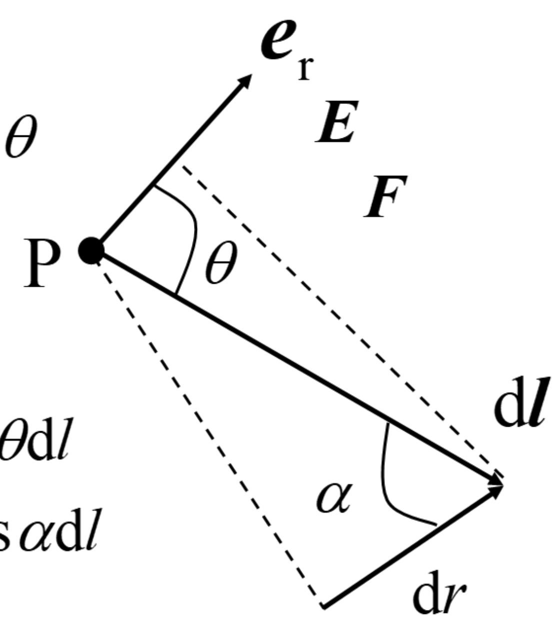
$\alpha \to \theta$

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$= \cos\theta \mathrm{d}l$

$\to \cos\alpha \mathrm{d}l$

$\to \mathrm{d}r$



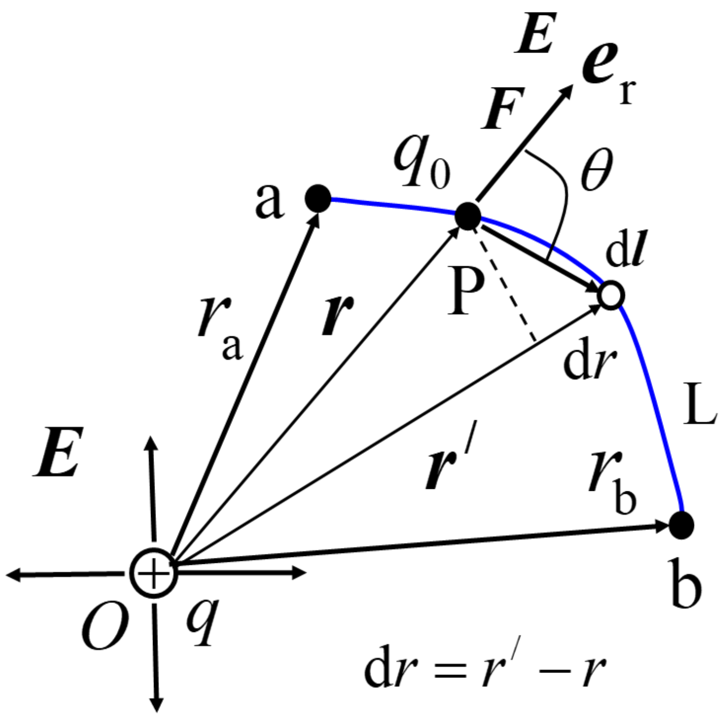
试验电荷 q_0 沿路径 L 从 a 点移动到 b 点，静电场力做功为

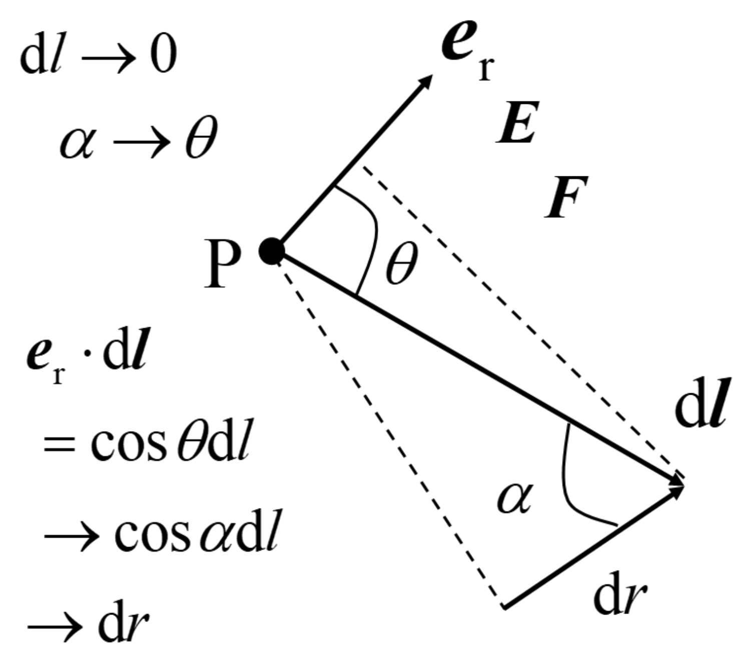
$$A_{\mathrm{ab}} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{a}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{b}}}\right)$$

在点电荷 q 所激发的静电场中，

静电场力对试验电荷所做的功只取决于移动路径的起点和终点的位置，而与移动的路径无关。

点电荷系统产生的电场 ☆



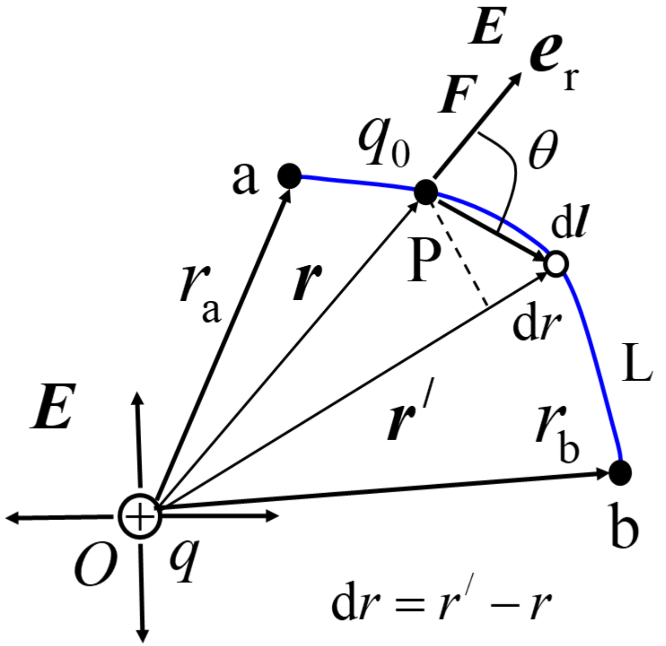


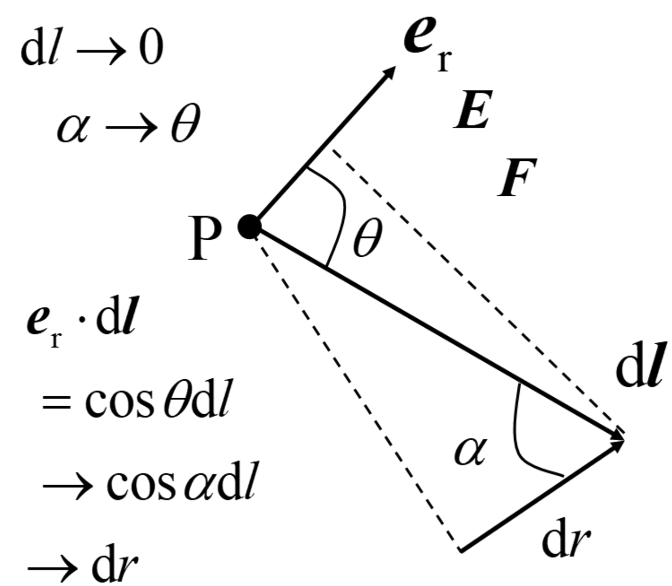
由 n 个静止的点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 组成的**点电荷系统**

试验电荷 q_0 所受到的电场力为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = q_0 \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \boldsymbol{e}_{ri}$$

点电荷系统产生的电场 ☆





电场力做的元功为

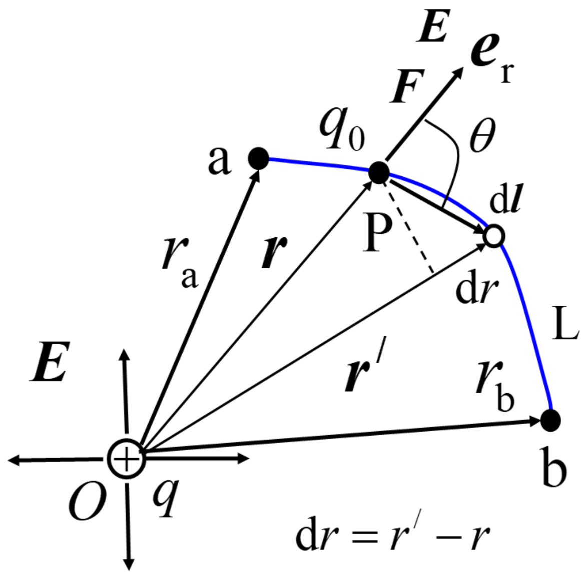
$$\boldsymbol{F} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\boldsymbol{e}_{ri}$$

$$dA = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{l} = q_0\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \frac{q_1 q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}dr_1 + \frac{q_2 q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}dr_2 + \cdots + \frac{q_n q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}dr_n$$

点电荷系统产生的电场

☆

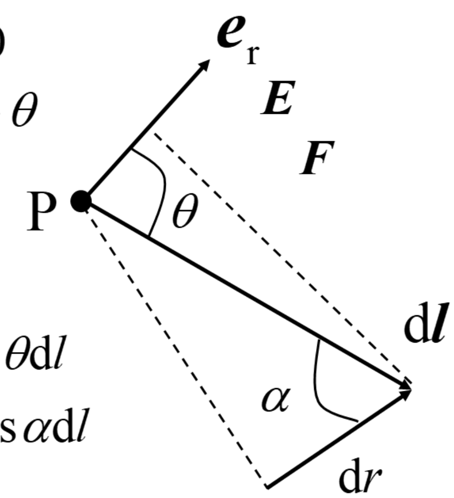


$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{d}l\to 0$$

$$\alpha\to\theta$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\cos\theta\,\mathrm{d}l\to\cos\alpha\,\mathrm{d}l\to\mathrm{d}r$$



$$\mathrm{d}A=\frac{q_1q_0}{4\pi\varepsilon_0r_1^{\ 2}}\mathrm{d}r_1+\frac{q_2q_0}{4\pi\varepsilon_0r_2^{\ 2}}\mathrm{d}r_2+\cdots+\frac{q_nq_0}{4\pi\varepsilon_0r_n^{\ 2}}\mathrm{d}r_n$$

试验电荷q_0沿路径 L 从 a 点移动到 b 点，静电场力做功为

$$A_{\mathrm{ab}}=\int\mathrm{d}A=\frac{q_1q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1\mathrm{a}}}-\frac{1}{r_{1\mathrm{b}}}\right)+\frac{q_2q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2\mathrm{a}}}-\frac{1}{r_{2\mathrm{b}}}\right)+\cdots+\frac{q_nq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{n\mathrm{a}}}-\frac{1}{r_{n\mathrm{b}}}\right)$$

$$A_{ab}=\int \mathrm{d}A=\frac{q_1q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1a}}-\frac{1}{r_{1b}}\right)+\frac{q_2q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2a}}-\frac{1}{r_{2b}}\right)+\cdots+\frac{q_nq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{na}}-\frac{1}{r_{nb}}\right)$$

由 n 个静止的点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 组成的点电荷系统激发的静电场的电场力做功只与起点和终点的位置有关，与路径无关。

对于连续带电体激发的静电场，可将电荷分割为无限多个电荷元 $\mathrm{d}q$，电荷元可视为点电荷，有关点电荷系统的结果对连续带电体也适用。

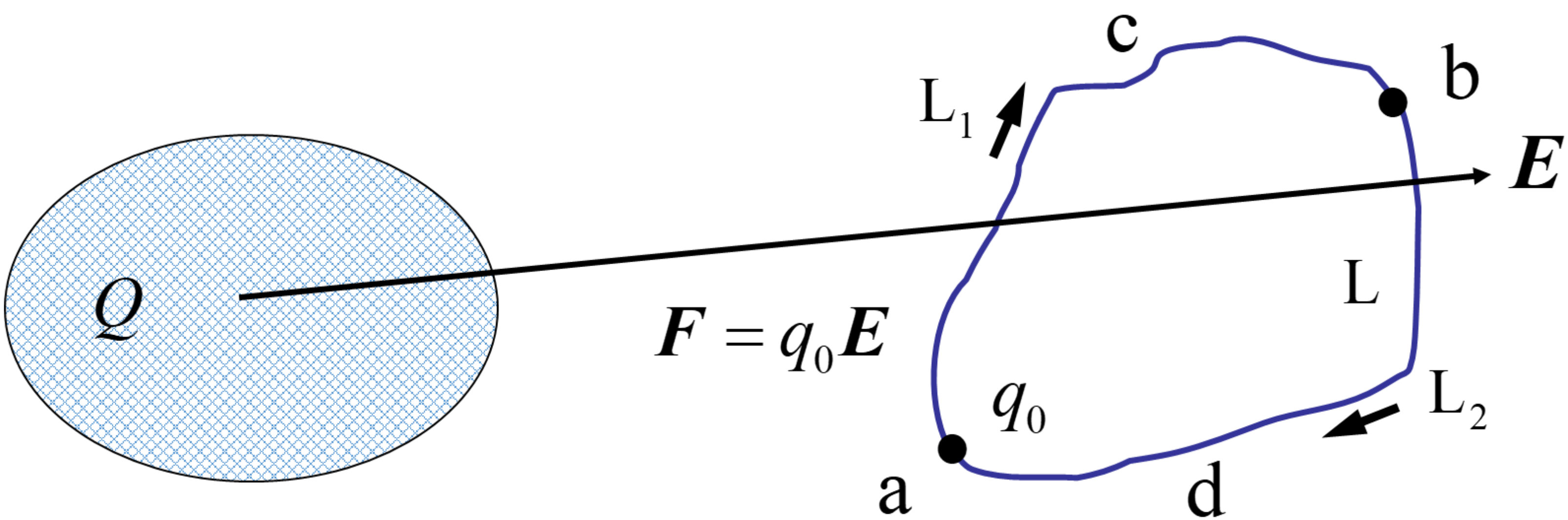
静电场的保守性：

对于真空中的任何静电场，电场力所作的功只取决于被移动的电荷量以及电荷移动的起点和终点的位置，与具体的运动路径无关。

静电力是保守力，静电场是保守场 ☆

二　静电场的环路定理

☆



在静止电荷 Q 所激发的静电场中，作用在试验电荷 q_0 上的电场力 $\boldsymbol{F} = q_0 \boldsymbol{E}$ 在整个闭合路径上所做的功为

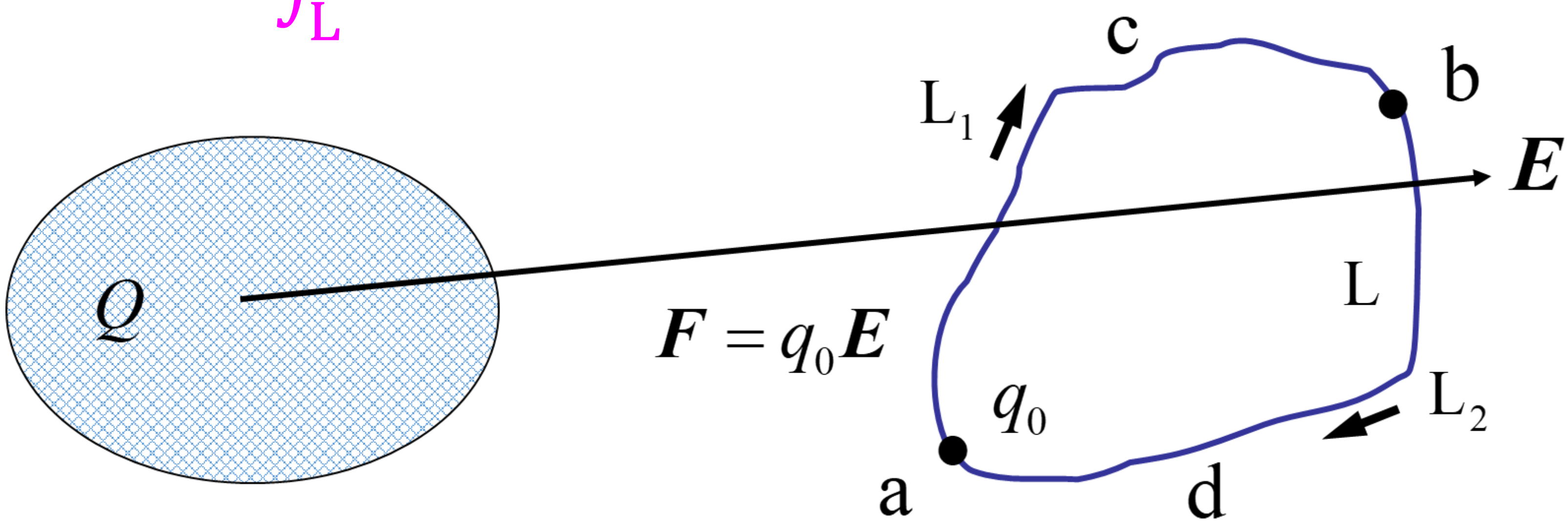
$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{acbda}} = \oint_{\mathrm{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0 \oint_{\mathrm{L}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0 \int_{\mathrm{a(L_1)}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + q_0 \int_{\mathrm{b(L_2)}}^{\mathrm{a}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= q_0 \int_{\mathrm{a(L_1)}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - q_0 \int_{\mathrm{a(L_2)}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$q_0 \oint_{\mathrm{L}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{l} = 0$$

$$q_0 \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

☆

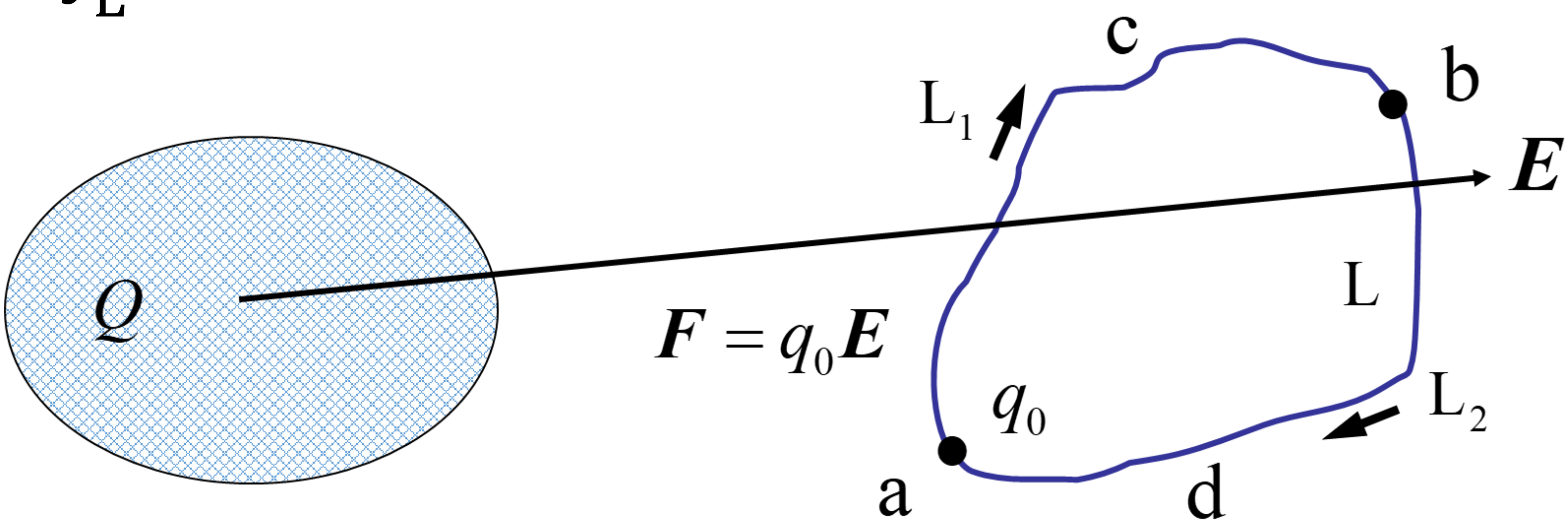


$$q_0 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0}$$

在静电场中，电场强度沿任一闭合路径的线积分（称为电场强度的环流）恒为零，这就是静电场保守性的另一种说法，这称为**静电场的环路定理**

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

静电场的环路定理积分形式 ☆



微分形式 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

静电场的旋度为零，说明静电场是无旋场

环路定理是电场的基本特性之一，
也是麦克斯韦电磁场四大方程之一。

高斯定理 环路定理 ☆

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}q$$

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{l} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

静电场的环路定理与静电场的高斯定理

各自独立地反映了静电场性质的一个侧面，

来源于不同的实验事实：

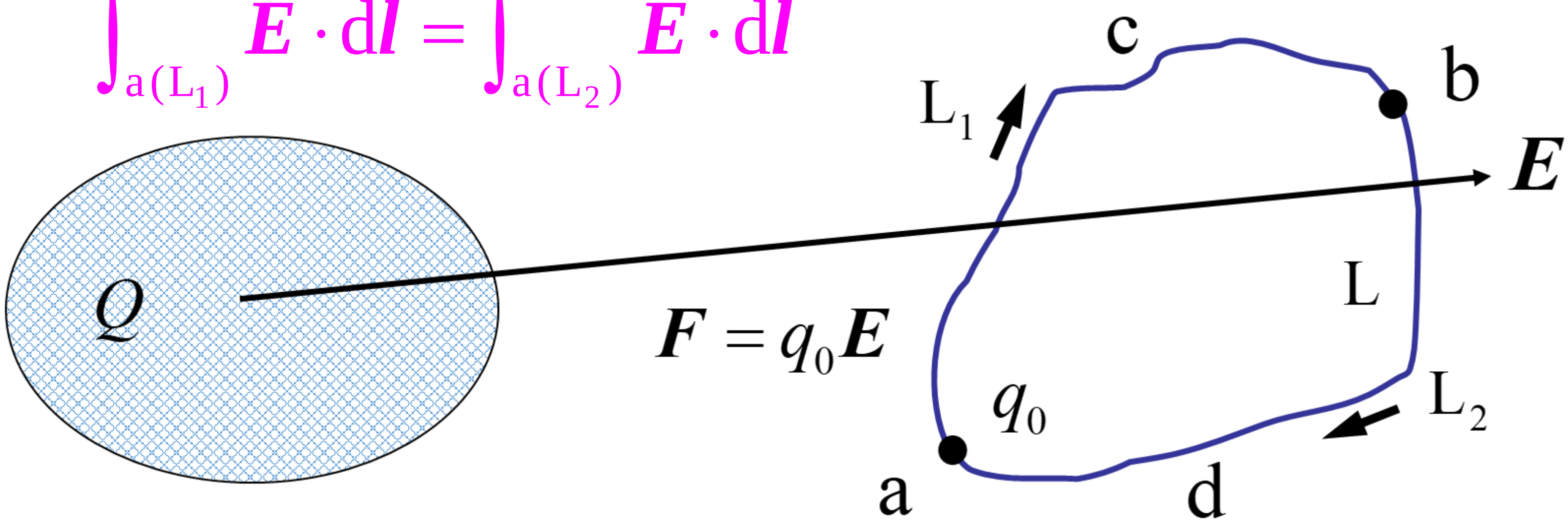
高斯定理来自点电荷静电场力的各向同性，

环路定理来源于这种静电场力的平方反比关系。

这两个定理合起来才能完整地描述静电场。

三　电势差和电势 ☆

$$\int_{a(L_1)}^{b} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{a(L_2)}^{b} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$



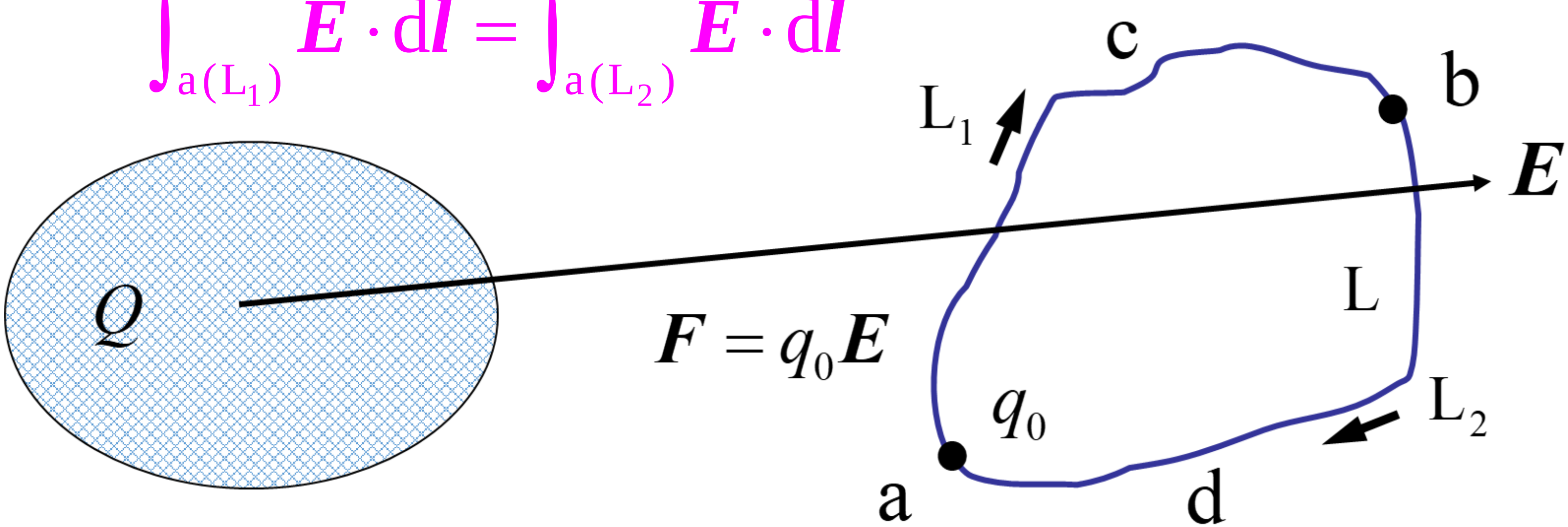
电场强度的线积分值（标量）只与积分的起点和终点的位置有关，与积分的路径无关。

积分的起点和终点的位置是两个空间点，这两个空间点不同，积分值不同。

对静电场来说，存在着一个由电场中各点的位置所决定的标量函数，这个函数称为**静电场的电势**。

$$\int_{a(L_1)}^{b} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{a(L_2)}^{b} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

