### 实变函数期末复习指导

**第1章主要内容**

本章所讨论的**集合的基本知识**是集合论的基础，包括集合的运算和集合的基数；本章讨论的**点集理论**，不仅是以后学习测度理论和新积分理论的基础，也为一般的抽象空间的研究提供了具体的模型.

主要内容有：

一、集合的包含关系和并、交、差、补等概念，以及集合的运算律．

关于概念的学习，应该注意概念中的条件是充分必要的，比如，当且仅当时必有．有时也利用它的等价形式：当且仅当时必有．在证明两个集合包含关系时，这两种证明方式可视具体问题而选择其一．

还要注意对一列集合并与交的概念的理解和掌握．当且仅当*x*属于这一列集合中的“某一个”（即存在某个，使），而当且仅当*x*属于这一列集合中的“每一个”（即对每个，都有）．要熟练地进行集合间的各种运算，这是学习本章必备的基本技能.

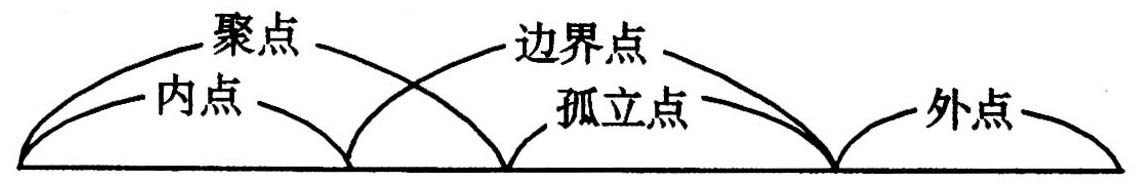
二、映射是数学中一个基本概念，要弄清单射、满射和双射之间的区别与联系．

对集合基数部分的学习，应注意论证两个集合对等技能的训练，其方法主要有下面三种：一是依对等的定义直接构造两集间的双射；二是利用对等的传递性，如欲证，已知，此时只须证；三是应用有关定理，特别是Bernstein定理，它是判断两个集合对等的常用的有效方法．

三、可列集是无限集中最重要的一类集合，它是无限集中基数最小者. 要掌握可列集的定义和运算性质，有理数集是可列的并且在直线上处处稠密，这是有理数集在应用中的两条重要性质.

四、连续集及其运算性质.要掌握长见的连续集的例子，知道基数无最大者.

五、从中的距离和邻域的概念出发，定义了相对于某个给定集的几种不同类型的点：内点、聚点、孤立点、边界点.它们彼此之间的关系可用图示如下：



其中内点和聚点更常用些.

关于聚点，还给出几个等价条件，要熟练的掌握和运用.

六、开集、闭集和完备集是本章的重要内容.在开集、闭集和完备集的性质和直线上开集构造的讨论中，开集是基础，因为闭集是开集的补集，完备集是一种特殊的闭集，所以弄清了开集的性质，闭集和完备集的性质和构造也就自然得到了.

七、Cantor集是本章给出的一个重要例子.对它的一些特殊性质，在直观上是难以想象的，比如它既是不包含任何区间的完备集，同时它还具有连续基数，第2章中我们还证明了它的测度为零.正是因为它的巧妙构思和奇特性质常常为构造一些重要的反例提供启示.

四、本章中介绍的聚点存在定理，即Bolzano-Weierstrass定理，有限覆盖定理和距离可达定理，要弄清定理条件并会灵活运用.

**第2章主要内容**

本章主要讨论中点集的**测度**，它是建立Lebesgue积分的基础.

一、外测度和可测集是本章的两个主要概念，关于可测集的定义，主要使用的是定义 (即Caratheodory条件)．因为可测集的测度等于其外测度，所以外测度性质对可测集都适用．因此对外测的性质要熟练掌握．

二、可测集的运算性质是本章的重要内容．可测集类在有限次或可列次并、交、补运算之下是封闭的．可测集的可列可加性和单调可测集列极限的测度．

三、关于可测集的构造是本章的又一重要内容. Lebesgue可测集是由Borel集和测度为零的集的全体所构成的可加集族. 我们还讨论了Lebesgue可测集同开集、闭集、型集和型集之间的关系. 这些关系一方面从不同的角度刻画了Lebesgue可测集，另一方面也提供了用较简单的集合近似取代Lebesgue可测集的途径.

本章中，介绍Lebesgue不可测集的例子.

