isec Engenharia

Análise Matemática 2

RELATÓRIO DA ATIVIDADE 01

Métodos numéricos para EDO/PVI

GUILHERME CAMACHO
HENRIQUE MARQUES
JOÃO SALGADO

2021-2022

Índice

O que é uma Equação Diferencial?

Equação diferencial é uma equação envolvendo derivadas de uma ou mais funções com respeito a uma ou mais variáveis independentes. As equações diferenciais têm duas propriedades: a solução pode existir ou não; e caso exista solução, ela é única ou não. É representado nesta forma:

$$y = f(t, y)$$

O que é uma PVI?

PVI, sigla de Problema de Valor Inicial, é uma equação diferencial com um valor $y(t)$ num ponto $t_0 \in [a.b]$, normal mente $t_0 = a$, especificado. É representado em este aspeto:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Métodos numéricos

Para resolver os PVI's, existe os métodos numéricos. Entre muitos, os mais relevantes para a cadeira são Método de Euler, Método de Euler Melhorado/Modificado (Método de Heun), Método de RK2 (Método de Runge Kutta de ordem 2), Método de RK4 (Método de Runge Kutta de ordem 4) e a Função ODE45 do Matlab

Tendo a expressão do género $y'(t) = f(t, y(t))$, um intervalo $[a, b]$, n números de divisões do intervalo $[a, b]$ e $y(t_0) = y_0$ é possível representar graficamente a EDO/PVI sem sem recurso a um software ou uma máquina para calcular.

Para transformarmos os métodos para o matlab usaremos uma função com 5 valores de entrada: a expressão PVI (`f`), o mínimo do intervalo (`a`), o máximo do intervalo (`b`), o numero de passo que quer dar no intervalo [`a,b`] (`n`) e o valor inicial (`y0`). O valor de entrada `f` é convertido em uma equação diferencial utilizando as ferramentas do matlab, `f = @(t,y)`.

Depois usaremos um loop do tipo for entre 1 e n, ou seja, o primeiro elemento do intervalo até o último elemento do intervalo.

Método de Euler

h é igual a divisão da subtração de b com a com n ($h = \frac{b-a}{n}$) e h representa o tamanho dos passos entres os pontos. Depois, $t_i = t_0 + nh$ para o passo seguinte do primeiro, no modo geral é $t_{i+1} = t_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Fórmula do Método de Euler

```
function y = Neuler(f,a,b,n,y0)
      h = (b-a)/n;
      t = a:h:b;
      y = zeros(1,n+1);
      y(1) = y0;
      for i =1:n
            y(i+1) = y(i)+h*f(t(i),y(i));
      end
end
```

Código do Método de Euler no Matlab

Método de Euler Melhorado/Modificado (Método de Heun)

A diferença entre o Método de Heun e o Método de Euler é a sua precisão dos pontos. Isso é graças à média entre a inclinação de i com $i + 1$ e com a inclinação de $i + 1$ com $i + 2$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\big), \qquad i = 0,1, \dots, n-1$$

Fórmula do Método de Euler Melhorado/Modificado

```
function y = MEuler(f,a,b,n,y0)
     h = (b-a)/n;
     t = a:h:b;
     y(1) = y0;
```

```
    for i =1:n
        k1 = h*f(t(i),y(i));
        k2 = h*f(t(i),y(i)+k1);
        y(i+1) = y(i)+(k1+k2)/2;
    end
end
```

Código do Método de Euler Melhorado/Modificado no Matlab

Método de RK2 (Método de Runge Kutta de ordem 2)

O Método de RK2 é basicamente a continuação do método de Euler Melhorado/Modificado.

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(t_{i+1}, y_i + k_1)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

Fórmula do Método de RK2

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    y = zeros(1,n+1);
    y(1) = y0;
    for i =1:n
        k1 = h*f(t(i),y(i));
        k2 = h*f(t(i+1),y(i)+k1);
        y(i+1) = y(i)+(k1+k2)/2;
    end
end
```

Código do Método de RK2 no Matlab

Método de RK4 (Método de Runge Kutta de ordem 4)

O Método de RK4 é o método mais preciso por causa do cálculo de 4 inclinações e fazendo a sua média (i com $i+1$, $i\ +\ 1$ com $i\ +\ 2$, $i+2$ com $i+3$ e $i+3$ com $i+4$).

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf(t_{i+1}, y_{i+1} + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad i = 0,1, \dots, n-1$$

Fórmula do Método de RK4