☆



空间上由 a 点到 b 点电场强度的线积分是一个确定的值

$$\boxed{\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = U_a - U_b}$$

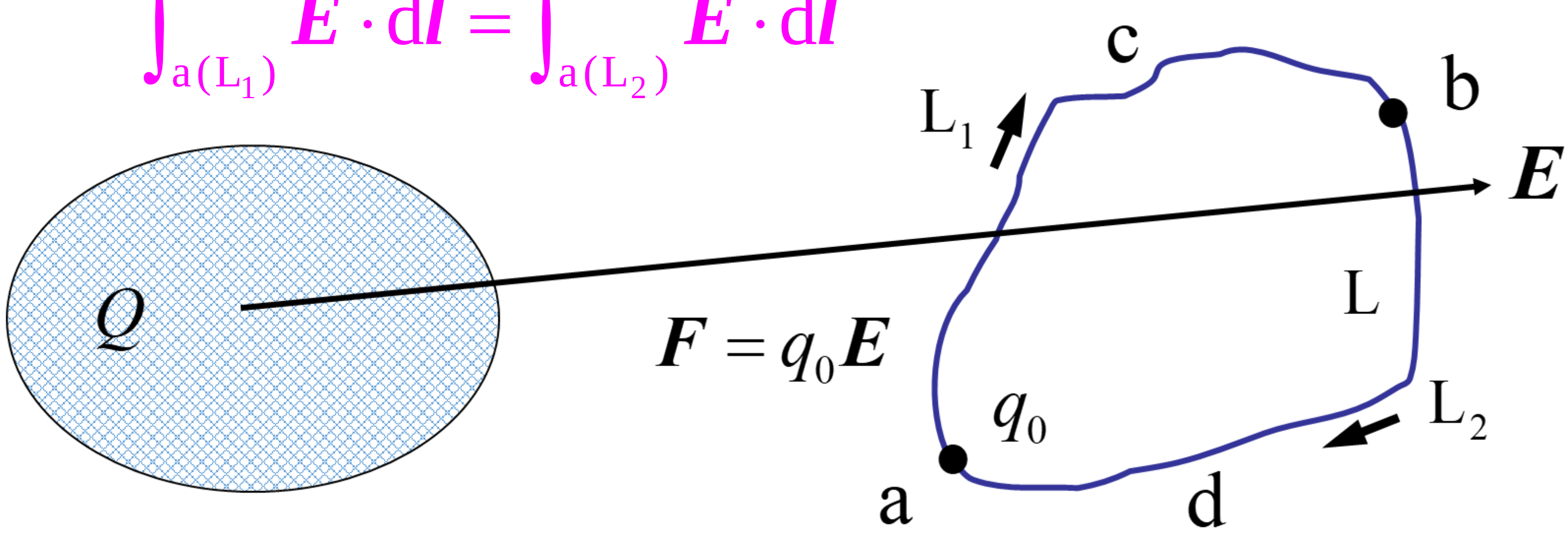
$U_a - U_b$ 称为静电场中 a 点与 b 点的**电势差**

U_a 和 U_b 称为 a 点和 b 点的静电场的**电势**

只能求得空间两点的电势差，不能求出各点的电势

$$\int_{a(L_1)}^{b} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{a(L_2)}^{b} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

☆



选定一个参考位置，并指定参考位置的静电场的电势为零

参考位置称为电势零点 P_0 ，则静电场中任意一点 P 的电势为

$$\boxed{U_P = U_P - U_{P_0} = \int_P^{P_0} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}$$

$$U_{P_0} = 0$$

积分值完全由 **P** 点的位置所决定，是 **P** 点的位置的单值函数

$$U_{\mathrm{P}} = U_{\mathrm{P}} - U_{\mathrm{P}_0} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad U_{\mathrm{P}_0} = 0$$

在静电场中，存在一个由空间点 P 独立决定的空间函数，

$$U_{\mathrm{P}} = U(x, y, z)$$ 称为静电场中 P 点的**电势**

静电场可以用电势场这一**标量场**来描述

电荷 q_0 在静电场中由 a 点移动 b 点的过程中，电场力所做的功

$$A_{\mathrm{ab}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0 \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0 \left(U_{\mathrm{a}} - U_{\mathrm{b}} \right)$$

静电场中，电场力对电荷所做的功等于
电荷的电荷量与电荷的始末位置电势差的乘积 ☆

四　电势能

☆

在静电场中移动试验电荷时，电场力所做的功只与被移动的电荷量和静电场的分布以及移动的始末位置有关，而与移动的路径无关

在静电场中还存在一个由电荷量和静电场的分布以及空间位置决定的标量函数　**静电势能**

试验电荷 q_0 由 a 点移到 b 点，电场力所做的功

$$\boxed{A_{ab} = q_0 \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = W_a - W_b}$$

W_a 为试验电荷 q_0 在静电场中 a 点的**静电势能**

W_b 为试验电荷 q_0 在静电场中 b 点的**静电势能**

$$\Delta W = W_b - W_a = -A_{ab} = -q_0 \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

在静电场中，将点电荷从 a 点移动到 b 点，
电场力所做的功等于该点电荷静电势能增量的负值。

如果电场力做正功，静电势能减少；
电场力做负功，静电势能增加。 ☆

$$\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = U_a - U_b \Rightarrow W_a - W_b = q_0 (U_a - U_b)$$

由在静电场中移动电荷电场力所做的功只能确定空间两点静电势能的差值，如果要确定电荷在某点的电势能的绝对数值，必须选定一个电势能为零的参考点。

选取静电场中 P_0 点为静电势能零点，

则静电场中任意一点 P 的静电势能为

$$W_{P_0}=0$$

$$\boxed{W_{\mathrm{P}}=W_{\mathrm{P}}-W_{\mathrm{P_0}}=q_0\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P_0}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

如果选定静电势能零点与电势零点相同，

则静电场中任意一点 P 的静电势能可表示为

$$U_{\mathrm{P_0}}=0$$

$$\boxed{W_{\mathrm{P}}=q_0\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P_0}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0U_{\mathrm{P}}}$$

在静电场中，

静电势能是静电场与电荷共同拥有的能量。

静电势能不仅与静电场的性质有关，

还与电荷量有关（电荷量的大小和正负），

因此，静电势能不能独立地描述静电场。

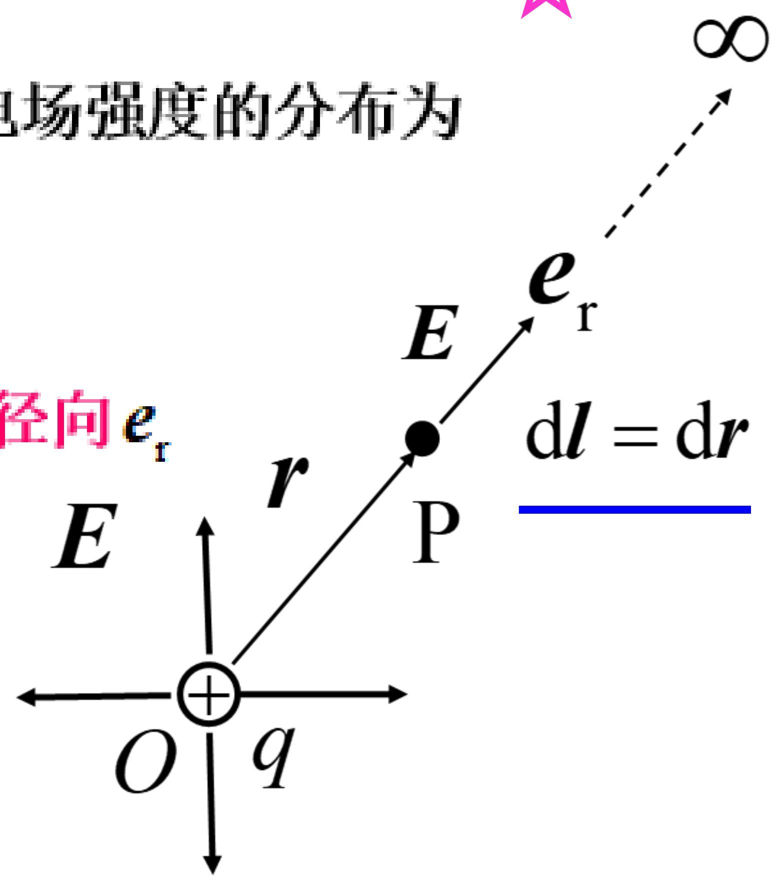
☆

五 电势叠加原理

带电荷量 q 的点电荷产生的静电场，电场强度的分布为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{r}}$$

电场强度的分布是球对称的，方向沿径向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$



1 点电荷电场的电势

选取无限远处为电势零参考点，

积分路径由 P 点沿径向到无限远

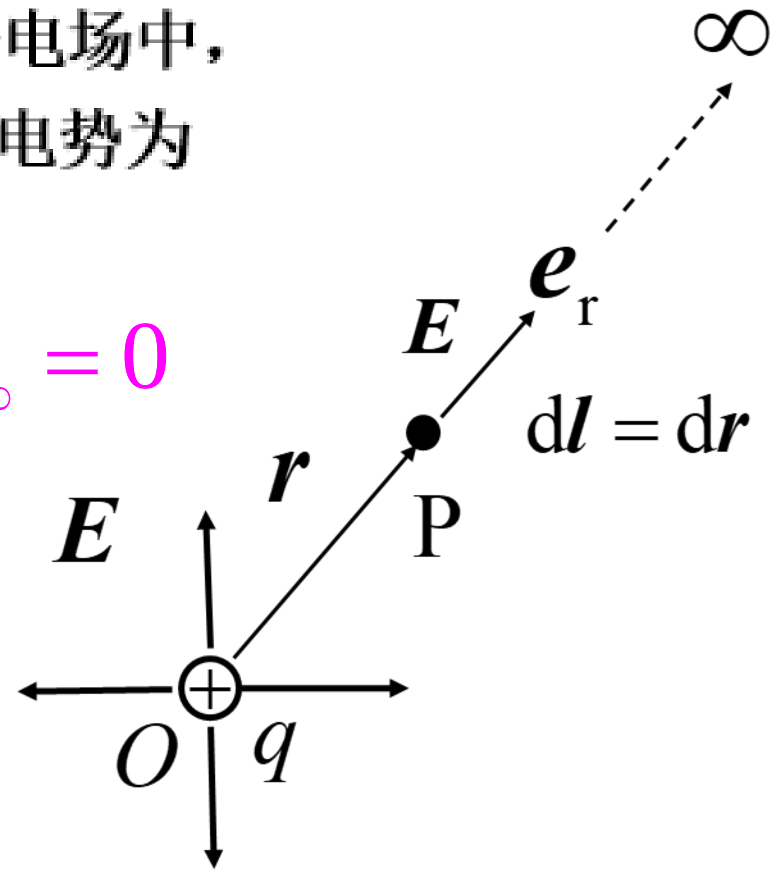
在带电荷量 q 的点电荷激发的静电场中，空间某点 P 的电势为

$$U_{\mathrm{P}}=\int_{\mathrm{P}}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r_{\mathrm{P}}}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_{\mathrm{P}}}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{P}}}$$

在带电荷量q 的点电荷激发的静电场中，距离点电荷q 的距离为r 的点的电势为

$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$U_\infty=0$$



取无限远为电势零参考点时，点电荷激发的静电场的电势是球对称分布的。

如果激发静电场的点电荷带电量为正，$q>0$，
电势为正，$U>0$；

激发静电场的点电荷带电量为负，$q<0$，
电势为负，$U<0$。

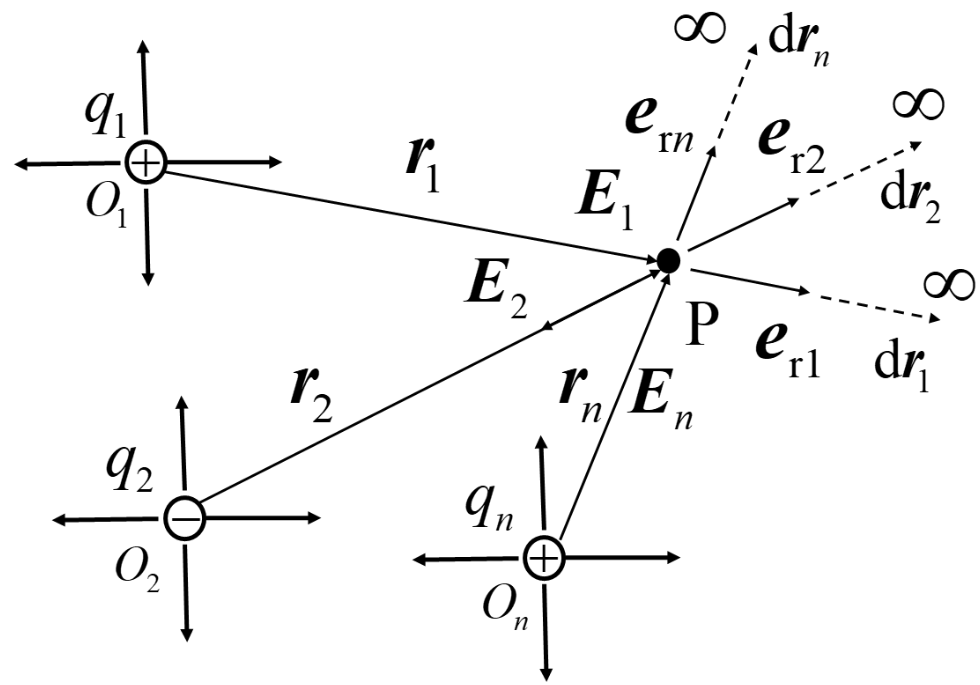
☆

2　点电荷系统电场的电势

☆

由静止点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 组成的点电荷系统激发的静电场在空间某处的电场强度，等于各个点电荷单独激发的静电场在该点电场强度的矢量合

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i$$



取无限远处为电势零参考点，空间 P 点的电势为

$$U_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cdots + \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{E}_n \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

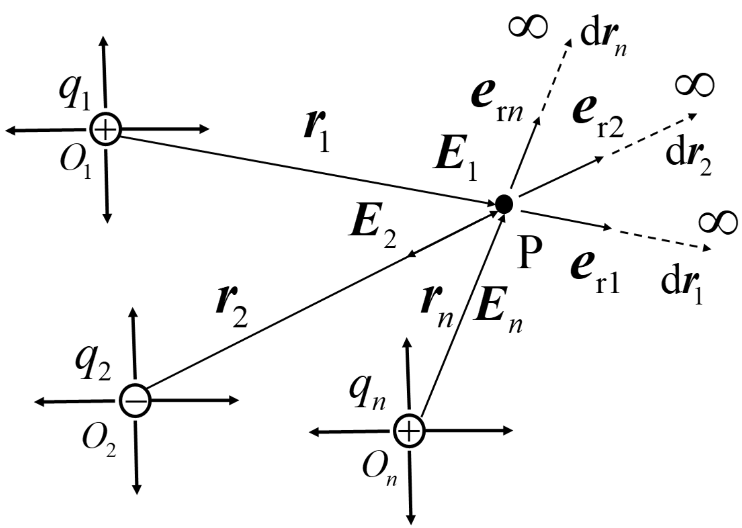
$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1\mathrm{P}}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{2\mathrm{P}}} + \cdots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_{n\mathrm{P}}} = \sum_{i=1}^{n} U_{i\mathrm{P}}$$

由静止点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 组成的**点电荷系统**

激发的静电场中，空间某点 P 的电势为

☆

$$\boxed{U = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \cdots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = \sum_{i=1}^{n} U_i}$$



$$U_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$r_1, r_2, \cdots, r_n$ 分别是

点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$

到场点 P 的距离

电势叠加原理

在点电荷系统激发的静电场中，

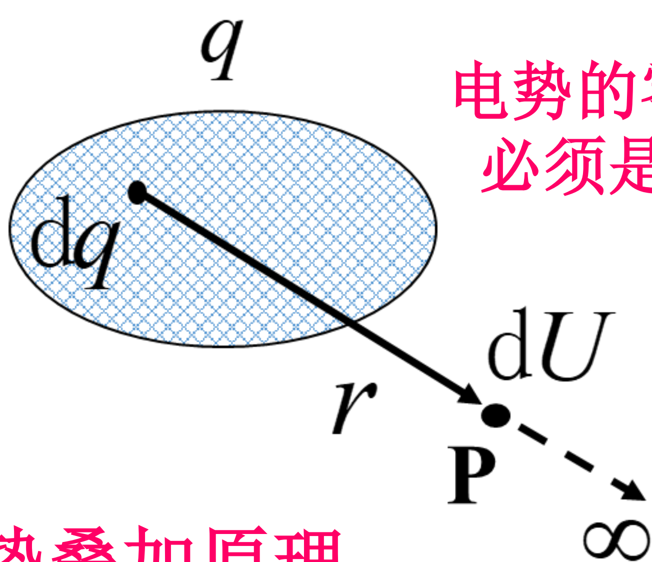
空间某点的电势是各个点电荷单独存在时

在该点激发的静电场的电势的代数和

3　连续带电体电场的电势 ☆

把带电体分割为许多电荷元 $\mathrm{d}q$（视为点电荷）

任意一个电荷元 $\mathrm{d}q$ 在场点 P 处激发的静电场的电势为



电势的零参考点
必须是无限远

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r 为电荷元 $\mathrm{d}q$ 到场点 P 处的距离

电势叠加原理

整个带电体激发的静电场在场点 P 处的电势

$$U=\int \mathrm{d}U=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

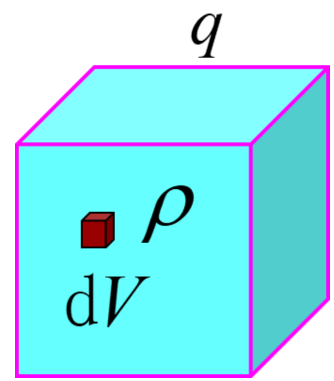
积分区域是电荷分布的区域

典型带电体电势分布 ☆

体分布

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$$

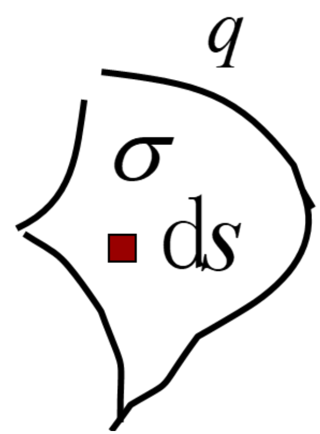
$$U = \int \mathrm{d}U = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



面分布

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$$

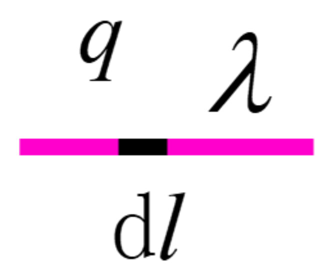
$$U = \int \mathrm{d}U = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



线分布

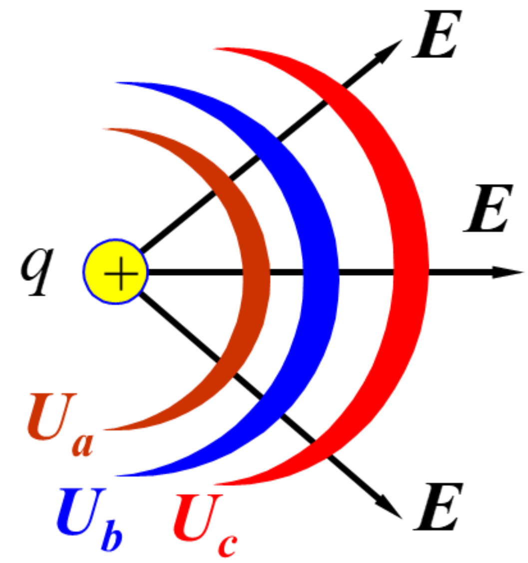
$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



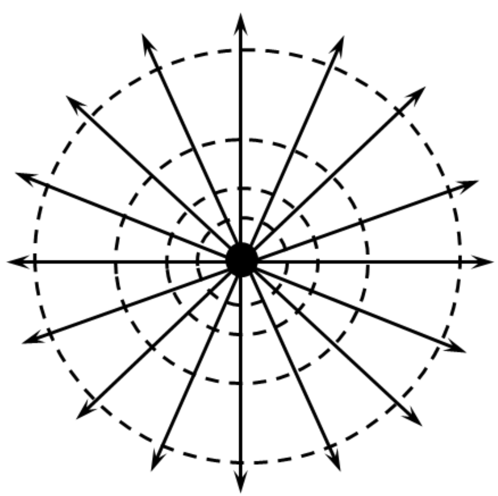
六　等势面

在静电场中，
　电势值相等的空间点
组成的曲面称为等势面。

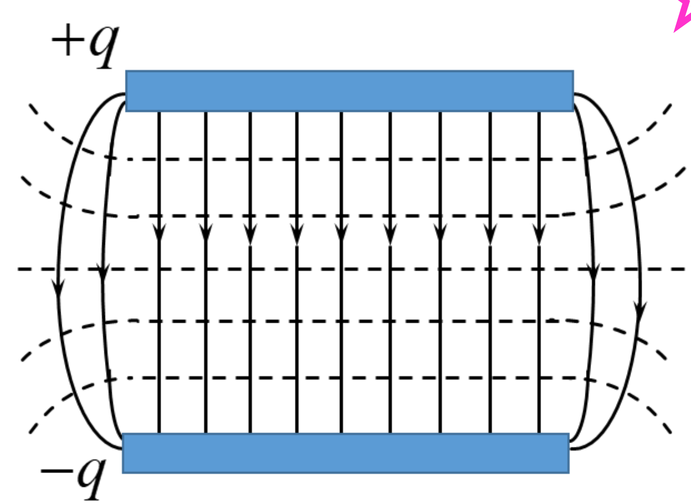


静电场中任意两个
　相邻等势面的电势差为常量

☆



点电荷

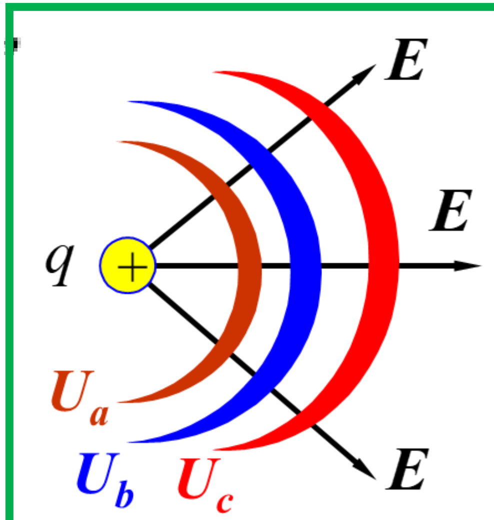


带电平行平板电容器

在同一等势面上移动电荷 Q，由于 $U_1=U_2$，

所以电场力做功 $A_{12}=Q(U_1-U_2)=0$。

在等势面上移动电荷，电场力不做功



将点电荷 Q 在同一等势面上移动微小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，

由于电场力不做功 $\mathrm{d}A=Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，

而 $Q\neq0$，$\boldsymbol{E}\neq0$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\neq0$，只能是 $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，$\boldsymbol{E}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在等势面内，所以，$\boldsymbol{E}$ 垂直于等势面。

☆

等势面上的点的电场强度与该点的等势面垂直。

等势面与电场线处处垂直。

由电场力所做的功 $\mathrm{d}A=Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=Q\mathrm{d}U$，可见移动电荷 Q 作同样的功，

电场强度的值 E 越大的地方，电荷沿电场强度方向移动的距离 $\mathrm{d}l$ 越小。

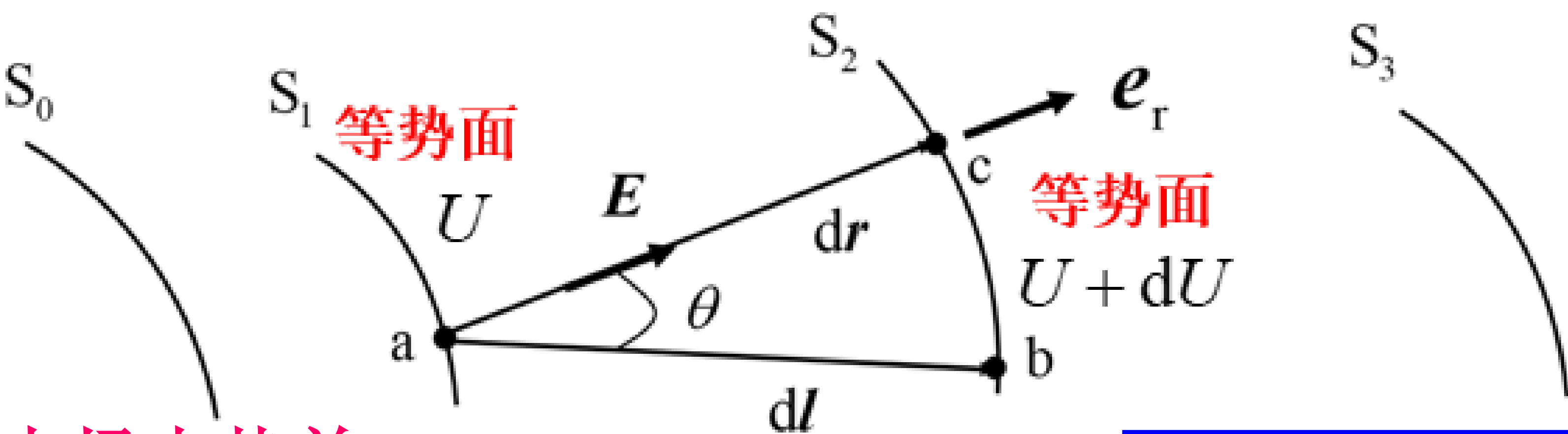
同时，移动电荷 Q 作同样的功，电势的变化 $\mathrm{d}U$ 是相等的。

电场强度的值 E 越大的地方，等势面稠密处，电势变化快

七 电场强度与电势的微分关系 ☆

在静电场中靠得非常近的两个点 a 和 b 之间的距离为 $\mathrm{d}l$，

在这两个点附近的局域空间内的静电场可以看作是均匀的 $\boldsymbol{E}$



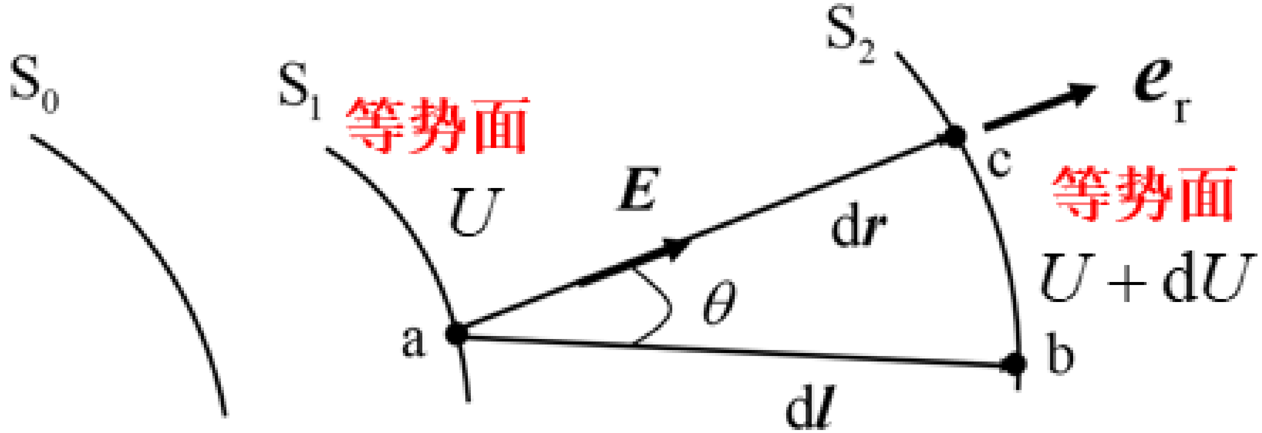
静电场电势差

$$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E\cos\theta \mathrm{d}l = U-(U+\mathrm{d}U)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} = -E\cos\theta}$$

$\mathrm{d}U/\mathrm{d}l$ 是电势沿 $\mathrm{d}l$ 方向（由 a 点指向 b 点的方向）的变化率

电势沿某一方向的变化率不但与电场强度的大小有关，
更重要的是与电场强度的方向有关。



$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}=-E\cos\theta$$

在$\theta=0$方向（沿电场强度的方向$\boldsymbol{e}_r$），

电势变化率最大

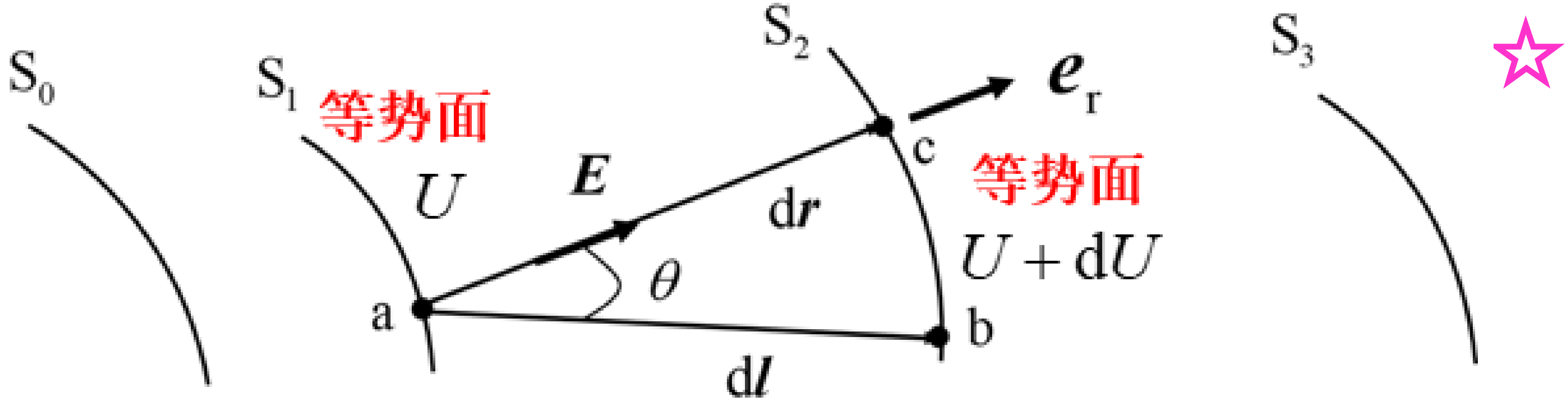
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=-E$$

