**一元微积分概述**

关于一元微积分主要是一元微分学和一元积分学，其中极限非常基础的概念。微积分主要研究函数或者说映射。而一元微分学主要涉及定义域在上的子集。

**一、一元微分学**

导数是差商的极限，在描述微分之前我们先引入导数的概念。

导数的定义：

**定义1.1.1**：设是在闭区间上的函数，. 若极限

存在，我们称函数在点处**可微**（或**可导**），并把极限称为函数在点处的**导数**，记作

**定理1.1.2**：设和在上有定义，. 若和在点处可微，则

1. 在点处可微，且
2. 在点处可微，且
3. 又若，则在点附近有定义，在点处可微，且

下面我们来介绍一些微分中值定理和Taylor级数。我们可以利用微分中值定理研究函数的单调性，极值，研究函数导函数的连续性，求函数极限的工具，比如洛必达法则。

首先我们定义什么是极值和极值点：

**定义1.2.1**：，有为的极限点，

1. 若有，则称为的**极大值点**(**极小值点**)，并称为**极大值**（**极小值**）；
2. 若有，则称为的**严格极大值点**（**严格极小值点**），并称为**严格极大值**（**严格极小值**）；
3. 若在处可导，且，则成为的一个**临界点**

那么，临界点与极值点是否存在相关性呢？下面我们给出Fermat引理

**定理1.2.2**：（**Fermat引理**）设函数在区间上**可微**， 若在点处达到在上的**最大值**（**最小值**），则点是函数的**临界点**

由Fermat引理：我们可以推出Rolle定理

**定理1.2.3**：**Rolle定理**：设是闭区间上的连续函数，又设在开区间上可微，若，则在开始区间内至少有一个临界点，即，.

又由Rolle定理我们可以推出Lagrange中值定理

**定理1.2.4**：**Lagrange中值定理**：设是闭区间上的连续函数，又设在开区间上可微，则，.

分析Lagrange中值定理我们可以发现其结论等式的左边（函数的变化）是一个整体量等于其等于右边是一个局部量。因此Lagrange中值定理证明**存在**一点，可以用点的导数去刻画函数整体在区间上的变化。

**定理1.2.5**：**Cauchy中值定理**：设和是闭区间上的两个连续函数，又设和在开区间上可微，且, 则,

微分中值定理主要是涉及一阶导数，下面我们介绍更本质的结果——Taylor公式以及与之相关的Taylor级数，其一般涉及的主要是高阶导数的问题。

**定理1.2.6：Taylor多项式**：设在附近有定义，若在附近可导，则定义在处的阶Taylor多项式为

利用Taylor多项式我们可以找到一个n次多项式在处逼近一个函数，也就是相差一个高阶无穷小。

**定理1.2.7**：**局部Taylor公式，带有Peano余项**：设在附近有定义，若在附近可导，则有.

其中称为在处的阶Taylor展开式；称为Peano余项

**二、一元积分学**

介绍完微分相关的重要概念及定理后，我们接下来介绍积分。积分是基于一个非常古老的问题：我们如何找到一个函数下包围的面积。首先，我们让问题更加具体一些：如果在闭区间上是正的连续的函数，如何计算其包围的面积。

设是在上的取正值得函数，下方图形面积的计算方案是这样的：

在闭区间上取个点使得闭区间分划成个小区间。这样，在上的下方图形的面积等于在这个小区间上的下方图形的面积之和。在小区间上任选一点，直观的看，在小区间上的下方图形的面积应该近似的等于后者表示以小区间为底，高为的长方形的面积。因此在上的下方的图形的面积应该近似地等于

我们称其为函数对应于分划和选点组的**Riemann和**，其中.一个很自然的想法是：假若属于某一类较好的函数，当分划中的小区间的长度的最大者趋于0时，Riemann和的极限似应存在，且这个极限

应可以看做在上的下方图形的面积的定义。

**定义3.1.1** 设是有界闭区间上的实值函数。闭区间上的个点

称为闭区间的一个分划。闭区间因此被分划成个小区间：

其中两个不同的小区间之交或为空集,或为单点集.在每个小区间上任选一点,并构造**函数相对于分划和选点组的Riemann和(3.1.2)**:

假若当小区间的长度的最大者趋于零时，不论满足条件 的选点组如何选取，**Riemann和(3.1.2)** 收敛于某个实数,则称在上

**(Riemann)可积**，称为**在区间上的(Riemann)积分**(有时也简称为在区间上的定积分),记做

称为上述积分的**被积函数**，称为**积分区间**, 称为**积分下限**，称为**积分上限**.

在了解了积分后，我们来研究积分和微分之间的联系。主要是微积分基本定理。

**定理4.1.1** 设是闭区间上的Riemann可积函数，令

则在上可导，且

由定理4.1.1给出以下定理

**定理4.1.2**令在上连续，若

1. 在上连续，且

则称函数为在上的一个原函数

事实上，原函数并不是唯一的。因为当两个函数拥有相同的导数时，意味着他们相差一个常数。对于任何可积的函数都有下面的定理

**定理4.1.3(Newton-Leibniz公式)**设是闭区间上的Riemann可积函数，是任意一个在上的原函数，有