```
function y = NRK4(f,a,b,n,y0)
    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    y = zeros(1,length(t));
    y(1)= y0;
    for i=1:(length(t)-1)
        k1 = f(t(i),y(i));
        k2 = f(t(i)+0.5*h,y(i)+0.5*h*k1);
        k3 = 
f((t(i)+0.5*h),(y(i)+0.5*h*k2));
        k4 = f((t(i)+h),(y(i)+k3*h));
        y(i+1) = y(i) + 
(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
    end
end
```

Código do Método de RK4 no Matlab

Função ODE45 do Matlab

A sintaxe do ODE45 é `[t,y] = ode45(f,[a b],y0)` em que os valores de entradas são o EDO, o intervalor já definido por [] e o valor inicial e o valor de saída é uma matriz em que a primeira coluna corresponde aos t's dos pontos e a segunda coluna corresponde aos y's dos pontos calculados pela a função.

```
function y = MetodoODE45(f,a,b,y0)
    [t,y] = ode45(f,[a b],y0);
end
```

Código da função ODE45 Matlab

Exemplo de aplicações e testes dos métodos

Exercício 3 do Teste do Farol

PVI: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2ty \\ y(0) = 2 \end{cases}$

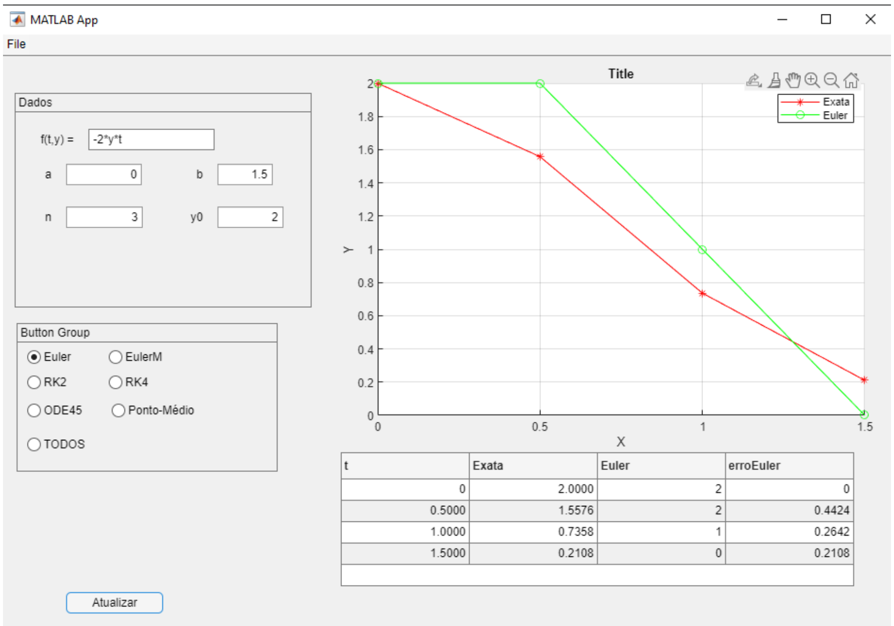


Figura 1- Output do PVI com o Método de Euler

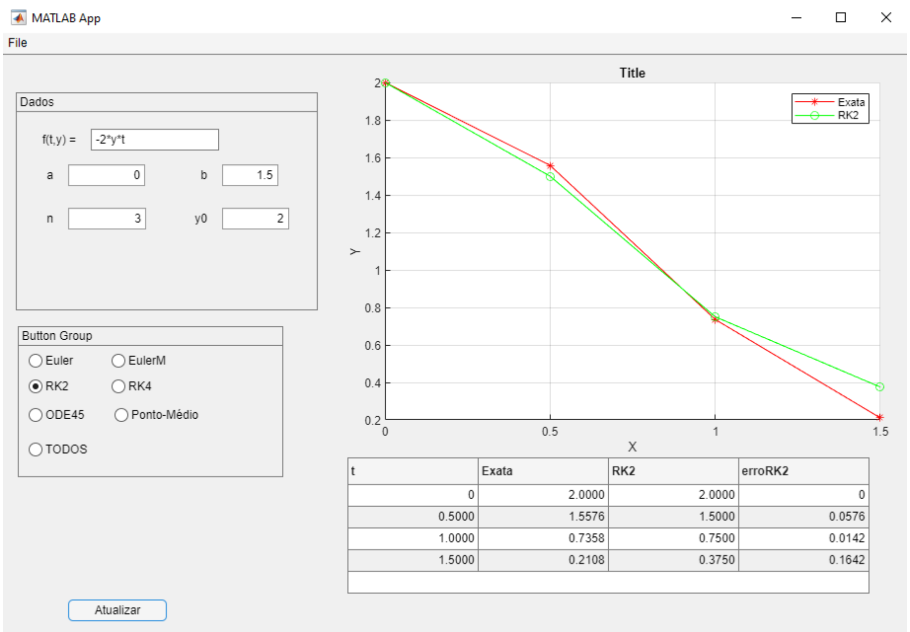
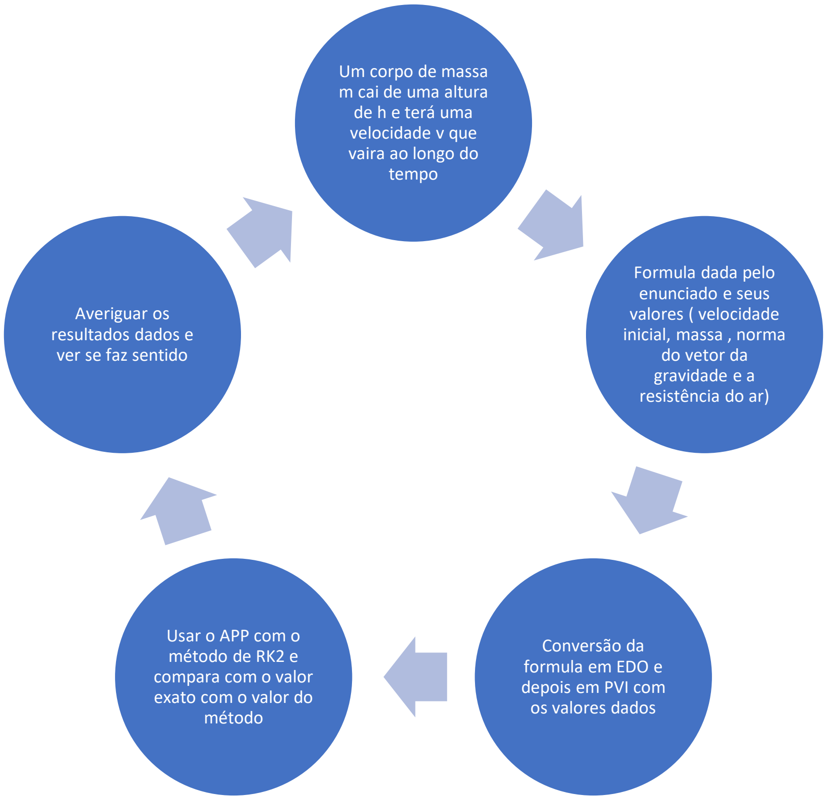


Figura 2 - Output do PVI com o Método de RK2

Problemas de aplicação do livro

1º problema:



$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2\,, k > 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{kv^2}{m},$$
$$v(0) = 0, k = 0.125, m = 5,$$
$$g = 32, h = 1$$

Equação do enunciado e sua transformação em EDO e valores fornecidos para transformar em PVI

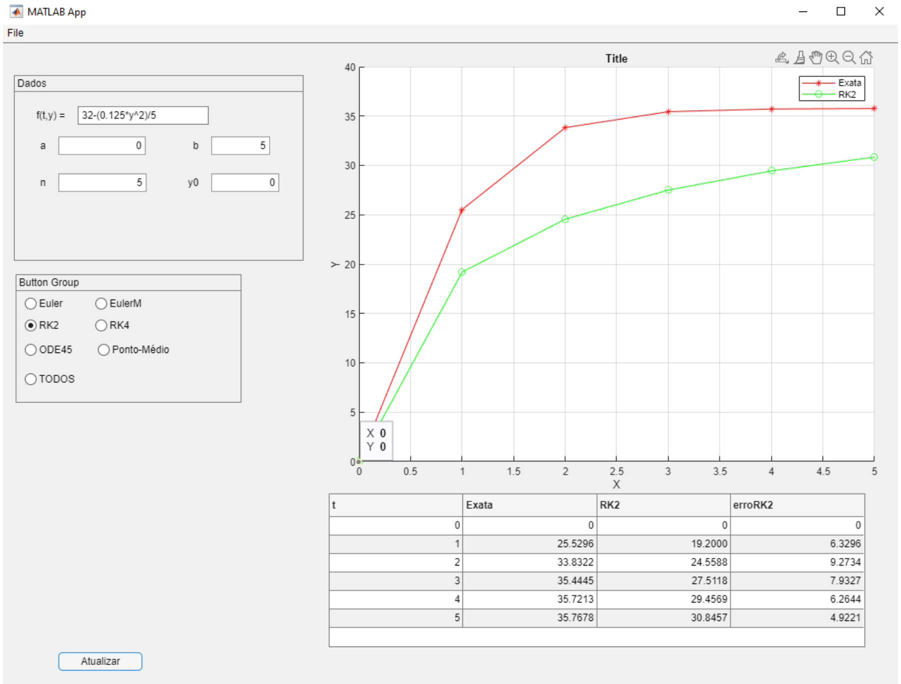
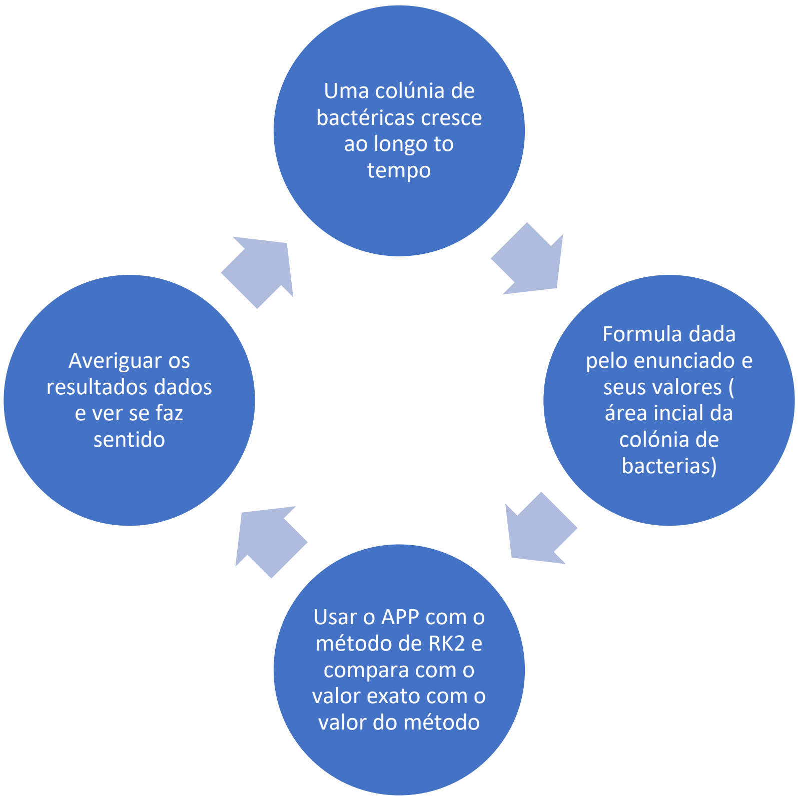


Figura 3 - Output do EDO calculado com o Método RK2

2º problema:



$$\frac{dA}{dx} = A(2.128 - 0.0432A),$$
$$A(0) = 0.24 \quad h = 0.5$$

Equação do enunciado e sua transformação em EDO e valores fornecidos para transformar em PVI

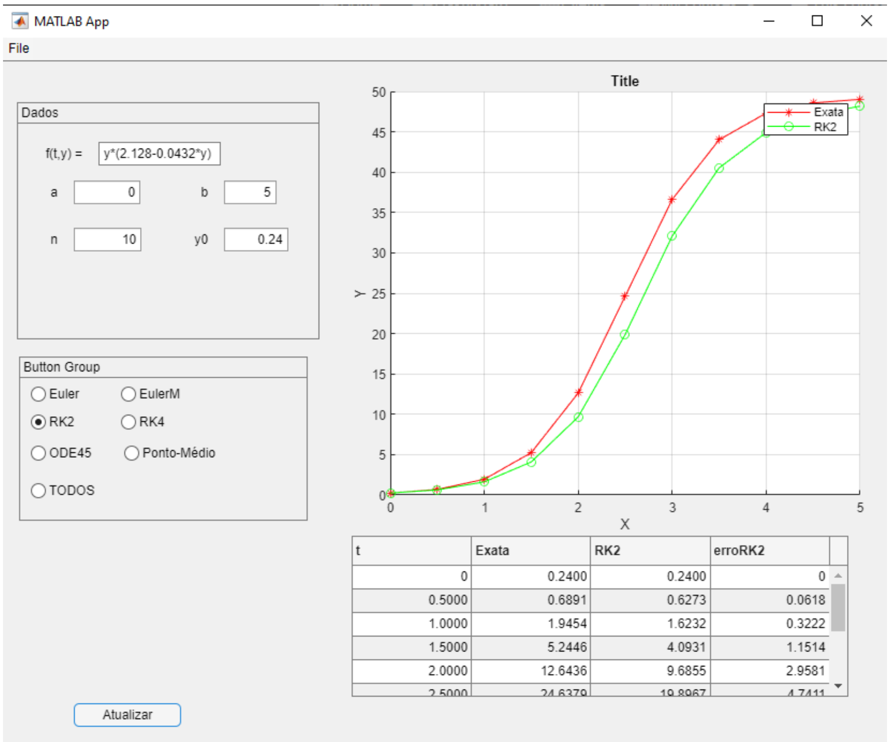
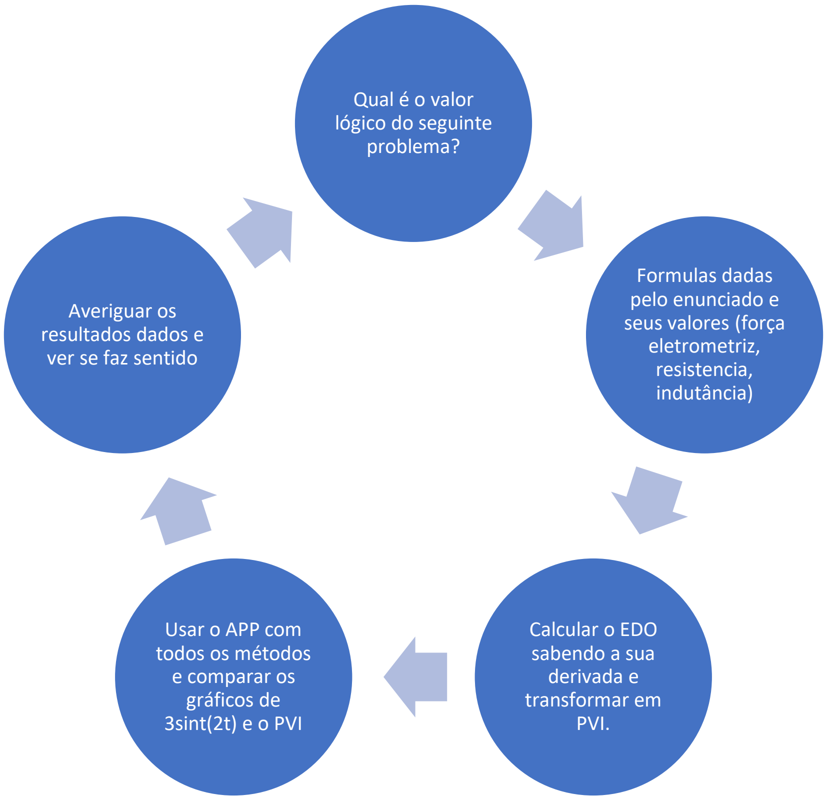