在静电场中，空间某点的电场强度的大小等于该点电势最大空间变化率，即沿电场强度方向的空间变化率。

某一标量函数对某一方向有最大变化率（方向导数最大），则定义此方向上的导数为该标量函数的梯度。

静电场电势的梯度

$$\nabla U=\mathrm{grad}\,U=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$$



$$\nabla U = \operatorname{grad} U = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -E$$

静电场中，空间某点的电场强度用电势表示为

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla U$$

静电场中，空间某点的电场强度矢量的大小等于该点电势梯度矢量的大小，方向与电势梯度矢量的方向相反。

在直角坐标系中 ☆

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}U\equiv-\nabla U=-\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

电场强度与电势的微分关系

静电场中某点的场强决定于电势在该点的空间变化率，而与该点的电势值本身没有直接关系

$$U_{\mathrm{P}}=U_{\mathrm{P}}-U_{\mathrm{P_0}}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P_0}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad U_{\mathrm{P_0}}=0$$

电场强度与电势的积分关系

$$\boldsymbol{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$$

$$\oint_{(\mathrm{S})} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}} \mathrm{d}q$$

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{l} = U_{\mathrm{a}} - U_{\mathrm{b}}$$

$$\oint_{\mathrm{L}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$U_{\mathrm{P}} = U_{\mathrm{P}} - U_{\mathrm{P_0}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P_0}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} = -\mathrm{grad}\, U = -\nabla U$$

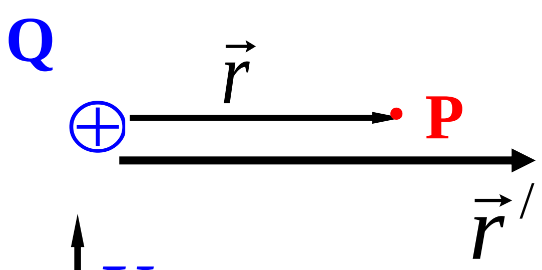
电势定义例题

例1 求：点电荷电场的电势分布

解：已知 $\vec{E} = \dfrac{Q\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$

电荷为正时，各点电势为正，
越远电势越低；
电荷为负时，各点电势为负，
越远电势越高。

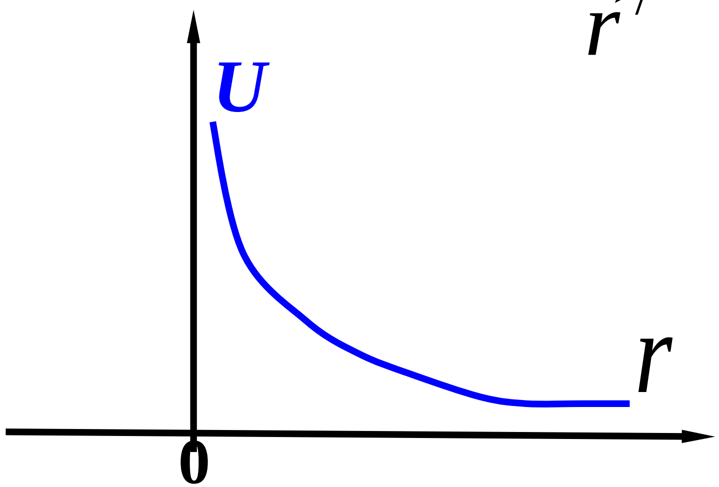
设无限远处为0电势，则电场中距离点电荷r 的P点处电势为



$$U(r) = \int_P^{\infty} \frac{Q\vec{r}\,' \cdot d\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$U(r) = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}\,'$$

$$= \int_r^{\infty} \frac{Q\,dr'}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

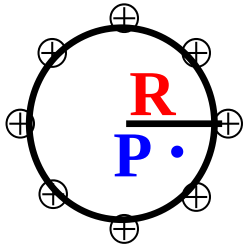


$$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

点电荷电场的电势分布

例2　　求：均匀带电球面的电场的电势分布.　☆

$U_P = ?$



解：已知

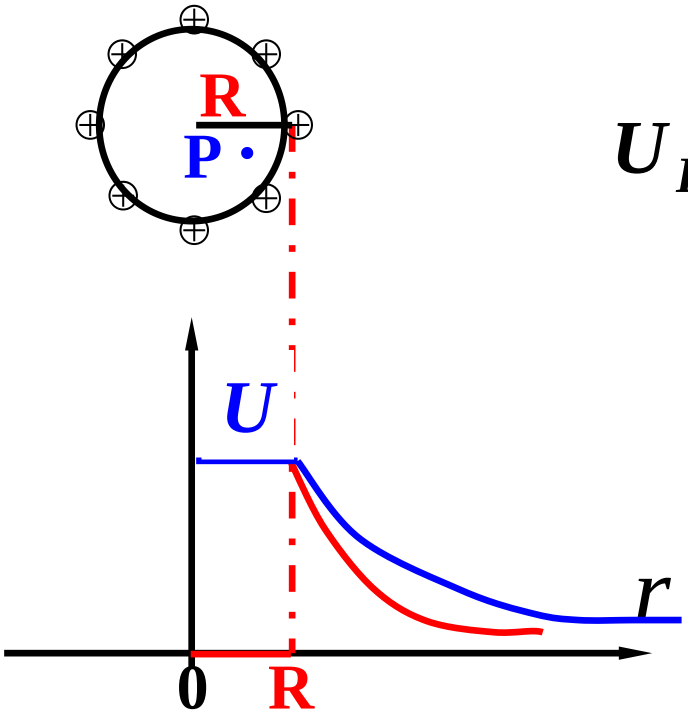
$$E = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

设无限远处为0 电势，

则电场中距离球心r_P的 P 点处电势为

$$U_P = \int_P^\infty \frac{Q\vec{r}\cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \int_P^\infty \frac{Q dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$U_P = ?$



球内点： $r_P < R$ ☆

$$U_P = \int_{r_P}^{R} 0 \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \frac{Q dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

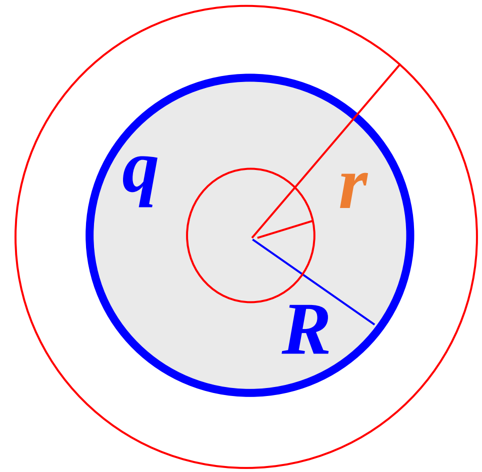
球外点： $r_P > R$

$$U_P = \int_{r_P}^{\infty} \frac{Q dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

球面内等电势，等于球面上的电势。

球面外点的电势等于处于球心的“点电荷”在该点的电势。

例3:求均匀带电球体的电势



无限远为
电势零点

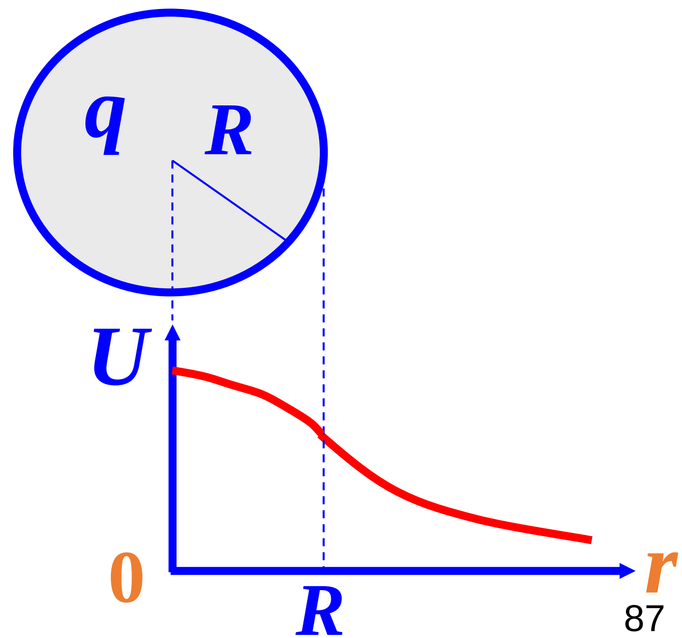
$$\vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\hat{r},\quad r<R$$

$$\vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r},\quad r\geq R$$

$r<R:$
$$U(r)=\int_r^R E_1\mathrm{d}r+\int_R^\infty E_2\mathrm{d}r=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2-r^2\right)$$

$r>R:$
$$U(r)=\int_r^\infty E_2 dr$$

$$=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



球心:
$$U(0)=\frac{3}{2}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

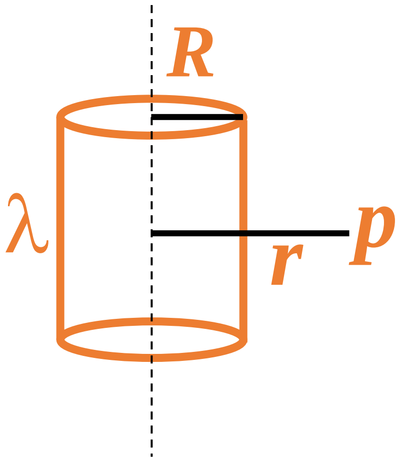
例4:求无限长圆柱面(线电荷密度λ)的电势 ☆

电场分布: $E_1 = 0, \quad r < R \qquad E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R$

电势分布: 选 $p_0\ (r = r_0)$ 点为电势零点

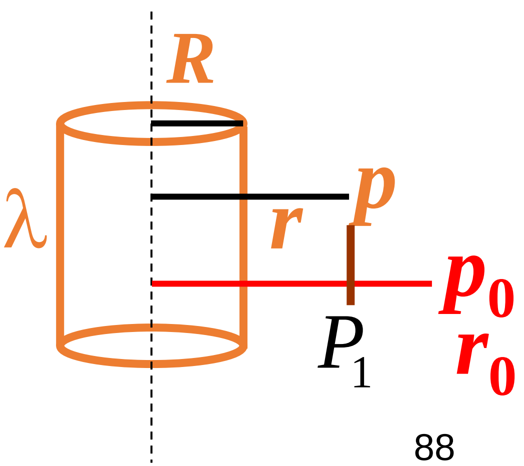
$r > R$:

$$U(r) = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



$$= \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{r_0} E\mathrm{d}r = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

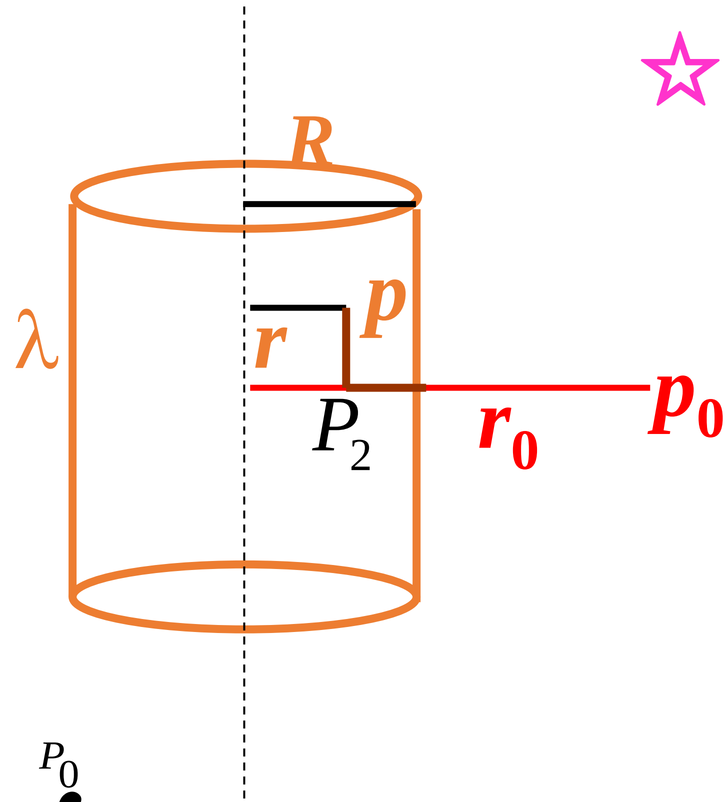


电势定义

电场分布：

$$E_1 = 0, \quad r < R$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R$$



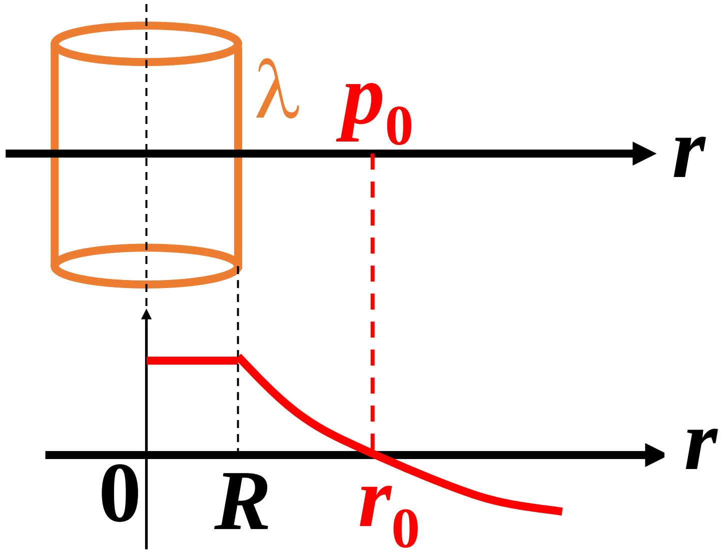
$r < R$:

$$U(r) = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_P^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{P_2}^{\text{柱面}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\text{柱面}}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{\text{柱面}}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_R^{r_0} E_2 \mathrm{d}r = \int_R^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{R}\right)$$

☆

$$U(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_0}{R}\right), & r<R\\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_0}{r}\right), & r>R\end{cases}$$

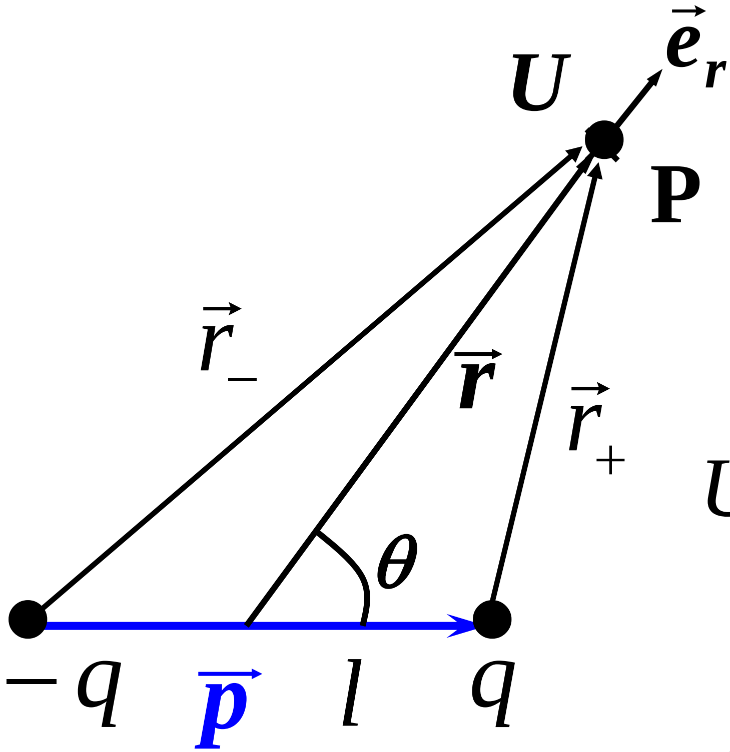


电势零点不能选在无限远！

电势叠加例题

例5　求电偶极子的电场中的电势分布 ☆

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}=\frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}$$



$$r >> l \qquad r_+ r_- \approx r^2$$

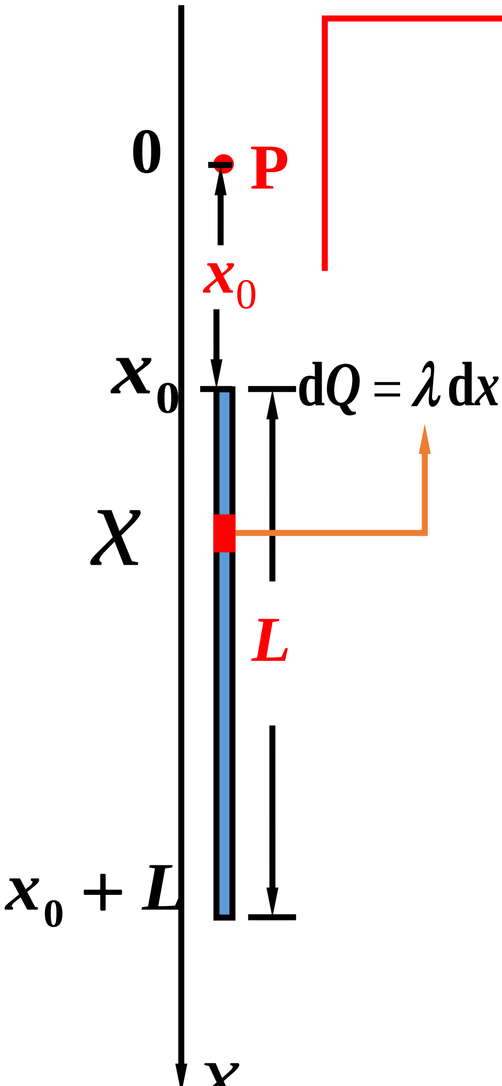
$$r_- - r_+ \approx l\cos\theta$$

$$U=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\propto\frac{1}{r^2}$$

对比，点电荷的电势 $\propto \dfrac{1}{r}$

例6 均匀带电细棒，长 L，电荷线密度 λ，
求：沿线、距离一端 x_0 米处的电势。

选无穷远
电势零点



解：
$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

$$U=\int\mathrm{d}U=\int_{x_0}^{x_0+L}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

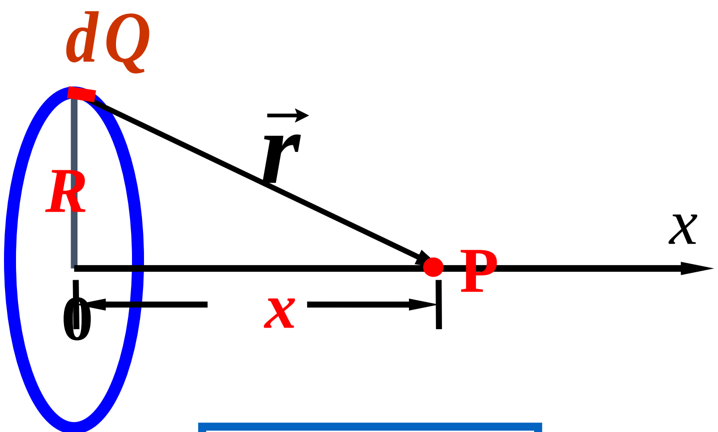
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln x\Big|_{x_0}^{x_0+L}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x_0+L\right)-\ln x_0\right]$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x_0+L}{x_0}$$ ☆

例7　已知：总电量Q；半径R。

求：　均匀带电圆环轴线上的电势分布

☆



选无穷远电势零点

解：

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\int_Q\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_Q\mathrm{d}Q$$

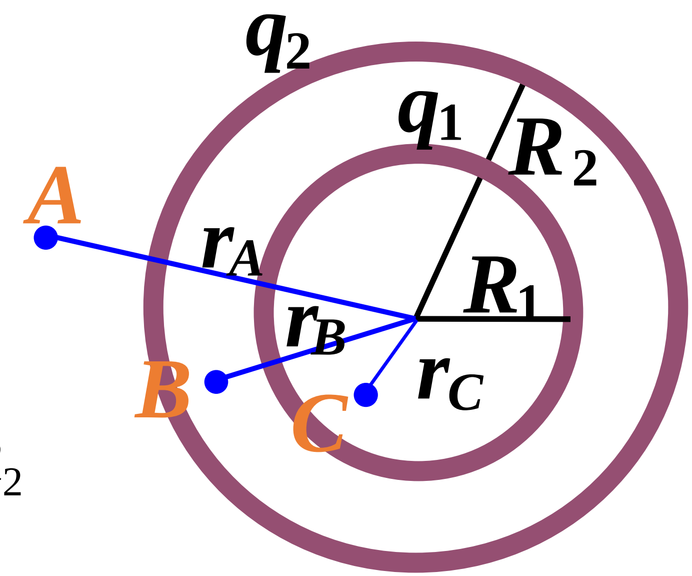
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r=\sqrt{R^2+x^2}$$

$$\boxed{U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}}$$

例8两同心带电球面，求A，B，C点的电势。

$$U_1=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R_1\\[2ex] \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, & r<R_1\end{cases}\qquad U_2=\begin{cases}\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R_2\\[2ex] \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, & r<R_2\end{cases}$$



电势叠加原理　单独在该点的电势的和！

$$U_A=U_{1A}+U_{2A}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_A}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_A}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$ ☆

$$U_B=U_{1B}+U_{2B}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$U_C=U_{1C}+U_{2C}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

选无穷远电势零点

静电势能例题

例9 氢原子中电子的静电势能

原子核（质子）的电势： $U(r)=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$

氢原子核外只有一个电子，带负电荷 e

选无穷远电势零点

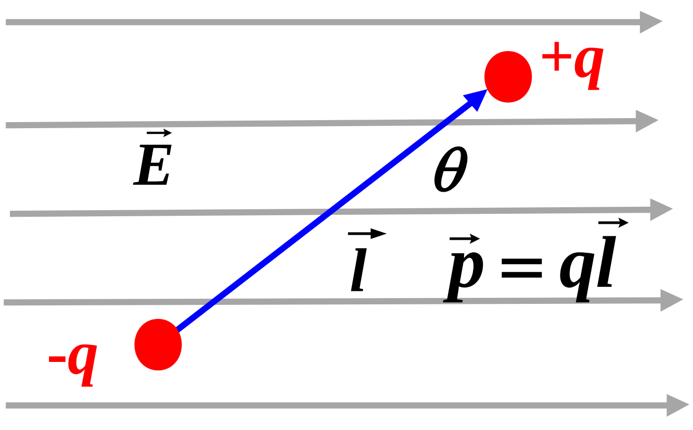
电子的静电势能：

$$W=(-e)U(r)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

"电子与电场（质子）的相互作用势能"

例10 电偶极子在均匀外电场中的静电势能 ☆

$$\boxed{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$$



证明： $W=W_{+}+W_{-}$

$$=qU_{+}-qU_{-}$$

$$=q\left(U_{+}-U_{-}\right)$$

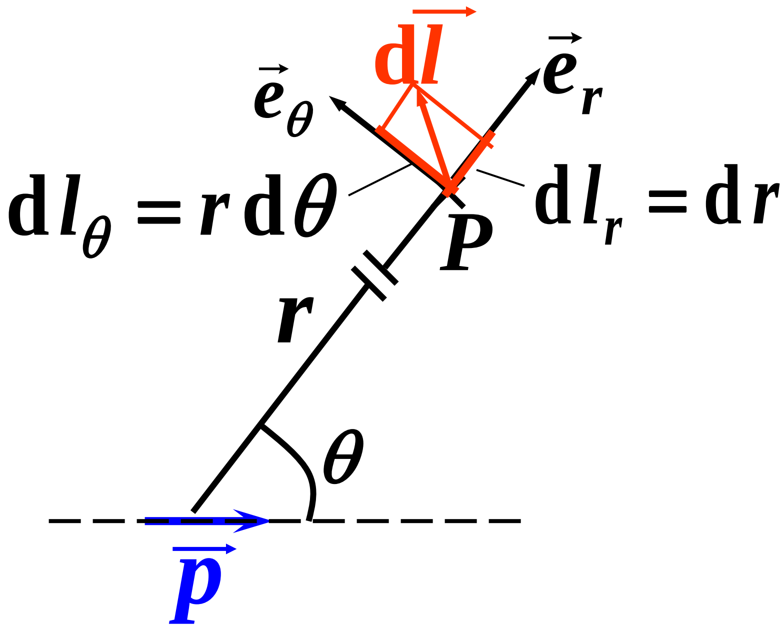
选无穷远电势零点

$$U_{+}-U_{-}=\int_{+}^{-}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-El\cos\theta$$

$$W=-qEl\cos\theta=-pE\cos\theta=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$

电场与电势的微分关系例题

例11 由偶极子的电势求场强： ☆



建立极坐标系

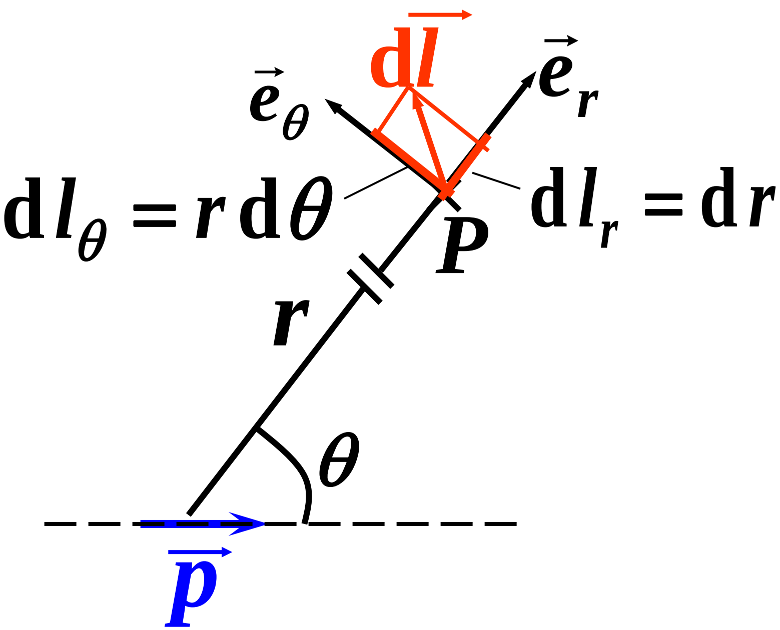
选无穷远电势零点

电势分布

$$U(\theta, r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial l_r} = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial U}{\partial l_\theta} = -\frac{\partial U}{r\partial\theta} = -\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$



$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$

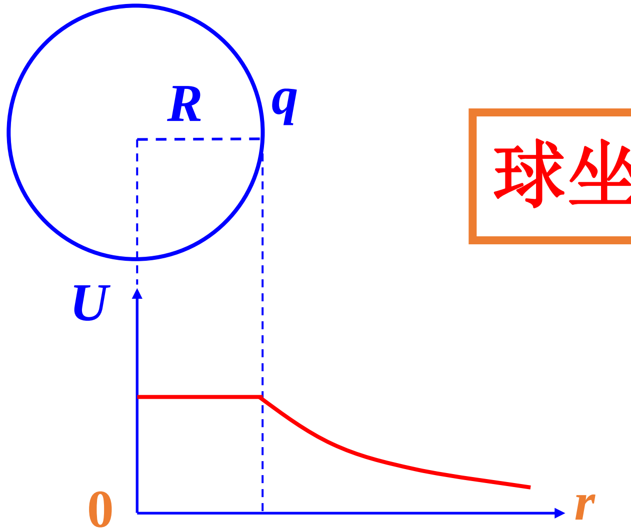
$$\theta = 0 \qquad E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = 0$$

$$\theta = 90^0 \qquad E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_r = 0$$