**第3章主要内容**

为了建立Lebesgue积分理论的需要，本章讨论一类重要的函数——**可测函数**.它一方面和我们熟悉的连续函数有密切的联系，同时又在理论上和应用上成为足够广泛的一类函数.

一、可测函数的概念及其运算性质是本章的重要内容. 可测函数的定义及给出的一些充要条件是判断函数可测的有力工具，应该熟练地掌握和应用它们.

可测函数关于加、减、乘、除四则运算和极限运算都是封闭的.可测函数上、下确界函数和上、下极限函数还是可测的，所有这些性质反映了可测函数的优越性和应用中的方便.

二、可测函数列的收敛性也是本章的重要内容之一. 几乎处处收敛和依测度收敛是Lebesgue积分理论中经常使用的两种收敛形式.

Egoroff定理揭示了可测函数列几乎处处收敛与一致收敛之间接关系. 通过这个定理，可以把几乎处处收敛的函数列部分地“恢复”一致收敛，而一致收敛在许多问题的研究中都起着重要作用.

Lebesgue定理告诉我们：在测度有限的集合上，几乎处处收敛的可测函数列必是依测度收敛的，反之并不成立.然而，Riesz定理指出：依测度收敛的可测函数列必有几乎处处收敛的子序列.

三、可测函数的构造是本章的又一重要内容. 一般常见的函数，如连续函数，单调函数等都是可测函数. 然而，可测函数却未必是连续的，甚至可以是处处不连续的(如Dirichlet函数). 所以，可测函数类比连续函数类要广泛得多.

而Lusin定理指出了可测函数与连续函数之间的关系，通过这个定理，常常能把可测函数的问题转化为关于连续函数的问题来讨论，从而带来很大的方便.

四、关于论证方法和技巧方面也有不少值得注意的. 如Egoroff定理证明中的思想和分析的方法以及Lusin定理证明中先考虑简单函数、然后再往一般的可测函数过渡，这种由特殊到一般的证明方法在许多场合都是行之有效的.

**第4章主要内容**

本章的中心内容是建立一种新的积分⎯⎯ **Lebesgue积分**理论．它也是实变函数数论研究的中心内容．

一、关于Lebesgue积分的建立．

首先引入测度有限点集上有界函数的积分，建立有界函数的积分时应注意两点：一是Riemann积分意义下的积分区间，现已被一般点集所代替；二是分划的小区间长度，现已被点集的测度所代替．

一般集合上一般函数的积分是通过两步完成的．第一步是建立非负函数的积分．它是通过非负函数表示为有界函数列的极限、把无穷测度集合表示为测度有限集列的极限来完成的．第二步是建立一般函数的积分，它是将其分解两个非负函数(正部与负部)的差的办法来完成的．

二、Lebesgue积分的性质．Lebesgue积分的性质主要反映在以下几个方面：

(1)Lebesgue积分是一种绝对收敛积分，即在上可积当且仅当在上可积．这是它与Riemann积分重要区别之一．

(2)Lebesgue积分的绝对连续性．设在上可积，则对任意，存在，使当且 时，恒有



(3)Lebesgue积分的唯一性．即的充要条件是于．由此可知，若与几乎相等，则它们的可积性与积分值均相同．

(4)可积函数可用连续函数积分逼近．设是可积函数，对任意，存在上的连续函数，使



此外尚有许多与Riemann积分类似的性质，如线性性、单调性、介值性等．

三、关于积分极限定理．积分极限定理是本章的重要内容，这是由于积分号下取极限和逐项积分，无论在理论上还是应用上都有着十分重要的意义．其中Lebesgue控制收敛定理，Levi渐升函数列积分定理和Fatou引理．

不难发现，与Riemann积分相比较，Lebesgue积分与极限换序的条件大大减弱，这也是Lebesgue积分优越于Riemann积分的重要之处．

四、关于Lebesgue积分同Riemann积分之间的关系．若上的有界函数Riemann可积，则必Lebesgue可积，且二者积分值相等．

值得注意的是，上述结论对于广义Riemann积分并不成立．实际上，广义Riemann可积函数成为Lebesgue可积的充要条件是该函数广义Riemann绝对可积．

关于Lebesgue积分的计算，一般是应用积分的定义借助于积分的性质将其转化为Riemann积分．

**实变函数题型比例**

一 单选题：6题，每题5分， 共30分；

二 判断题：5题，每题4分， 共20分；

三 填空题：4题，每题5分， 共20分；

四 大 题：3题，每题10分，共30分。