Figura 4 - Output do PVI calculado com o Método RK2

Problemas de aplicação da alínea 2.b do teste Farol



$$i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin(2t) + \frac{3}{101}\cos(2t)$$

$$R = 10, L = 0.5\ e = 3\sin(2t)\ i(0) = 6,$$

$$e = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Equação do enunciado e sua transformação em EDO e valores fornecidos para transformar em PVI

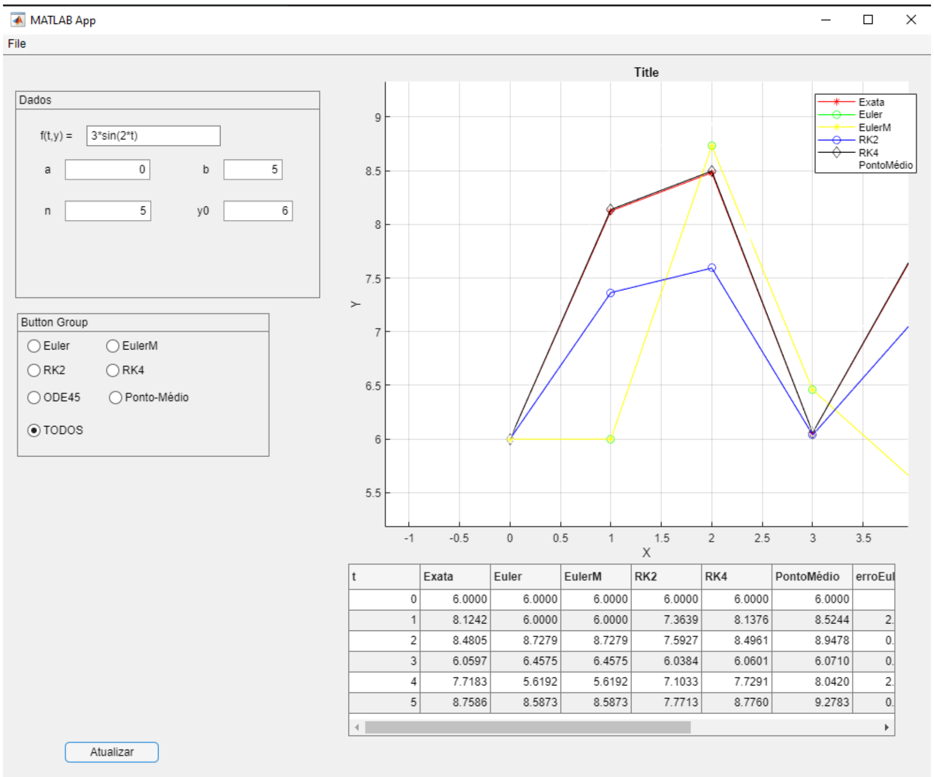


*Figura 5 – Output do **3sin(2t)** com todos os métodos*

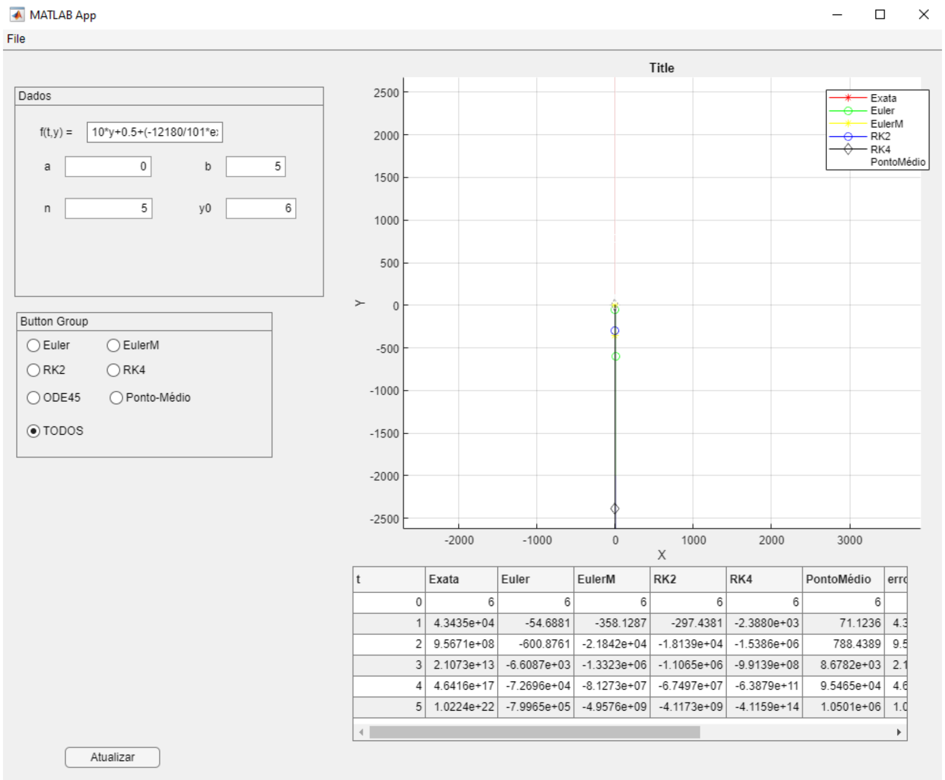


Figura 6 - Output do PVI calculado com todos os métodos

Como reparamos, os gráficos são totalmente diferentes, logo o seu valor lógico é falso

Nossas conclusões

Assim, nós concluímos que os diversos métodos, uns mais precisos que outros, facilitam na construção gráfica na falta de um programa ou uma máquina gráfica para usarmos e nas listagens de valores nos diversos pontos, assim uma fácil manipulação de recolha de dados com pouco erro.

Bibliografia

Definição de equação deferencial

Definição de PVI

Código do método de Euler

Teste do Farol

Problemas de aplicação do livro

Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho

A nossa autoavaliação e heteroavaliação no trabalho 5 em 5 em todos os elementos do grupo (mais detalhes no ficheiro Excel enviado).