☆

例12均匀带电球面，由电势分布求场强分布。

$$U(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r\le R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\ge R\end{cases}$$



球坐标系

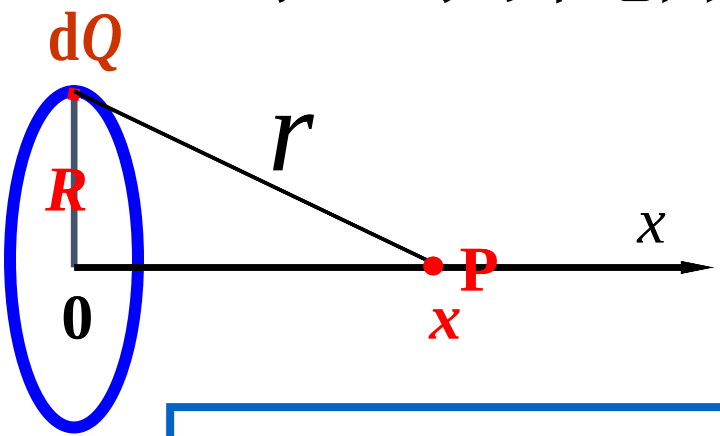
场强沿径向 → 只要计算径向分量

$$E=-\frac{\partial U(r)}{\partial r}=\begin{cases}-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)=0, & r\le R\\[2ex] -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r\ge R\end{cases}$$

☆

例13 已知：总电量Q；半径R。 ☆

求：均匀带电圆环轴线上的电势与场强。



解：
$$dU=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\int_Q\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=0$$
$$E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

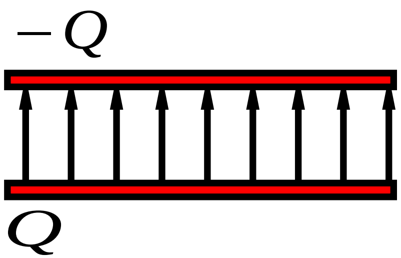
$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

思考题下例说法对否？举例说明。

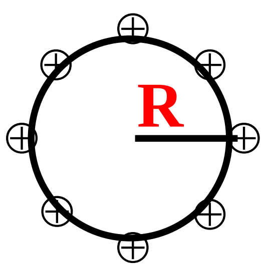
$$U=\int_{r}^{0\text{势}}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$-\nabla U=\vec{E}$$

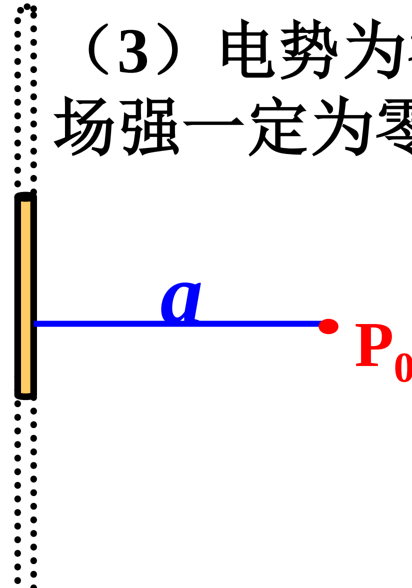
（1）场强相等的区域，电势处处相等？



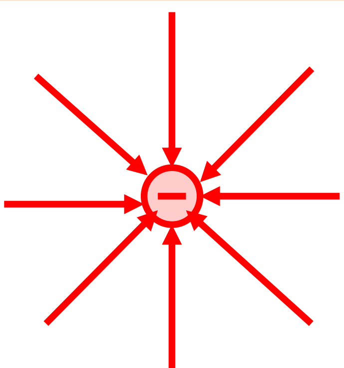
（2）场强为零处，电势一定为零？



（3）电势为零处，场强一定为零？



（4）场强大处，电势一定高？



第五节　有金属导体存在时的静电场 ☆

电场的特性之一就是对电荷有电场力的作用，

如果电荷是自由的，

在电场的作用下就会做定向的宏观运动

（正电荷沿电场方向运动，负电荷逆电场方向运动）。

拥有大量可以自由移动的带电粒子的物质称为导体

金属导体体内存在大量的可以自由移动的自由电子，

自由电子的浓度可以达到$10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$，

金属导体的电阻率只有$10^{-8}\sim10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$，

金属是一类导电性能良好的导体。

所带总净电荷量不为零的导体称为带电导体；

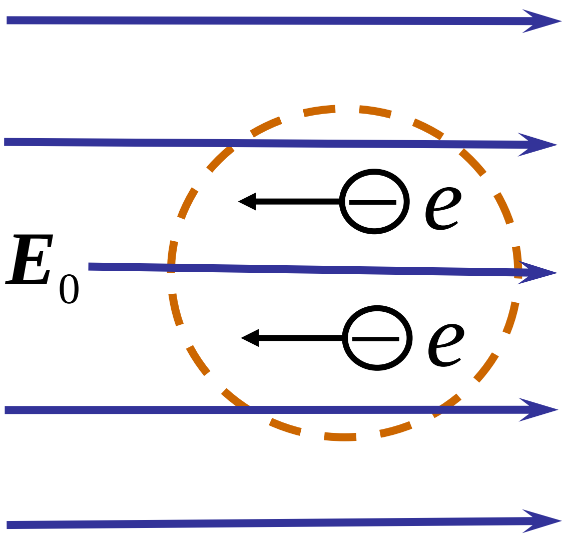
所带总净电荷量为零的导体称为中性导体。

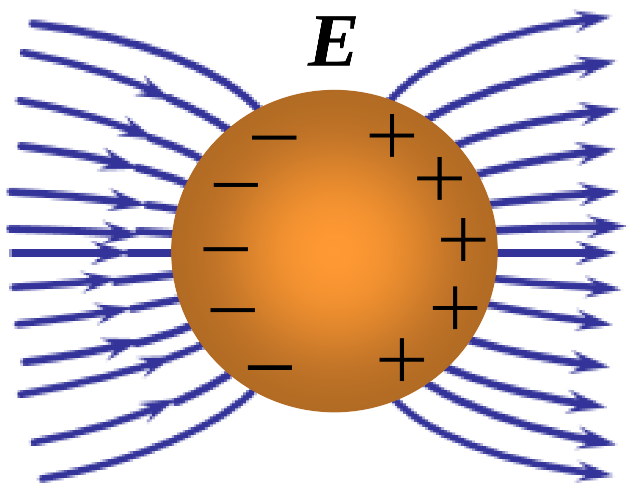
一 导体静电平衡的条件 ☆

1 静电平衡

——导体各处均无电子作宏观定向运动。

导体放入电场 → 自由电子定向运动
→ 改变导体电荷分布 → 改变电场 → ····





导体的静电平衡状态是指导体内部和表面都没有电荷宏观定向移动的状态。

2 静电平衡时，电场的规律 ☆

当达到静电平衡时，

空间电荷分布不再变化，全部电荷宏观静止，因此总电场也是静电场

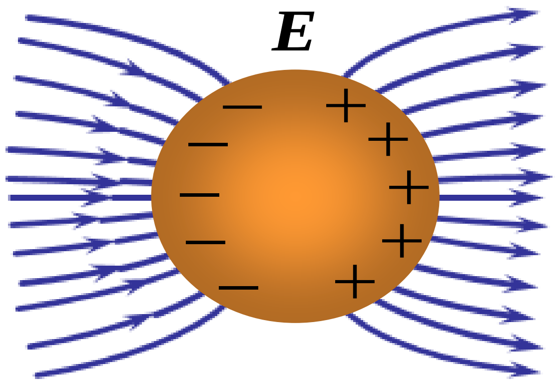
静电场的高斯定理和环路定理依然成立，也有电势的概念

$$\oint_{(S)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S)} q$$

$$\oint_{L} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{l} = 0$$

$$U_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

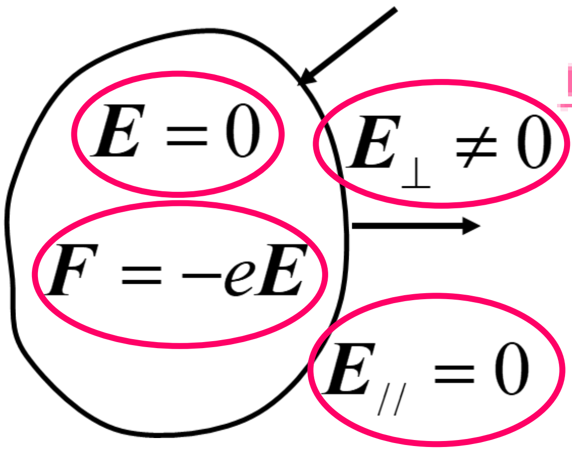
$$\boldsymbol{E} = -\nabla U$$



$\boldsymbol{E}$ 是由全部静止电荷激发的静电场

二 静电平衡时导体上的静电场和电势 ☆

1 静电平衡时，电场分布特性



静电平衡时，

导体内部处处电场强度必为零，$E_{内}=0$

如果导体内某处的电场强度不为零，
自由电子将做宏观上的定向移动，
就没有达到静电平衡

静电平衡时，

导体外表面处的静电场必定垂直于导体的表面，$E_{表面，外}\perp$ 表面

导体表面处的自由电子如果受到一个沿导体表面的电场力 $F=-eE$ 的作用，
自由电子将沿导体表面定向移动，也没有达到静电平衡

静电平衡时，导体表面处的电荷受到的
电场力沿表面方向必为零（沿垂直于表面方向可以不为零）

2 静电平衡时，电势分布特性 ☆

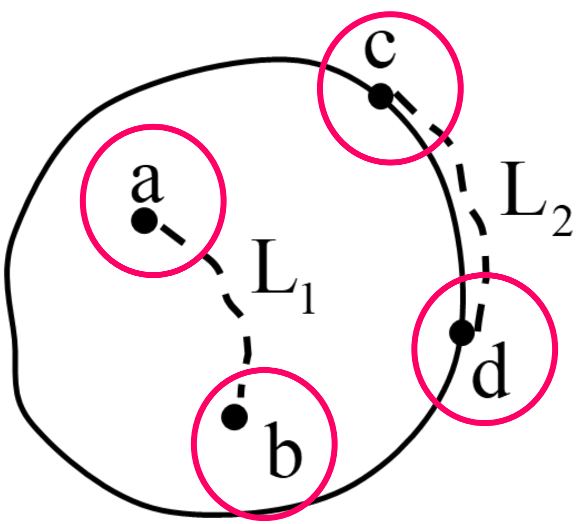
在达到静电平衡的导体的内部取两个点 a 和 b，

导体内部电场强度为零 $\boldsymbol{E}=0$，取导体内的路径 L_1，

a 点和 b 点的电势差 $\Delta U=U_{\mathrm{a}}-U_{\mathrm{b}}=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，

导体内 a 点和 b 点的电势相等

静电平衡时，导体是等势体，导体表面是等势面



在导体的表面取两个点 c 和 d，

导体表面处电场强度与表面处处垂直，

取沿导体表面的路径 L_2， $\boldsymbol{E}\perp\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，

$$\Delta U=U_{\mathrm{a}}-U_{\mathrm{b}}=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0，$$

c 和 d 点的电势相等

导体静电平衡的条件

☆

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_{内} = 0 \\ -\nabla U = \vec{E}\end{array}\right\} U = 常量$$

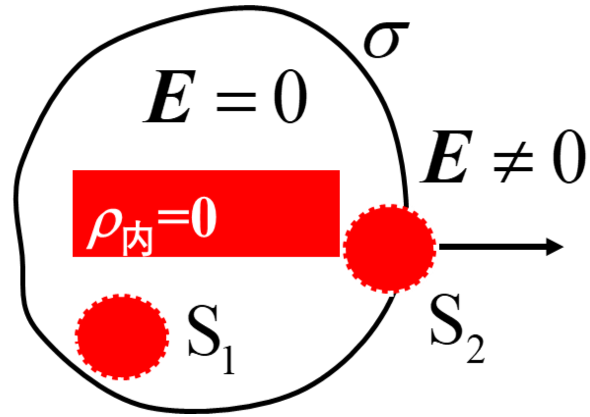
$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_{表面} \perp d\vec{S} \\ \text{等势面处处与电力线正交。}\end{array}\right\}$$

（1）导体是等势体。

（2）导体表面是等势面。

否则，电荷在电场力的作用下，
沿电场方向（负电荷相反）作宏观定向移动，
没有达到静电平衡

3 静电平衡时，导体电荷分布特性



处于静电平衡的导体，

体内电荷体密度为零，

电荷只能分布在导体的表面

在达到静电平衡的导体的内部取一点 P，

围绕 P 点做一个很小的闭合曲面S_1作为高斯面，

高斯面上的电场强度处处为零 $E=0$，

导致穿过高斯面的电场强度通量为零，

由静电场的高斯定理可知高斯面内的净电荷为零。

对于含导体部分表面的高斯面S_2使用高斯定理，

导体表面外的部分高斯面上的电场强度可以不为零，

也就是说穿过高斯面S_2的电场强度通量可以不为零，

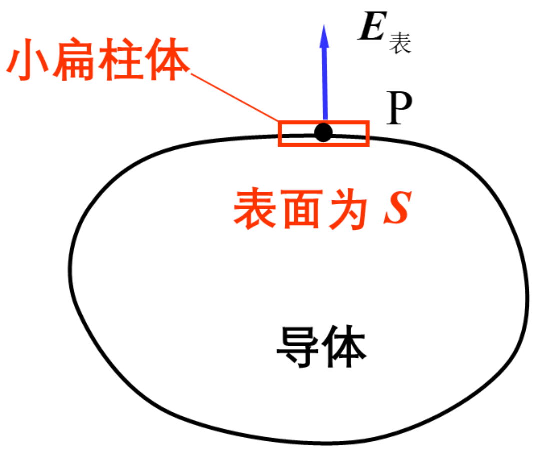
高斯面S_2所包围的电荷代数和可以不为零；

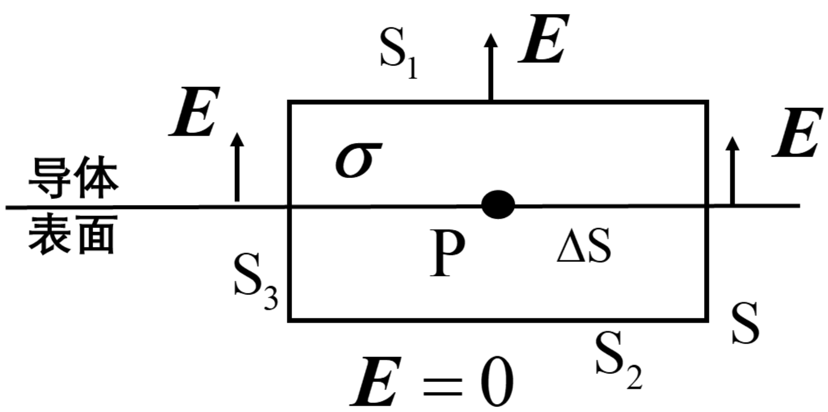
既然电荷不能分布于导体内，就只有分布在导体的表面。

4　静电平衡时，导体表面电荷分布

☆

在导体表面某处 P 做一个围绕 P 的小圆柱面 S，



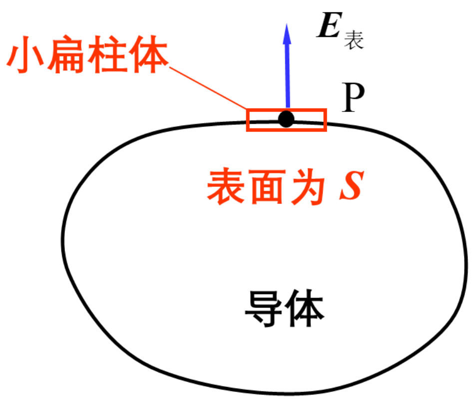


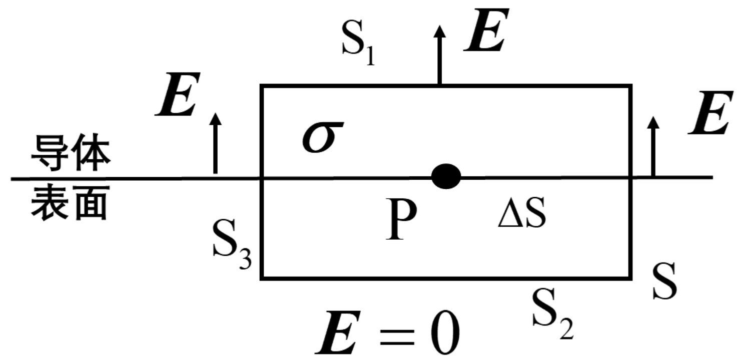
这个小圆柱面如此之小以至于

可以使上底面 S_1 和下底面 S_2 都平行于导体 P 处的表面，

而侧面 S_3 垂直于导体 P 处的表面；

导体外表面处的小柱体内的静电场 E 是均匀的而且垂直于表面，在柱体围住的导体表面积 ΔS 内电荷的面密度 σ 是均匀的。





由于导体内电场强度为零，电场强度在导体内部的底面S_2

和侧面S_3在导体内部的部分S_{32}的面积分为零，

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \qquad \iint_{S_{32}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

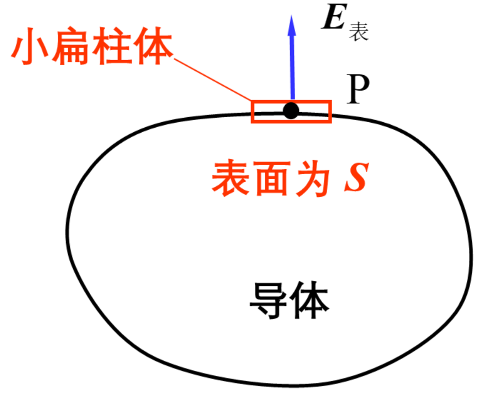
侧面S_3在导体外部的部分S_{31}处，

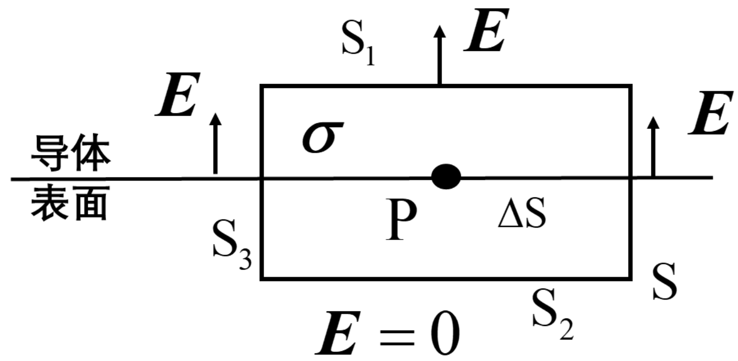
面积元$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$与电场强度$\boldsymbol{E}$垂直，$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

$$\iint_{S_{31}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

小柱体的上表面处，电场强度$\boldsymbol{E}$均匀而且平行于上表面处的面积元$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\mathrm{d}S$，小柱体上底面的面积为$\Delta S$，所以

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_1} E\cdot \mathrm{d}S=E\Delta S$$





$$\iint_{S_2} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \qquad \iint_{S_{32}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \qquad \iint_{S_{31}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

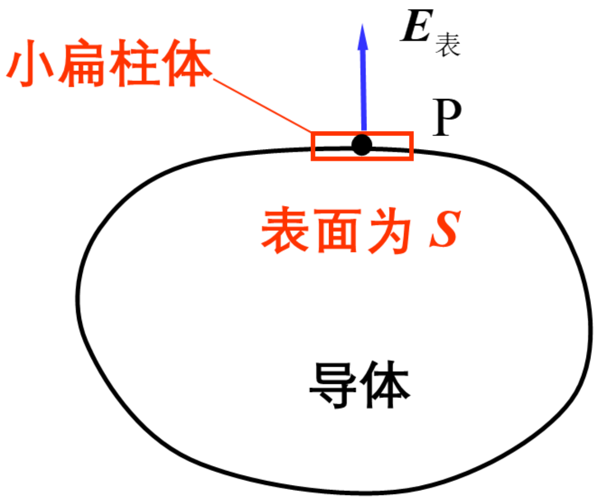
$$\iint_{S_1} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_1} E\cdot\mathrm{d}S=E\Delta S$$

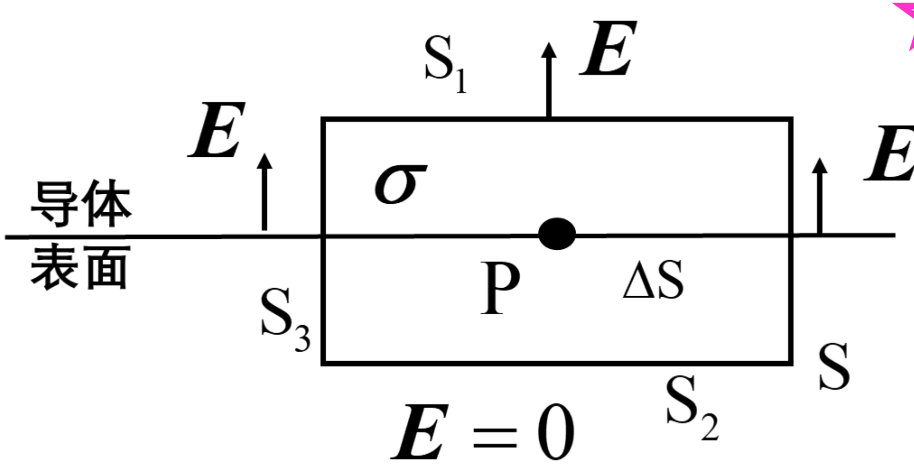
穿过小柱体的电场强度通量为

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_1} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{S_2} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{S_{31}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{S_{32}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\Delta S$$

小柱体包围的电荷量为$q=\sigma\Delta S$　由静电场的高斯定理，得到

$$E\Delta S=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Delta S \quad \Rightarrow \quad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$





☆

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n$$

$\boldsymbol{e}_n$ 的方向由导体表面指向外

这是静电场强度的大小与该处面电荷密度之间的关系，

而绝不是面电荷密度 σ 激发了静电场 $\boldsymbol{E}$；

静电场 $\boldsymbol{E}$ 是由全部电荷激发的。

静电平衡时，静电场的计算 ☆

原则

1.静电平衡的条件

$$\boldsymbol{E}_{内}=\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}$$

2.基本性质方程

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i$$ 高斯定理

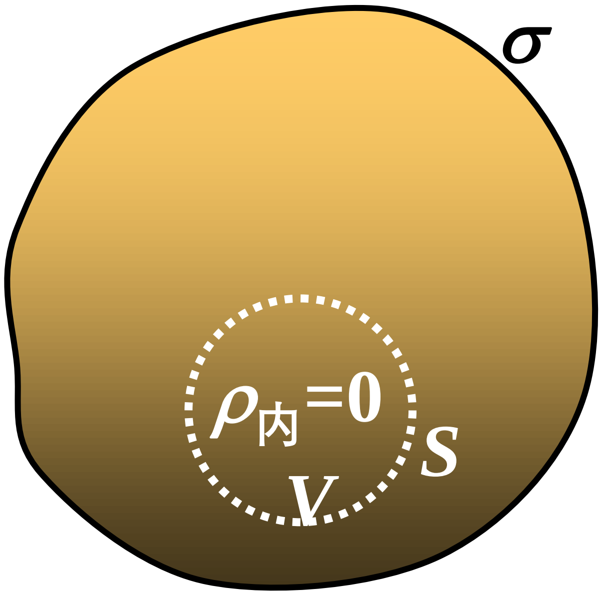
$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$ 场强环路定理

3.电荷守恒定律

$$\sum_i Q_i=常量.$$

三　金属壳上的电荷分布和壳外电场 ☆

（1）实心导体： σ 可不为0，但 $\rho_{内}$ 必为0。



理由：

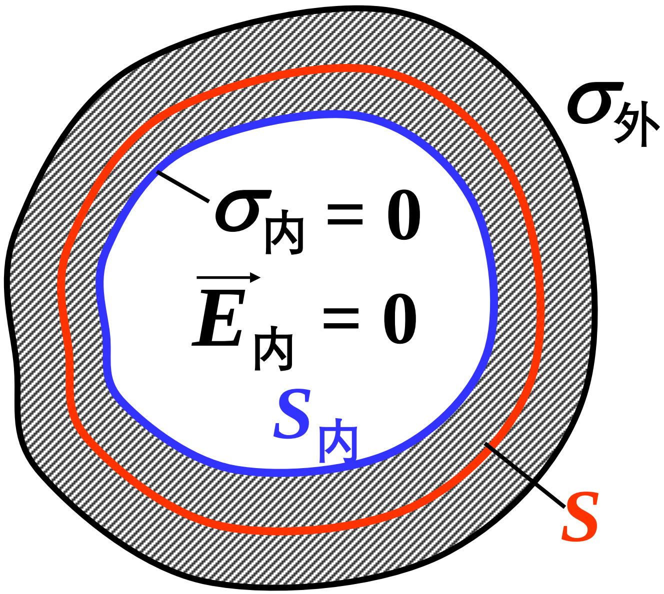
$\because \quad \vec{E}_{内}=0\,,$

$$\therefore \oint_S \vec{E}_{内}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_{内}\,dV=0\,,$$

S 是任意的。

令 $S\rightarrow 0$，则必有 $\rho_{内}=0$。

(2) 导体壳： $\sigma_{外}$可不为零，但$\sigma_{内}$和$\vec{E}_{内}$必为零。



理由：

☆

在导体中包围空腔，

选取高斯面 S，则：

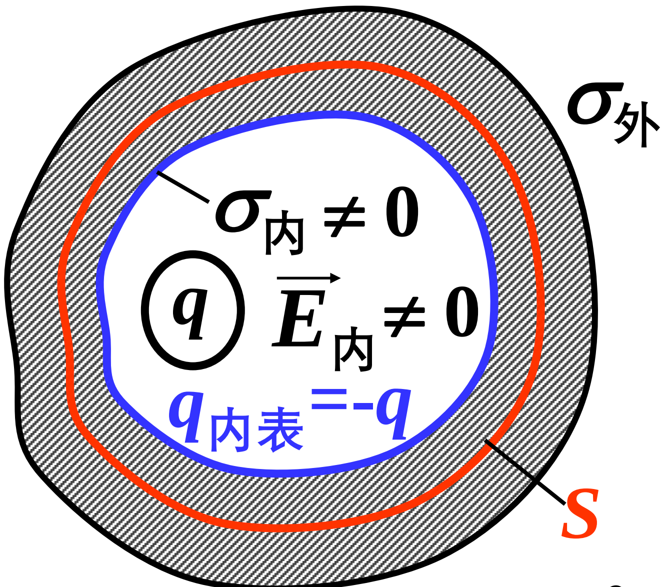
$$\oint_S \vec{E}_{导内}\cdot d\vec{s}=0 \longrightarrow$$

$\oint_{S_{内}}\sigma_{内}\,ds=0$， 若$\sigma_{内}\neq 0$，则$\sigma_{内}$必有正负 $\longrightarrow$

