**8.5 \*选读内容**

本节选讲内容讨论了曲线、曲面积分的物理意义以及对场论的进一步探讨。 请注意本节所提到的闭合曲线如无特别说明，均为简单闭合曲线（不自相交）。

**8.5.1 曲线曲面积分的进一步讨论**

**第一型曲线积分的物理解释：**

对于第一型曲线积分

如果将被积函数看作曲线的密度函数，则其物理意义表示该曲线的质量。

**向量场**. 一般的，数学上描述向量场，可以将其看成一个函数，其定义域上的每个点对应一个向量（既有方向又有数量）。在三维空间中可以用如下方式定义：

如果分支函数都是连续的，则是连续的。如果分支函数都是可微的，则是可微的

同理在二维空间中可以用如下方式定义：

**为后面书写方便，函数等都简写为**。

**梯度场**. 对于一个可微的数量函数，其梯度写成分解式为

称其为函数的梯度场。

**第二型曲线积分的物理解释**. 对于三维空间中的一条光滑的有向路径（曲线）**C**，作用其上的向量场，如看作引力场，路径**C**任意一点的单位切向量，则积分

表示**沿着C所做的总功。**这里表示引力在切向方向上的投影。

【**例8-5-1**】如果光滑曲线可以由如下参数方程表示

则

我们有

如果将向量场**,** 看作流体中的速度场，则第二型曲线积分

表示流动量（flow），如果曲线是一个闭合曲线，流动量称为环量（circulation）。为强调是一个闭合曲线，通常记为

显然环量可以用来度量单位时间内密度为1，速度为的流体沿着闭合曲线流动量的大小，请注意这里表示速度在曲线每点处切线方向上分量，本质上是，即密度1乘以几何度量就是质量。质量乘以速度就是动量。这就是为什么称其为流动量。当然也可以理解为速度场绕这个闭合曲线旋转趋势的大小。

**积分路径无关的讨论** 如果三维空间上向量场是一个梯度场，即存在某个函数的梯度，。假定光滑曲线起点为A，终点为B，由全微分公式、微积分学基本定理可得

如果光滑曲线起点A和终点B重合，即为一条光滑闭合曲线

这里称函数为的势函数。

**思考一：**如果三维空间上向量场有势函数，其中任意两条连接点A，B的曲线。取其中一段，例如**,** 反向（从B到A）记为**。**则两端曲线形成一条闭合曲线，记为

显然有

由曲线任意性可知，此时第二型曲线积分与路径无关。

**思考二：**已知向量场，如何判断积分与路径无关？显然直接求势函数，貌似可行。但是如果不存在，求解和证明过程繁琐且无用。换一种思路，假定是一阶连续可导的且有势函数，则以二维空间为例

积分路径无关可由此公式判断。

**第一型曲面积分的物理意义**：

对于第一型曲面积分

如果将被积函数看作曲面的密度函数，则其物理意义表示该曲面的质量。

**第一型曲面积分的另一种计算方式**：

学习第一型曲线积分时，可以利用参数化的办法求解。对于第一型曲面积分是否可以用参数化办法？答案是肯定的。

对于三维空间中的曲面，假定其方程可以参数化为：

曲面上的微元（可以理解为面积），可以用其对应切平面微元（一般为平行四边形）的面积代替，其微分形式为

这里，因此

【**例8-5-2**】如果三维空间中的曲面的方程为，其参数化方程为

因此有

我们可以得到如下计算公式

这正是教材上讲的将曲面投影到xy-平面上的计算公式。

【**例8-5-3**】如果空间中的曲面由隐函数方程确定。我们考虑曲面上的微元在xy-平面上的投影，其中为微元的法向量（）和z轴的夹角，所以

由此可得

假设曲面由隐函数方程确定

所以有

**第二型曲面积分**：

对于不可压缩的流体（假定密度是1）在空间中稳定流动，考虑其速度场，又或者对于电场、磁场等，还是记为，都会有通过有向曲面指定侧面的通量。考虑有向曲面上的微元，其单位法向量为