$\vec{E}$线从正电荷到负电荷 $\rightarrow$ 与导体静电平衡矛盾

$\rightarrow$ 只能$\sigma_{内}=0$，且腔内无$\vec{E}$线 $\rightarrow$只能 $\vec{E}_{内}=0$。

（3）导体壳内有电荷：$\sigma_{外}$可不为0，但必有$\sigma_{内}\neq 0$，



且 $q_{内表}=\oint_S \sigma_{内}\,\mathrm{d}s=-q$

理由： ☆

在导体中包围空腔

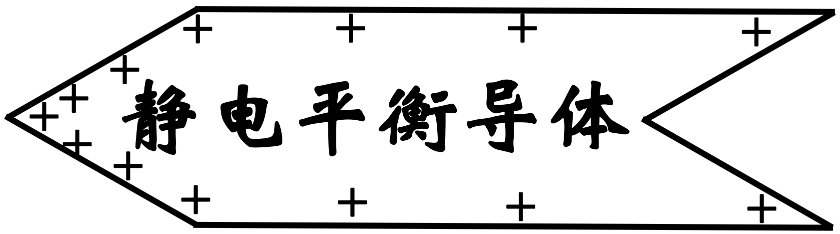
做高斯面S，则：

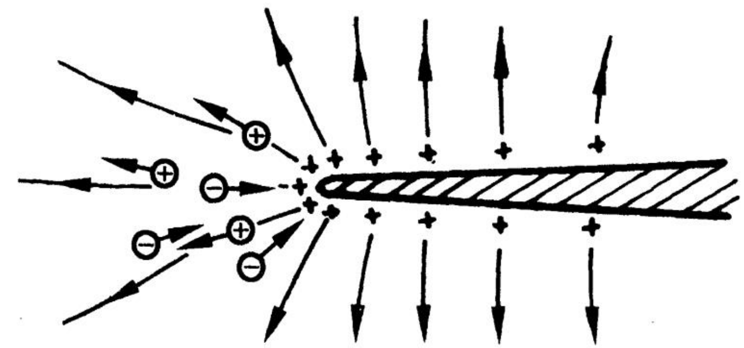
$$\oint_S \vec{E}_{导内}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}(q+q_{内表})=0$$

$$\therefore \quad q_{内表}=-q$$

四 孤立导体的电荷分布 ☆

孤立导体处于静电平衡时，表面曲率大处，
面电荷密度大——电场强度大。





空气电离，尖端放电

凸表面的曲率越大处，
表面电荷的面密度越大

凹表面上曲率越大处，
表面电荷的面密度越小

孤立的无限大带电平板，
由于其曲率半径为无限大，
面电荷是均匀分布的

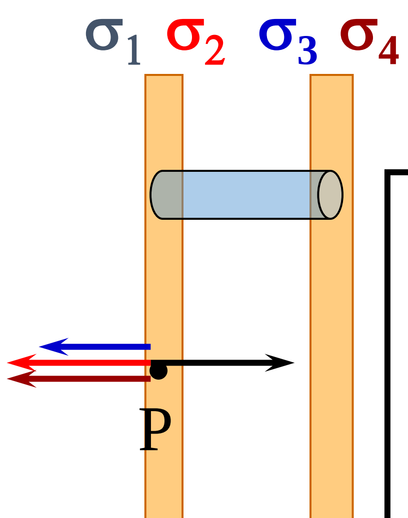
孤立的带电球面、球壳、球体，由于其曲率半径相等，
面电荷是均匀分布的

例1 两块面积均为S的金属平板靠近平行放置，一块带电Q，另一块不带电，忽略边缘效应。 ☆

求：（1）金属板的电荷分布；（2）空间电场分布；
（3）右板接地，再求电荷、电场分布。

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

解:设金属板面电荷密度 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4



由电荷守恒定律

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \cdots\cdots\cdots (1) \\ \sigma_3 + \sigma_4 = 0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i$$

$$\vec{E}_{侧} \perp d\vec{s}$$

$$E_{内} = 0$$

$$0 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \cdots\cdots (4)$$

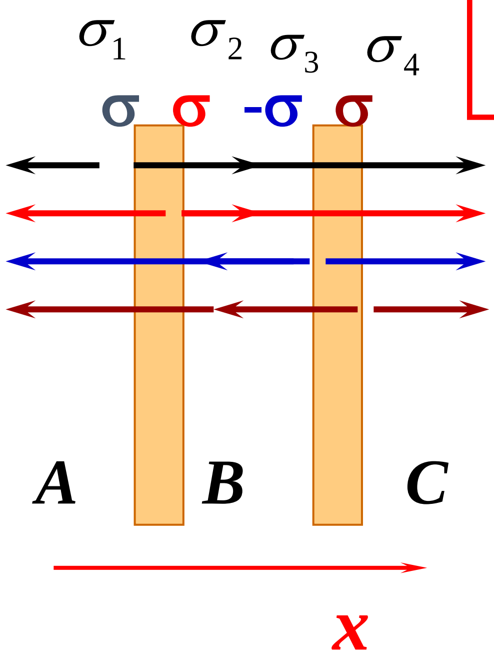
$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} \qquad E_4 = \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

方向？

（2）空间电场分布　金属板表面 相当于4 块大带电平面



$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}}$$

$$\boxed{\sigma_3 = -\frac{Q}{2S}}$$

$$E_A = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

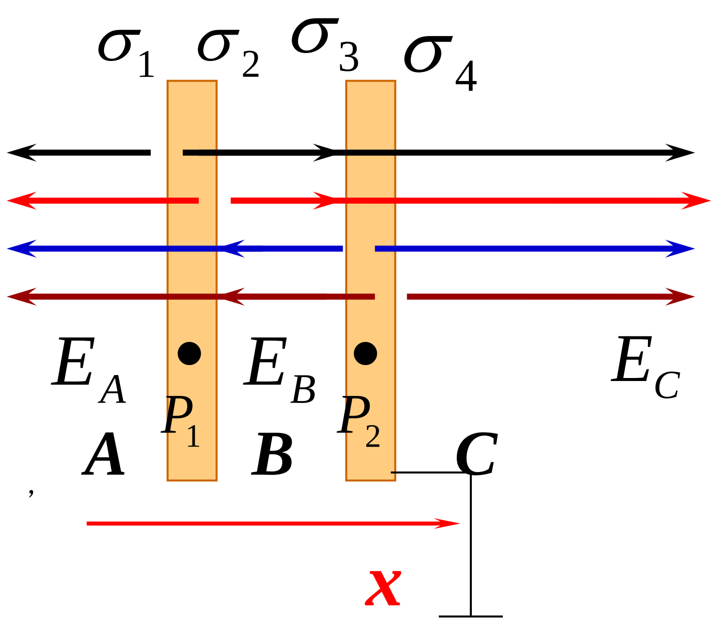
☆

$$= -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_C = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

（3）右板接地



右板接地（Ec=0）： $\sigma_4 = 0$ ☆

$$E_1 = 0 \quad \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$E_2 = 0 \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

电荷守恒: $\sigma_1 + \sigma_2 = \dfrac{Q}{S}$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{S}$$

$$E_A = E_C = 0 \qquad E_B = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

证明：无论接地与否

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3$$

例2带电导体球A与带电导体球壳B同心，求 ☆

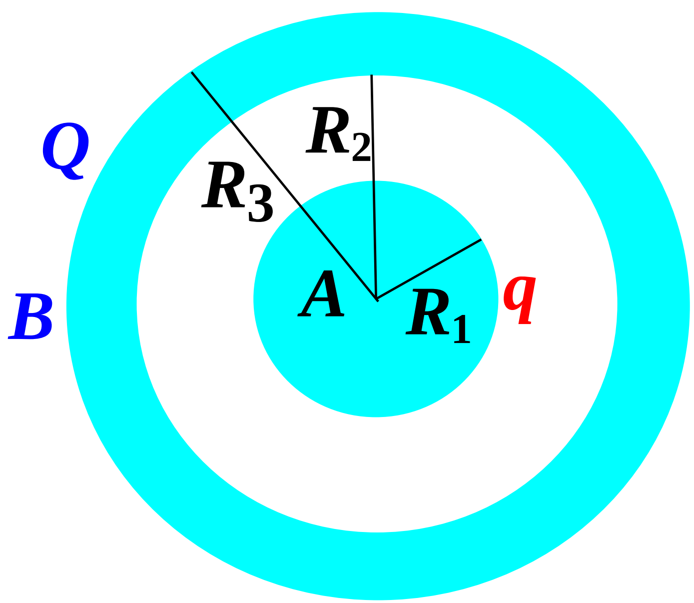
（1）各表面电荷分布

（2）导体球A的电势U_A

（3）将B接地，各表面电荷分布。

（4）将B的地线拆掉后，

再将A接地时各表面电荷分布。



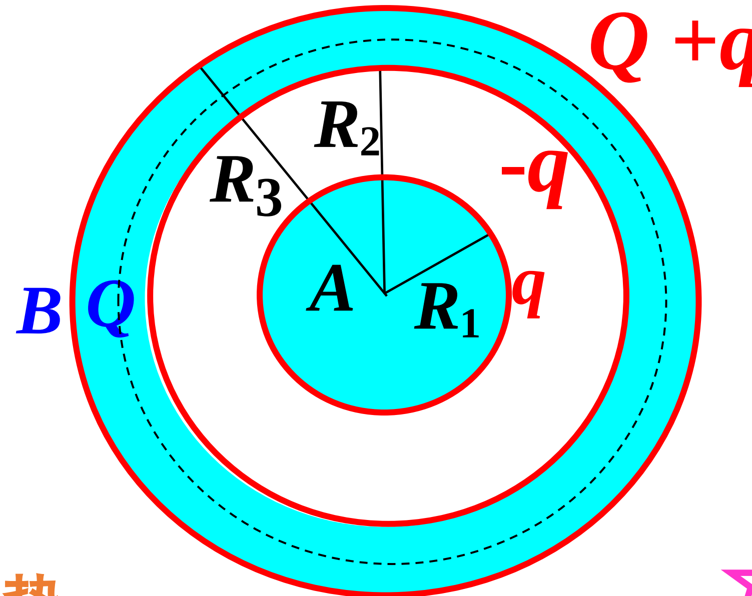
解. （1）求表面电荷

A 表面：q

B 内表面：$-q$

B 外表面：$Q+q$

高斯定理



（2）A的电势

三带电球面在球心处的电势

$$U_{OA}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$U_{OB1}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$U_{OB2}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

电势叠加 $U_O=U_{OA}+U_{OB1}+U_{OB2}$

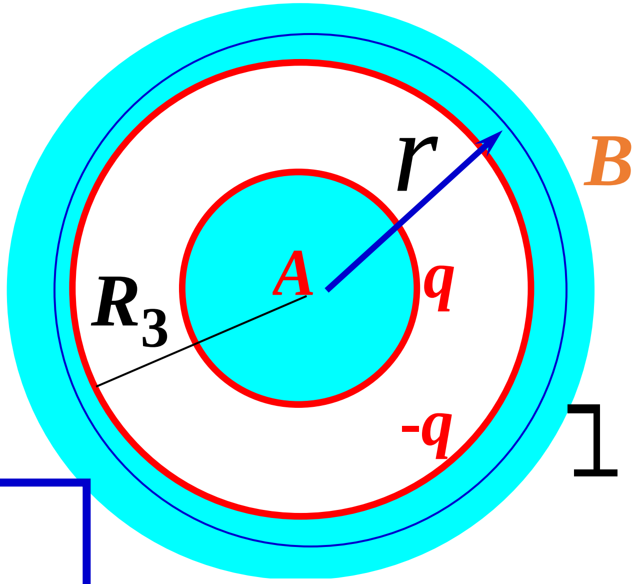
等势体 $U_A=U_O$

$$U_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

（3）B 接地，求表面电荷。 ☆

电荷守恒，A 表面的电荷不变化

$$Q_A = q$$



高斯定理

$$Q_{B1} = -Q_A = -q$$

接地结果：$U_B=0$

三个面电荷的电势

$$U_{rA} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_{rB1} = \frac{Q_{B1}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_{rB2} = \frac{Q_{B2}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

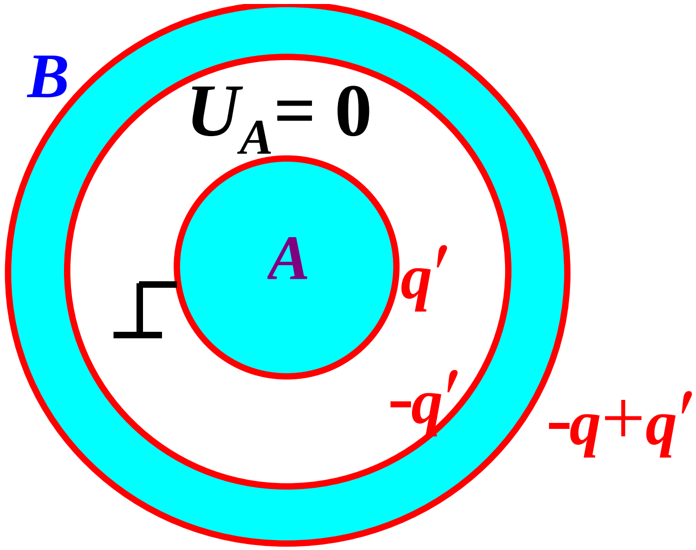
$$U_r = U_{rA} + U_{rB1} + U_{rB2} = \frac{Q_{B2}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_B = U_r = \frac{Q_{B2}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0 \qquad Q_{B2} = 0$$

B 外表面：无电荷

（4）*B*的接地线拆掉，再将*A*接地，求表面电荷

设*A*表面电荷为q'



☆

则*B* 内表面：$-q'$

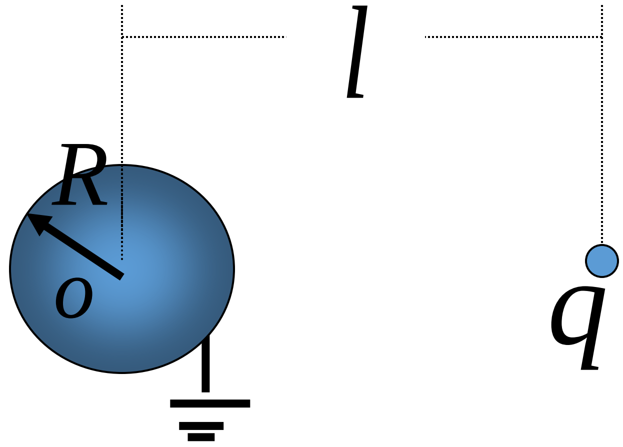
B 外表面：$-q+q'$

$$U_A=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

可解出 $q'(\neq q)$

$$q'=\frac{R_1R_2}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}q$$

例3　接地导体球附近有一点电荷q,如图所示 ☆
求:导体上感应电荷的电量



解:　接地　即　$U=0$

设:感应电量为Q

由导体是个等势体　知

o点的电势为0　由电势叠加原理有关系式:

球面上的电荷可以不是均匀分布的，仍然可以使用电势叠加原理

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0$$

$$\boxed{Q=-\frac{R}{l}q}$$

第六节　有电介质存在时的静电场　☆

电介质就是电的绝缘体（一般认为电阻率超过$10^8\Omega\cdot m$的物质），

不像导体那样可以导电（在电场的作用下自由电荷可以定向移动）。

电介质也是由原子分子组成，但电介质内没有可以自由移动的电荷，

电场不能使电介质内的电荷自由定向移动，

但外加电场会影响电介质的性质，从而反过来影响电场。

电介质与外电场的这种相互影响（作用）达到平衡时，

在电介质内部形成稳定的电场（静电场）

（静电平衡时导体内电场强度为零）。

一　电介质对电场的影响

二　电介质的极化

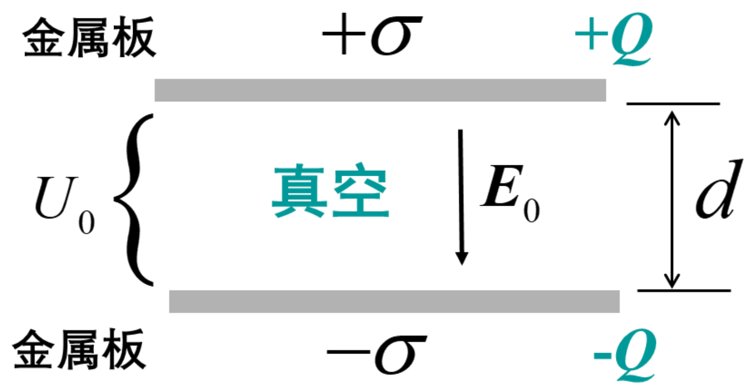
三　电介质中的电场分析

四　有电介质存在时的高斯定理

五　有电介质存在时的环路定理

一　电介质对电场的影响

☆

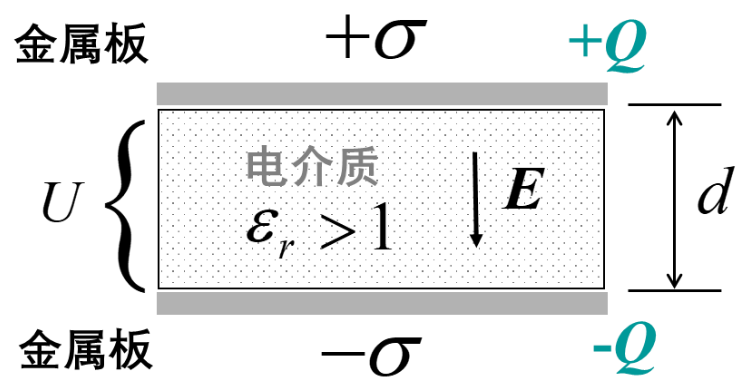


在平行平板电容器的两个极板（可以看作无限大平板）上分别充有正负电荷量 $\pm Q$（面电荷密度分别为 $\pm\sigma$），

在电容器内部空间（真空）静电场

$$E_0 = \sigma / \varepsilon_0$$

$$U_0 = E_0 d = \sigma d / \varepsilon_0$$



如果在电容器内充满相对介电常数为 ε_r（$\varepsilon_r > 1$）的各向同性电介质，

实验发现

电容器内静电场被减弱：

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d$$

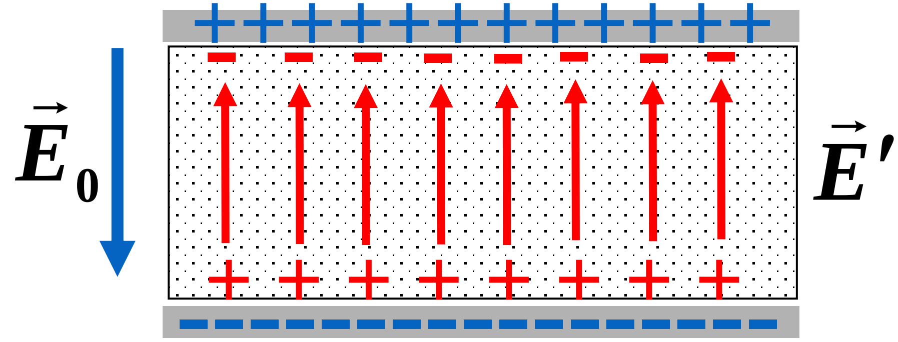
如何解释上述实验结果？ ☆

电介质情况：

端面出现电荷

“束缚电荷”

或称“极化电荷”



对于静电场中的电介质，电介质中不存在自由移动的自由电子，电荷不能作宏观定向移动。但是，在外电场的作用下，在电介质中的分子（或原子）产生“极化”，在电介质端面产生“极化电荷”或“束缚电荷”。“极化电荷”产生电场，与外电场方向相反，电场矢量叠加，使得电介质中的总电场强度减弱。当外电场对电介质中电荷的作用力、极化电荷产生电场对电介质中电荷的作用力、分子内部电荷之间的作用力等达到平衡时，电介质的极化宏观上停止，达到一种静电平衡。

束缚电荷的电场E'不能全部抵消E_0，只能削弱总场E.

二　电介质的极化 ☆

1 电介质的电结构

电中性的分子中，带负电的电子(或负离子)与带正电的原子核(或正离子)束缚得很紧，不能自由运动

电偶极子模型:

每一个分子中的正电荷集中于一点，称正电荷重心;

负电荷集中于另一点，称为负电荷重心

— 两者构成电偶极子

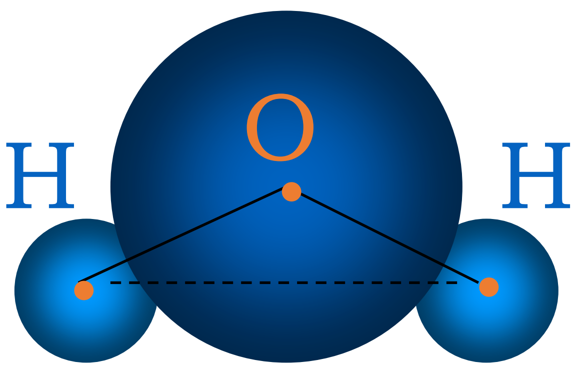
每个电偶极子的电矩　$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$

2 极性分子和非极性分子 ☆

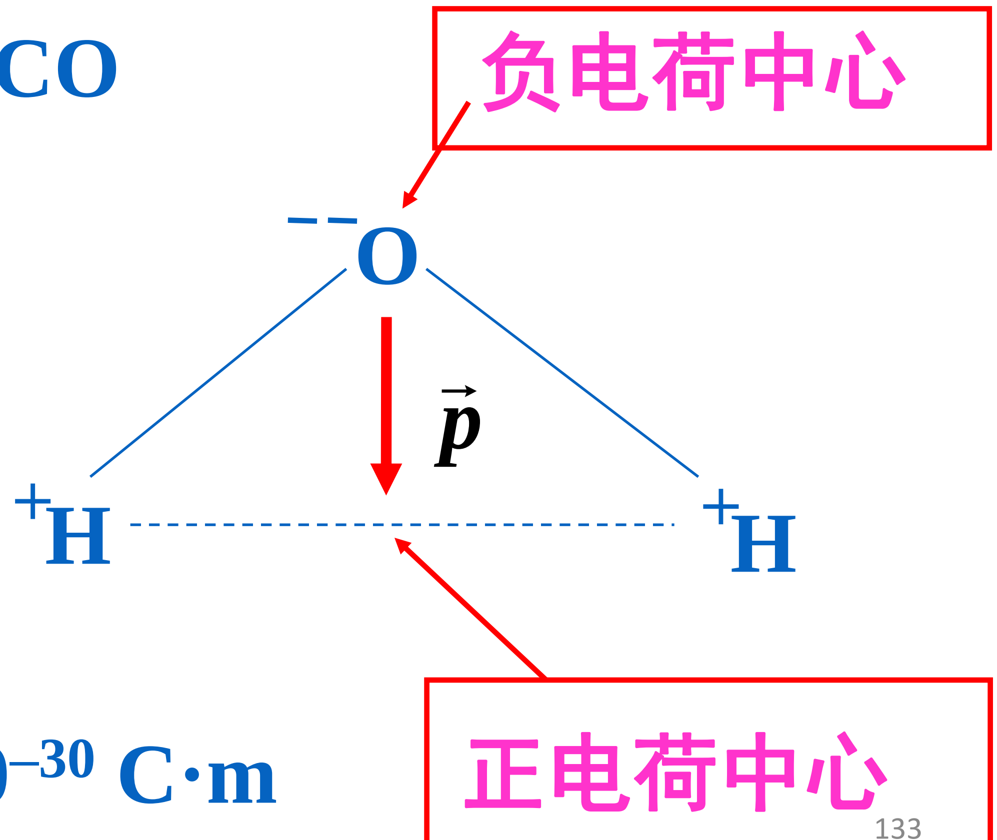
（1）极性分子— 极性电介质

分子正负电重心不重合 有固有电偶极矩

例如 HCl、H_2O、CO



H_2O



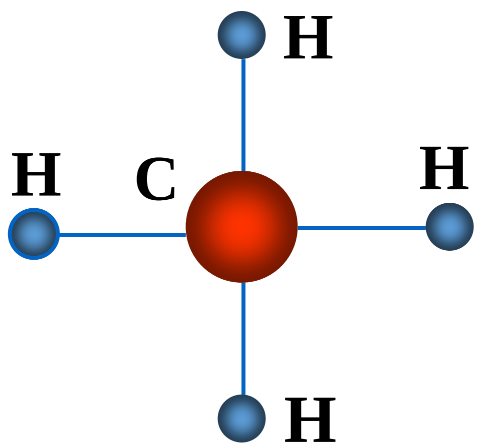
固有电偶极矩 $\sim 10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m}$

☆

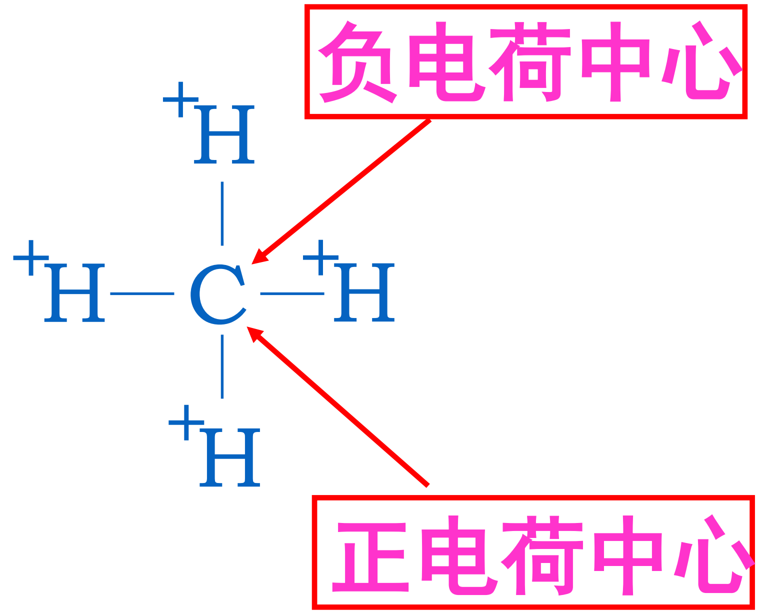
（2）非极性分子 — 非极性电介质

分子正负电中心重合 无固有电偶极

例如 H_2、O_2、CO_2、CH_4



CH_4

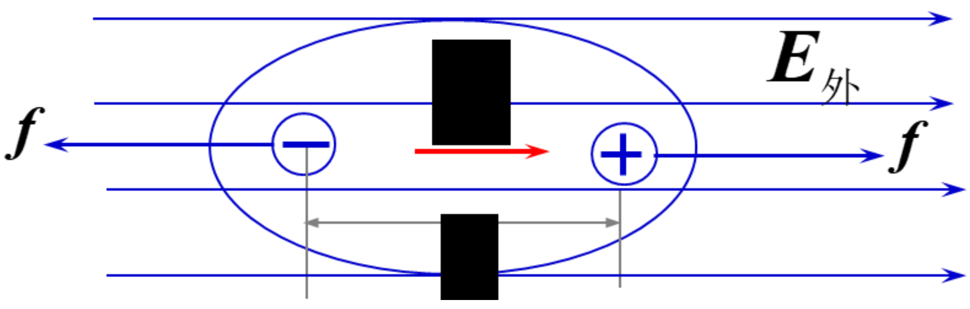


3 电介质的极化 ☆

（1）非极性分子的位移极化

无外电场：正负电荷重心重合，介质不带电

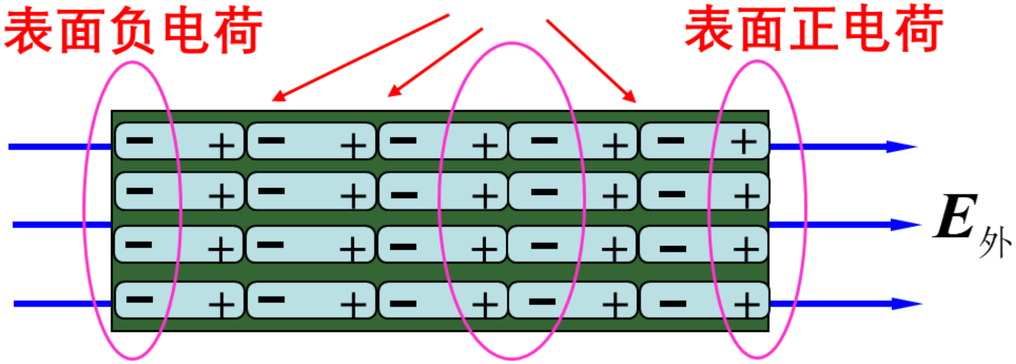
加外电场：



产生感生电偶极矩

主要是

电子（云）移动



极化的效果：

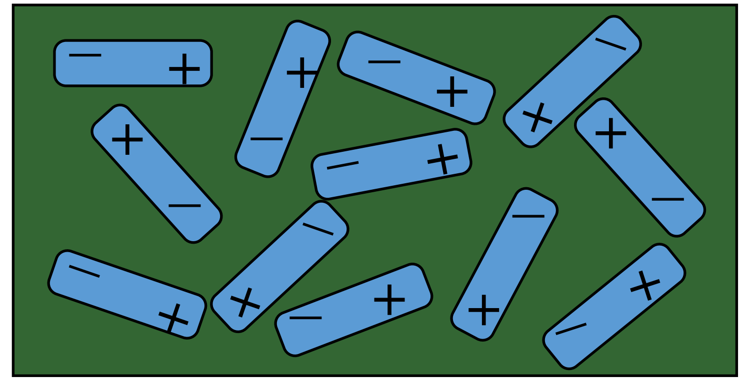
端面出现束缚电荷

（2）极性分子的取向极化 ☆

无外电场：

固有电矩热运动，

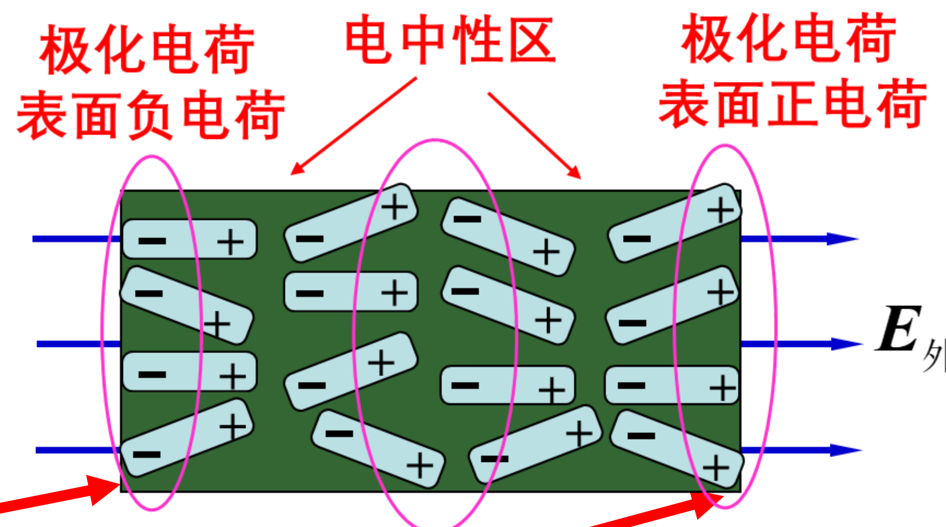
混乱分布，介质不带电。



加外电场：

外场取向与热混乱

运动达到平衡。

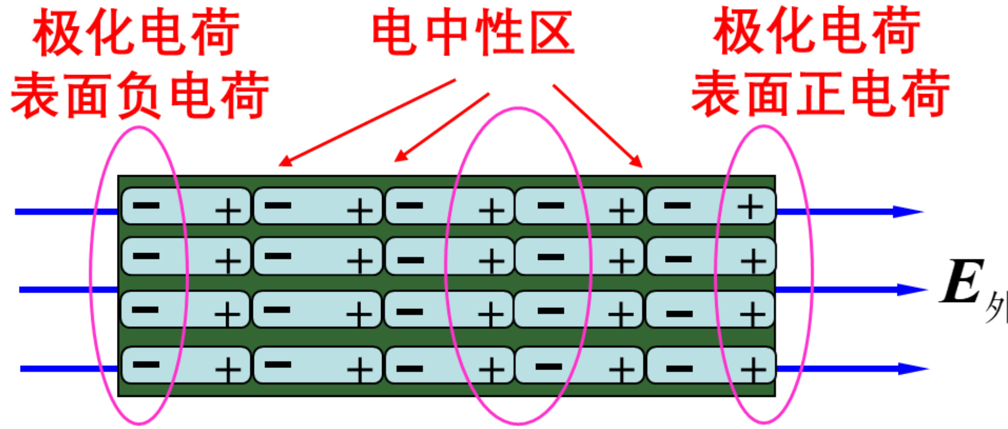


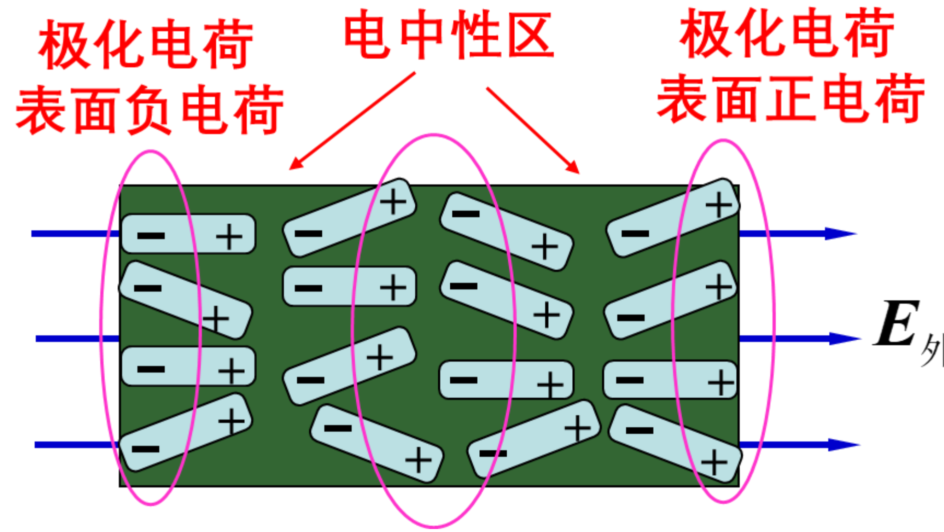
极化的效果：

端面出现束缚电荷

☆

在外电场的作用下，无论是极性分子还是非极性分子，正负电荷“中心”都会发生微小的变化，这种变化导致电介质表面显示出电性，称为**电介质的极化**。





由极化而在电介质表面产生的电荷称为**极化电荷**。

电介质表面的极化电荷与导体中的自由电荷不同，不能用传导的方法引走，因而又称为**束缚电荷**。

4 电极化强度 ☆

—表征电介质极化程度　　如何表征？

电极化强度：

电介质中某点附近单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\boxed{\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}}$$

表征极化程度

ΔV— 宏观小、微观大的体积元　　$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$

单位：$\mathrm{C/m^2}$　—面电荷密度？

极化状态：

各分子电偶极矩矢量和不会完全相互抵消。

均匀极化：

电介质各处极化强度*P*大小和方向都相同。

以均匀的非极性位移极化为例：

每个分子的正电荷重心相对于其负电荷重心都有一个位移*l*，各个分子的感应电矩都相同，电介质的极化强度为

$$\boxed{\vec{P}=n\vec{p}=nq\vec{l}}$$

n —单位体积内的分子数

5 各向同性、线性电介质的极化规律 ☆

电极化强度P～ 总场强E

方向相同（各向同性），成正比（线性）

$$\boxed{\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E},\quad \chi_e\equiv\varepsilon_r-1}$$

(实验结果)

χ_e—电极化率（介质性质，与场无关）

E—介质中的总场强(外电场＋束缚电荷电场)

ε_r—相对介电常数

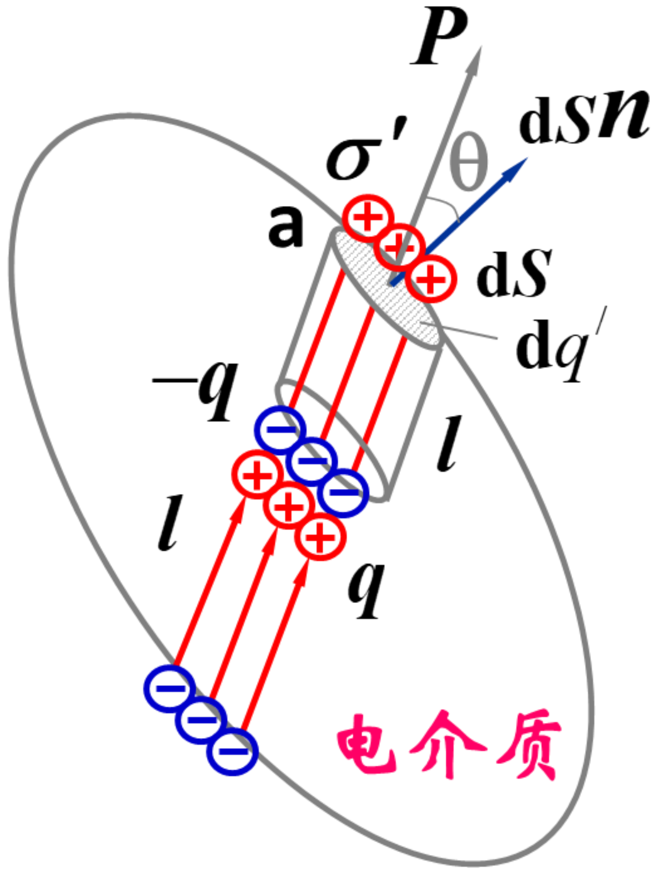
只讨论各向同性、线性电介质。

6 束缚电荷面密度与极化强度的关系

☆

表面 d*S* 出现的束缚电荷：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q' &= n\cdot(\mathrm{d}S\cdot l\cdot\cos\theta)q \\ &= nql\cos\theta\cdot\mathrm{d}S \\ &= np\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{d}S \\ &= P\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{d}S \\ &= P_{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$



$\boldsymbol{n}$ 面元外法线单位矢量

n 分子数密度

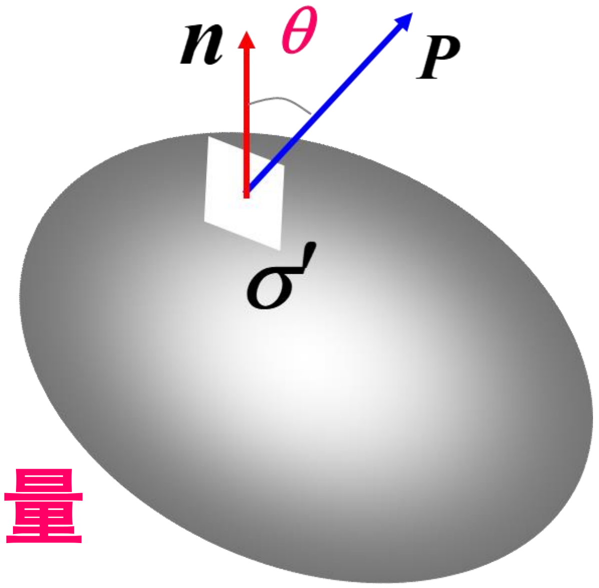
束缚电荷面密度：

$$\boxed{\sigma' = \frac{P_{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S} = P_{\mathrm{n}}}$$

以非极性电介质为例推导，结果也适用于极性电介质

束缚电荷面密度：

$$\sigma' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P\cos\theta$$



$\boldsymbol{P}$ ——表面该点的电极化强度矢量

$\boldsymbol{n}$——表面该点外法线方向单位矢量 ☆

束缚电荷面密度，等于电极化强度法向分量。

当 θ 为锐角时，电介质表面上出现一层正极化电荷。

当 θ 为钝角时，表面上出现一层负极化电荷。

7 铁电体和压电体

（阅读） ☆

（1）铁电体（ferroelectrics）

钛酸钡（ε_r～10^3—10^4）、酒石酸钾钠、…

P～*E* 关系是非线性的；

电滞效应—撤去外电场后*P*不会减为零，相对两表面仍存在异号极化电荷。

—增大电容器的电容（～10^3 倍）

—铁电记忆元件

（2）压电体 (piezoelectrics)

（阅读）☆

压电晶体、压电陶瓷

压电效应：机械形变（压缩或伸长）能改变电极化强度，对应两表面产生异号极化电荷。

电致伸缩 —逆压电效应

应用：电声换能器、压电晶体振荡器、压电变压器、压电传感器

三　电介质中的电场 ☆

用q'、ρ'、σ'表示极化电荷、极化电荷体密度、极化电荷面密度；

把不是由极化引起的宏观电荷称为自由电荷，
用q_0、ρ_0、σ_0表示自由电荷、自由电荷体密度、自由电荷面密度。

自由电荷电场为E_0，极化电荷电场为E'，总场强为E

1 迭代 算法

给定自由电荷分布q_0 $\rightarrow$电场$\vec{E}_0$

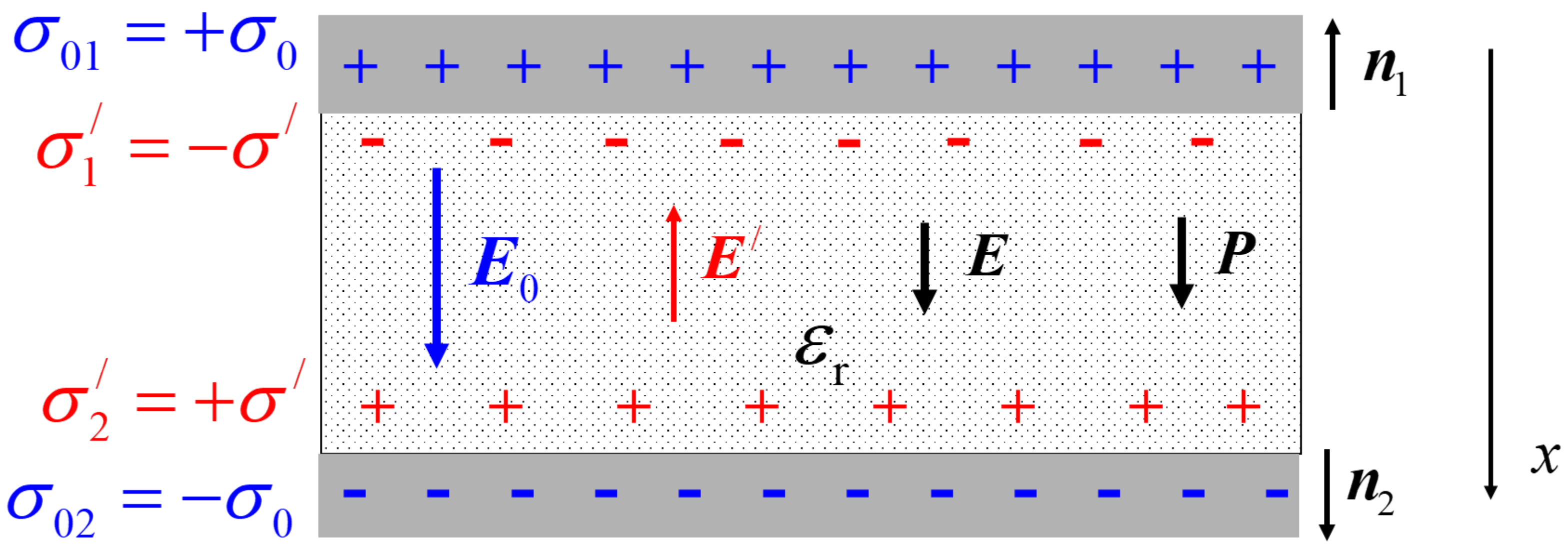
$\rightarrow$束缚电荷分布q'_1，束缚电荷电场$\vec{E}'_1$

$\rightarrow$电场重新分布$\vec{E}_1$ $\rightarrow q'_2$，$\vec{E}'_2 \rightarrow \vec{E}_2$

$\rightarrow \cdots$　　稳定q'，$\vec{E}'$，$\vec{E}$

2 电场合成法

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}$$ ☆



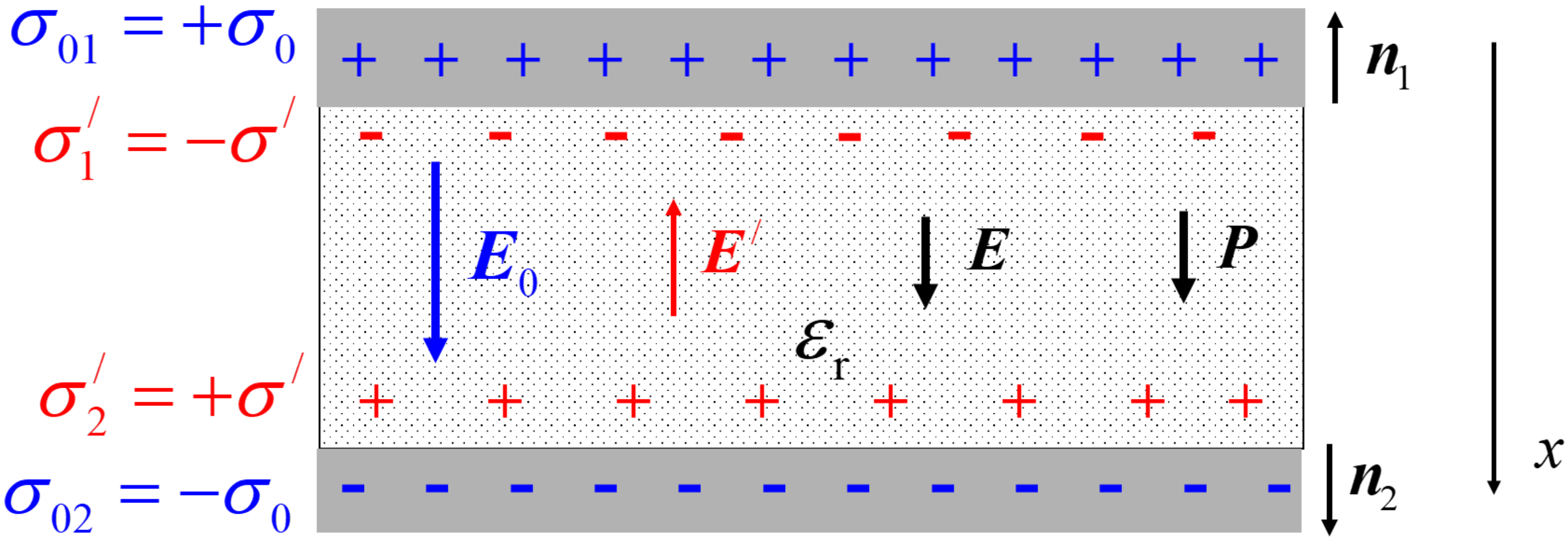
$$\sigma_1'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_1=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}_1=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E$$

$$\sigma_2'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_2=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}_2=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E$$

电介质表面的极化电荷σ_1'和σ_2'在电介质内产生的电场强度矢量合

$$\boldsymbol{E}'=+\frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i}-\frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i}=-\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i}-\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i}=-(\varepsilon_r-1)E\boldsymbol{i}=-(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}$$

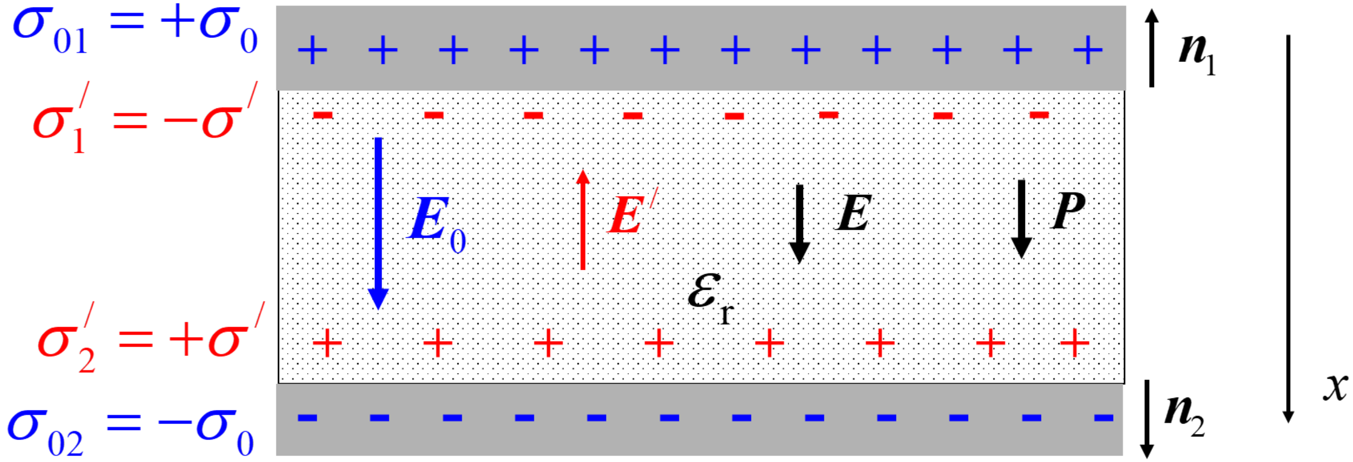
$$\boldsymbol{E}^{/} = -(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\boldsymbol{E}$$ ☆



按照实验规律 $E_0 = \varepsilon_{\mathrm{r}} E$ $\boldsymbol{E}_0 = \varepsilon_{\mathrm{r}} \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}^{/} = \varepsilon_{\mathrm{r}}\boldsymbol{E} - (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}^{/}$$

电介质内的电场强度是自由电荷在电介质内的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 与极化电荷在电介质内的电场强度 $\boldsymbol{E}^{/}$ 的矢量合。



$$E'=+\frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0}i-\frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0}i \qquad E=E_0+E' \qquad E_0=+\frac{\sigma_{01}}{2\varepsilon_0}i-\frac{\sigma_{02}}{2\varepsilon_0}i$$

极化电荷在电介质内的电场强度就如同电介质不存在一样（按真空对待），

$E'=\sigma'/\varepsilon_0$； 极化电荷，已经考虑到了电介质的存在。

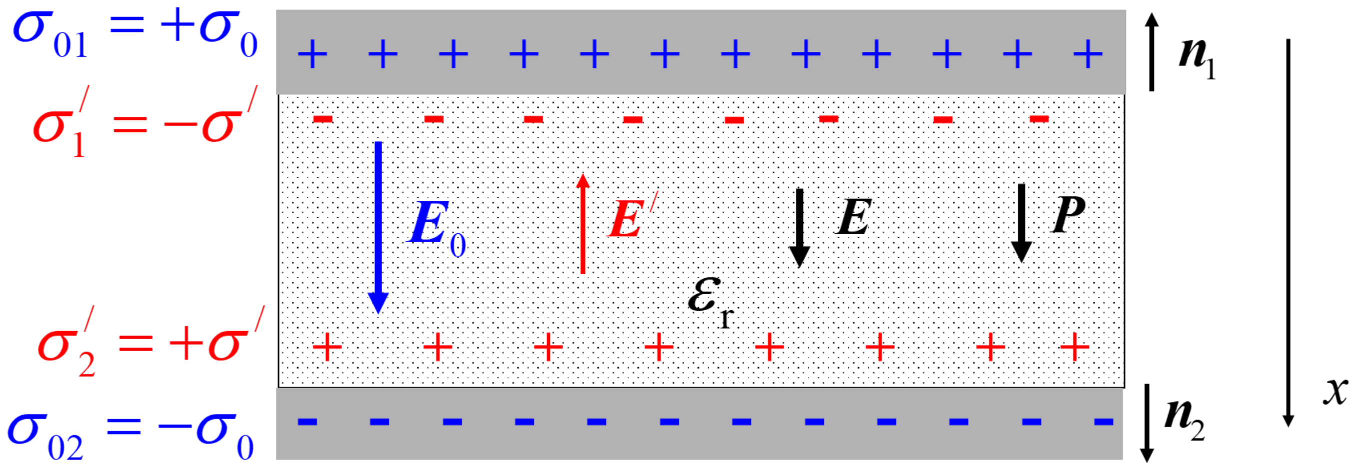
极化电荷 q' 代替了电介质的存在，整个空间就如同电介质不存在一样，

极化电荷与自由电荷同样如同在真空中激发电场，

电场强度是自由电荷与极化电荷在真空中该点的电场强度的矢量合。

计及极化电荷后，有关真空中的静电场规律都应该成立，

自由电荷与极化电荷共同激发的电场遵守真空中静电场的规律



☆

$$E'=+\frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0}i-\frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0}i \qquad E=E_0+E' \qquad E_0=+\frac{\sigma_{01}}{2\varepsilon_0}i-\frac{\sigma_{02}}{2\varepsilon_0}i$$