我们有，总通量为

可以理解为，向量场在垂直于曲面方向上的有效分量。显然平行于曲面的分量不通过该面，通量为0。很多时候利用这个物理解释，在计算中会更简便。

如果假定与三个坐标轴的夹角分别为, 则

分别是有向面积微元在三个坐标平面上的投影，即

因此，第二型曲面积分可以写成

从另一个角度，可以理解为向量场三个分量通过投影坐标平面的通量之和。特别需要注意的是三个函数仅仅代表数量，其方向分别为**.**

【**例8-5-4**】计算，其中为平面与三个坐标平面所围立体表面的外侧（见右图）

图7-11











分析：为一闭合曲面，则

从物理意义考虑，向量场

不妨考虑其流体的速度场，其物理意义为

只有沿Z坐标轴方向的速度. 显然其平行于

竖直曲面，通过其的通量为0。即

对于水平曲面也就是, 其流体的速度为0，因此

也就是说只需要计算

**8.5.2 场论的进一步讨论**

**有势场(保守场).** 对于一个向量场，如果存在一个函数，使得

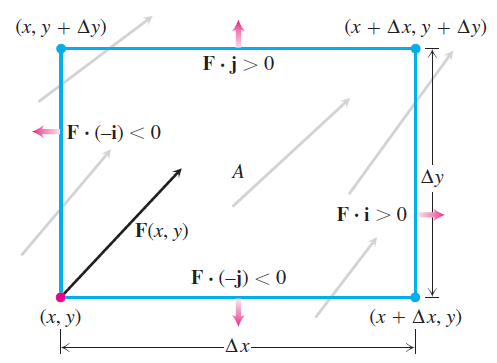
则称其为保守场，为势函数，因此又称为有势场。

8.5.1中积分路径无关的讨论中，对于二维空间中某个单连通开区域的向量场

如果是一阶连续可导的, 可利用

对于三维空间中某个单连通开区域的向量场

如果是一阶连续可导的, 可利用

**二维空间的散度：**

二维空间的向量场

假定其表示流体的速度。如右图

所示，该流体通过矩形微元边界

的流量可以通过如下方式计算：

上边：;

下边：;

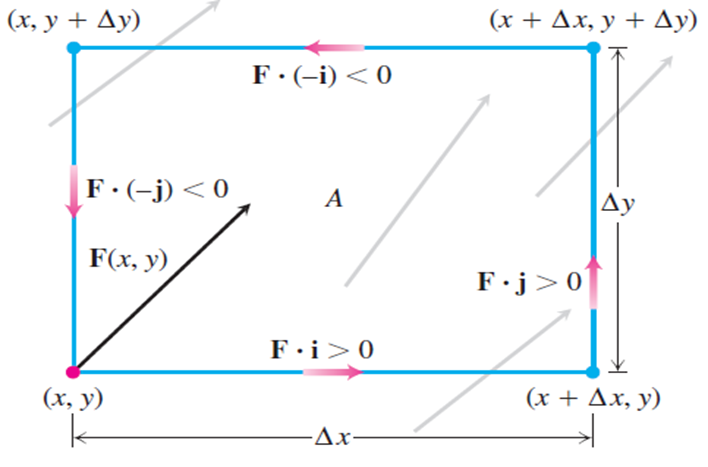
左边：;

右边：;

总通量可以为：

该微元上的平均通量，即总通量除以微元面积为

我们称其为向量场在点上的**散度**，记为

**二维空间的环量密度：**

二维空间的向量场

假定其表示流体的速度。如右图

所示，该流体沿矩形边界的环

量可以通过如下方式计算：

上边：;

下边：;

左边：;

右边：;

绕矩形边的环量为：

该微元上的平均环量，即环量除以微元面积为

我们称其为向量场在点上的**环量密度**，记为

**Green公式的解读：**

二维平面上，某单连通的开区域内的闭合曲线封闭一个闭区域, 方向为逆时针方向。假定存在一个向量场**,** 其上的环量为

结合环量密度的讨论，环量还等于**环量密度**在封闭一个闭区域的二重积分，即环量密度的二重积分

从而有格林公式

对于三维空间的散度和环量讨论，教材有详细论述。其对应的有高斯公式和斯托克斯公式。为公式的简便记，物理上通常给出一个算子符号：

对于三维的向量场

这样高斯公式可以简单记为:

斯托克斯公式可以简单记为:

**8.6 综合题选讲**

【**例8-6-1**】保守力场中，一个质点从A点移动到B点，求其做功最少的路径。

解：由题意可知，从A到B的任意一条路径，其上做功为：

因其为保守场，积分与路径无关，所以任意一条路径做功都相同。

【**例8-6-2**】xy-平面中，已知力场

试求一条光滑闭合路径，某质点沿其逆时针方向运动，做功最大？

解：令, 任给一条光滑闭合路径C，质点沿其逆时针方向运动，力场做功为

假定C封闭得区域为D，由格林公式可得

由二重积分的定义可知，当D取时，

被积函数，此时取得最大值。

因此光滑路径C取椭圆。

【**例8-6-3**】三维空间中，函数有任意阶连续的偏导数，且

试证明以下场中，沿空间任何一条光滑闭合曲线的环量都为0.

**证明：**只需证明其为无旋场，也就是

对于，

对于，

对于，

对于，

【**例8-6-4**】三维空间中的场

闭合曲面S为一长方体的六个面组成，方向向外。试求的值，使其单位时间内通量最大。

解：通量计算公式为

由高斯公式可得

令，则有

显然或不符合题意，故唯一合理解为

又因为在点上，

所以, 取得极大值。

因此，当时，通量最大。

**补充练习题：**

1. 证明二维平面上任意一条光滑闭合曲线C所围成的单连通区域D的面积
2. 第二型曲线积分

其中C为一正方形边界，证明只与C所围成的正方形面积有关。

1. 二维平面上任意一条光滑闭合曲线C，取正向，所围成区域的面积为A，形心的坐标为，证明：
2. 已知三维空间的场

空间中曲面S由及平面、和围成，求其方向向外的通量。

1. 假设曲面S：，为其单位外法向量，空间中的场

计算

1. 请利用高斯公式给出光滑闭合曲面所围区域体积公式。