E 既与已知的自由电荷 q_0 的分布有关，

又与待定的极化电荷 q' 的分布有关。

极化电荷与极化强度有关，$\sigma'=P\cdot n$，

极化强度又与总电场强度有关，$P=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E$

陷入循环

常常引入一个包含束缚电荷效应的**辅助量** D，直接求 D，再求 E。

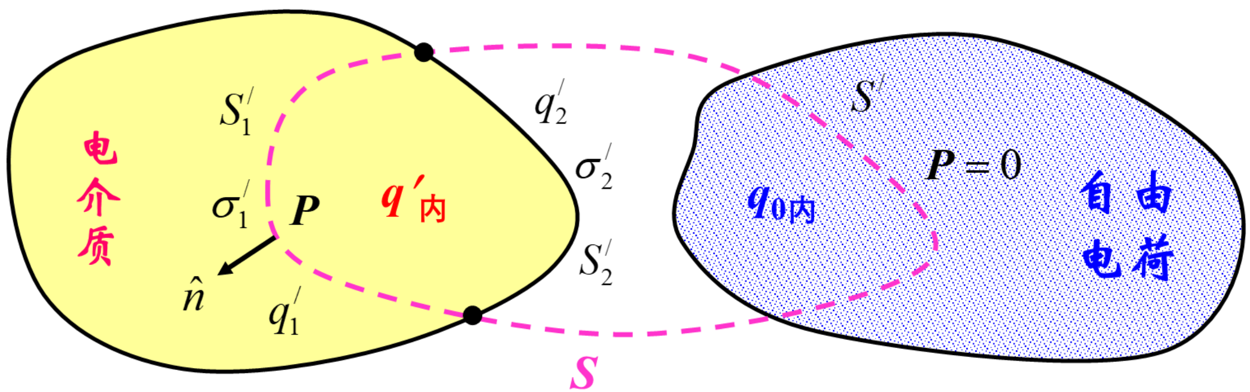
四　有电介质存在时的高斯定理 ☆

在有电介质存在时，高斯定理依然成立。

当然高斯面所包围的电荷

既包含自由电荷，又包含束缚电荷；

电场强度是全部自由电荷和束缚电荷共同产生的。

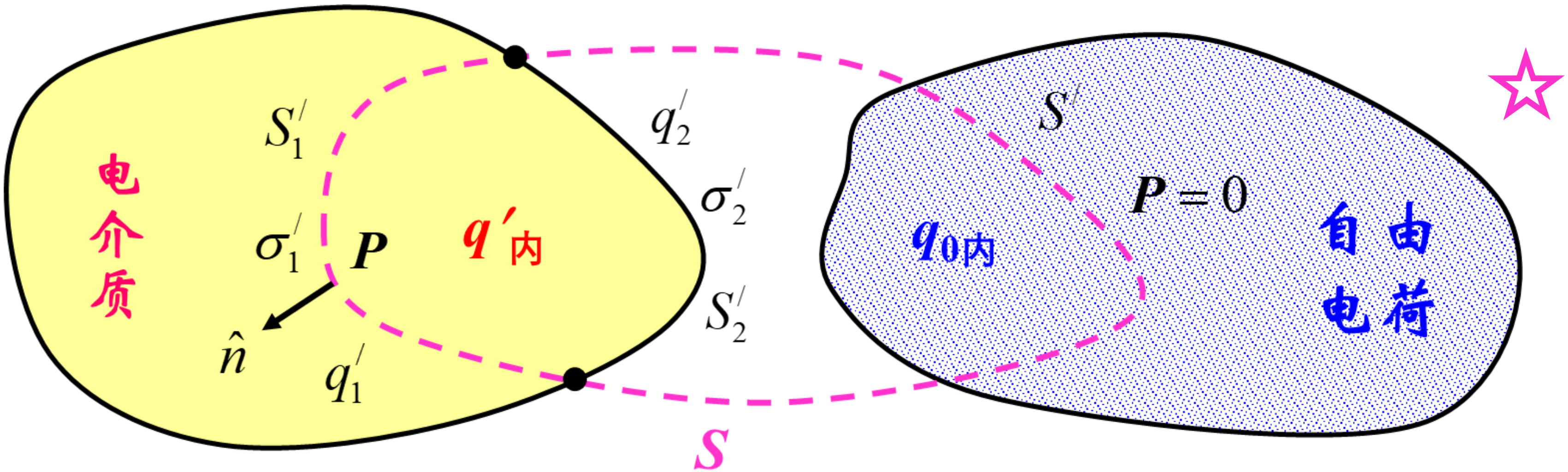


$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right)$$

真空中的高斯定理

$\boldsymbol{E}$ 为自由电荷与极化电荷在高斯面处各点的电场强度的矢量合，

$\sum q_{0内}$ 和 $\sum q'_{内}$ 为高斯面包围的自由电荷和极化电荷的代数和。



将高斯面 S 所截得的电介质部分单独拿出来，

其表面分成高斯面上的部分 S_1' 和其余部分 S_2'。

根据均匀电介质的电中性，面 S_1' 上的极化电荷 q_1' 与

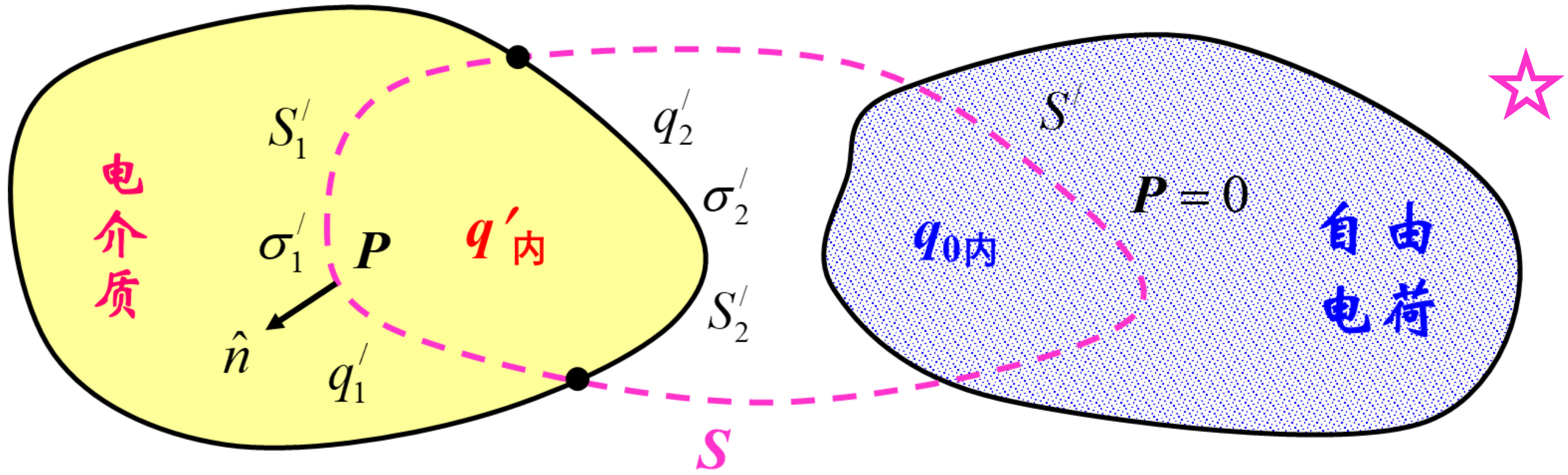
面 S_2' 上的极化电荷 q_2' 的代数和为零， $q_2'+q_1'=0$。

根据极化强度矢量与极化（束缚）电荷面密度的关系，有

$$q_1' = \iint_{S_1'} \sigma_1' \, \mathrm{d}S = \iint_{S_1'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad q_2' = \iint_{S_2'} \sigma_2' \, \mathrm{d}S = \iint_{S_2'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以，高斯面包围的极化（束缚）电荷为

$$q_2' = -q_1' = -\iint_{S_1'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



高斯面包围的
极化（束缚）电荷

$$q_2' = -q_1' = -\iint_{S_1'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

再将高斯面 S 分为在电介质内的部分 S_1' 和在电介质外的部分 S'；

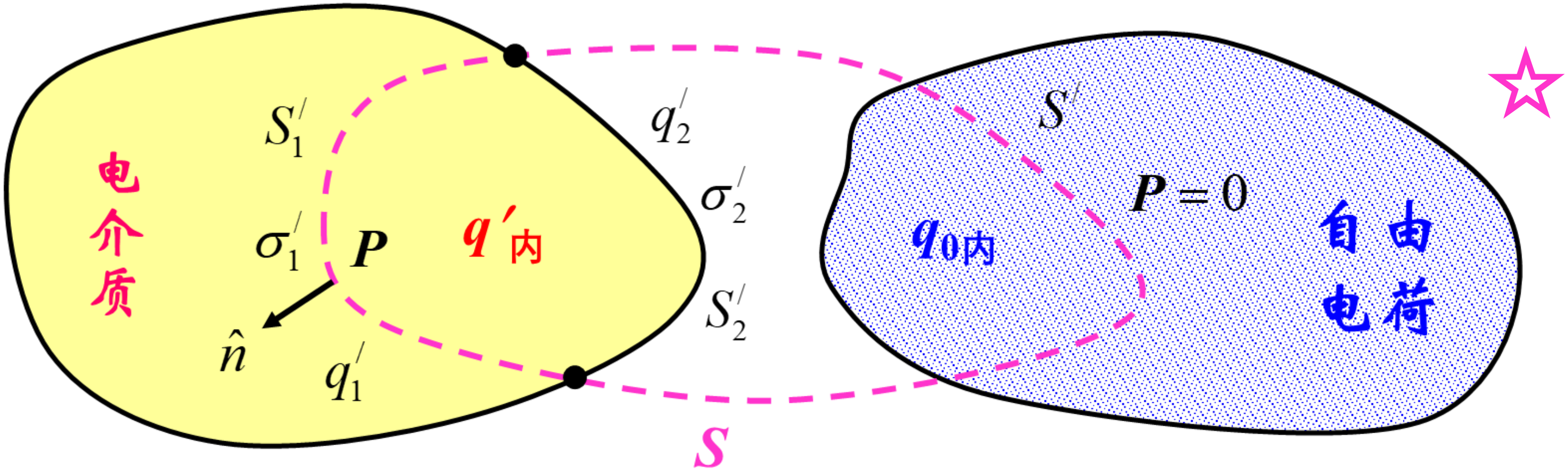
在电介质外的部分 S' 处没有电介质，

极化强度为零 $P=0$，因此 $\iint_{S'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$。

$$q'_{内} = -\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这样，高斯面包围的束缚电荷还可以写为

$$q'_{内} = q_2' = -\iint_{S_1'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_1'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{S'} \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



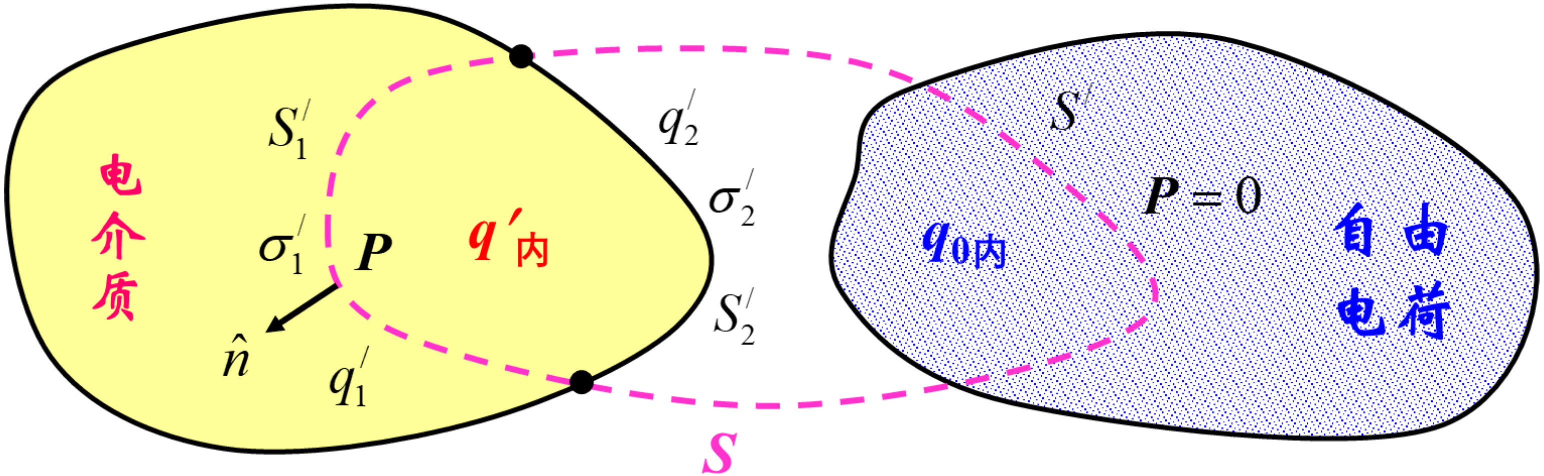
$$q'_{内} = -\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right)$$

有电介质存在时，电场强度的**高斯定理**为

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum q_{0内}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint\!\!\!\oint_S \underline{(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_{0内}}$$



☆

$$\oiint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_{0内}$$

D 的高斯定理微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

定义(引入)电位移矢量 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$

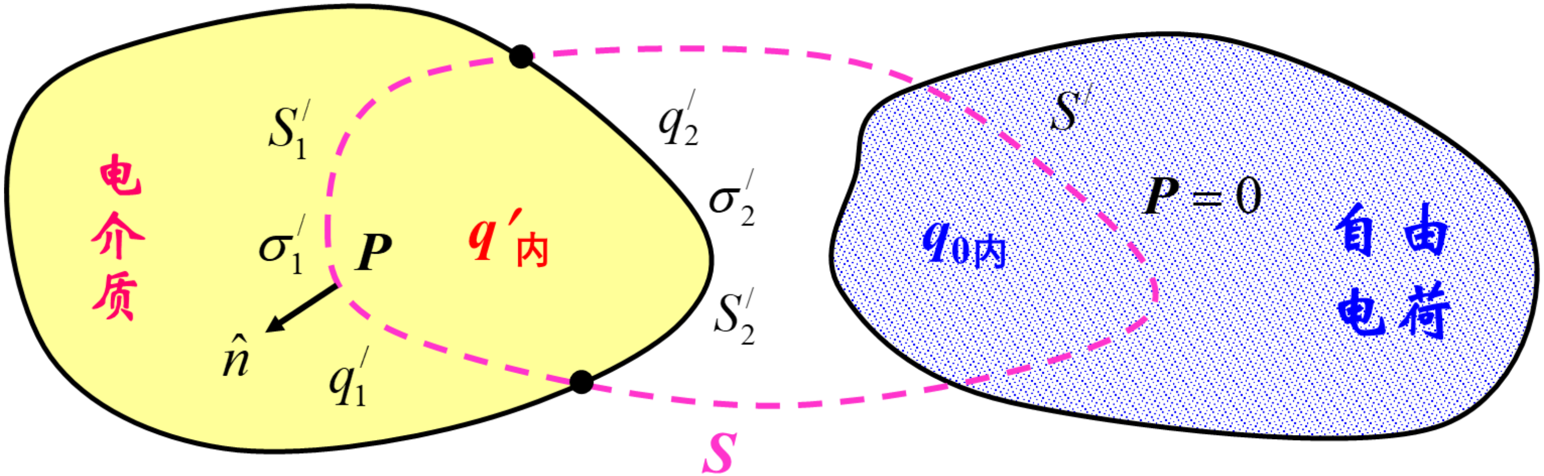
电位移矢量的高斯定理（有电介质存在时的高斯定理，D 的高斯定理）

$$\boxed{\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_0}$$

通过任意封闭曲面的电位移矢量的通量，等于该封闭面所包围的自由电荷的代数和。

在闭合面上的 D 通量只与闭合面内的自由电荷有关。

电位移线（D线）发自正自由电荷，终止于负自由电荷。



$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum q_0 \qquad \boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

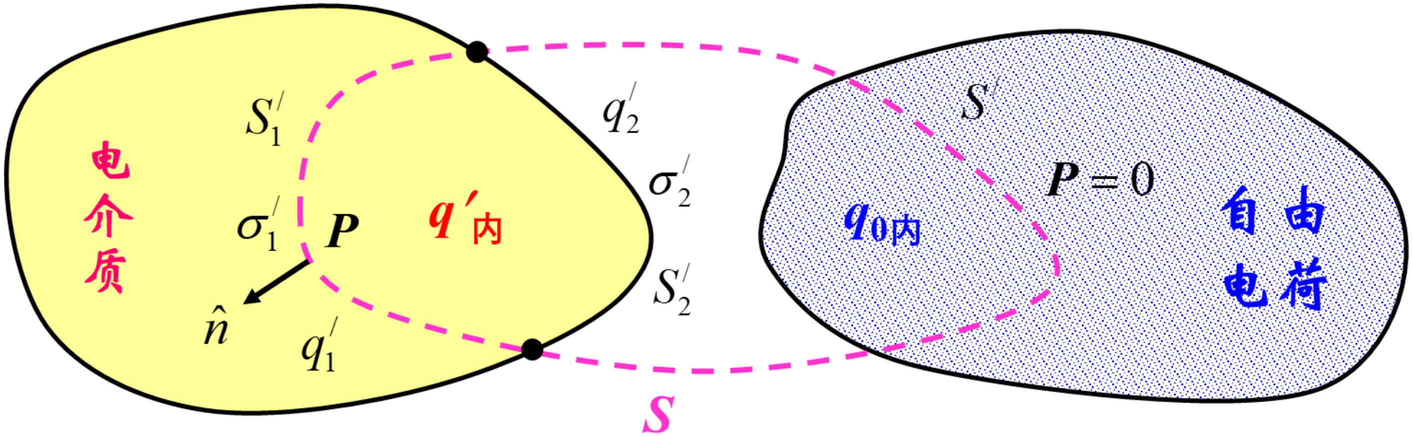
因为，$\boldsymbol{E}$ 是所有电荷共同产生的，$\boldsymbol{P}$ 与束缚电荷有关，所以，$\boldsymbol{D}$ 的分布一般也与束缚电荷（介质分布）有关。

只有当介质的分布满足一定条件时，$\boldsymbol{D}$ 才与束缚电荷无关。

在对称性较好的情况下，先求得 $\boldsymbol{D}$，再进一步得到 $\boldsymbol{E}$ 等。

在真空中极化强度为零，$\boldsymbol{P}=0$，则 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，

由此得到 $\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_0$，还原为真空中的高斯定理。



由 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，

得到在各向同性线性电介质中 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 之间的关系

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$$

在各向同性线性电介质中，

电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 方向相同、大小成正比。

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q_0$$

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\sum q_0=\frac{1}{\varepsilon}\sum q_0}$$

$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ 为各向同性线性电介质的介电常数

五 有电介质存在时的环路定理 ☆

有电介质存在时，计及极化电荷后，
真空中的静电场规律都应该成立。

有电介质存在时，
静电场的环路定理

$$\boxed{\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0}$$

$\boldsymbol{E}$ 是自由电荷电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 与束缚电荷电场强度 $\boldsymbol{E}'$ 的矢量合。

回路可以是整个都在电介质中，也可以是部分再电介质中部分在真空中。

空间两点的电势差和某点的电势的定义为

$$\boxed{U_{\mathrm{ab}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

$$\boxed{U_{\mathrm{P}} = U_{\mathrm{P}} - U_{\mathrm{P}_0} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

$\boldsymbol{E}$ 为自由电荷与极化电荷的电场强度的矢量合 $U_{\mathrm{P}_0} = 0$

☆

电场、束缚电荷的计算

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0 \qquad \boldsymbol{q_0} \rightarrow \vec{\boldsymbol{D}}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \qquad \vec{\boldsymbol{D}} \rightarrow \vec{\boldsymbol{E}}$$

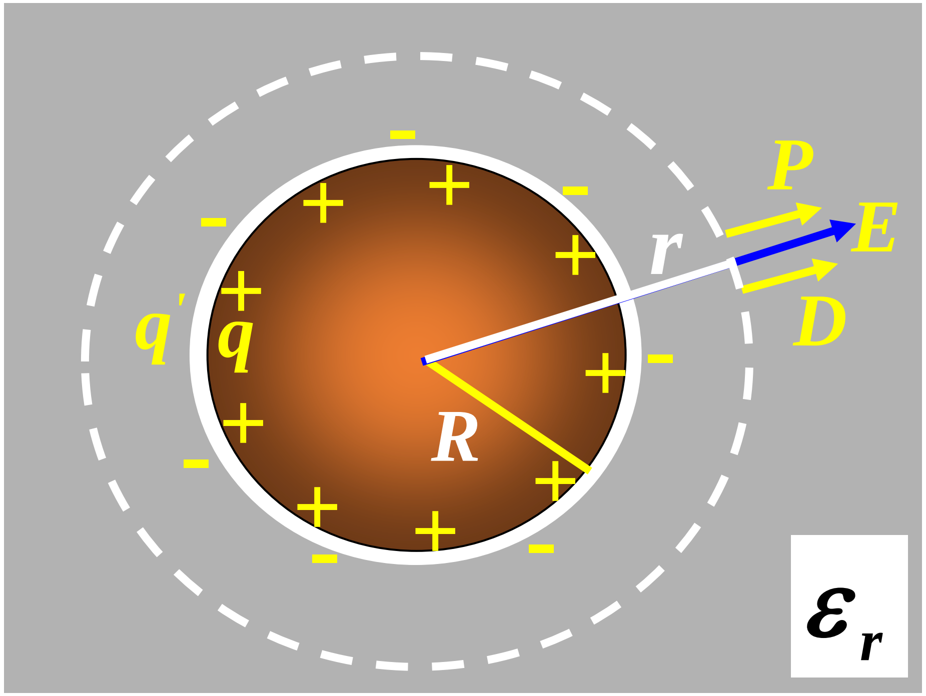
$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E} \qquad \vec{\boldsymbol{E}} \rightarrow \vec{\boldsymbol{P}}$$

$$\sigma'=\vec{P}\cdot\hat{n} \qquad \vec{\boldsymbol{P}} \rightarrow \sigma'$$

例1一带正电q的金属球浸在油中。求球外的电场分布和贴近金属球表面的油面上的束缚电荷。

☆

解： ***D*** **的高斯定理**



$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint\!\!\oint_S D dS$$

$$= 4\pi r^2 D = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} < E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

为什么？

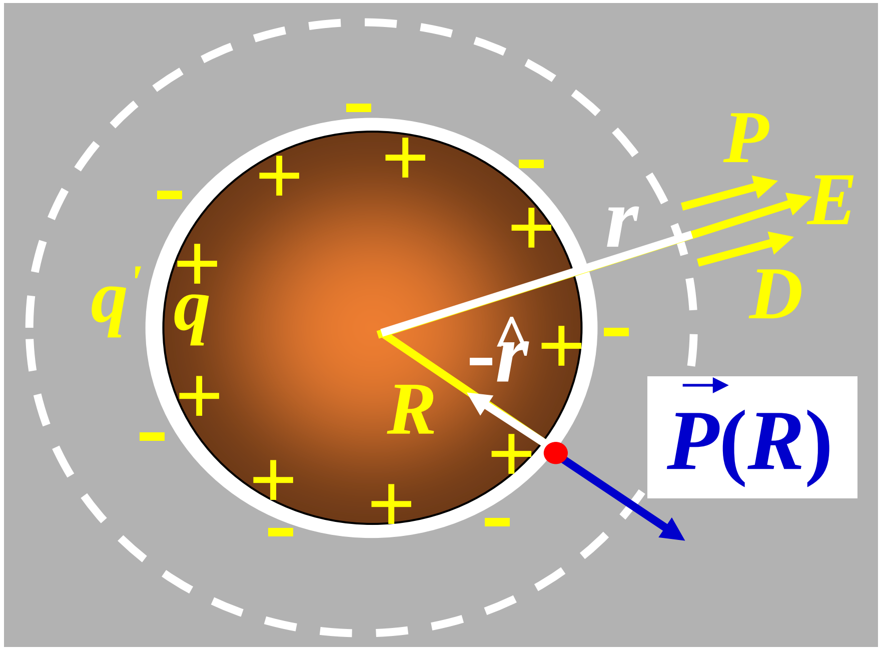
极化电荷的贡献

电介质中的极化强度

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$$

$$=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

$$=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$



球表面的油面上的束缚电荷：

$$\hat{n}=-\hat{r}$$

$$\sigma'=\vec{P}(R)\cdot(-\hat{r})=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q}{4\pi R^2}$$

$$q'=4\pi R^2\cdot\sigma'=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})q$$

q'**总与 q 反号，数值小于q 。** ☆

【思考】油内出现体束缚电荷吗？

不会，均匀电介质

另一解法：　　用 E 的高斯定理 ☆

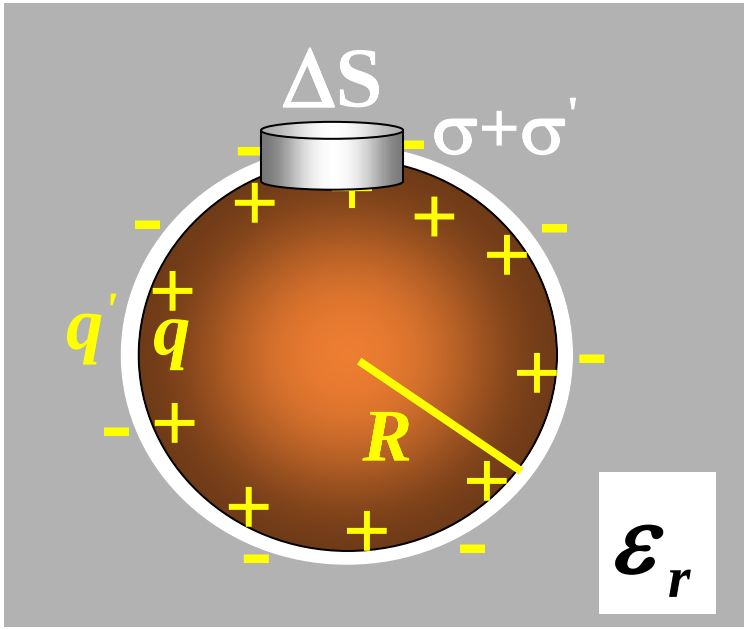
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_S EdS = ES = (q+q')/\varepsilon_0 = (\sigma+\sigma')S/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{\sigma+\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \vec{P}\cdot(-\hat{r}) = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

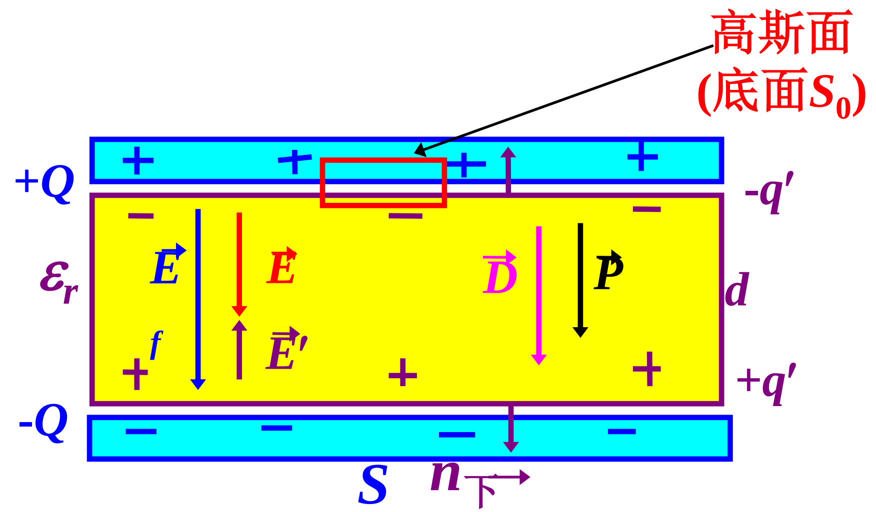
$$\sigma' = -(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma$$

$$q' = -(1-\frac{1}{\varepsilon_r})q$$



例2 带电分别为正负Q的两均匀带电导体板间充满相对介电常数为 的均匀电介质，求
(1)电介质中的电场；(2)电介质表面的束缚电荷。

解：高斯定理



$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = DS_0$$

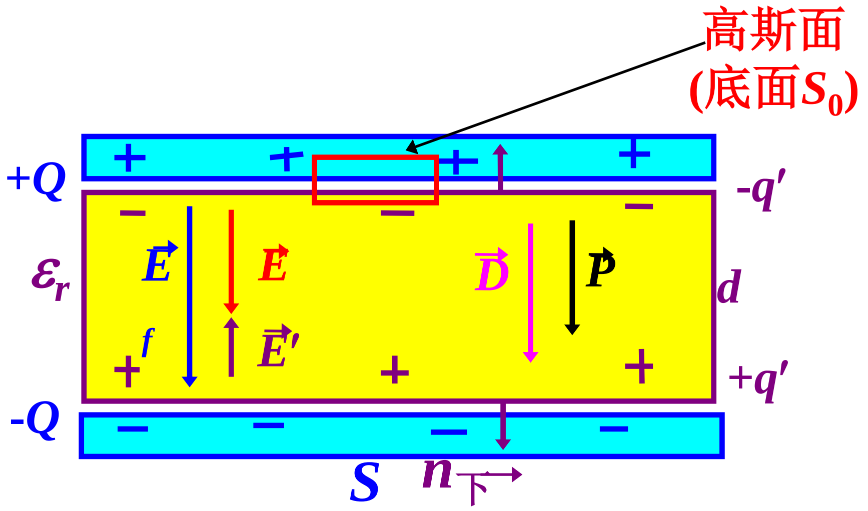
$$= q_{0内} = \frac{Q}{S}S_0$$

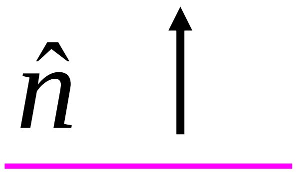
$$D = \frac{Q}{S} = \sigma_0$$

$$\boxed{E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{S\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

☆

$$P=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{S}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$



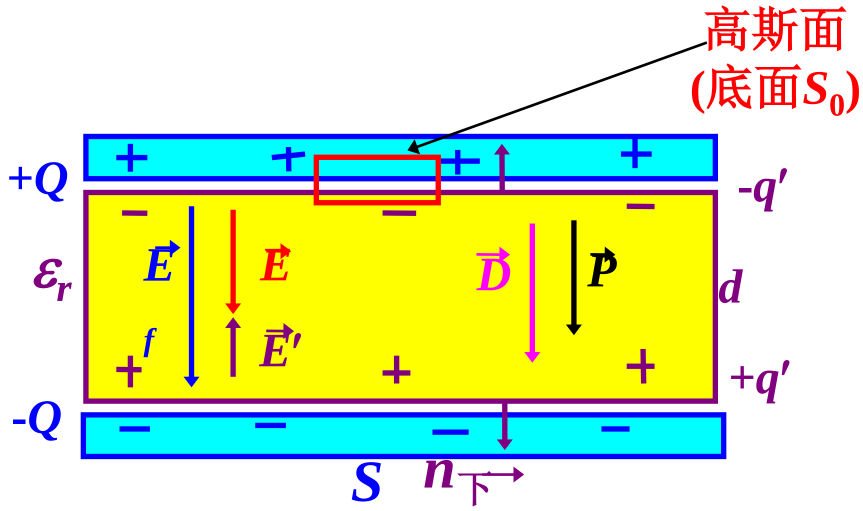


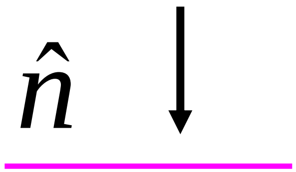
$$\sigma_{上}'=\vec{P}\cdot\vec{n}_{上}=-P=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{S}=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$

$$\boxed{q_{上}'=\sigma_{上}'S=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})Q}$$

☆

$$P=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{S}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$





$$\sigma_{下}'=\vec{P}\cdot\vec{n}_{下}=P=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{S}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$

$$\boxed{q_{下}'=\sigma_{下}'S=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})Q}$$

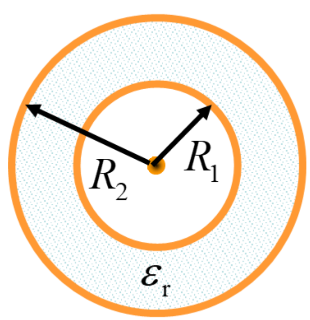
第七节　静电场的能量 ☆

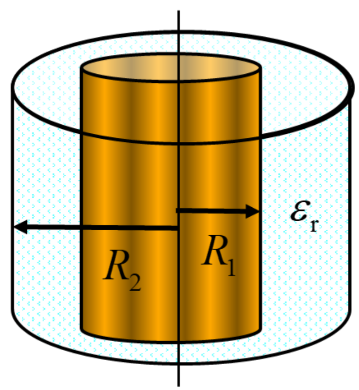
静电场是一种物质形态，静电场具有能量。

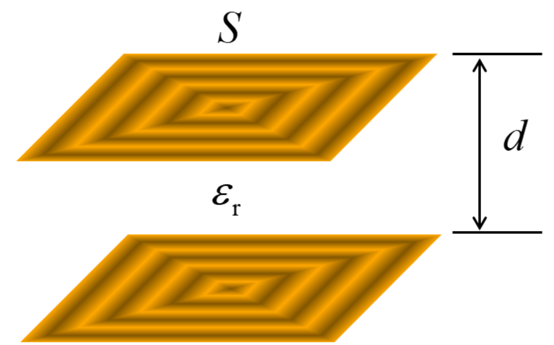
一　电容器

两块金属导体绝缘放置，或在两块金属导体之间充上（满或不满）电介质，就构成一个电容器。

两块金属导体称为电容器的极板。







当电容器的两个极板分别用导线接到电源的正负极上时，电源的电荷就经导线移动到两个极板上（电容器充电），一个极板带有一定的电荷，另一极板带有等量异号电荷。

电容器充电后，两极板间产生电场，电场储存能量

电容器的电容

☆

电容器两极板带等量异号电荷$\pm Q$，

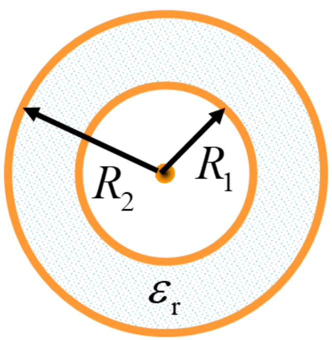
两个极板的间电势差为U_1-U_2，

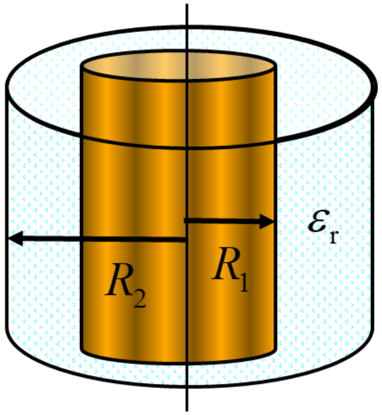
则电容器的电容定义为

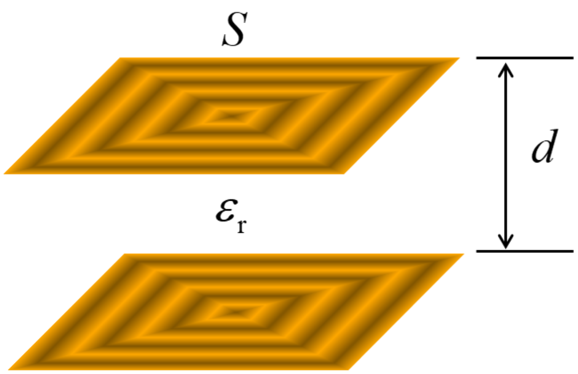
$$C=\frac{Q}{U_1-U_2}$$

实验和理论都表明，电容的值只取决于极板的大小、形状、相对位置及其间所充的电介质等因素。

对给定的电容器，C与极板是否带电无关。





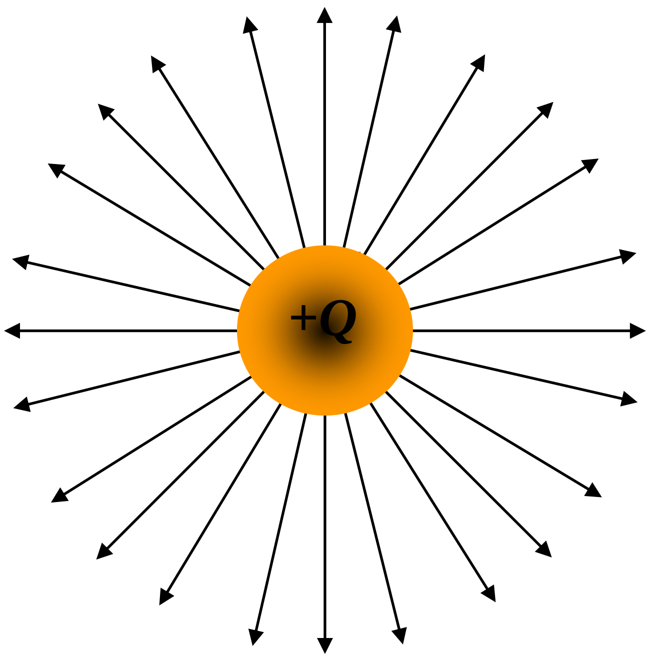


$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{\varepsilon S}{d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

孤立导体的电容



定义电容 $C=\dfrac{Q}{U}$

单位 法拉（F） 微法（μF）

球形导体 $\begin{cases} U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ C=4\pi\varepsilon_0 R \end{cases}$

典型电容器电容的计算 ☆

基本步骤
- 1、设电容器两极板分别带 ±**Q** 电荷；
- 2、计算极板间的电势差Δ*U*；
- 3、根据定义求出电容*C* 。

1 求平板电容器的电容 （极板面积S、间距d 、 充电介质介电常数 ε）。

设两极板分别带 ±Q 电荷

$$D = \sigma = \frac{Q}{S} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

$$\Delta U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

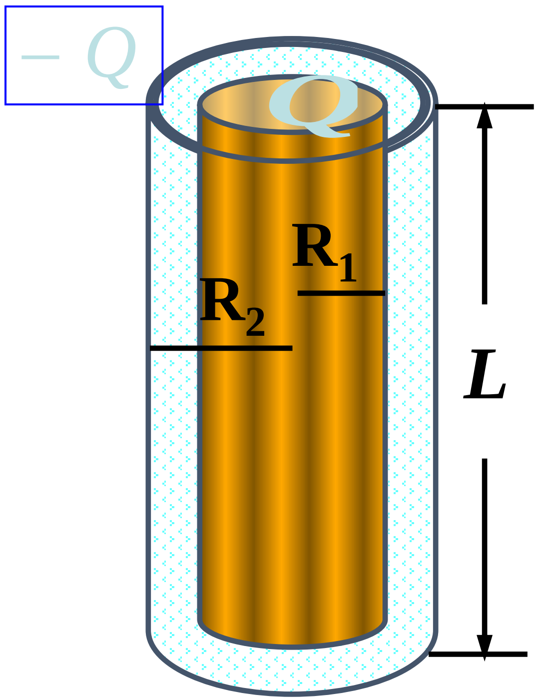
$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}}$$

电介质减弱了极板间的电场和电势差，电容增加到ε_r 倍。

2 求圆柱形电容器的电容 （筒长L、内外半径分别为R_1、R_2，充电介质介电常数 ε）。 ☆

高斯定理

设两极板分别带 $\pm Q$ 电荷



两极板间距离中轴r处电场强度为

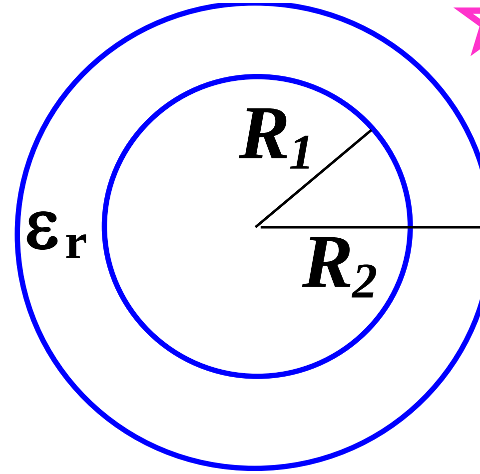
$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}=\frac{Q}{2\pi L r}$$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L r}$$

$$\boxed{C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$$

$$\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q\,dr}{2\pi\varepsilon L r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

3 球形电容器的电容



$$D=\frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}}$$

对于孤立导体球：

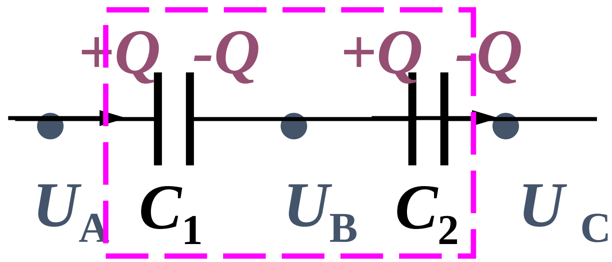
$$R_2\to\infty,\quad R=R_1,\quad \varepsilon_r=1$$

$$C=4\pi\varepsilon_0 R$$

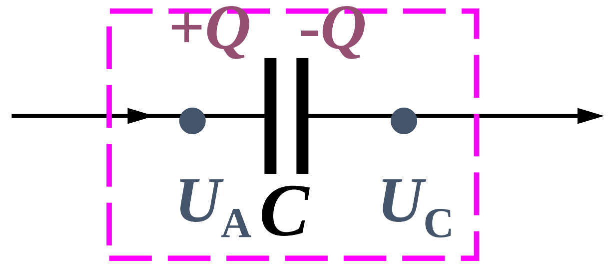
电容器的串联与并联

☆

1、串联



等效电容



$$U_A - U_B = \frac{Q}{C_1}$$

$$U_B - U_C = \frac{Q}{C_2}$$

$$U_A - U_C = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\boxed{U_A - U_C = \frac{Q}{C}}$$

定义

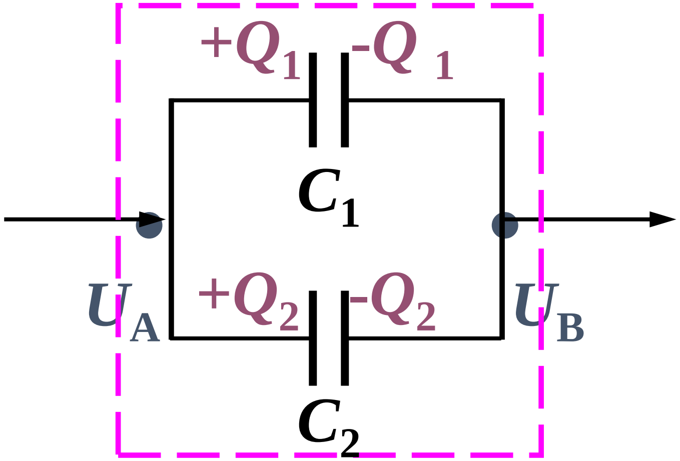
$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

n 个电容器串联

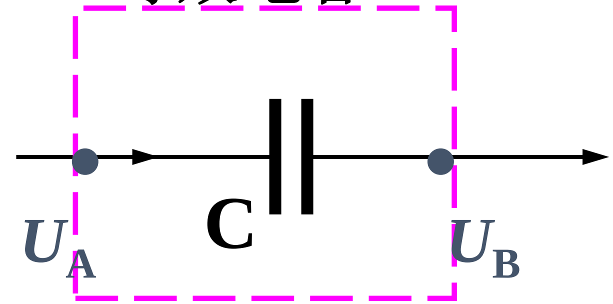
等效电容

$$\frac{1}{C} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$

2、并联



等效电容



$$C_1=\frac{Q_1}{U_A-U_B}$$

$$C_2=\frac{Q_2}{U_A-U_B}$$

$$Q_1=C_1(U_A-U_B)$$

$$Q_2=C_2(U_A-U_B)$$

$$Q=Q_1+Q_2=(C_1+C_2)(U_A-U_B)$$

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}$$

定义

$$Q=C(U_A-U_B)$$

$$C=C_1+C_2$$

n 个电容器并 联

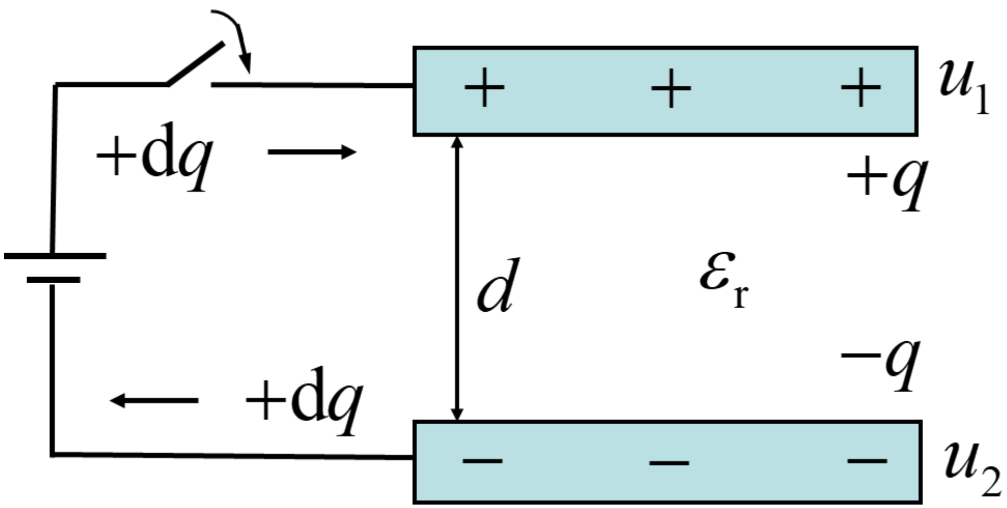
等效电容为

$$C=\sum_i^n C_i$$

二　电容器储存的能量 ☆

在电容器充电过程中，电源提供的电场对电荷做功，使电容器的正极板带正电荷、负极板带负电荷。

电容器的电容为 C，设某一时刻极板所带电量为 $\pm q$，
电源电场力把微小电荷元 $+\mathrm{d}q$ 从电容器的负极板迁移到正极板，



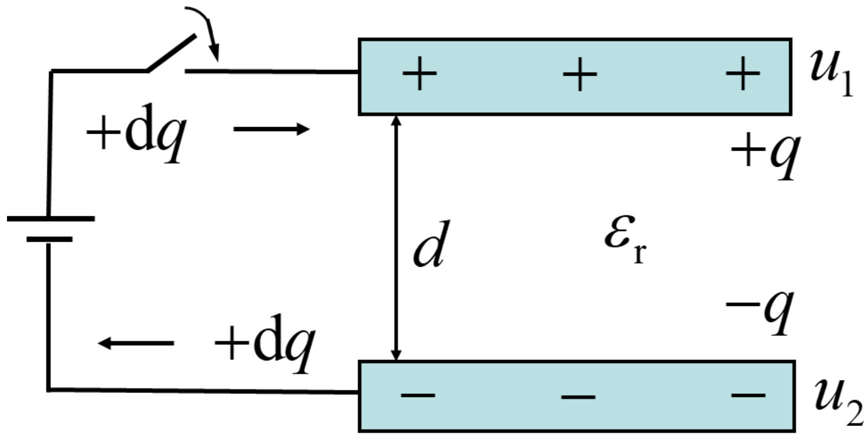
则板间的电压为

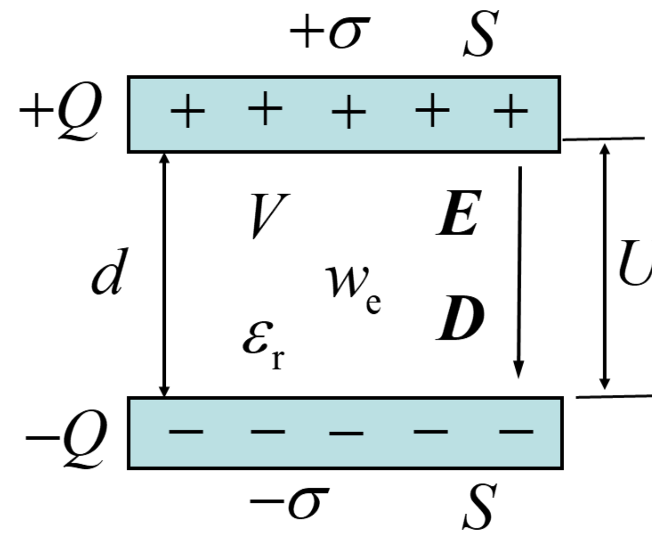
$$u = u_1 - u_2 = \frac{q}{C}$$

$$\mathrm{d}A = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

在迁移 $+\mathrm{d}q$ 的过程中，
电源电场做功

$$\mathrm{d}A = (u_1 - u_2)\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$





充电从 $q_1=0$ 开始到 $q_2=Q$ 结束，两个极板之间的电势差为 U

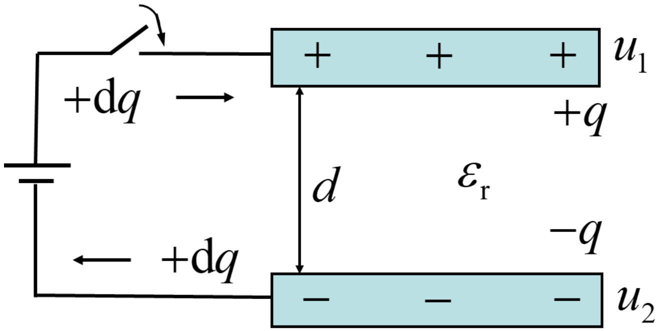
电源电场力所做的总功为

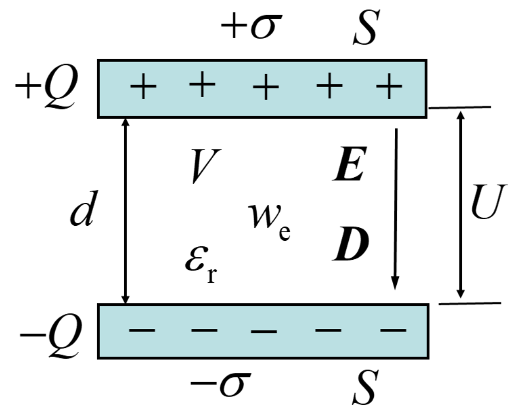
$$\mathrm{d}A=\frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{2C}$$

根据能量守恒定律，功即为贮存在电容器内的能量

$$W_e=A=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$





电容器充电过程中，电源电场力对电荷做功，
这个功以能量的形式贮存在电容器内。

电容器充电的过程，也就是电源电场力做功的过程，做功的结果是在电容器的两个极板上充上了等量的正负电荷$\pm Q$。

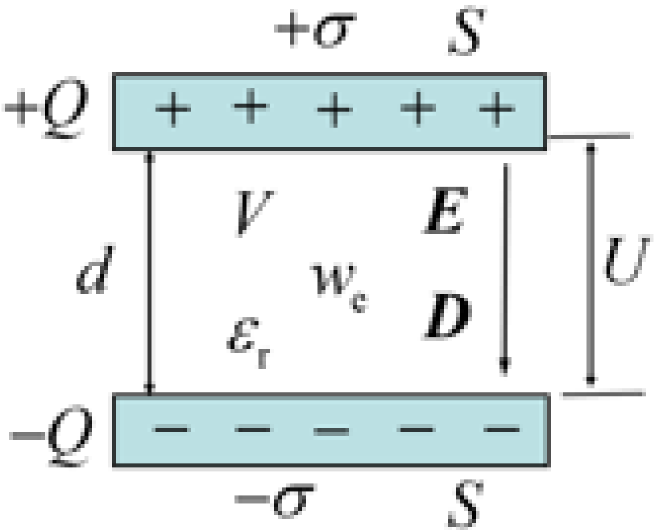
电容器两个极板上电荷在电容器内建立起电场，
充电结束撤去电源，电容器内存在静电场。

我们有理由相信，电容器内的静电场携带了由电源电场力做功而转化的能量。

静电场具有能量，静电能是储存于电场中。

对平板电容器， ☆

如果忽略边缘效应，电容器内部电场强度均匀



$$U = Ed \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

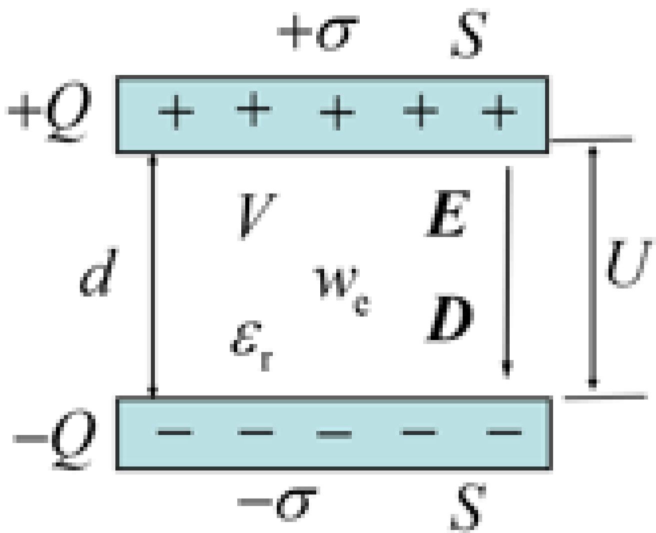
$$Q = \sigma S \qquad Sd = V$$

带电量为 $\pm Q$ 的平板电容器所储存的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}E\sigma Sd = \frac{1}{2}E^2\varepsilon Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V = \frac{1}{2}DEV$$

V 为两极板间电场所占空间的体积，

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ 为电容器内所填充的各向同性线性电介质的介电常数



平板电容器 ☆

在电容器内部，
电场是充满整个空间的，
静电场的能量是均匀分布于电容器内的整个空间的

$$W_e = \frac{1}{2}E^2\varepsilon Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V = \frac{1}{2}DEV$$

静电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}DE$$

可以证明，
对于各向同性线性电介质中的任意静电场都是适用。

三 电场的能量 ☆

电场中贮有能量的观念，
是关于电场概念的一个重要结论。

在各向同性线性电介质中，静电场的能量密度

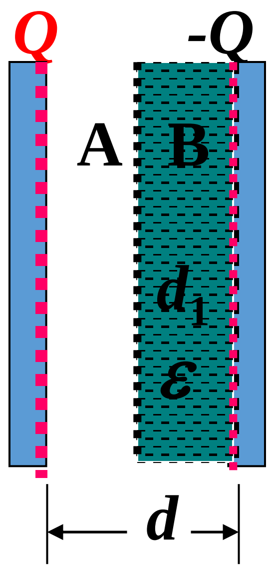
$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$$

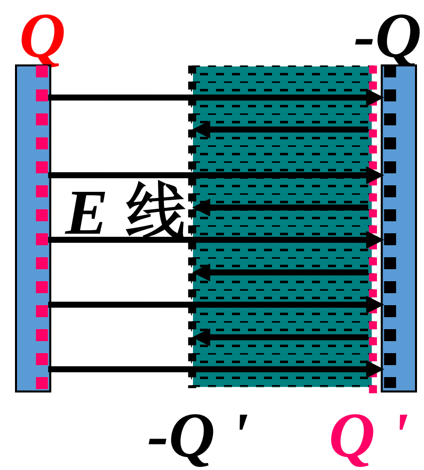
真空中的静电场 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

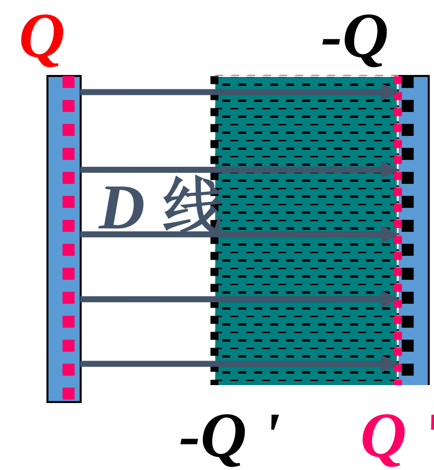
静电场中任一区域的电场能量

$$W_e = \oiiint_V w_e \mathrm{d}V = \oiiint_V \frac{1}{2}DE\mathrm{d}V = \oiiint_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$$

例1 平板电容器，两极板间距d、带电量$\pm Q$，中间充一层厚度为d_1、介电常数为ε的均匀介质， 求：电场分布、极间电势差和电容；画出E 线与D 线。







解

$$D=\sigma=\frac{Q}{S}$$

高斯定理

$$\boxed{E_A=\frac{D}{\varepsilon_o}=\frac{Q}{\varepsilon_o S} \qquad E_B=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}}$$

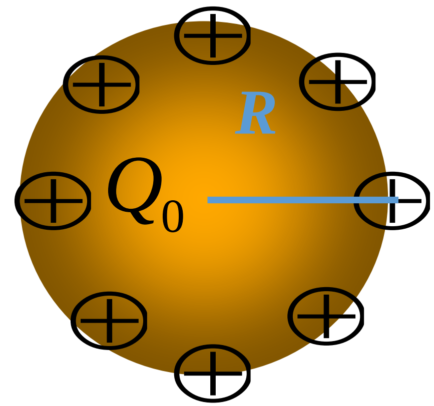
$$\Delta U=E_A\left(d-d_1\right)+E_B d_1$$

$$C\equiv\frac{Q}{\Delta U}=\frac{\sigma S}{\Delta U}$$

定义

$$\boxed{C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r\left(d-d_1\right)+d_1}}$$

例2　求电量为Q_{o}、半径为R的均匀带电球面的静电能。☆



解：设 $U_{\infty}=0$

高斯定理
电场强度

$$E=0 \quad r<R$$

$$\vec{E}=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad r>R$$

球面处的电势（场强线积分）　$U=\dfrac{Q_o}{4\pi\varepsilon_o R}$

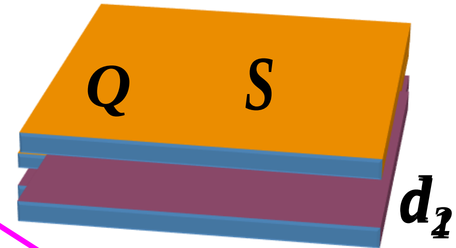
每一个dQ 所在处的电势

电荷元dQ 电场能量　$dW_e=\dfrac{UdQ}{2}=\dfrac{Q_o dQ}{8\pi\varepsilon_o R}$

静电场的能量

$$W_e=\int dW_e=\frac{1}{2}\int U\mathrm{d}Q=\frac{1}{2}\int_{Q_o}\frac{Q_o\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_o R}=\frac{Q_o^2}{8\pi\varepsilon_o R}$$

例3 面积为S，带电量为$\pm Q$ 的平行平板。忽略边缘效应，问：将两板从相距d_1 拉到 d_2 外力需要作多少功?



无限大带电板

解：d_1 和 d_2 电场强度相等 $E_1 = E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}$

面电荷密度不变

☆

电势差

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} d_1$$

$$U_2 = E_2 d_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} d_2$$

电场能量

$$W_{e1} = \frac{1}{2} U_1 Q = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} d_1$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2} U_2 Q = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} d_2$$

外力作功=电场能量增量 $A = \Delta W = W_{e2} - W_{e1} = \dfrac{Q^2 (d_2 - d_1)}{2\varepsilon_0 S}$